

III Suomen Mekaniikkapäivien esitelmät

Proceedings of the 3rd Finnish

Mechanics Days

Helsinki University of Technology, Finland

2.-3.6.1988

Matti A. Ranta (ed.)



ISBN 951-754-498-7

ISSN 0784-4735

1988

TKK OFFSET

Teknillinen korkeakoulu
Tietotekniikan osasto
Mekaniikan laboratorio

Helsinki University of Technology
Faculty of Information Technology
Institute of Mechanics

Otaniemi 1988|26

and the first two are the most important. The last one is the least important. The first two are the most important because they are the ones that are most likely to be affected by changes in the environment. The last one is the least important because it is the one that is least likely to be affected by changes in the environment.

There are three main types of environmental change that can affect a species' ability to survive. These are: habitat loss, climate change, and pollution. Habitat loss is the most common type of environmental change that affects a species' ability to survive. This is because habitats are often destroyed or altered by humans, which can lead to a decrease in the availability of resources for the species. Climate change is another type of environmental change that can affect a species' ability to survive. This is because changes in temperature and precipitation can affect the availability of resources for the species. Pollution is the third type of environmental change that can affect a species' ability to survive. This is because pollutants can harm the species directly or indirectly by changing the availability of resources for the species.

The most common type of environmental change that affects a species' ability to survive is habitat loss. This is because habitats are often destroyed or altered by humans, which can lead to a decrease in the availability of resources for the species. Climate change is another type of environmental change that can affect a species' ability to survive. This is because changes in temperature and precipitation can affect the availability of resources for the species. Pollution is the third type of environmental change that can affect a species' ability to survive. This is because pollutants can harm the species directly or indirectly by changing the availability of resources for the species.

The most common type of environmental change that affects a species' ability to survive is habitat loss. This is because habitats are often destroyed or altered by humans, which can lead to a decrease in the availability of resources for the species. Climate change is another type of environmental change that can affect a species' ability to survive. This is because changes in temperature and precipitation can affect the availability of resources for the species. Pollution is the third type of environmental change that can affect a species' ability to survive. This is because pollutants can harm the species directly or indirectly by changing the availability of resources for the species.

It is important to understand the different types of environmental change that can affect a species' ability to survive so that we can take steps to protect them.

ESIPUHE

Tämä raportti sisältää III Suomen mekaniikkapäivillä Otaniemessä 2.-3. kesäkuuta 1988 pidetyt esitelmät. Ne on painettu offset-teknikalla esitelmän pitäjien lähettämistä painovalmiista arkeista. Jokainen kirjoittaja vastaa näin ollen mahdollisista virheistään.

Ensimmäisillä Suomen mekaniikkapäivillä Oulussa 1982 pidettiin 20 esitelmää. Toisilla päivillä Tampereella 1985 pidettiin 39 esitelmää. Tällä kertaa esitelmien lukumäärä on 38. Esitelmien lukumäärä kuvastaa sitä tieto-taitotarpeen kasvua, joka on yleismaailmallinen ilmiö. Erityisesti Suomen kaltaisen maan tulee panostaa tuotteidensa jalostusasteen nostamiseen. Siihen päästään hyvällä koulutuksella ja tutkimustulosten hyödyntämisellä sekä kaikkien yhteiskunnan jäsenten yhteistyöllä. Matemaattis-luonnontieteellinen peruskoulutus insinöörityieteissä luo sen pohjan, jolle tekniikan vaativien analyysien ja selvitysten menestyksellisyys ja korkeatasoinen soveltava tutkimus ja tuotekehitys pohjautuvat. Mekaniikkapäivien tarkoitus on osaltaan edistää pyrkimystä korkeampaan osaamisen tasoon.

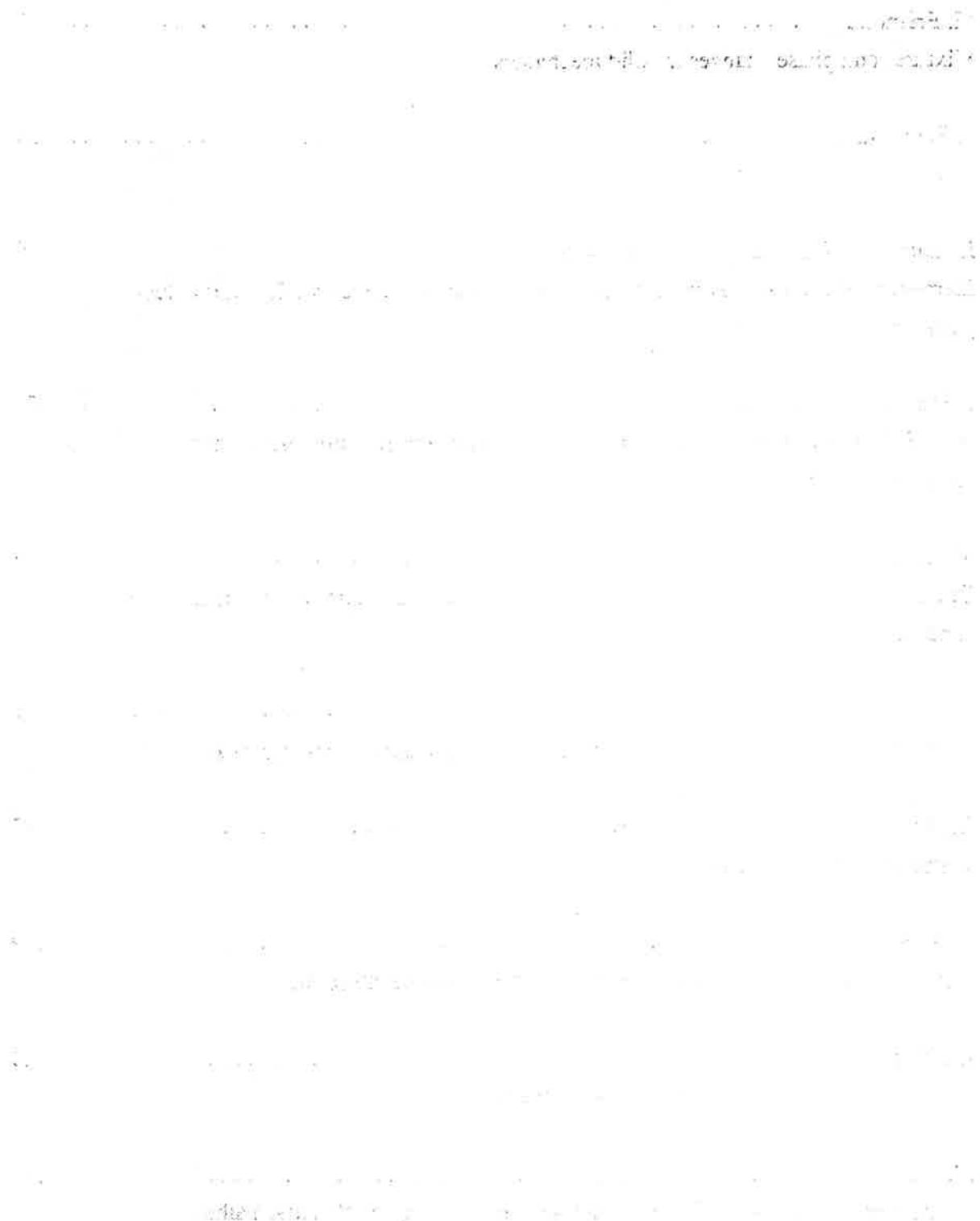
Tämänkertaisen Suomen mekaniikkapäivien organisoinnista on vastannut järjestelytoimikunta:
Professori Matti A Ranta (pj.)
Professori Martti J Mikkola
Assistentti Tapio Pohjalainen
Kanslisti Tuula Aalto

Mekaniikkapäivien pääesitelmän "Phase changes in solid mechanics" piti Dr. Michel Frémond Pariisista. Muina kutsuttuina esitelmän pitäjinä olivat prof. Stig Stenholm, HY ja prof. Seppo Laine, TKK.

Otaniemessä 4.5.1988

Matti A Ranta
Järjestelytoimikunnan puolesta

CHART 2. Δ_{obs} vs. Δ_{cal}



SISÄLLYSLUETTELO

M. Frémond	1
Mixtures and phase changes in solid mechanics	
S. Stenholm	35
Mechanics of swarms of particles	
J. Aalto ja D. Baroudi	49
Elementtimenetelmän kokoamisprosessista, kun vapausasteiden välillä on rajoitus-yhtälöitä	
J. Freund	59
A SUPG finite element method for convection-diffusion equation using transformation to local coordinates	
M.K. Hakala	69
Ohutseinäisten profiilien leikkaus- ja väentösuhureiden määrittäminen elementtimenetmällä	
M. Heinisuo, M. Lepistö	85
Ratkaisualgoritmien vertailuja lineaarisen komplementaarisen tehtävän ratkaisussa	
R. Huhtanen	97
Tulipalon numeerinen simulointi	
P. Iivonen, J. Puttonen ja P. Varpasuo	109
Harmonisesti herätettyjen kehämäisten koneperustusten analysointi	
J. Kaski	119
Epäkeskisen iskumaisen herätteen kuormittama palkki	
M. Kilpeläinen	127
Teräsbetonisen maanvaraislattialaan vaakasuorista siirtymistä laattaan aiheutuvat kitkavoimat ja rasituukset	

K.-H. Korhonen, R. Laaksonen	141
Hiekan mekaaninen malli	
K.-H. Korhonen, M. Lojander	151
Saven mekaaninen malli	
M. Kortesmaa	161
Kosteusmuodonmuutoksista aiheutuvat ortotrooppisen materiaalin muodonmuutokset ja jännitykset	
R. Kouhia, M. Mikkola, M. Tuomala	171
Nonlinear finite element analysis of space frames	
J. Köliö	181
Palkkiprofilien laskentaa paperikoneen suunnitteluympäristössä	
J. Laukkanen	191
Ominaisarvoalgoritmien vertailu käytettäessä elementtimenetelmää	
M. Leskelä	199
Betonin tartuntaliitoksen murtoehdo	
M. Lindroos	207
Moniverkko-ohjelmiston PLTMG esittely	
A. Miettinen	219
Ulokesauman kitka ja sen teoria	
M. Mikkola, R. Kouhia	231
On the mixed and stress formulations of the FEM	
P.K. Mäkeläinen	241
Semi-analytical models for the static behaviour of T and DT tubular joints	
R. Mäkinen, K. Salmenjoki	255
Variational inequalities: Applications and numerical solution techniques	

J. Niemi	265
Lisätyn massan kertoimien laskenta elementtimenetelmällä	
J. Niemi	275
Yksiaskelmenetelmät rakenteiden transienttianalyysissa	
S. Orivuori	285
IVOFEM-ohjelman ylläpidosta	
H. Outinen	295
Ohuen isotrooppisen pallokuoren tarkka ratkaisu	
J. Paavola, Rolf Stenberg	307
Heat transfer in fire-protected steel columns	
H. Parland	317
Friction law, stiffness and stability of non-monolithic structures	
A. Pramila, J.P. Michalski, S. Virtanen	329
Computer aided geometric design by FEM	
A. Pramila, J. Niemi, J. Laukkanen, S. Liukkonen	339
Aksiaalisesti liikkuvan materiaalin värähtely ja stabiliteetti	
J. Puttonen	349
Massiivinen maanvarainen koneperustus dynamiikan probleemana	
R. Räty	361
Orthogonality relation for continuous systems carrying dynamic elements with discrete degrees of freedom	
E-M. Salonen and J. Freund	371
Notes on the application of the least squares method to the pure convection equation	
S. Salonen	381
Ohutlevykasetin vedetyn laipan taipuman määrittäminen	

R. Stenberg and J. Videman	391
A quadrilateral mixed finite element method for the elasticity problem	
A. Westerlund	397
Analysering av sandwichbalk med viskoelastiskt kärnskikt	
S. Virtanen	405
Hierarchical elements in surface design	

MIXTURES AND PHASE CHANGES IN SOLID MECHANICS

Michel FREMOND

Service de Mathématiques
 LABORATOIRE CENTRAL des PONTS et CHAUSSEES
 Jeune Equipe du C.N.R.S.
 LABORATOIRE de MODELISATION des MATERIAUX
 et des STRUCTURES du GENIE CIVIL
 58 bld Lefebvre - 75732 PARIS Cedex 15 (France)

1. INTRODUCTION

At the microscopic level a mixture of materials is made by the juxtaposition of different components. Concrete for instance is made of cement paste, aggregates, liquid water, water vapor and air. Being considered at the macroscopic level by an engineer, concrete appears to be completely homogeneous. At this scale, chosen for this paper, it is wise to describe it within the porous media theory. Then the different components are present at any geometrical point with proportions β_i . We decide these quantities to be state variables. The free energy of the mixture can depend on the β 's. Focusing on this idea, we immediately encounter a difficulty : the proportion β 's are not independant quantities. They satisfy some constraints, for instance

$$0 \leq \beta_i \leq 1, \quad (1)$$

and

$$\sum_i \beta_i = 1. \quad (2)$$

The first one results from the definition of the β 's. The second one is a physical property : if the sum is lower than one, voids appear and if it is greater, interpenetration occur. So relation (2) means that no void and no interpenetration appear. Relation (2) being physical, it can be taken into account by the free energy. Thus the free energy depends on the β 's.

If we choose the more simple dependence to ensure relations (1) and (2), we describe the classical ice-water phase change (paragraphe 2) or the unusual mecha-

nical properties of shape memory alloys (paragraph 6).

With more sophisticated dependencies on the β 's, we describe the behaviour of soils submitted to frost action (paragraph 3 and 5) as well as the humidity evolution in porous media (paragraph 7). Pseudo-potentials of dissipation allow to take into account hysteresis phenomena.

Let us emphasize an other advantage of this theory : the resulting partial differential equations are coherent and existence and uniqueness of solutions can be derived [2], [11]. Numerical methods are well settled and result in robust computer programs.

2. AN EXAMPLE. ICE-WATER PHASE CHANGE

Let us consider melting ice, i.e., an intricate mixture of ice and water. To describe this mixture, it is wise to define the volumetric proportion of liquid water $\beta(x,t)$ depending on point x and time t . Of course it satisfies

$$0 \leq \beta(x,t) \leq 1. \quad (3)$$

As free energy of the mixture Ψ we choose

$$\Psi = \beta \Psi_w + (1-\beta) \Psi_i + \Psi_m,$$

where Ψ_w and Ψ_i are the volumetric free energies of pure liquid water and pure ice. They are

$$\Psi_w(T) = - CT \log T - \frac{\ell}{T_0} (T-T_0),$$

$$\Psi_i(T) = - CT \log T,$$

where T is the absolute temperature, C the heat capacity and ℓ the latent heat of phase change at the phase change temperature T_0 .

The mixture free energy Ψ_m takes into account the possible interactions between ice and water.

Function Ψ_m depends on β which must satisfy relation (3). Let us impose to Ψ_m only one property : relation (3) is satisfied. This is performed by choosing

$$\Psi_m(T;\beta) = TI(\beta)$$

where I is the indicator function of the interval $[0,1]$ ($I(x) = 0$ if $x \in [0,1]$,

$I(x) = +\infty$ if $x \notin [0,1]$) (figure 2 in the annex).

Note. The temperature T multiplies I in Ψ_m . Then the internal energy has the usual expression

$$e = \Psi - T \frac{\partial \Psi}{\partial T} = CT + \ell\beta.$$

As the free energy Ψ of the ice water mixture depends on β , the second principle of thermodynamics within the small perturbations assumption [16], gives for any actual evolution of the mixture

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \dot{\beta} \leq 0, \quad (4)$$

where $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$. It means that relation (4) is satisfied for any velocity β . It is natural to assume the ice-water phase change to be non dissipative, i.e., relation (4) is an equality. It gives

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}(T, \beta) = 0.$$

This relation is the constitutive law for β .

Let us investigate its consequences. The computation of $\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}$ or rather of the sub-differential of Ψ (the set of all the slopes of the tangent lines to Ψ , see figure 3 in the annex) gives

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = -\frac{\ell}{T_0} (T-T_0) + T \partial I(\beta) \ni 0, \quad (5)$$

$$\text{with } \partial I(\beta) = \begin{cases} \text{any negative number, if } \beta = 0, \\ 0, \text{ if } 0 < \beta < 1, \\ \text{any positive number, if } \beta = 1. \end{cases}$$

It is possible to solve the equation (5) or

$$T \partial I(\beta) = \partial I(\beta) \ni \frac{\ell}{T_0} (T-T_0),$$

i.e., to compute β depending on the Celsius temperature $T-T_0$ (figure 3 in the annex). The result is :

- $\beta = 1$, if the Celsius temperature is positive. There is only liquid water !
- $\beta = 0$, if the Celsius temperature is negative. There is only ice !
- $0 < \beta < 1$ at 0° Celsius. We have melting ice.

It is clear that the non dissipation assumption for the phase change results in the well known properties of pure water freezing and thawing.

The internal energy as a function of the temperature is shown in figure 4. This graph is very often the basic data for the description of ice-liquid water phase change. Indeed it results from the fact that the phase change is not dissipative.

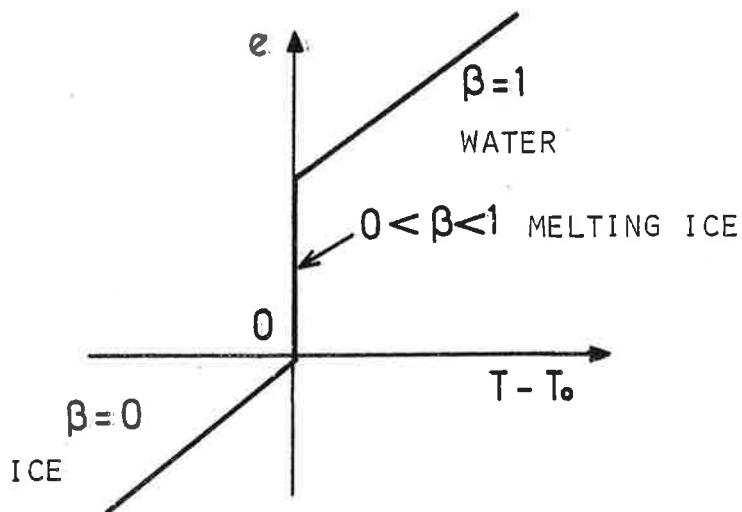


Figure 4

Internal energy of the water versus the Celsius temperature. This relation results from the non dissipation assumption.

3. UNFROZEN WATER CONTENT IN FROZEN SOILS [6]

Let us deal with a more complex situation where the results are more creative. Engineers and physicists have been puzzled by the unusual behaviour of soils submitted to frost actions : they heave with an amplitude far more greater than the one which can be predicted from the density variations of the water. Experiments have also shown that there exists unfrozen water in frozen soils at slightly negative temperatures [20]. This is due to actions of the solid skeleton onto the liquid water. Can continuum mechanics and macroscopic thermodynamics account for this phenomenon ? To see that it is possible, let us choose as for the mixture free energy Ψ_m an expression a little bit more sophisticated

$$\Psi_m(T, \beta) = Th(\beta),$$

where $h(\beta)$ is a convex function shown in figure 5.

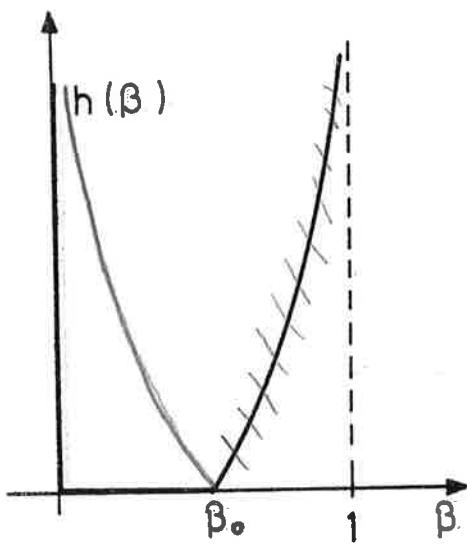


Figure 5
The convex function h describing the action of the porous medium onto the water.

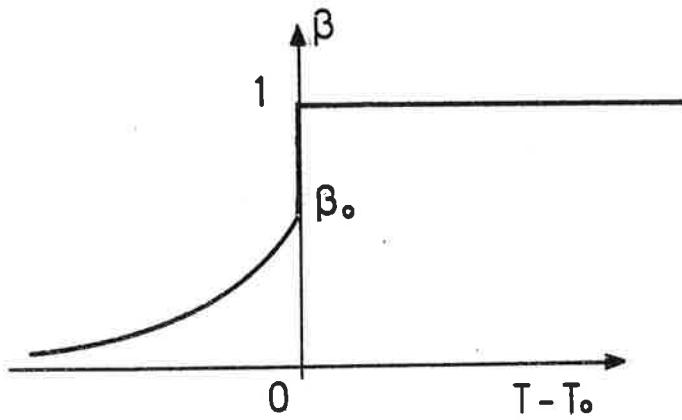


Figure 6
The graph $\partial h^{-1}(\ell(T-T_0)/T_0 T)$. It gives the unfrozen water content versus the Celsius temperature. A part $1-\beta^0$ of the water freezes at 0°C . The other part β_0 is progressively frozen when the temperature decreases below 0°C .

It represents the action of the skeleton onto the liquid water. Again let us assume the phase change to be non dissipative. It yields from the second principle that

$$-\frac{\ell}{T_0} (T - T_0) + T \frac{\partial h}{\partial \beta} \geq 0.$$

This relation gives the graph : unfrozen water content versus the Celsius temperature $T - T_0$. It fits with the physical observations (figure 6).

4. HYSTERESIS. DISSIPATIVE PHASE CHANGE

Certain materials submitted to thermal actions encounter phase changes which are progressive and not plain as in the water case. This is the case of some glues or more generally of thermal hardening materials. In this case the phase change can even be irreversible.

It is clear that these phenomena are dissipative. Let us assume the dissipation to be described by a pseudo-potential of dissipation $\Phi(\beta)$ [16], [19]. The function Φ is convex, positive and zero at the origin. The inequality (4) is satisfied by choosing the following constitutive law

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} (T, \beta) = - \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} (\beta). \quad (6)$$

The more simple function Φ is a quadratic one. Then relation (6) gives

$$k\dot{\beta} - \frac{\ell}{T_0} (T - T_0) + T \frac{\partial h}{\partial \beta} (\beta) \geq 0, \quad (k > 0). \quad (7)$$

If $h = I$ it results from (7) that

$$k\dot{\beta} = \frac{\ell}{T_0} (T - T_0) \text{ for } 0 < \beta < 1.$$

This equation gives the characteristic loops of hysteresis.

If we choose $\Phi(\beta) = \frac{k}{2} (\dot{\beta})^2 + I^+(\beta)$ where I^+ is the indicator function of the positive number ($I^+(x) = 0$ if $x \geq 0$, $I^+(x) = +\infty$ if $x < 0$), (6) gives

$$k\dot{\beta} + \partial I^+(\beta) + \partial \Psi(\beta) \geq 0,$$

$$\text{with } \partial I^+(\beta) = \begin{cases} \text{any negative, if } \beta = 0, \\ 0, & \text{if } \beta > 0, \\ \text{the empty set, if } \beta < 0. \end{cases}$$

It shows that β is always positive : it describes the irreversible phase change of thermal hardening materials (figure 7).

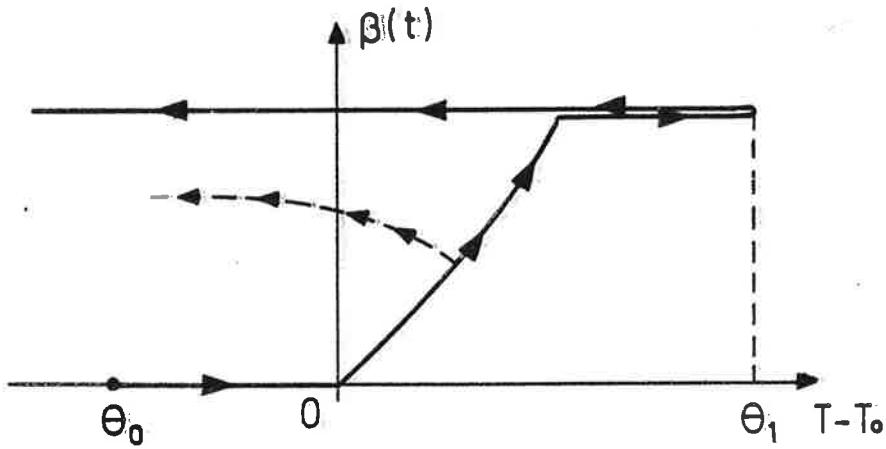


Figure 7

Evolution of hardened glue content versus the temperature $T-T_0$ which increases from θ_0 to θ_1 , and then decreases from θ_1 to θ_0 . The phase change begins as soon as the temperature is positive. When the phase change is completed the hardened glue content remains constant. If the temperature decreases before the phase change is completed, it stops when the temperature becomes negative. It will resume when the temperature reaches again positive values.

5. SOIL FREEZING

As we have seen before, freezing of humid soils produces large heaves. They result from an accumulation of ice and from an increase of the porosity ϵ . Then it is rational to choose ϵ as a state variable. Then the free energy depends on T , β and ϵ : $\Psi(T, \beta, \epsilon)$ [5].

Assuming there is no dissipation with respect to ϵ and β , the second principle gives

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}(T, \beta, \epsilon) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} (T, \beta, \varepsilon) = 0. \quad (9)$$

These relations describe the porosity and the unfrozen water content versus the temperature. With a simple choice of Ψ , the porosity appears to be a decreasing function of the temperature as seen in experiments.

These experiments also show that this dependence is not quite fairly one to one. Then it is useful to introduce a dissipation with respect to ε . The equation (9) becomes

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} (\dot{\varepsilon}, T) + \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} (T, \beta, \varepsilon) = 0.$$

The investigation of this relation in a neighbourhood of the Celsius $T-T_0$ and a simple choice of Φ give

$$\dot{\varepsilon} \approx - \bar{\lambda}(T-T_0) e^{-c_1 |T-T_0|}, \quad (10)$$

for the negative Celsius temperatures,

$$\dot{\varepsilon} \approx - c_3 (\varepsilon - \varepsilon_u) (T - T_0), \quad (10)$$

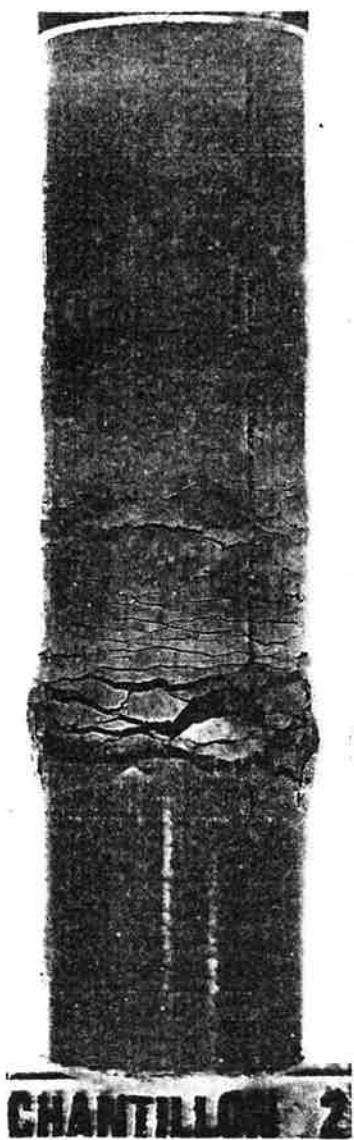
for the positive Celsius temperatures. The constant $\bar{\lambda}$ is large. The quantity ε_u is the unfrozen porosity. The constants c_1 and c_3 are positive.

The two relations (10) quantify the well known facts :

1. contrasted behavior of soils at slightly negative temperatures (increase of porosity and frost heave) and at positive temperature (progressive coming back to the initial unfrozen soil porosity) ;
2. large dissipation (i.e. slow evolution of the porosity) at negative temperature far away from the phase change temperature.

These results are a part of a predictive theory of the frost action on soils. This theory has been used in the french designing methods of roads and new railway tracks [7].

As an example, picture 8 shows a core of frozen soil. One can notice the ice accumulation where the temperature has been slightly negative for a long time. This picture can be compared to the computed displacements (figure 9) and to the computed porosity versus the depth (figure 10).



Picture 8

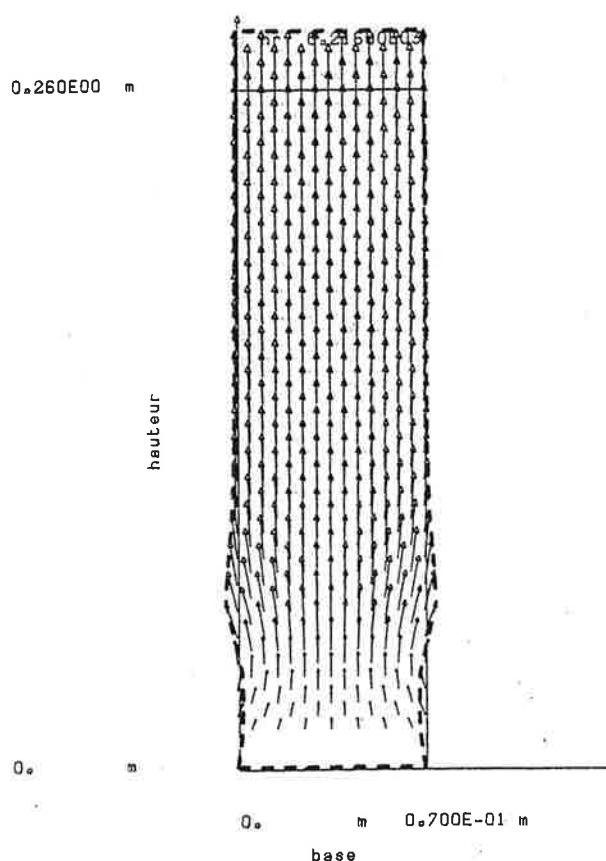


Figure 9

Picture 8. Core of frozen soil. The soil has been frozen at the top. Water has been available at the bottom. Note the important changes of structure due to ice accumulation.

Figure 9. Computed displacements of the core of picture 8 due to the frost action. The frost heave is 2cm. The length of the core is 26cm.

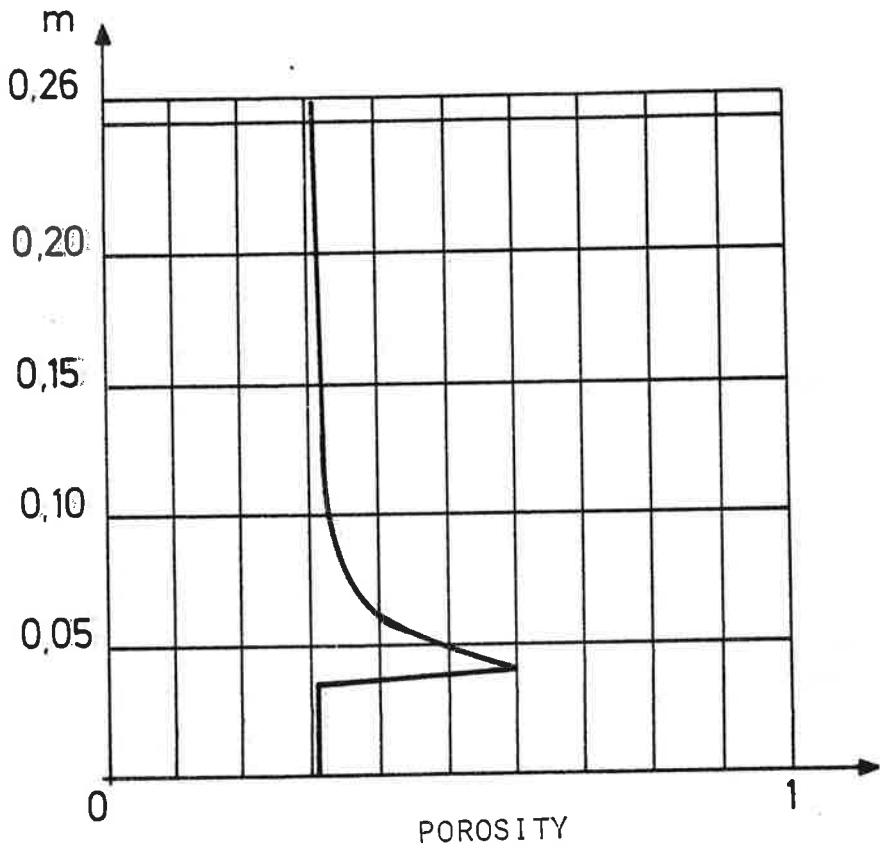


Figure 10

Computed porosity of the core of picture 8. Note the important increase of porosity where the temperature has been 0°C for a long time.

6. SHAPE MEMORY ALLOYS

Let us apply the theory to an other subject and consider a metal, mixture of three phases as an example of shape memory alloy [17].

6.1. INTRODUCTION

Some metallic alloys have unusual behaviours : they can be permanently deformed (up to 8% in traction) and recover totally their initial shape by simple heating. This is the one shape memory phenomenon. Moreover shape memory alloys can be educated, i.e. treated by thermomechanical actions, to have a two shape memory.

Educated shape memory alloys remember two shapes : the one at low temperature and the other at high temperature. Heating and cooling are sufficient to make them evolve from one shape to the other. All those phenomena are due to an austenite-martensites phase transformation [1], [4], [10], [17].

At the microscopie level the alloy is formed by geometrical juxtaposition of crystals of some martensites and of austenite. At the macroscopie level, the one we will deal with, it is convenient to consider that each phase is simultanously present at each point with proportion we denote by β_i . To simplify we assume there exist only two martensites.

The introduction of the three new quantities : β_1 , β_2 proportions of martensites, β_3 proportions of anstenite, will provide a coherent description of the unusual and surprising behaviour of the shape memory alloys.

The three dimension model [12] is based on classical thermomechanics [16]. To our best knowledge the other models we know of are one dimension and based on rather sophisticated free energies [1], [3], [10]. Conversely the free energies we introduce are simple and classical. As some of the others our model describes the mechanical actions by a second gradient theory [15]. This is necessary if we want to take into account all the mechanical actions which induce phase transformations.

In this framework the equations describing the evolution of a structure made of shape memory alloys are well-posed [8].

The second gradient theory equilibrium equations are recalled in paragraph 2.1. The constitutive laws are derived from the second principle of thermodynamics (paragraph 2.2.). Paragraph 2.3. focus on the strain-stress mechanical relationship and the one shape memory effect. The two shape memory effects and the education are described in paragraph 2.4. The equations of the thermomechanical model are given in paragraph 2.5.

6.2. THE MODEL [12].

6.2.1. Equilibrium equations.

We have already noted that the behaviour of the shape memory alloys depends heavily on their composition described by the β_i 's. These proportions can be modified by thermal actions but also by mechanical actions. Mainly they are surface actions. Among them, there are surface tractions but also surface couples and surface double forces. It seems necessary to include those mechanical actions in the modelisation. It is known that the classical first gradient theory for the internal forces does not allow surface double forces or couples. To take them

into account, we need a second gradient theory [15]. We do retain it, but having in mind to describe the main features of the behaviour we choose the more simple theory. Also for the sake of simplicity, we remain within the small perturbation assumption. In the second gradient theory [15], the virtual power of the interior forces is defined by

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} (\sigma \epsilon(\vec{v}) + \vec{M} \text{ grad div } \vec{v}) d\Omega,$$

$$\epsilon_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}),$$

for any smooth domain Ω and any velocity \vec{v} . The interior forces are the usual stresses and a vector \vec{M} . Integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i = & + \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} - M_{\ell,\ell} \delta_{ij}) v_i d\Omega - \\ & - \int_{\partial\Omega} (\sigma_{ij} n_j - M_{\ell,\ell} n_i + (n_i (D_p n_p) - D_i) (M_j n_j)) v_i d\Gamma \\ & - \int_{\partial\Omega} (M_j n_j) \epsilon_{nn}(\vec{v}) d\Gamma, \end{aligned}$$

where $\epsilon_{nn}(\vec{v}) = \epsilon_{ij}(\vec{v}) n_i n_j$ is the normal elongation velocity, $n = (n_i)$ is the outward normal vector, and the D_j 's are the tangential derivatives defined by

$$D_j \varphi = \varphi_{,j} - n_j (n_p \varphi_{,p}).$$

It is natural to define the virtual power of the external forces by

$$\mathcal{P}_e = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{T} \cdot \vec{v} d\Gamma + \int_{\partial\Omega} N \epsilon_{nn}(\vec{v}) d\Gamma.$$

The force \vec{f} is a volume force. The local contact forces are besides the usual surface traction \vec{T} , a normal surface double force N which works in the normal elongation.

The quasi-static equilibrium equations are provided by the principle of virtual power

$$\forall \Omega, \forall \vec{v}, \quad \mathcal{P}_i + \mathcal{P}_e = 0.$$

They are

$$\sigma_{ij,j} - M_{\ell,\ell} \delta_{ij} + f_i = 0 \tag{11}$$

or

$$\tau_{ij,j} + f_i = 0, \text{ in } \mathcal{D},$$

$$\text{with } \tau_{ij} = \sigma_{ij} - M_{\ell,\ell} \delta_{ij};$$

and

$$M_n = M_j n_j = N, \quad (12)$$

$$\tau_{ij} n_j + T_i^* = T_i, \text{ in } \partial\mathcal{D}, \quad (13)$$

$$\text{with } T_i^* = (n_i (D_p n_p) - D_i) (M_j n_j).$$

Note. The quantity $M_{\ell,\ell} = \text{div } \vec{M}$ is a pressure, $(n_i (D_p n_p) - D_i) M_n$ is a surface force and M_n a normal surface double force.

6.2.2. Free energy. Constitutive laws.

The thermodynamical variables are the absolute temperature T , the proportions β 's, the small deformations $\varepsilon(\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \vec{u} \text{ is the displacement})$ and $\text{gradtr}\varepsilon$ which are assumed to be the same for the three phases. We assume that the free energies ψ_i of the phases have simple and classical expressions

$$\psi_1(T, \varepsilon, \text{gradtr}\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon K \varepsilon + \frac{\nu}{2} (\text{gradtr}\varepsilon)^2 - \alpha(T) \text{tr } \varepsilon - CT \log T,$$

$$\psi_2(T, \varepsilon, \text{gradtr}\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon K \varepsilon + \frac{\nu}{2} (\text{gradtr}\varepsilon)^2 - \alpha(T) \text{tr } \varepsilon - CT \log T,$$

$$\psi_3(T, \varepsilon, \text{gradtr}\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon K \varepsilon + \frac{\nu}{2} (\text{gradtr}\varepsilon)^2 - \frac{\ell}{T_0} (T - T_0) - CT \log T,$$

where K is the rigidity matrix, C the heat capacity, ν a positive coefficient (assumed to be the same for the three phases, always for the sake of simplicity) and ℓ the specific austenite-martensite phase change latent heat at temperature T_0 . The function $\alpha(T)$ is proportionnal to the thermal expansion coefficient. More generally the free energies ψ_1 and ψ_2 of the martensites involve linear terms with respect to ε . We have chosen the more simple ones. We assume that for temperatures lower than a given temperature T_c ($T_c > T_0$) the function $\alpha(T)$ is positive, for temperatures higher than T_c , $\alpha(T)$ is zero.

We assume also that the densities ρ are the same for the three phases. Then the volumetric free energy of the alloy is

$$\tilde{\Psi}(T, \varepsilon, \text{grad}\dot{\varepsilon}, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \rho\beta_i\Psi_i + \rho\tilde{I}(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

where \tilde{I} is the indicator function of the set

$$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3 \mid 0 \leq \beta_i \leq 1; 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3\}.$$

The last term $\rho\tilde{I}$ can be understood as a mixture free energy. In our situation its only effect is to ensure that the proportions take actual physical values : i.e., they are between 0 and 1 and their sum is 1. We think that these physical relations are part of the properties of the mixture and must be included in its free energy.

By eliminating β_3 , the variables become independant. Then the free energy of the alloy is

$$\Psi(T, \varepsilon, \text{grad}\dot{\varepsilon}, \beta_1, \beta_2) = \rho(\beta_1(\Psi_1 - \Psi_3) + \beta_2(\Psi_2 - \Psi_3) + \Psi_3 + I(\beta_1, \beta_2)),$$

where I is the indicator function of the triangle \mathcal{T} of the plane (β_1, β_2) (figure 11).

$$\mathcal{T} = \{\beta_1, \beta_2 \mid 0 \leq \beta_i \leq 1; \beta_1 + \beta_2 \leq 1\}.$$

By dealing with the intrinsic dissipation only, the Clausius-Duhem inequality derived from the second principle of thermodynamics is (assuming $\rho = 1$ to simplify),

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial\Psi}{\partial(\text{grad}\dot{\varepsilon})}\text{grad}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta_1}\dot{\beta}_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta_2}\dot{\beta}_2 \leq \sigma\dot{\varepsilon} + \vec{M}\text{grad}\dot{\varepsilon},$$

where σ and \vec{M} are the actual stresses (The dot denotes the derivative with respect to the time). The Clausius-Duhem inequality must be satisfied by any velocities $\dot{\varepsilon}$, $\text{grad}\dot{\varepsilon}$, $\dot{\beta}_1$ and $\dot{\beta}_2$.

We assume that the behaviour is non dissipative or elastic with respect to the mechanical quantities ε and $\text{grad}\dot{\varepsilon}$ and can be linearly viscous with respect to the proportions β 's. The constitutive laws are then

$$\sigma = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon} = K\varepsilon + \alpha(T)(\beta_2 - \beta_1)\mathbf{1}, \quad (14)$$

$$\vec{M} = \nu \overrightarrow{\text{grad}\dot{\varepsilon}}, \quad (15)$$

$$k\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} \ni 0, \quad (16)$$

which can be written

$$k \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \vec{B} + T \partial I(\beta_1, \beta_2) \ni 0,$$

where \vec{B} is the smooth part of $\partial\Psi/\partial\beta$,

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} -\alpha(T) \operatorname{tr} \varepsilon + \frac{\ell}{T_0}(T-T_0) \\ +\alpha(T) \operatorname{tr} \varepsilon + \frac{\ell}{T_0}(T-T_0) \end{pmatrix}.$$

The constant viscosity k is positive or zero. When it is zero, the behaviour is non dissipative with respect to β . It is easy to check that the Clausius-Duhem inequality is satisfied.

6.2.3. Mechanical constitutive law. One shape memory.

Let us fix the temperature and look at the non-dissipative ($k = 0$) constitutive laws. To be more clear, let us consider a traction-compression experiment. As the only non zero strain ε_{11} denoted by ε is homogeneous we have $\vec{M} = 0$. We denote σ_{11} by σ . Let us focus on the relation σ, ε at different temperatures.

Low temperature ($T < T_0$)

The components of \vec{B} are shown on figure 12.

By relation (16), the vector $-\vec{B}$ must be normal to the triangle \mathcal{T} (figure 11). We easily obtain

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0 &\Rightarrow \beta_1 + \beta_2 = 1, \\ \varepsilon > 0 &\Rightarrow \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \\ \varepsilon < 0 &\Rightarrow \beta_1 = 0, \beta_2 = 1. \end{aligned}$$

Then the relation (14) gives the constitutive law which is shown on figure 13.

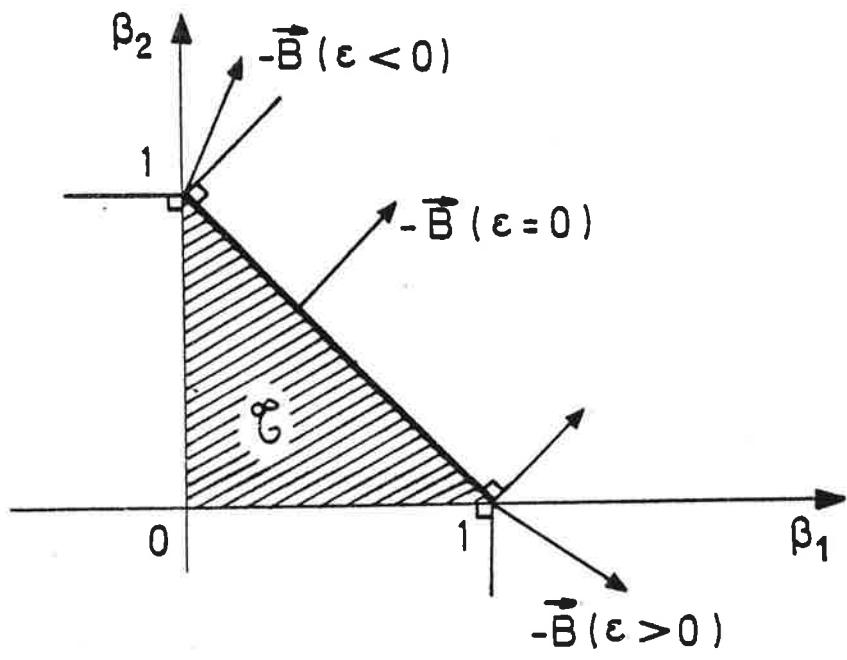


Figure 11
The triangle \mathcal{G} . The vecteur $-\vec{B}$ at low temperature.

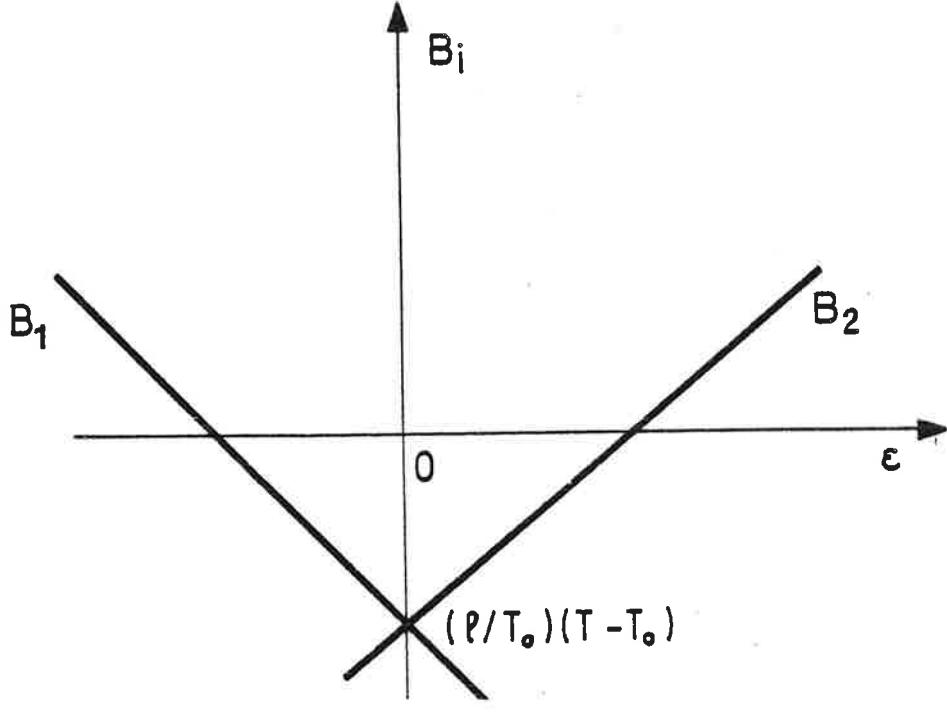


Figure 12
The components of \vec{B} at low temperature.

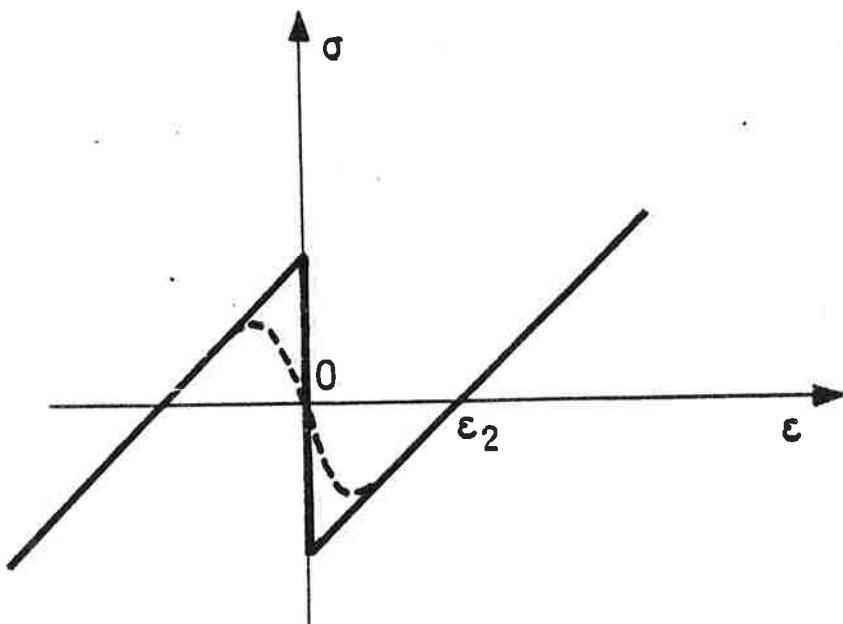


Figure 13

The mechanical constitutive law at low temperature. The dotted line gives the experimental law. The first variant of the martensites (phase 1) exists for ϵ positive and the second variant (phase 2) for ϵ negative. The two variants co-exist when $\epsilon = 0$.

It looks like the actual experimental law (dotted line). It is easy to check that if the triangle \mathfrak{T} is replaced by the curvilinear triangle \mathfrak{T}_c (figure 14), we obtain the experimental law [1], [3], [10]. To replace \mathfrak{T} by \mathfrak{T}_c means that the only possible mixtures are those of the triangle \mathfrak{T}_c or that the two martensites are always present together.

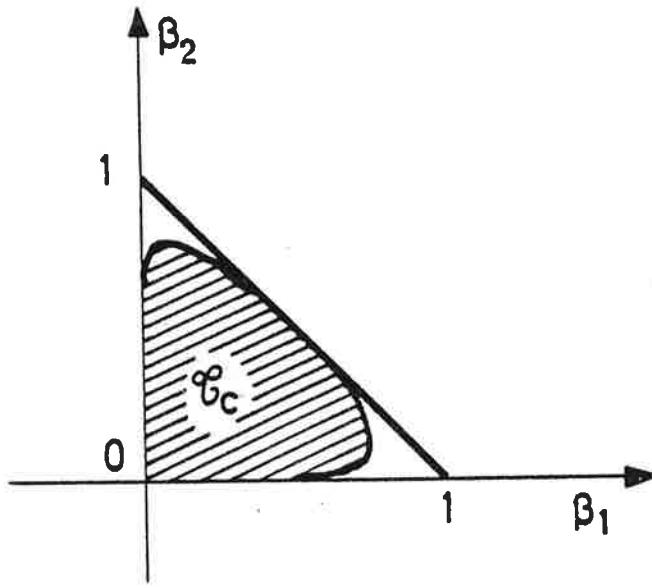


Figure 14

The triangle T_c gives the experimental behaviour. There is an interaction between the two phases because only certain proportion (β_1, β_2) are possible.

Mean temperature ($T_0 < T < T_c$).

The components of \vec{B} are shown on figure 15. Relation (16) shows that (figure 16)

- $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_1 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1,$
- $\varepsilon = \varepsilon_1 \Rightarrow \beta_2 = 0, \quad 0 \leq \beta_1 \leq 1,$
- $\varepsilon > \varepsilon_1 \Rightarrow \beta_2 = 0, \quad \beta_1 = 1,$
- $\varepsilon = -\varepsilon_1 \Rightarrow \beta_1 = 0, \quad 0 \leq \beta_2 \leq 1,$
- $\varepsilon < -\varepsilon_1 \Rightarrow \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1.$

The constitutive law is shown on figure 17. It is again possible to replace the triangle T by T_c to have a more realistic constitutive law.

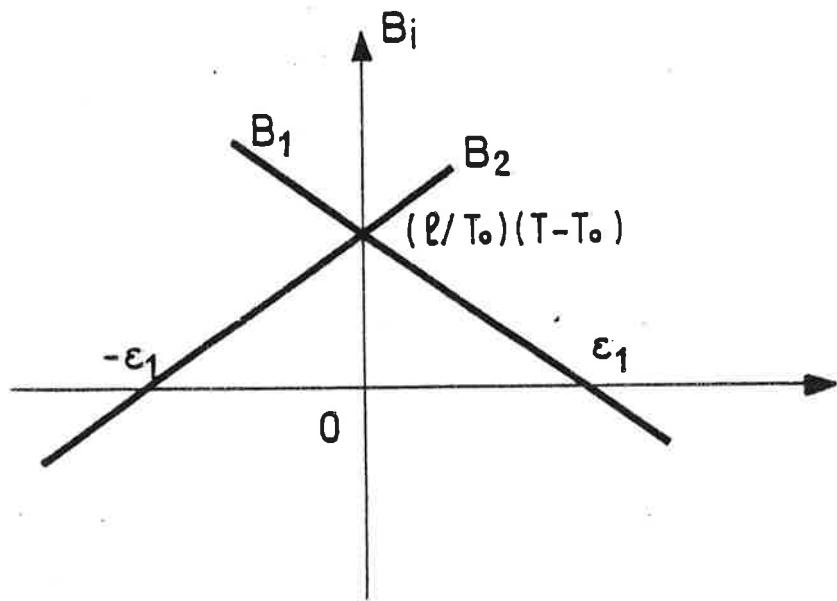


Figure 15
The components of \vec{B} at intermediate temperature.

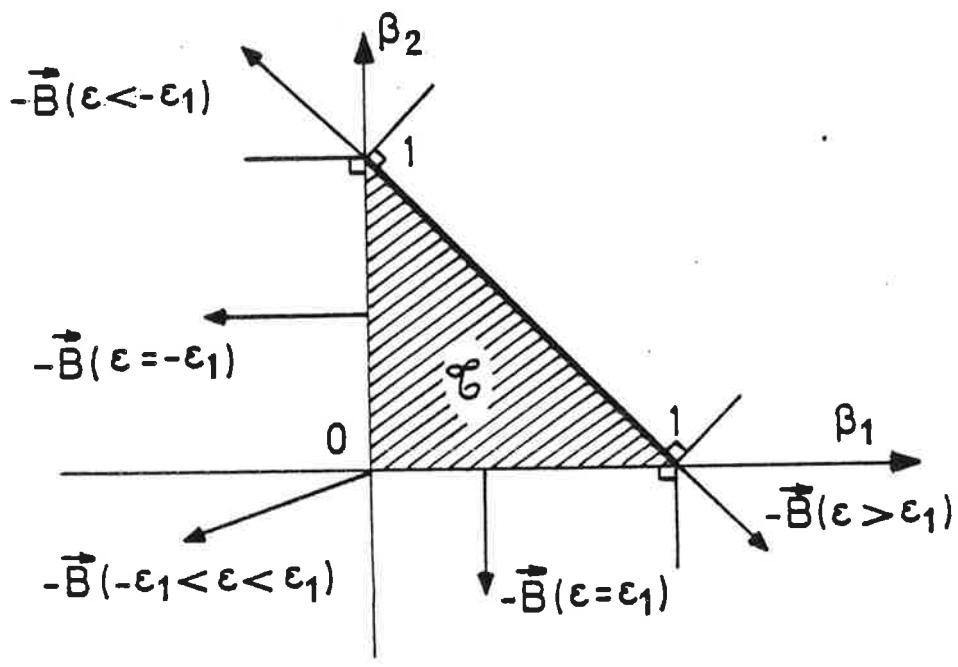


Figure 16
The vector $-\vec{B}$ at intermediate temperature.

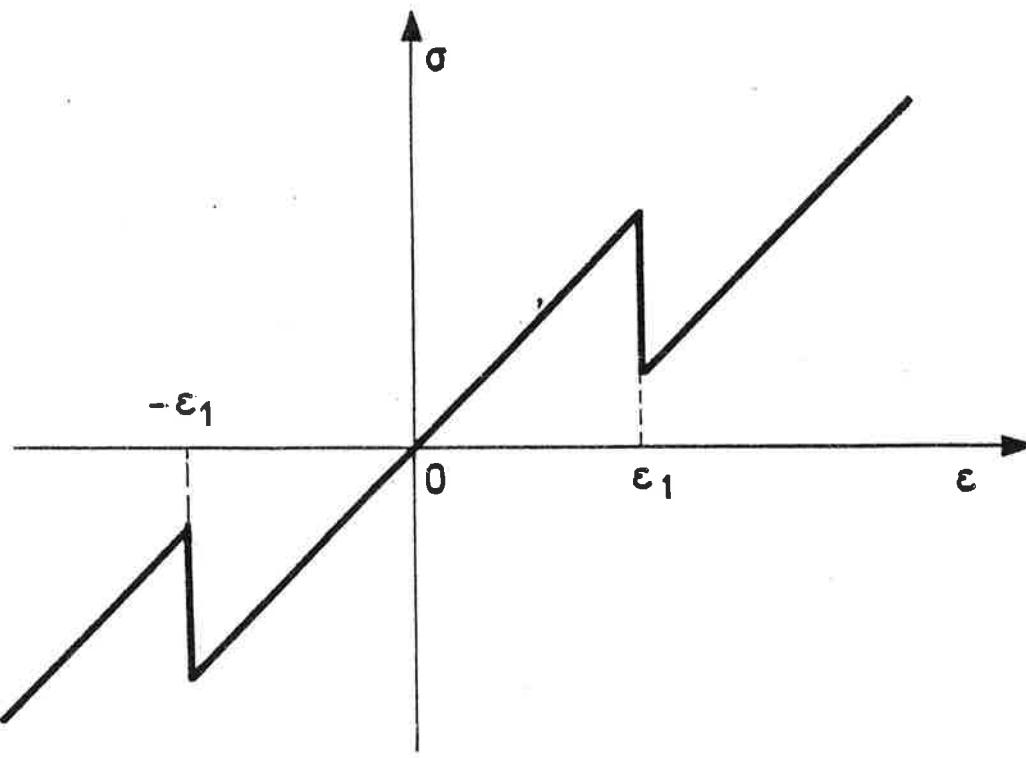


Figure 17

The constitutive law at intermediate temperature. The austenite (phase 3) exists between $-\epsilon_1$ and ϵ_1 . The martensites exist for large deformations (the first variant for $\epsilon > \epsilon_1$, the second variant for $\epsilon < -\epsilon_1$).

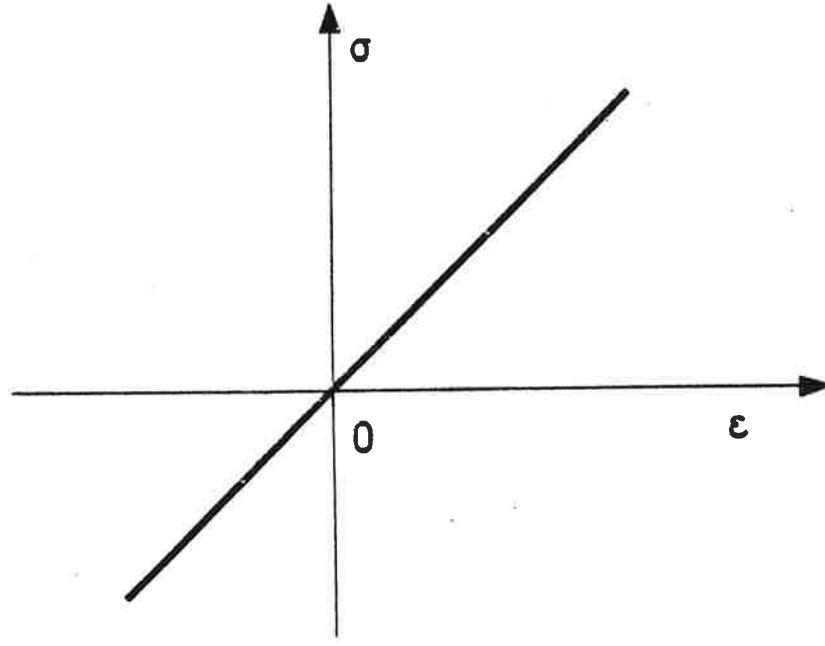


Figure 18

The constitutive law at high temperature. Only the austenite (phase 3) exists.

High temperature ($T < T_c$).

We have $B_1 = B_2 = \frac{\ell}{T_0}(T-T_0) > 0$ and by relation (16) $\beta_3 = 1$. We have then a classical elastic constitutive law in accordance with experiments (figure 18).

Note. When the behaviour is dissipative with respect to the β 's, the evolution is less rough. For instance, if at fixed temperature the stress σ is a given function of the time, the strain ε evolves in a smoother way having all the aspects of classical hysteresis.

Let us consider a shape memory alloy at low temperature and apply a permanent deformation : $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_2$, figure 13. Let us heat it, the deformation vanishes : $\sigma = 0$, $\varepsilon = 0$, figure 18. If it is cooled back, the shape memory alloy remains undeformed. This is the one shape memory alloy effect.

Let us also note some other properties of shape memory alloys. At fixed mean temperature ($T_0 < T < T_c$), the alloys skips from the phase austenite to the phases martensites by increasing the deformations. This phase change produces heat as it can be checked by computing the variation of entropy. This fact agrees with experiments [17].

6.2.4. Education. Two shape memory.

The main effect of the education or the thermomechanical treatment applied to a shape memory alloy is to favour the appearance of one martensite. It is easily described by replacing the triangle \mathcal{C} by the triangle \mathcal{C}_e (figure 19). It is clear that the martensite the proportion of which is β_1 is much more present than the martensite the proportion of which is β_2 .

Let us consider this educated alloy in a traction compression experiment. Assuming there is no dissipation, relation (16) shows that \vec{B} is normal to the triangle \mathcal{C}_e . It is easy (figures 19 and 20) to obtain the constitutive law at low temperature.

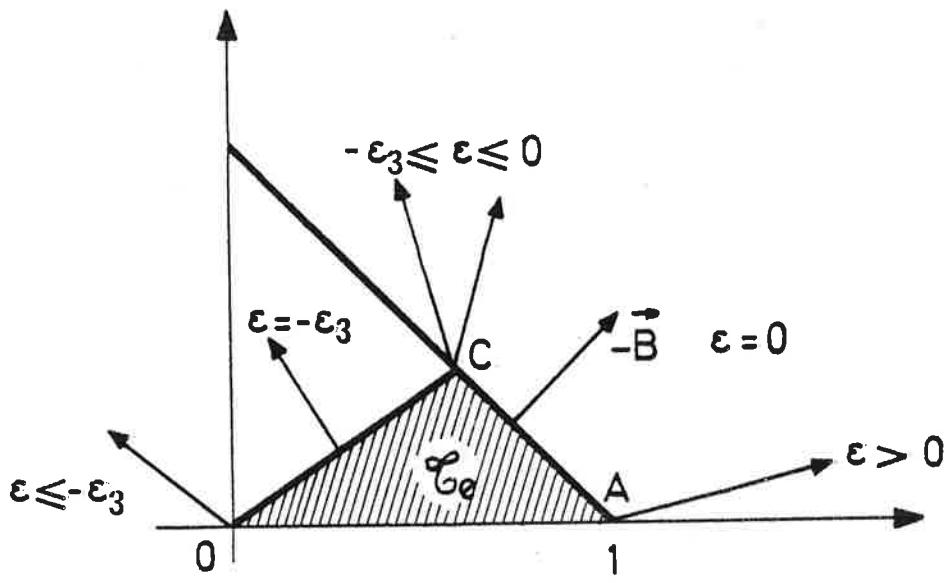


Figure 19

The triangle Σ_e of the possible mixtures (β_1, β_2) of an educated shape memory alloy. The vector $-\vec{B}$ at low temperature.

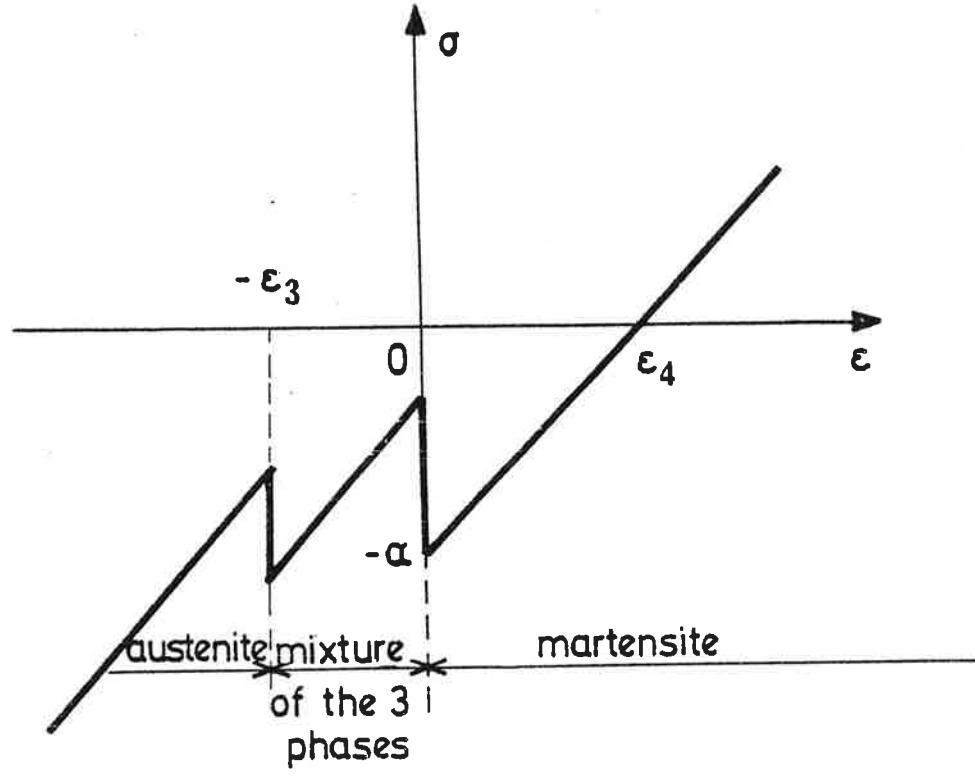


Figure 20

The constitutive law at low temperature of an educated shape memory alloy.

It is also easy to check that at high temperature the constitutive law is the classical elastic one shown on figure 18.

Let us consider an unloaded educated shape memory alloy at high temperature : we have $\sigma = 0$, $\varepsilon = 0$ (figure 18). Let us cool it. The alloy deforms at low temperature : $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_4$ (figure 20). Let us heat it back. The alloy deforms back to its initial shape : $\sigma = 0$, $\varepsilon = 0$ (figure 18). This is the two shape memory phenomenon [4].

6.2.5. Evolution of a structure made of shape memory alloy.

To describe the evolution of such a structure we need to know at each point x of the domain Ω occupied by the structure and at each time t of the time interval $[0, \hat{T}]$, the absolute temperature $T(x, t)$ the small displacements $\vec{u}(x, t)$ and the proportions $\beta_i(x, t)$.

An equation has not been yet introduced : the energy balance :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div } \vec{q} = \sigma \dot{\varepsilon} + \vec{M} \text{ grad} \dot{\varepsilon},$$

here \vec{q} is the heat flux vector. We neglect the mechanical effects and keep in the volumetric internal energy

$$e = \Psi - T \frac{\partial \Psi}{\partial T} \approx \rho C T - \rho \ell (\beta_1 + \beta_2)$$

only the more important terms : $\rho C T$ and specially $\rho \ell (\beta_1 + \beta_2)$ which takes into account the austenite-martensites transformation.

We choose also the Fourier conduction law

$$\vec{q} = -h \text{ grad } T$$

where h is the thermal conductivity.

Finally the equations are

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \rho \ell \frac{\partial}{\partial t} (\beta_1 + \beta_2) - h \Delta T = 0, \text{ in } Q = \Omega \times [0, \hat{T}], \quad (17)$$

derived from the energy balance :

$$\begin{aligned} \text{div}(\nu \Delta(\text{div } \vec{u}) \mathbb{1} + \sigma) &= 0, \\ \sigma &= K \varepsilon(\vec{u}) + \alpha(T) \text{div } \vec{u} \mathbb{1}, \text{ in } Q \end{aligned} \quad (18)$$

derived from the equilibrium equations and the mechanical constitutive laws (11) to (15) ;

$$k \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \vec{B}(\vec{\epsilon}(u), T) + \partial I(\beta_1, \beta_2) \ni 0, \quad (19)$$

derived from the constitutive law (16) for the β 's (note that $T\partial I = \partial I$).

We add convenient and initial boundary conditions. For instance, let us choose

$$\vec{u} = 0, \quad \text{on } \Sigma_0 = \partial\Omega_0 \times [0, \hat{T}], \quad (20)$$

$$(v\Delta(\operatorname{div} \vec{u})\mathbb{1} + \sigma)\vec{n} = \vec{g}, \quad \text{on } \Sigma_1 = \partial\Omega_1 \times [0, \hat{T}], \quad (\partial\Omega_1 = \partial\Omega - \Omega_0),$$

where \vec{g} is the external traction applied to the part $\partial\Omega_1$ of the boundary $\partial\Omega$ (\vec{n} is the outward normal vector) ;

$$\frac{\partial}{\partial n}(\operatorname{div} \vec{u}) = N \text{ on } \Sigma = \partial\Omega \times [0, \hat{T}], \quad (21)$$

where N is the applied double force on the boundary $\partial\Omega$;

$$h \frac{\partial T}{\partial n} + a(T - \bar{T}) = 0, \quad \text{on } \Sigma, \quad (22)$$

relation which means that the heat flux is proportionnal to the difference of temperature between the interior (T) and the exterior (\bar{T}) of the structure (a is a positive parameter) ;

$$T(x, 0) = T_0(x); \quad \beta_1(x, 0) = \beta_1^0(x); \quad \beta_2(x, 0) = \beta_2^0(x) \text{ in } \Omega, \quad (23)$$

the initial conditions.

The unknowns of the problem are the functions $\theta(x, t)$, $\vec{u}(x, t)$, $\beta_i(x, t)$. The data are ρ , C , ℓ , h , v , k , a , T_0 , T_c , α , \vec{g} , N , \bar{T} , T^0 , β_i^0 . The equations are the relation (17) to (23).

It can be prove that those equations are well posed in a natural mathematical framework [8].

7. NON SATURATED HUMID POROUS MEDIA [13].

In a porous medium, a concrete or a soil for instance, the behaviour of the liquid (water) phase and of the gas (vapor and air) phase are very different from their usual one. For instance the pressure of the liquid water can be largely negative when the liquid water content is low. When this liquid water content evolves the water vapor density shows an important hysteresis. Behaviour during sorption and desorption are different. All those phenomena are due to the action of the porous medium onto the liquid and gas phases. Again a simple free energy of mixture depending of the liquid water proportion together with a pseudo-potential of dissipation are sufficient to obtain a predictive theory.

The thermodynamical quantities besides the temperature T are

- the volume by mass unit τ_a , τ_v of the air and of the vapor ;
- the volumetric proportion β_g and β_ℓ of gas (mixture of air and vapor) and of liquid vapor.

Assuming the porosity ε to be constant, we have the internal constraints

$$0 \leq \beta_g \leq \varepsilon, \quad 0 \leq \beta_\ell \leq \varepsilon, \quad \beta_g + \beta_\ell = \varepsilon.$$

Here the situation is a little bit more intricate because gases are compressible and the small deformation assumption cannot be retained. However the method is exactly the same : introduction of free energies depending on the proportions of liquid water and of gas, introduction of a pseudo-potential of dissipation depending on the phase change velocity.

The advantage of this method is to link to a thermodynamical potential properties which, as far as we know, are often considered as phenomenological properties : for instance the relation capillary pressure versus the liquid water content and the relation pressure of the liquid water versus the liquid water content [18].

For the specific free energies of the components, we choose

$$\Psi_a(T, \tau_a, \beta_g) = - C_a T \log T - \frac{RT}{M_a} \log \tau_a + \frac{RT}{M_a} I(\beta_g), \text{ for the air,}$$

$$\Psi_v(T, \tau_v, \beta_g) = - C_v T \log T - \frac{RT}{M_w} \log \tau_v + \frac{RT}{M_w} I(\beta_g) + f(T), \text{ for the vapor,}$$

$$\Psi_\ell(T, \beta_\ell) = - C_\ell T \log T + \frac{RT}{M_w} (h(\beta_\ell) + I(\beta_\ell)), \text{ for the liquid water,}$$

$$\Psi_s(T) = -C_s T \log T, \text{ for the rigid skeleton,}$$

where C_j are the heat capacities (with constant volume), M_a and M_w the molecular masses of air and water, R the universal gas constant. The function f is used to fit the latent heat of the liquid-vapor phase change. The function I is the indicator function of the interval $[0, \varepsilon]$. Again its effect is to restrict the values of the β'_s to actual physical ones.

The convex function h represents the action of the porous medium onto the water at the macroscopic level. This function describes the properties due to the porous medium. Its derivative can be obtained through experiments.

The only dissipation taken into account is the dissipation with respect to the specific rate of liquid-vapor phase change (mass of water which changes of phase by unit of time). This rate is

$$\Delta M_\ell = \rho_\ell \frac{\partial \beta_\ell}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_\ell \beta_\ell \vec{U}_\ell$$

where \vec{U}_ℓ is the velocity of the water (be careful, even if the water is uncompressible $\operatorname{div} \vec{U}_\ell \neq 0$ because of the phase change), ρ_ℓ is the density of the liquid water. We choose a simple pseudo-potential of dissipation $\Phi = \frac{1}{2} k(\Delta M_\ell)^2$.

A classical calculation involving the second principle gives the constitutive laws for the pressure p_a , p_v , p_ℓ of the air, of the vapor and of the liquid water and also for the proportions β_ℓ of liquid and β_g of gas,

$$p_a = -\frac{\partial \Psi_a}{\partial \tau_a} = \frac{RT}{M_a \tau_a}, \quad p_v = -\frac{\partial \Psi_v}{\partial \tau_v} = \frac{RT}{M_w \tau_v},$$

$$p_\ell \in \rho_\ell \frac{RT}{M_w} \beta_\ell^2 \partial(h+I)(\beta_\ell), \quad (24)$$

$$0 \in \partial I(\beta_g), \quad k \Delta M_\ell = g_v - g_\ell, \quad (25)$$

where g_v and g_ℓ are the free enthalpies of the vapor and of the liquid vapor ($g = \Psi + p\tau$). Besides the classical relations for the pressures of the gases, the new constitutive laws (24) and (25) are obtained. They give the Kelvin relation [9]

$$\log \frac{\rho_{vs}}{\rho_{vs}^0} = \frac{\partial}{\partial \beta_\ell} (\beta_\ell h) - \log(\varepsilon - \beta_\ell) = -\frac{M_e}{\rho_\ell RT} p_c, \quad (26)$$

where p_c is the capillary pressure, ρ_{vs} and ρ_{vs}^0 are the water vapour densities

respectively inside the porous medium and over pure free water at the same temperature. The Kelvin relation (26), the relation (24), pressure of the liquid water versus the proportion of liquid water and the temperature, appear to be thermodynamical properties. They do not appear, as it is sometimes the case, like phenomenological properties which are necessary to build a predictive theory [14], [18]. Very simple choices of the function h give the experimental behaviour of the capillary pressure and of the liquid water pressure (figures 21 and 22). For instance one can note that the pressure of the water is negative for low liquid water contents. This fact is characteristic of unsaturated porous media. It results directly from the choice of β_ℓ as a state variable.

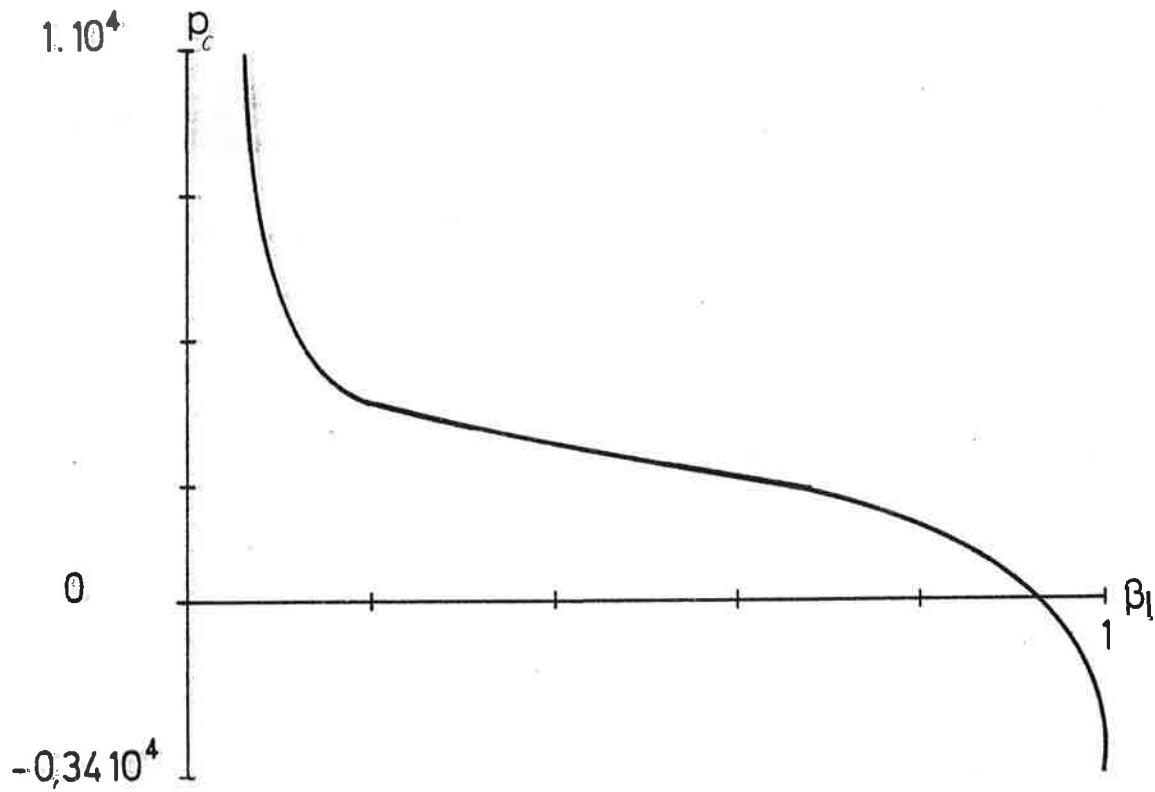


Figure 21
The capillary pressure versus the liquid water content β_ℓ . The temperature is fixed.

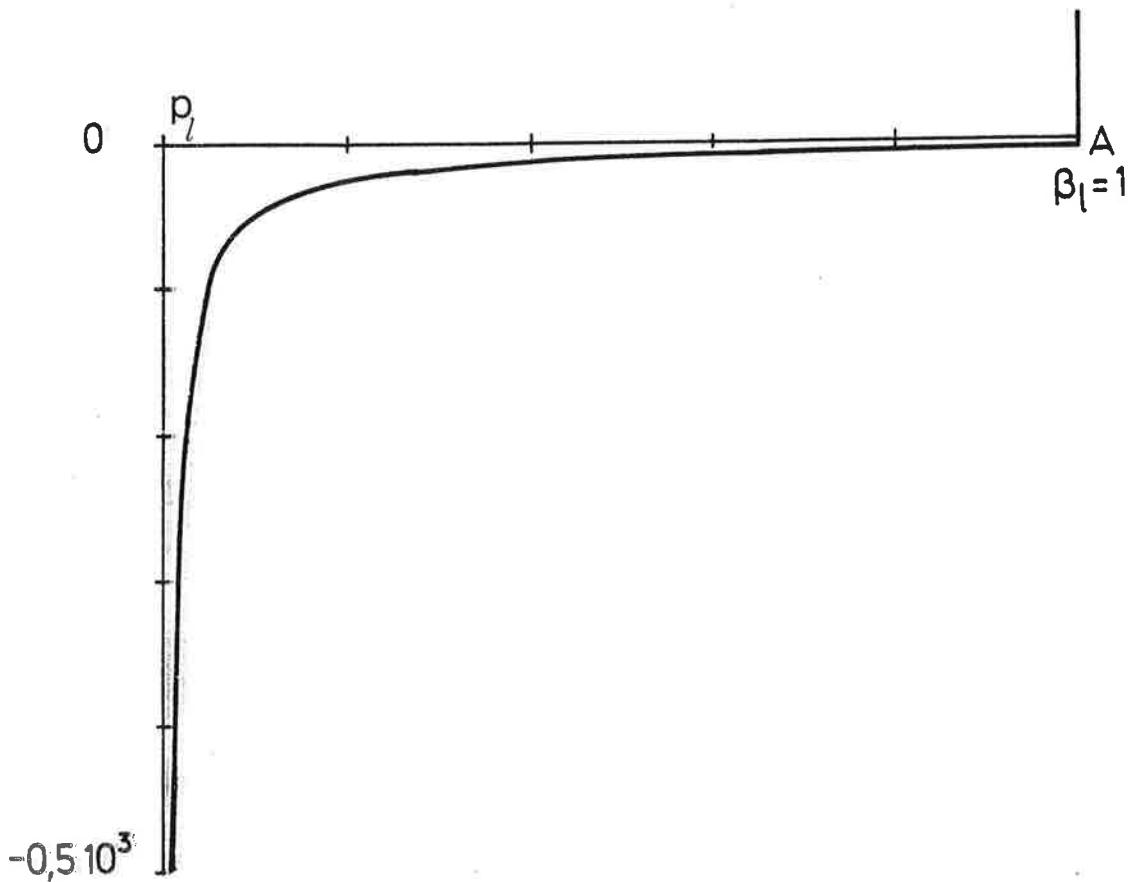


Figure 22

The liquid water pressure versus the liquid water content. At point A the porous medium is saturated. The pressure is a priori not determined but it is bounded below.

Note. When $\beta_l = 1$, the porous medium is saturated. The relation (24) show that the pressure is a priori not determined but that it is bounded below as it is natural for an uncompressible fluid.

8. CONCLUSION

The different examples we have described show the interest of using the proportions β 's of the components of a mixture as state variables. The internal constraints, being physical properties, are taken into account by the free energies. Often those constraints are sufficient to provide a good description of rather intricate phenomena. The relations which results together with pseudo-potentials of dissipation give the constitutive laws. They are, as it is known, basic elements of predictive theories used in solid mechanics.

Annex

Subdifferential of a convex function

The subdifferential of a convex function is a generalization of the classical derivative. Let us consider a function f from \mathbb{R} into $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ which is convex (i.e., the concavity is directed upwards (figure 1)). If it has a derivative at the point x , its derivative $f'(x)$ satisfies

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

at any point y . This relation means that the curve $(x, f(x))$ is always under the tangent line. If the function has not a derivative at the point \hat{x} , there exist lines with slope z which have the same property (figure 1). The set of those slopes is the subdifferential of f at the point \hat{x} . It is denoted $\partial f(\hat{x}) = \{z\}$.

When the function f is the indicator function I (figure 2) of the interval $[0,1]$ ($I(\beta) = 0$ if $\beta \in [0,1]$, $I(\beta) = +\infty$ if $\beta \notin [0,1]$), the subdifferential is the set of all the negative numbers if $\beta = 0$, of the number 0 if $0 < \beta < 1$ and it is the set of all the positive numbers if $\beta = 1$ (figure 3).

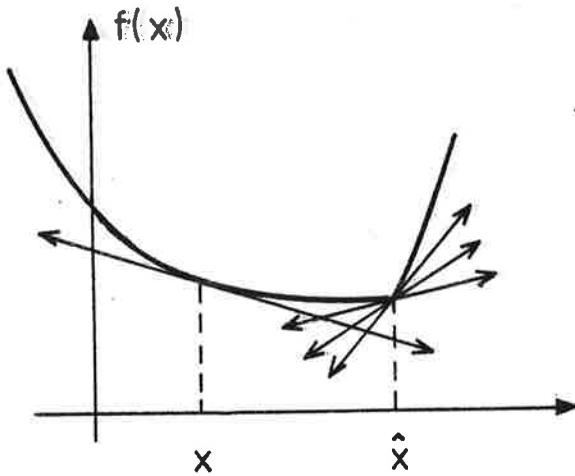


Figure 1

The convex function f . The tangent line where it is smooth (point x) and the generalized tangent lines where it is not smooth (point \hat{x}).

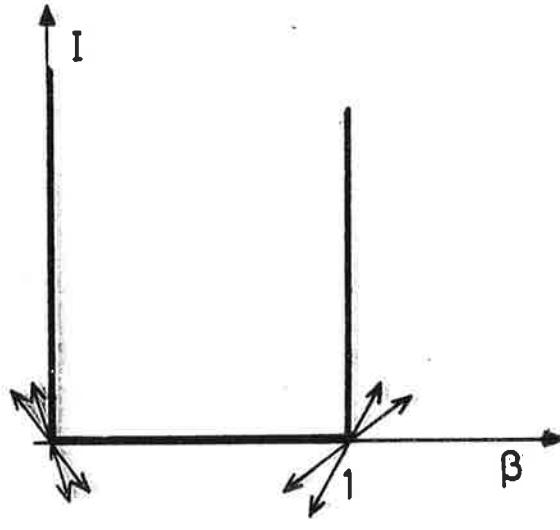


Figure 2

The indicator function of the interval $[0,1]$. The generalized tangent lines at
at the points 0 and 1.

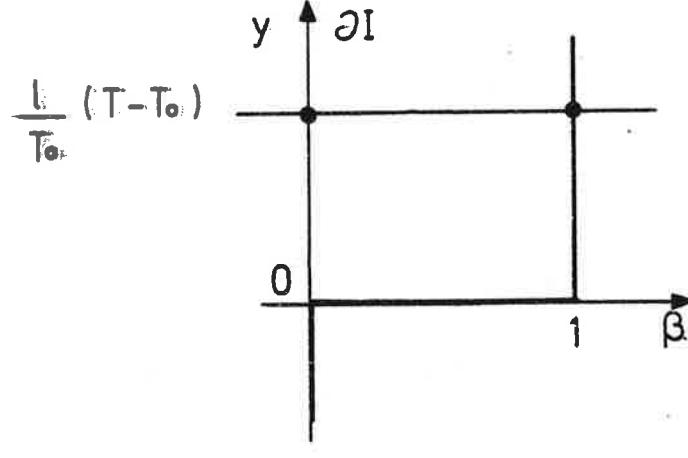


Figure 3

The subdifferential ∂I of the indicator function I . It is used to compute the
water content versus the Celsius temperature (equation 5).

When the function f is an application from \mathbb{R}^2 into $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, for instance the indicator function $I_{\mathcal{G}}(\beta_1, \beta_2)$ of the triangle \mathcal{G} , we have the same definition. If a vector $-\vec{B} \in \partial I_{\mathcal{G}}(\beta_1, \beta_2)$, we have for any (γ_1, γ_2)

$$I_{\mathcal{G}}(\gamma_1, \gamma_2) \geq I_{\mathcal{G}}(\beta_1, \beta_2) + (-B_1)(\gamma_1 - \beta_1) + (-B_2)(\gamma_2 - \beta_2),$$

or

$$\forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}, \quad 0 \geq (-B_1)(\gamma_1 - \beta_1) + (-B_2)(\gamma_2 - \beta_2),$$

which expresses that the vector $-\vec{B}$ is normal to the triangle \mathcal{G} (figure 11).

Références

- [1] M. ACHENBACH, I. MULLER.- Model for shape memory in International Conference on martensitic transformations, L. Delaey, M. Chandrasekaran ed. ; Journal de Physique, 1982.
- [2] J. AGUIRRE-PUENTE, M. FREMOND, M.- Propagation du gel dans les milieux poreux. Joint IUTAM/IMU Symposium on applications of methods of functional analysis to problems of mechanics. Springer-Verlag, 1976.
- [3] H. W. ALT, K. H. HOFFMANN, M. NIEZGODKA, K. SPREKELS.- A numerical study of structural phase transitions in shape memory alloys, Preprint n°90, Institut für Mathematik, Augsburg University, 1985.
- [4] R. BARGAIN. Société Souriau.- Private communication.
- [5] D. BLANCHARD, M. FREMOND, A. VISINTIN.- Phase change with dissipation in thermomechanical coupling in solids, H.D. Bui, Q.S. Nguyen ed. ; North-Holland, 1987, p. 411-418.
- [6] D. BLANCHARD, M. FREMOND.- La Suction cryogénique dans la congélation des sols : un modèle macroscopique. CRAS, Série II, p. 1-4, 1982.
- [7] Catalogue 1977 des Structures Types de Chaussées Neuves.- Direction des Routes et de la Circulation Routière, Ministère de l'Equipement, Paris, 1977.
- [8] P. COLLI, M. FREMOND, A. VISINTIN.- Shape memory alloys. A continuum mechanics model. to appear.
- [9] R. DEFAY, I. PRIGOGINE, I.A. BELLEMANS and D. H. EVERETT.- Surface tension and adsorption. Longmans, Green and Co Ltd., 1966.
- [10] F. FALK.- Martensitic domain boundaries in shape-memory alloys as solitary waves in International Conference on martensitic transformations, L. Delaey, M. Chandrasekaran ed. ; Journal de Physique, 1982.
- [11] M. FREMOND, A. VISINTIN.- Dissipation dans le changement de phase. Surfusion. Changement de phase irréversible. C.R. Acad. Sci, Paris, t. 301, Série II, 1985, p. 1265-1268.
- [12] M. FREMOND.- Matériaux à mémoire de forme, C.R. Acad. Sci, Paris, t. 304, Série II, n°7, 1987, p. 239-244.

- [13] M. FREMOND, P. NICOLAS.- Hysteresis dans les milieux poreux non saturés. C.R. Acad. Sci, t. 305, Série II, p. 741-746, 1987.
- [14] A. FRIAA, R. MENSI, P. ACKER.- Etude du transfert simultané de la teneur en eau et de la chaleur dans le béton. Congrès international de la Rilem, Paris, 1987.
- [15] P. GERMAIN.- La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus : 1ère partie. Théorie du second gradient, J. Mécanique, 12, 1973, p. 235-274.
- [16] P. GERMAIN. Mécanique des milieux continus, Masson, Paris, 1973.
- [17] G. GUENIN.- Alliages à mémoire de forme in Technique de l'Ingénieur, M530, Paris, 1986.
- [18] C. MARLE.- Cours de production : les écoulements polyphasiques en milieux poreux, tome IV, Technip, Paris, 1972.
- [19] J.J. MOREAU. Fonctions de résistance et fonctions de dissipation. Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, 1971..
- [20] P. WILLIAMS. Norwegian Geotech. Inst. Publ., 72, p. 120, 1976.

MECHANICS OF SWARMS OF PARTICLES

Stig Stenholm
Research Institute for Theoretical Physics
Siltavuorenpuisto 20 C
SF-00170 Helsinki
Finland

1. INTRODUCTION

The conventional attitude to classical mechanics is to regard it as the theory of propagation of individual trajectories in the multi-dimensional phase space of classical systems. For N degrees of freedom this space has $6N$ dimensions, but with precisely specified initial conditions one unique trajectory is singled out, which from a given point determines the path for all future times.

The recent work on non-linear mechanical systems has brought home to the physicists an inherent instability in mechanical systems. It has become accepted that even a few degrees of freedom may suffice to give rise to an unpredictable time evolution; this is called chaos in the literature. This new direction of classical mechanics is now well known [1] and I do not intend to discuss it in detail here.

Another aspect of classical mechanics has been with us for a long time, but usually it has not been seen as a branch of mechanics. It concerns the behaviour of a bundle of trajectories which, emerging from a set of initial points in phase space, branch out according to the laws of dynamics. This philosophy formed the starting point for Gibbs' ensemble approach to statistical mechanics [2]. He considered the thermodynamic behaviour of macroscopic bodies to be a consequence of purely dynamical effects, when observations are restricted to ensemble averages only. He considered this as a branch of rational mechanics, and his point of view has been extremely successful in statistical mechanics. Later its foundations have been connected with the problem of ergodicity [3], which may or may not be of relevance for thermophysics.

The physics of accelerator design [4] has been concerned with the motion of assemblies of

particles. In the first approximation the stability of a device depends only on the total phase space of trapped orbits, and an investigation using swarms of independent particles can be carried out. Sooner or later, however, the charged particles start to influence each other's motion to an extent which makes a full many-body calculation necessary.

There are several reasons why one may wish to follow particle swarms in phase space. One is introduced in connection with the Hamilton-Jacobi formulation of mechanics. This, in fact, deals with bundles of trajectories instead of individual orbits. In Sec. 2 we will review this aspect of classical mechanics. A distribution of systems over different initial states gives directly the motion of a swarm of points in phase space. Modern mechanics has developed an abstract mathematical framework [5], but here I outline the main ideas without the formal apparatus of mathematics.

If the distribution of initial states is comprehensive enough, we arrive at Gibbs' statistical mechanics, which can be formulated as a flow of matter in phase space. This is usually done with the aid of measure theory [6], but in Sec. 3 we choose a different approach leading to a formulation of the dynamics of a swarm of systems as a set of coupled field equations. This is equivalent with the ordinary Hamilton-Jacobi theory.

If the mechanical system under consideration is not closed but affected by influences from an unknown external agent, we cannot give a completely deterministic description even of one single system. Then one usually adopts some assumption of stochasticity and lets the time evolution be influenced by forces containing random parameters. Because their values can be given by probability distributions only, the trajectory in phase space will branch according to the values of the random forces, and each trajectory will carry its own probability measure. Thus even with unique initial conditions, the description of a system requires an ensemble to verify the predictions. This ensemble can be regarded as represented by an assembly of systems with identical initial conditions but a branching set of trajectories. In Sec. 4 we consider briefly the Langevin theory of additive random forces, and in Sec. 5 we discuss the description of the time evolution with a general force depending on one or more random parameters.

2. Dynamics of mechanical systems

It is well known from Newtonian mechanics that classical dynamics can be described on a vector field giving the velocity at each point in configuration space $\vec{v}(\vec{r})$. Given the Lagrangian and an initial vector, a time-evolution curve follows and, conversely, given any continuous and

differentiable curve, a corresponding dynamical system can be constructed.

The field of velocity vectors can be regarded as a set of contravariant vectors, which under a transformation of coordinates change according to

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \dot{q}_j . \quad (1)$$

The subscripts $\{i\}$ range over the dimensions of configurations space and the repeated index in Eq. (1) is summed over. This convention will be followed in all our equations. Using modern nomenclature we call the field $\{q, \dot{q}(q)\}$ a *tangents bundle* over the space $M = \{q\}$ with the tangent space $TM = \{\dot{q}\}$. This point of view leads to the *fiber bundle* formulation of dynamics.

If a set of initial conditions are given as a sheet Σ on the field $\{q, \dot{q}\}$ the Lagrange function $L(q, \dot{q})$ determines the drift of this sheet through the field by the equation of motion

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} . \quad (2)$$

If we define the new variables

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3)$$

and carry out the Legendre transformation

$$H = \dot{q}_i p_i - L \quad (4)$$

the differential of the function H becomes

$$\begin{aligned} dH &= d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - dL \\ &= d\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i , \end{aligned} \quad (5)$$

where we have used the Eqs. (2) and (3). We conclude that the function H depends only on q and p and, after having solved the relation (3) with respect to \dot{q} and inserted this into (4), we obtain a new function $H(q, p)$ which is called the Hamiltonian. Its partial derivatives from (5) determine the trajectories in the *phase space* $\{q, p\}$.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (6)$$

The new space, the phase space, contains a field of covariant vectors $\{p\}$ which transform according to

$$P_j = \frac{\partial}{\partial Q_j} L = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \frac{\partial}{\partial q_i} L = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} p_j . \quad (7)$$

The space $\{p\}$ is the cotangent space T^*M on M . The Hamiltonian description of the dynamic time evolution in phase space $\{q, p\}$ is consequently the *cotangent bundle* corresponding to the tangent bundle of the Lagrange description.

For the time evolution between two times we define the action function

$$\begin{aligned} S(t, t_0) &= \int_{t_0}^t L(q(t'), \dot{q}(t')) dt' \\ &= \int_{t_0}^t (p_i \dot{q}_i - H) dt' \end{aligned} \quad (8)$$

which is defined on the tangent or cotangent bundle respectively.

When the action is regarded as a function of its upper time limit and we take the derivative with respect to this we obtain

$$dS = \frac{dS}{dt} dt = p_i dq_i - H dt . \quad (9)$$

This shows that S is a function of the position variables q and time only. The partial derivatives are

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} ; \quad H = - \frac{\partial S}{\partial t} . \quad (10)$$

Because of the second Eq. (6) the partial derivatives (10) satisfy the necessary integrability condition, and the function S can be obtained from (8).

The action $S = S(q, t)$ is a time dependent field which according to the first of Eqs. (10) determines the momenta uniquely. Hence this field suffices to describe the dynamics fully. It can be obtained by solving the partial differential equation which follows from (10)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) = 0 . \quad (11)$$

Using the field S , we can describe the whole of classical mechanics as a flow of matter in configuration space. The particle trajectories follow from this as the individual flow lines follow from hydrodynamics. This will be shown in the next section.

3. The Hamilton-Jacobi fluid

We consider the problem of an assembly of particles or systems described by their Hamiltonian equations of motion in phase space. The individual systems are identified by Greek indices and the swarm is defined by a set of initial conditions

$$\begin{aligned} q_i^{(\alpha)}(t=0) &= \bar{q}_i(\alpha) \\ p_i^{(\alpha)}(t=0) &= \bar{p}_i(\alpha) . \end{aligned} \quad (12)$$

In order not to clutter up the equations with indices, we omit the indices $\{i\}$ of the configurations space dimensions whenever no confusion is likely.

We solve the Hamiltonian equations (6) with the initial conditions (12) and obtain the bundle of trajectories

$$\begin{aligned} q_i^{(\alpha)} &= q_i(t, \bar{q}(\alpha), \bar{p}(\alpha)) \\ p_i^{(\alpha)} &= p_i(t, \bar{q}(\alpha), \bar{p}(\alpha)) . \end{aligned} \quad (13)$$

The flow of these points in phase space is equivalent with the ensemble description of statistical mechanics that Gibbs introduced. Here we keep the assembly of systems discrete instead of going over to a continuum description. In this way, we avoid the unnecessary complications introduced by measure theoretical subtleties in conventional treatments. Ensemble averages over the assembly can be calculated by the distribution function

$$\rho(q, p, t) = \sum_{\alpha} \delta(q - q^{(\alpha)}) \delta(p - p^{(\alpha)}) . \quad (14)$$

This is correctly normalized to N , the number of systems in the assembly. Its equation of motion can be derived directly by taking the derivative

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= \sum_{\alpha} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial q} \delta(q - q^{(\alpha)}) \left(-\frac{\partial H}{\partial p}(q^{(\alpha)}, p^{(\alpha)}) \right) \delta(p - p^{(\alpha)}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\delta(q - q^{(\alpha)}) \frac{\partial}{\partial p} \delta(p - p^{(\alpha)}) \frac{\partial H}{\partial q}(q^{(\alpha)}, p^{(\alpha)}) \right] \right\} \\
&= -\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \rho \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \rho \right) .
\end{aligned} \tag{15}$$

The presence of the delta-functions allows us to take the derivatives of the Hamiltonian outside the summation over the assembly index α . Rearranging this equation we obtain the conventional result

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial \rho}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial \rho}{\partial q} = \{H, \rho\} ,
\tag{16}$$

which defines the Poisson bracket $\{H, \rho\}$. This equation is called the Liouville equation. Notice that the derivatives of H can be taken outside the derivation operators, because the corrections cancel exactly. The two forms Eqs. (15) and (16) are identical only for purely Hamiltonian time evolutions.

In every case, the form (15) can be interpreted as a continuity equation in phase space; the probability flows as an incompressible fluid. It is, however, less well known that the dynamic flow can also be described as an incompressible flow in configuration space. To show this we utilize the action field S to eliminate the dependence on p from the phase space density. We have

$$\begin{aligned}
\rho(q, p, t) &= \sum_{\alpha} \delta(q - q^{(\alpha)}) \delta\left(p - \frac{\partial S(q^{(\alpha)}, t)}{\partial q}\right) \\
&= \delta\left(p - \frac{\partial S(q, t)}{\partial q}\right) \tilde{\rho}(q, t) ,
\end{aligned} \tag{17}$$

where the density in configuration space is given by

$$\tilde{\rho}(q, t) = \sum_{\alpha} \delta(q - q^{(\alpha)}) .
\tag{18}$$

To obtain its equation of evolution we calculate

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\rho}}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial q} \sum_{\alpha} \delta(q - q^{(\alpha)}) \frac{\partial H}{\partial p} \left(q^{(\alpha)}, \frac{\partial S(q^{(\alpha)}, t)}{\partial q} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial q} (\dot{q} \tilde{\rho}) ,
\end{aligned} \tag{19}$$

where again the delta-function has been used to take the velocity q outside the summation. The equations (19) and (11) form a set of coupled partial differential equations for the two fields S and $\tilde{\rho}$ defined on the configuration space. Equation (19) shows that the dynamical evolution is the flow of an incompressible fluid in configuration space, when the velocity field is determined by the action field according to

$$\dot{q}_i(q, t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(q, \frac{\partial S(q, t)}{\partial q} \right) . \quad (20)$$

This formulation has been called the Hamilton-Jacobi fluid description of particle mechanics [7], which it is completely equivalent with, but no reference to the individual particle trajectories need to be made once the equations are derived.

4. Langevin mechanics

In the Introduction, I mentioned the possibility to add randomness to the deterministic time evolution of classical mechanics as a way to represent the influence of an unspecified environment. The simplest way to do this is known as the introduction of a Langevin force, which is added directly to the mechanical force derivable from a Hamiltonian [8]. The equation of motion will then change to become

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + \lambda . \quad (21)$$

The correlation function of the random forces is taken to be of the form

$$\overline{\lambda(t)\lambda(t')} = 2D(q, p)g(t - t') , \quad (22)$$

where the time dependence $g(t - t')$ is mostly taken to be a delta-function; the random noise has an infinitely short correlation time. The use of a fluctuation-dissipation theorem shows that the Langevin force implies an accompanying damping of the motion, and conversely damping always implies fluctuations [9]. The effects of the environment are seen as damping and fluctuations.

In the general case, the diffusion coefficient in (22) will depend on the variables q, p of phase space. In many instances this dependence can be eliminated by a simple transformation. The Fourier transform of the correlation function is proportional to the noise spectrum (the Wiener-Khintchine theorem), and hence the noise power is proportional to the diffusion coefficient D .

Thus it must inherently be a positive quantity, and this fact can be utilized to simplify the problem [10]. We illustrate the method for a system with one degree of freedom only.

Define the function $\Delta(q, p)$ by setting

$$D(q, p) = \Delta^2(q, p) . \quad (23)$$

We introduce the new coordinates Q and P by the definitions

$$dP = \frac{dp}{\Delta(q, p)} ; \quad dQ = \Delta(q, p)dq , \quad (24)$$

which can be integrated straightforwardly. We also introduce the new random force $f(t)$ with the properties

$$\lambda(t) = \Delta(q, p)f(t) \quad (25)$$

$$\overline{f(t)f(t')} = 2g(t - t') . \quad (26)$$

When these definitions are introduced into Eqs. (21) we obtain

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} + f , \quad (27)$$

and the Langevin forces have acquired the simple form (26). When the equations (24) can be integrated without complications, they give a canonical transformation because the equations of motion (27) are left unchanged. In the more complicated cases the manipulations are the same, but much more attention has to be given to the conditions under which the procedure is mathematically sound.

When the force in (26) is, in addition, delta correlated we arrive at a problem that has received much attention. I do not intend to pursue it further but the reader is referred to the literature [8] - [10].

Example. To illustrate the use of Langevin forces I discuss a simple example. Let the mechanical force be zero in Eq. (27), viz. the Hamiltonian is independent of position. Then we can integrate the equation directly and calculate the mean square deviation of the momentum over a time t . We obtain

$$\overline{P^2(t)} = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \overline{f(t') f(t'')} . \quad (28)$$

Consequently, the rate of growth of the momentum follows directly from the correlation function $g(t - t')$ in Eq. (26). To see what happens we assume a model where the random force $f(t)$ jumps between the two constant values $+F$ and $-F$ with a rate Γ . It is then easy to show [9] that the correlation function is given by

$$\overline{f(t') f(t'')} = F^2 e^{-2\Gamma|t' - t''|} , \quad (29)$$

which inserted into (28) gives

$$\begin{aligned} \overline{P^2(t)} &= \int_0^t dt' \frac{F^2}{2\Gamma} (2 - e^{-2\Gamma t'} - e^{-2\Gamma(t-t')}) \\ &= \frac{F^2}{\Gamma} \left(t - \frac{1}{2\Gamma} + \frac{e^{-2\Gamma t}}{2\Gamma} \right) . \end{aligned} \quad (30)$$

For times much longer than the correlation time $1/\Gamma$ the right hand side of Eq. (30) acquires the diffusion form $2Dt$ with the diffusion constant given by

$$D = \frac{F^2}{2\Gamma} . \quad (31)$$

In this example, we can see the emergence of the diffusion limit and the role of the correlation time of the noise. These features are central to the more complex applications of random Langevin forces.

5. Random Hamiltonians

According to the treatment of Eqs. (21), we can consider the discussion in the previous Section as the special case when the random parameter $f(t)$ occurs linearly in the Hamiltonian. In the more general case there appears in the Hamiltonian a parameter σ which takes on a set of values at random. These may form a discrete or continuous set. Our notation will conform to the case of a discrete random variable, but changing sums into integrals we can take over our results to the continuous case. The parameter σ can also be taken to denote a set of random parameters without change of notation.

While the parameter σ stays constant, the time evolution is given by Eqs. (6) with the Hamiltonian fixed by the value of σ . Hence, the time evolution of an assembly of particles will be given by the Liouville equation

$$\frac{\partial \rho_\sigma}{\partial t} = \frac{\partial H_\sigma}{\partial q} \frac{\partial \rho_\sigma}{\partial p} - \frac{\partial H_\sigma}{\partial p} \frac{\partial \rho_\sigma}{\partial q} = \{H_\sigma, \rho_\sigma\} . \quad (32)$$

When the stochastic parameter σ jumps in a short time, the change of the probability distribution $P(\sigma)$ is supposed to transform according to the rules of a Markov process [11]

$$P(\sigma, t + dt) = P(\sigma, t)(1 - \Gamma(\sigma)dt) + \sum_{\xi} W(\sigma|\xi)\Gamma(\xi)dt P(\xi, t) , \quad (33)$$

where the left hand side is the probability distribution after the jump. The first term is the probability of no jump in the interval dt , and the second term is the probability Γdt of jumping and the function W gives the redistribution of probabilities assuming a jump has occurred.

Dividing by dt we can derive the master equation for the probabilities from (33). Summing over all values of the stochastic parameter and invoking the conservation of probabilities we can derive the condition

$$\sum_{\xi} W(\xi|\sigma) = 1 . \quad (34)$$

We can derive a time evolution operator for the equation (32), which propagates the initial distribution in time as long as the stochastic parameter remains constant. Solving the equations of motion for an assembly of particles we find the phase space distribution

$$\rho_\sigma(q, p, t, t_0) = \sum_{\alpha} \delta(p - p^{(\alpha)}(t_0) - \Delta p_\sigma^{(\alpha)}) \delta(q - q^{(\alpha)}(t_0) - \Delta q_\sigma^{(\alpha)}) , \quad (35)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta p^{(\alpha)} &= p^{(\alpha)}(t) - p^{(\alpha)}(t_0) \\ \Delta q^{(\alpha)} &= q^{(\alpha)}(t) - q^{(\alpha)}(t_0) . \end{aligned} \quad (36)$$

The time evolution of the assembly can then be written in the form

$$\begin{aligned} \rho_\sigma(q, p, t, t_0) &= e^{\mathcal{L}_\sigma(t, t_0)} \rho(q, p, t_0) \\ &\equiv K_\sigma(t, t_0) \rho(q, p, t_0) , \end{aligned} \quad (37)$$

where

$$\mathcal{L}_\sigma(t, t_0) = \sum_{\alpha} \left[\Delta p_\sigma^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial p^{(\alpha)}(t_0)} + \Delta q_\sigma^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial q^{(\alpha)}(t_0)} \right] . \quad (38)$$

In a way similar to the derivation in Eq. (15) one can show that (38) satisfies the equation (32).

The time evolution operators $K(t, t')$ can easily be shown to form a semi-group

$$\begin{aligned} K(t, t) &= 1 \\ K(t, t')K(t', t_0) &= K(t, t_0) \end{aligned} \quad (39)$$

even if the operator (38) is not a simple function of the arguments $(t - t_0)$.

We are now going to collect the histories of all trajectories evolving from a given initial distribution in phase space. We have to sum over all possible numbers of jumps in the time interval (t_0, t) with their proper weights. Firstly, the system may evolve without any stochastic jumps

$$\rho_\sigma^{(0)} = e^{-\Gamma(\sigma)(t-t_0)} K_\sigma(t, t_0) \rho(t_0) , \quad (40)$$

where the first factor is the probability of no jump in the interval (t_0, t) .

The next contribution comes from systems having experienced one jump at the intermediate time t' and no others. The jump occurs with the probability $\Gamma dt'$ and redistributes the values of the random parameter according to the function W . The phase space distribution becomes

$$\begin{aligned} \rho_\sigma^{(1)} &= \sum_{\xi} \int_{t_0}^t \Gamma(\xi) dt' e^{-\Gamma(\sigma)(t-t')} e^{-\Gamma(\xi)(t'-t_0)} \\ &\times K_\sigma(t, t') W(\sigma|\xi) K_\xi(t', t_0) \rho(t_0) \end{aligned} \quad (41)$$

To see a pattern emerge we write out the next contribution with 2 jumps at t' and t''

$$\begin{aligned} \rho_\sigma^{(2)} &= \sum_{\xi} \sum_{\eta} \int_{t_0}^t \Gamma(\xi) dt' \int_{t_0}^t \Gamma(\eta) dt'' \\ &\times e^{-\Gamma(\sigma)(t-t')} e^{-\Gamma(\xi)(t'-t'')} e^{-\Gamma(\eta)(t''-t_0)} \\ &\times K_\sigma(t, t') W(\sigma|\xi) K_\xi(t', t'') W(\xi|\eta) K_\eta(t'', t_0) \rho(t_0) . \end{aligned} \quad (42)$$

Summing over all possible histories we find the expression

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_\eta(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho_\eta^{(n)} \\ &= \rho_\eta^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t K_\eta(t, t') \sum_{\xi} W(\eta|\xi) \\ &\quad \times e^{-\Gamma(\eta)(t-t')} \Gamma(\xi) dt' \rho_\xi^{(n-1)}(t') .\end{aligned}\quad (43)$$

The interpretation is that the particle has evolved to time t' with $(n-1)$ jumps and experiences its last jump at this time. The final time t occurs at 3 places in the expression (43) and, calculating the derivative of the averaged distribution function, we obtain the contributions

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\rho}_\eta}{dt} &= -\Gamma(\eta)\bar{\rho}_\eta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} K_\eta(t, t) \sum_{\xi} W(\eta|\xi) \Gamma(\xi) \rho_\xi^{(n-1)}(t) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} K_\eta(t, t') \sum_{\xi} W(\eta|\xi) \rho_\xi^{(n-1)}(t') \Gamma(\xi) dt' \\ &= \sum_{\xi} \Gamma(\xi) W(\eta|\xi) \bar{\rho}_\xi(t) - \Gamma(\eta) \bar{\rho}_\eta(t) \\ &\quad - \frac{\partial H_\eta}{\partial p} \frac{\partial \bar{\rho}_\eta}{\partial q} + \frac{\partial H_\eta}{\partial q} \frac{\partial \bar{\rho}_\eta}{\partial p} .\end{aligned}\quad (44)$$

Comparing this with the equations (32) and (33) we can see that the distribution function evolves like the stochastic distribution with regard to the stochastic parameter and like the phase space distribution function as a function of the phase space variables. Abstractly, we write

$$\frac{d\rho}{dt} + \{\rho, H\} = W\rho , \quad (45)$$

where the right hand side denotes the stochastic time evolution operator. In this form the equation is identical to the corresponding quantum mechanical evolution equation [12], which has been used extensively in many areas of physics.

Example. To show the contents of the abstract equation (45) we write down the equation for the case of a dynamic force jumping between two constant values $+F$ and $-F$ with the rate Γ . This example was treated also in the previous section. We have a phase space distribution function with two components

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_+(q, p) \\ \rho_-(q, p) \end{bmatrix} . \quad (46)$$

The equation (45) takes the form

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_+}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial \rho_+}{\partial q} + F \frac{\partial \rho_+}{\partial p} &= -\Gamma \rho_+ + \Gamma \rho_- \\ \frac{\partial \rho_-}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial \rho_-}{\partial q} - F \frac{\partial \rho_-}{\partial p} &= -\Gamma \rho_- + \Gamma \rho_+\end{aligned}\quad (47)$$

Introducing the new distribution functions

$$P = \rho_+ + \rho_- ; \quad N = \rho_+ - \rho_- \quad (48)$$

we obtain the equations

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial P}{\partial q} + F \frac{\partial N}{\partial p} &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial N}{\partial q} + F \frac{\partial P}{\partial p} &= -2\Gamma N.\end{aligned}\quad (49)$$

We can see that only the latter equation contains a damping term. After times long compared with the correlation time $1/\Gamma$, the function N is expected to settle down to its instantaneous value determined by the value of P . The rapidly relaxing variable N is said to follow the slow variable P *adiabatically*, and it can be eliminated if we look at time scales much longer than the correlation times [13]. After this time we also expect any initial inhomogeneity to have become smeared out, and we can neglect the position dependence of the distribution functions.

We let the variable N relax to its instantaneous value and solve this from the second equation in (49)

$$N = -\frac{F}{2\Gamma} \frac{\partial P}{\partial p}. \quad (50)$$

When (50) is inserted into the first equation in (49) we obtain the result

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{F^2}{2\Gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial p^2}. \quad (51)$$

Because the function P is the total distribution function in momentum space irrespective of the value of the random parameter, the equation (51) describes a simple diffusion process with its diffusion constant agreeing with the one (31) derived for the same model in Sec. 4. Our two different treatments of the same limit, viz. times much longer than the correlation time, have produced identical results. The Langevin problem posed in Sec. 4 is equivalent with the Fokker-Planck equation derived in this section.

Our treatment here has been based on the assumption that the random variable takes a discrete set of values. The limit of a continuous distribution is easily taken in Eq. (44). Then an equation similar to the Boltzmann transport equation emerges. If the random influence derives from many small jumps with a short correlation time, a Fokker-Planck operator can be used for W on the right hand side of (45). The derivation may be patterned along the lines we have used to obtain the diffusion equation (51). All these types of random operators have been used widely in physics to describe the motion of swarms of particles.

References

- [1] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman: Regular and Stochastic Motion, (Springer-Verlag, 1983).
- [2] H.J. Gibbs: Elementary Principles in Statistical Mechanics, (Published originally 1902; Dover, 1960).
- [3] Ya.G. Sinai: Introduction to Ergodic Theory, (Princeton, 1976).
- [4] J.D. Lawson: The Physics of Charged Particle Beams, (Clarendon Press, 1977).
- [5] V.I. Arnold: Mathematical Methods of Classical Mechanics, (Springer-Verlag, 1978).
- [6] V.I. Arnold and A. Avez; Ergodic Problems of Classical Mechanics, (Benjamin, 1968).
- [7] Ph. Blanchard, Ph. Combe and W. Zheng: Mathematical and Physical Aspects of Stochastic Mechanics, (Springer-Verlag, 1987).
- [8] N. Wax: Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, (Dover, 1954).
- [9] N.G.v. Kampen: Stochastic Processes in Physics and Chemistry, (North-Holland, 1981).
- [10] H. Risken: The Fokker-Planck Equation, (Springer-Verlag, 1984).
- [11] N.V. Prabhu: Stochastic Processes, (Macmillan, 1965).
- [12] S. Stenholm, in Essays in Theoretical Physics, Ed. W.E. Parry, page 247, (Pergamon, 1984).
- [13] C.W. Gardiner: Handbook of Stochastic Processes, (Springer-Verlag, 1983).

ELEMENTTIMENETELMÄN KOKOAMISPROSESSISTA, KUN VAPAUSAS- TEIDEN VÄLILLÄ ON RAJOITUSYHTÄLÖITÄ

Jukka Aalto ja Djebar Baroudi
Teknillinen korkeakoulu

1 JOHDANTO

Artikkelissa tarkastellaan elementtimenetelmän kokoamisprosessia, kun alkuperäisten systeemivapausasteiden välillä esiintyy lineaarisia rajoitusyhtälöitä. Tarkastelun kohteeksi on otettu staattinen, lineaarinen, siirtymämenetelmän mukainen rakenteiden mekaniikan problema. Sille johdetaan virtuaalisen työn periaatteella kaavat, joilla voidaan koota suoraan elementtien jäykkyysmatriisi ja kuormitusvektorien alkioista systeemin jäykkyysmatriisi ja kuormitusvektori yhtälöryhmälle, jossa tuntemattomina on ainoastaan riippumattomia siirtymäsuureita. Artikkelissa esitetään myös kolme FORTRAN-kielistä aliohjelmaa, joilla kokoaminen voidaan tehokkaasti suorittaa. Ohjelmat tallettavat systeemin jäykkyysmatriisiin ns. "ääriiviiva"-tallitusmuotoon (engl. "skyline") ja ovat yhteensovivia lähteen [3] yhtälöryhmän ratkaisijan COLSOL kanssa. Vaikka tässä on käsitelty vain systeemin jäykkyysmatriisin ja kuormitusvektorin kokoamista, soveltuват esitetyt tulokset muidenkin vastaavien matriisien ja pystyvektorien kokoamiseen ja vaikka tarkastelut on tehty rakenteiden mekaniikan hengessä, ovat ne sellaisenaan käyttökelpoisia muillakin elementtimenetelmän sovellusalueilla.

2 ELEMENTTI- JA SYSTEEMIVAPAUSASTEIDEN YHTEENSOPIVUUS

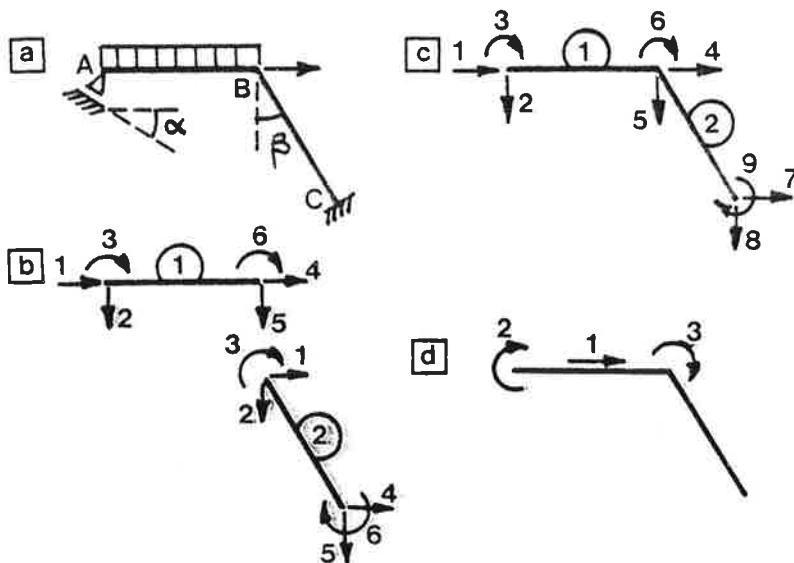
Rakenteen *alkuperäisellä systeemivapausasteella* ymmärretään tässä jokaista systeemin erillisä vapausastetta, joka yhtyy vähintään yhden elementin johonkin elementtivapausasteeseen. Kullekin elementtivapausasteelle δ_r^e voidaan näin kirjoittaa

$$\delta_r^e = \delta_i, \quad (1)$$

missä r on ao. elementin e elementtivapausastenumero ja i on vastaava systeemivapausaste-numero. Elementtivapausasteiden ja alkuperäisten systeemivapausasteiden väliset yhteenso-pivuusehdot ovat näin muotoa

$$\delta^e = \mathcal{A}^e \delta \quad e = 1, \dots, E, \quad (2)$$

missä δ^e on elementtivapausasteiden (m^e kpl) muodostama pystyvektori, δ on alkuperäisten systeemivapausasteiden (M kpl) muodostama pystyvektori ja \mathcal{A}^e on näiden välinen ns. *yhteensoviva-eli konnektiivisuusmatriisi*. Sen alkiot ovat nollia ja ykkösiä siten, että kutakin elementtivapausastetta r ja siihen liittyvästä systeemivapausastetta i vastaavat termit ovat ykkösiä ja muut termit nollia.



Kuva 1. Esimerkkikehä.

Tarkastellaan esimerkinä kuvan 1a tasokehää. Sen elementtivapausasteet on esitetty kuvassa 1b ja alkuperäiset systeemivapausasteet kuvassa 1c. Ao. yhteensovivuusehdoiksi tulee

$$e = 1 : \delta_1^1 = \delta_1, \delta_2^1 = \delta_2, \delta_3^1 = \delta_3, \delta_4^1 = \delta_4, \delta_5^1 = \delta_5, \delta_6^1 = \delta_6,$$

$$e = 2 : \delta_1^2 = \delta_4, \delta_2^2 = \delta_5, \delta_3^2 = \delta_6, \delta_4^2 = \delta_7, \delta_5^2 = \delta_8, \delta_6^2 = \delta_9$$

ja yhteensovivuusmatriiseiksi saadaan

$$\mathcal{A}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jotta systeemin siirtymätila toteuttaisi kaikki tarvittavat yhteensovivuusehdot ja geometriste reunaehdot on alkuperäisten systeemivapausasteiden δ toteutettava joukko *sideyhtälöitä*, jotka otaksutaan tässä lineaarisiksi. Jos sideyhtälöitä on K kappaletta, voidaan valita $N = M - K$ ns. riippumatonta systeemivapausastetta siten, että alkuperäiset systeemivapausasteet δ_i voidaan lausua näihin liittyvien riippumattomien systeemivapausasteiden Δ_i lineaarisena lausekkeena muodossa

$$\delta = \mathbf{B}\Delta + \mathbf{c}, \quad (3)$$

missä Δ on riippumattomien systeemivapausasteiden muodostama pystyvektori. Matriisia B kutsutaan tässä *alkuperäisten ja riippumattomien systeemivapausasteiden väliseksi yhteensovittavuusmatriisiksi* ja pystyvektoria c *ao. yhteensovittavuuspystyvektoriksi*. Informaation antamisen B -matriisiin ja c -vektorin määrittämistä varten on tärkeä osa esitettävällä menetelmällä toimivan tietokoneohjelman lähtötietojen antamista. Voidaan joko antaa informaatio sideytälöistä [1], jonka avulla ohjelma automaatisesti valitsee riippumattomat systeemivapausasteet [2] sekä määrittää B -matriisiin ja c -vektorin, tai voidaan itse valita riippumattomat systeemivapausasteet ja antaa tieto B -matriisista ja c -vektorista sellaisenaan. Tässä käytetään jälkimmäistä tapaa, koska se on monissa tapauksissa erittäin havainnollinen.

Otaksutaan, että kuvan 1a rakenteen sauvat ovat aksiaalisesti jäykkä ja että sen tuki C saa pakkokiertymän ϕ_C . Sideytälöiden lukumäärä on näin $K = 6$ (tuki A: 1 kpl, tuki C: 3 kpl, sauvat 2 kpl), joten riippumattomien vapausasteiden lukumääräksi saadaan $N = M - K = 9 - 6 = 3$. Valitaan ne kuvan 1d mukaisesti. Alkuperäisten ja riippumattomien systeemivapausasteiden välille saadaan yhteydet

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \Delta_1, & \delta_4 &= \Delta_1, & \delta_7 &= 0, \\ \delta_2 &= \Delta_1 \tan\alpha, & \delta_5 &= -\Delta_1 \tan\beta, & \delta_8 &= 0, \\ \delta_3 &= \Delta_2, & \delta_6 &= \Delta_3, & \delta_9 &= \phi_C\end{aligned}$$

ja B -matriisiksi ja c -vektoriksi tulee näin

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\tan\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_C \end{Bmatrix}.$$

Yhdistämällä lausekkeet (2) ja (3) saadaan elementtivapausasteiden ja riippumattomien systeemivapausasteiden välisiksi yhteensovittavuusyhtälöiksi

$$\delta^e = A^e \Delta + b^e, \tag{4}$$

missä

$$A^e = \mathcal{A}^e B, \tag{5}$$

ja

$$b^e = \mathcal{A}^e c. \tag{6}$$

Kuvan 1 esimerkin tapauksessa saadaan

$$A^1 = \mathcal{A}^1 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\tan\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b^1 = \mathcal{A}^1 c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathcal{A}^2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tan\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^2 = \mathcal{A}^2 \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_C \end{Bmatrix}.$$

Matriisia \mathbf{A}^e kutsutaan tässä *elementtivapausasteiden ja riippumattomien systeemivapausasteiden väliseksi yhteensopivuusmatriisiksi* ja pystyvektoria \mathbf{b}^e *ao. yhteensopivuusvektoriksi*. Ne voitaisiin muodostaa myös suoraan kirjoittamalla elementtivapausasteiden ja riippumattomien systeemivapausasteiden väliset yhteensopivuusehdot (vrt. kuvat 1b ja 1d). Matriisin \mathbf{B} ja pystyvektorin \mathbf{c} muodostaminen ja antaminen tietokoneohjelmalle on kuitenkin jonkin verran selväpiirteisempi ja työmääräältään pienempi toimenpide.

3 KOKOAMISPROSESSIN KAAVAT

Johdetaan seuraavassa elementtimenetelmän kokoamisprosessin kaavat lineaariselle, staattiselle rakenteiden mekaniikan probleemalle, kun alkuperäisten ja riippumattomien systeemivapausasteiden välillä on yhteyks (3). Sovelletaan virtuaalisen työn periaatetta ja varustetaan virtuaalista siirtymätilaa vastaavat vapausasteet yläväkäsellä. Koska luvallisen virtuaalisen siirtymätilan verran muuttuneen siirtymätilan on toteutettava yhteensopivuusehdot ja geometriset reunaehdot, saadaan virtuaalista siirtymätilaa vastaaville vapausasteille kaavojen (2) ja (3) perusteella

$$\delta^e + \hat{\delta}^e = \mathcal{A}^e(\delta + \hat{\delta}) \Rightarrow \delta^e + \hat{\delta}^e = \mathcal{A}^e\delta + \mathcal{A}^e\hat{\delta} \Rightarrow \hat{\delta}^e = \mathcal{A}^e\hat{\delta} \quad (7)$$

ja

$$\delta + \hat{\delta} = \mathbf{B}(\Delta + \hat{\Delta}) + \mathbf{c} \Rightarrow \delta + \hat{\delta} = \mathbf{B}\Delta + \mathbf{c} + \mathbf{B}\hat{\Delta} \Rightarrow \hat{\delta} = \mathbf{B}\hat{\Delta}. \quad (8)$$

Elementeistä kertyvälle systeemin virtuaaliselle työlle saadaan

$$\hat{W}_1 = - \sum_{e=1}^E \left(\sum_{i=1}^{m^e} F_i^e \hat{\delta}_i^e \right) = - \sum_{e=1}^E \hat{\delta}^{eT} \mathbf{F}^e$$

ja kaavojen (7) ja (8) perusteella edelleen

$$\hat{W}_1 = -\hat{\Delta}^T \sum_{e=1}^E \mathbf{A}^{eT} \mathbf{F}^e, \quad (9)$$

jossa

$$\mathbf{F}^e \equiv \mathbf{K}^e \delta^e - \mathbf{R}^e, \quad (10)$$

missä \mathbf{K}^e on elementin jäykkyysmatriisi ja \mathbf{R}^e on elementin kuormitusvektori, joka pitää sisällään mahdollisten elementtiin kohdistuvan jakautuneen kuorituksen, elementin alkumuodonmuutostilan ja elementin alkujännitystilan vaikutukset. Kaavan (4) perusteella tästä saadaan

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e \Delta + \mathbf{K}^e \mathbf{b}^e - \mathbf{R}^e. \quad (11)$$

Sijoittamalla tämä virtuaalisen työn lausekkeeseen (9) saadaan sille lopulta

$$\hat{W}_1 = \hat{\Delta}^T (-\mathbf{K}\Delta + \mathbf{R}_C + \mathbf{R}_E), \quad (12)$$

missä

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^E \mathbf{A}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e, \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_C = - \sum_{e=1}^E \mathbf{A}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{b}^e, \quad (14)$$

$$\mathbf{R}_E = \sum_{e=1}^E \mathbf{A}^{eT} \mathbf{R}^e. \quad (15)$$

Otaksutaan, että systeemin vapausasteisiin saattaa liittyä ulkoisia vapausastevoimia, joita kutsutaan tässä *vapausastekuormiksi*. Tehtävän luonteesta riippuen on vapausastekuorinat tarkoituksenmukaista antaa joko riippumattomiin tai alkuperäisiin vapausasteisiin liittyvinä. Kytketään kuhunkin systeemin riippumattomaan ja alkuperäiseen vapausasteeseen tällainen vapausastekuorma ja käytetään niille vastaavasti merkintöjä P_i ja \mathcal{P}_i . Näiden voimien virtuaaliselle työlle saadaan lauseke

$$\hat{W}_2 = \sum_{i=1}^N P_i \hat{\Delta}_i + \sum_{i=1}^M \mathcal{P}_i \hat{\delta}_i = \hat{\Delta}^T \mathbf{P} + \hat{\delta}^T \mathcal{P} \quad (16)$$

ja kaavan (8) perusteella edelleen

$$\hat{W}_2 = \hat{\Delta}^T \mathbf{R}_P, \quad (17)$$

missä

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{P} + \mathbf{B}^T \mathcal{P}. \quad (18)$$

Virtuaalisen työn yhtälö

$$\hat{W} \equiv \hat{W}_1 + \hat{W}_2 = 0$$

saa kaavojen (12) ja (17) perusteella muodon

$$\hat{\Delta}^T (-\mathbf{K}\Delta + \mathbf{R}) = 0, \quad (19)$$

missä

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_C + \mathbf{R}_E + \mathbf{R}_P. \quad (20)$$

Sen tulee olla voimassa mielivaltaisen vektorin $\hat{\Delta}$ suhteen, joten saadaan

$$\mathbf{K}\hat{\Delta} = \mathbf{R}. \quad (21)$$

Tämä on systeemiyhtälöryhmä, josta riippumattomat systeemivapausasteet $\hat{\Delta}$ voidaan ratkaista. Kun nämä tunnetaan, voidaan alkuperäiset systeemivapausasteet määritellä kaavan (3) perusteella. Elementtien sisäisten suureiden määrittämistä varten saadaan elementtivapausasteet tämän jälkeen kaavan (2) perusteella.

Systeemin jäykkyysmatriisi \mathbf{K} ja kuormitusvektori \mathbf{R} voidaan siis muodostaa kaavojen (13), (14), (15), (18) ja (20) avulla. Kaava (13) ilmaisee systeemin jäykkyysmatriisin \mathbf{K} kokoamisprosessin elementtien jäykkyysmatriisien \mathbf{K}^e alkioista. Systeemin kuormitusvektori \mathbf{R} muodostuu kolmesta osasta:

- Kuormitusvektori \mathbf{R}_C syntyy alkuperäisten ja riippumattomien systeemivapausasteiden yhteensopivuusvektorin \mathbf{c} mahdollisten nollasta eroavien termien c_i vaikutuksesta. Tällaisia ovat mm. erilaiset pakkosiirtymät ja pakkosiirtymäerot. Kutsutaan sitä tässä *systeemin siirtymäkuormitusvektoriksi*. Sen kokoamisprosessin ilmaisee kaava (14).
- Kuormitusvektori \mathbf{R}_E syntyy elementtien kuormitusvektoreista \mathbf{R}^e . Kutsutaan sitä *systeemin elementtikuormitusvektoriksi*. Sen kokoamisprosessi on kaavan (15) mukainen.
- Kuormitusvektori \mathbf{R}_P aiheutuu mahdollisista sekä riippumattomiin, että alkuperäisiin systeemivapausasteisiin liittyvistä nollasta eroavista vapausastekuormista kaavan (18) mukaisesti. Sitä kutsutaan *pistekuormista aiheutuvaksi kuormitusvektoriksi*.

4 KOKOAMISPROSESSIN OHJELMOINNISTA

Elementtivapausasteiden ja alkuperäisten systeemivapausasteiden välisen yhteensopivuuden (vrt. kaavat (1) ja (2)) ilmaisemiseen tietokoneohjelmassa ei ole tarkoituksenmukaista käytettää runsaasti tilaa vieviä ja pääasiassa nolla-alkioita sisältäviä matriiseja \mathbf{A}^e . Kyseinen informaatio syötetään tietokoneelle antamalla vuorotellen kuhunkin elementtiin liittyvien alkuperäisten systeemivapausasteiden numerot sovitun elementtivapausastenumeroinnin mukaisessa järjestyksessä. Ne talletetaan kaksidimensioiseen taulukkoon NOVAP siten, että sen alkio NOVAP(IE,IVAP) antaa elementin IE elementtivapausastenumeroa IVAP vastaavan alkuperäisen systeemivapausastenumeron. Tällä tavoin säilytetään tiedot elementtivapausasteiden ja systeemivapausasteiden välisestä kytkenästä useimmissa elementtimenetelmäohjelmissa. Tiedot alkuperäisten ja riippumattomien systeemivapausasteiden yhteensopivuudesta ilmaitaan yksinkertaisesti yhteensopivuusmatriisin \mathbf{B} ja vektorin \mathbf{c} avulla. Suuresta pääosin nolla-alkioita sisältävästä matriisista \mathbf{B} on tarkoitukseenmukaista säilyttää vain nollasta eroavat alkiot. Informaatio niistä syötetään tietokoneelle antamalla riveittäin matriisin \mathbf{B} nollasta eroavien alkioiden sarakenumerot ja arvot (sitent, että myös näiden lukumäärä kullakin rivillä saadaan lasketuksi). Näitä tietoja säilytetään yksidimensioisissa taulukoissa NALKI, NOSAR ja B. Taulukon NALKI alkio NALKI(I) ilmaisee matriisin \mathbf{B} alkuperäistä systeemivapausastetta I vastaavan rivin nollasta eroavien alkioiden lukumäärän. Taulukot NOSAR ja B sisältävät matriisin \mathbf{B} kunkin rivin nollasta eroavien alkioiden sarakenumerot ja arvot. Näiden taulukoiden käytön nopeuttamiseksi ohjelmiin on sisällytetty taulukko NOSO, joka sisältää matriisin \mathbf{B} kunkin rivin ensimmäisen nollasta eroavan alkion osoitteen taulukoissa NOSAR ja B. Ennen kokoamisohjelmien käyttämistä on taulukon NOSO alkiot laskettava oheisen tyypillisellä ohjelmaosuudella

```

IAPU=0
DO 10 I=1,NAL
NOSO(I)=0
IF(NALKI(I).GT.0)THEN
    NOSO(I)=IAPU+1
    IAPU=IAPU+NALKI(I)
ENDIF
10 CONTINUE,

```

missä NAL on alkuperäisten systeemivapausasteiden lukumäärä ja IAPU on apumuuttuja. Taulukko NOSO hyväksi käyttäen saadaan matriisin B I:nnen rivin JJ :ttä nollasta eroavaa alkiota vastaava osoite IOSO toteuttamalla sijoituskäsky $IOSO=NOSO(I)+JJ-1$ ja ao. sarakenumeron ja arvo ovat näin $NOSO(IOSO)$ ja $B(IOSO)$.

Kokoamisohjelmat on laadittu yhteensovivaksi lähteessä [3] esitetyn sangen yleisessä käytössä olevan yhtälöryhmän ratkaisuohjelman COLSOL kanssa. Niistä voidaan myös pienin muutoksin tehdä kokoamisohjelma samassa lähteessä esitettävä ominaisarvoratkaisijaa SSPAGE varten. Nämä ohjelmat edellyttävät matriisien tallennusta yksidimensioiseen taulukkoon ns. "ääriiviiva"-tallitusmuotoon [3].

Seuraavassa on kuvattu lyhyesti liitteissä 1, 2 ja 3 olevien kokoamisohjelmien DIANO, PISTE ja KOKOA toimintaa. Ne on pyritty laatimaan mahdollisimman selkeiksi ja yksinkertaisiksi, joten yksityiskohtaisempi toiminta selvinnee listaoksista. Aliohjelma DIANO määrittää systeemin jäykkyysmatriisin säilytystaulukon SK koon NSK ja taulukon NODI, joka sisältää jäykkyysmatriisin K diagonaalielelementtien numerot taulukossa SK. Aliohjelma PISTE lukee annetut nollasta eroavat alkuperäisiä ja riippumattomia vapausasteita vastaavat vapausastekuormat P_i ja P_i , muodostaa niistä ao. kuormitusvektorin R_P sekä tallentaa sen systeemin kuormitusvektorin R säilytystaulukkoon SR. Aliohjelma KOKOA kokooa systeemin jäykkyysmatriisin K sekä kuormitusvektorit R_C ja R_E . Se tallentaa systeemin jäykkyysmatriisin K taulukkoon SK ja lisää kuormitusvektorit R_C ja R_E taulukkoon SR (siellä ennestään olevan kuormitusvektorin R_P lisäksi). Ohjelma KOKOA kutsuu aliohjelmaa ELMAT, joka muodostaa vuorotellen kunkin elementin jäykkyysmatriisin K_e ja kuormitusvektorin R^e . Aliohjelma ELMAT on luonnollisesti riippuvainen käytettävistä elementtityypeistä. Ratkaisija COLSOL käynnistetään pääohjelmassa kutsulla

CALL COLSOL(SK,SR,NODI,NRI,NSK,NRI+1,1), *(OUT)*

missä SR on taulukko, joka sisältää ratkaisijaan mentäessä systeemin kuormitusvektorin ja siitä poistuttaessa yhtälöryhmän ratkaisun ts. systeemin riippumattomat vapausasteet ja NRI on systeemin riippumattomien vapausasteiden lukumäärä. Koska kokoamisohjelmissa on taulukot SK ja SR määritelty kaksinkertaisella tarkkuudella on ohjelman COLSOL vastaavat taulukot A ja V (vrt. [3] s.257) muutettava kaksoistarkkuudelle.

LÄHTEET

- [1] Köliö J., *Lineaaristen rajoitusyhtälöiden käytännön sovellutusesimerkkejä*, Rakenteiden mekaniikka 13 (1980) 10-13.
- [2] Robinson J., *Automatic selection of independent freedoms in constrained conditions with constant terms*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 29 (1981) 241-244.
- [3] Bathe K.-J. ja Wilson E. L., *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, 1976.

Liite 1: Aliohjelma DIANO.

```

C.....Systeemin jaykkysmatriisin sailytystaulukon koon ja diagonaali-
C -----
C elementtien numeroiden laskija-aliohjelma DIANO:
C -----
C Aliohjelma laskee systeemin jaykkysmatriisin sailytystaulukon
C SK koon NSK ja diagonaalielementtien numerot siina ja tallettaa
C ne taulukkoon NODI.
C Sisaanmenoparametrit:
C NELE elementtien lukumaara
C NAL alkuperäisten systeemivapausasteiden lukumaara
C NRI riippumattomien systeemivapausasteiden lukumaara
C NRI1 =NRI+1
C NOTYP elementtityyppinumerotaulukko
C NELVAP elementtivapausasteiden lukumaaratalukko
C NOVAP elementtien alkuperäisten systeemivapausaste-
C numeroiden taulukko
C NALKI taulukko, joka sisaltaa matriisin B kunkin rivin
C nollasta eroavien alkioiden lukumaarat
C NOSAR taulukko, joka sisaltaa matriisin B kunkin rivin
C nollasta eroavien alkioiden sarakenumerot
C NOSO taulukko, joka sisaltaa matriisin B kunkin rivin ensim-
C maisen nollasta eroavan alkion osoitteen taulukossa B
C Ulostuloparametrit:
C NSK systeemin jaykkysmatriisin sailytystaulukon koko
C NODI systeemin jaykkysmatriisin diagonaalielementtien
C numeroiden sailytystaulukko
C Parametrimuuttujat:
C MELTY maksimi elementtityyppien lukumaara
C MELVAP maksimi elementtivapausasteiden lukumaara
C MALKI maksimi nollasta eroavien alkioiden lukumaara taulukossa B
C .....MSK maksimi systeemin jaykkysmatriisin sailytystaulukon koko

      SUBROUTINE DIANO(NELE,NAL,NRI,NRI1,NOTYP,NELVAP,NOVAP
&,NALKI,NOSAR,NOSO,NSK,NODI)
      PARAMETER MELTY=5,MELVAP=6,MALKI=200,MSK=2500
      DIMENSION NOTYP(NELE),NELVAP(MELTY),NOVAP(NELE,MELVAP)
&,NALKI(NAL),NOSAR(MALKI),NOSO(NAL),NODI(NRI1)
      DO 10 IS=1,NRI
      NODI(IS)=1
10  CONTINUE
      DO 40 IELE=1,NELE
      MIN=0
      DO 20 IVAP=1,NELVAP(NOTYP(IELE))
      NOAL=NOVAP(IELE,IVAP)
      IF(NOAL.NE.0)THEN
          DO 15 II=1,NALKI(NOAL)
          IOSO=NOSO(NOAL)+II-1
          NORI=NOSAR(IOSO)
          IF(MIN.EQ.0.OR.NORI.LT.MIN)MIN=NORI
15  CONTINUE
      END IF
20  CONTINUE
      DO 30 IVAP=1,NELVAP(NOTYP(IELE))
      NOAL=NOVAP(IELE,IVAP)
      IF(NOAL.NE.0)THEN
          DO 25 II=1,NALKI(NOAL)
          IOSO=NOSO(NOAL)+II-1
          NORI=NOSAR(IOSO)
          IF(NORI-MIN+1.GT.NODI(NORI))NODI(NORI)=NORI-MIN+1
25  CONTINUE
      END IF
30  CONTINUE
40  CONTINUE
      DO 50 IS=2,NRI
      NODI(IS)=NODI(IS)+NODI(IS-1)
50  CONTINUE
      DO 60 IS=NRI1,2,-1
      NODI(IS)=NODI(IS-1)+1
60  CONTINUE
      NSK=NODI(NRI1)-1
      IF(NSK.GT.MSK)THEN
          WRITE(*,'(A,I2,A)')' Jaykkysmatriisi liian suuri (>',MSK,')'
          STOP
      END IF
END

```

Liite 2: Aliohjelma PISTE.

```

C.....Vapausastekuormien lukija ja kasittelija-aliohjelma PISTE:
C -----
C   Alichjelma lukee annetut aikuperaisia ja riippumattomia
C   systeemivapausasteita vastaavat vapausastekuormat ja
C   muodostaa niista ao. kuormitusvektorin Rp sekä tallettaa
C   sen taulukkoon SR.
C   Sisaanmenoparametrit:
C     NRI    systeemin riippumattomien vapausasteiden lukumaara
C     NAL    systeemin alkuperaisten vapausasteiden lukumaara
C     NALKI  taulukko, joka sisaltaa matriisin B kunkin riven
C           nollasta eroavien alkioiden lukumaarat
C     NOSAR  taulukko, joka sisaltaa matriisin B kunkin riven
C           nollasta eroavien alkioiden sarakenumerot
C     NOSO   taulukko, joka sisaltaa matriisin B kunkin riven ensim-
C           maisen nollasta eroavan alkion osoitten taulukossa B
C     B      matriisin B nollasta eroavien alkioiden sailytystaulukko
C     C      pystyvektorin c sailytystaulukko
C   Ulostuloparametrit:
C     SR     systeemin riippumattomia vapausasteita vastaavaa kuormitus-
C           vektori
C   Parametrimuuttujat:
C.....MALKI  maksimi nollasta eroavien alkioiden lukumaara matriisissa B

SUBROUTINE PISTE(NAL,NRI,NALKI,NOSAR,NOSO,B,C,SR)
PARAMETER MALKI=200
CHARACTER*1 OK
DIMENSION NALKI(NAL),NOSO(NAL),NOSAR(MALKI),B(MALKI),C(NAL)
DOUBLE PRECISION SR(NRI)
10 CONTINUE
DO 20 IVAP=1,NRI
SR(IVAP)=0.
20 CONTINUE
WRITE(*,'(A)')
&'1ANNA alkuperaisia vapausasteita vastaavat vapausastekuormat:'
30 PRINT *,'Kuormien lukumaara'
READ (*,* ,ERR=30)NPIS
IF(NPIS.EQ.0)GOTO 60
40 PRINT *,'Vap.no Kuorma'
DO 50 IPIS=1,NPIS
READ(*,* ,ERR=40)IVAP,P
DO 50 JJ=1,NALKI(IVAP)
JOSO=NOSO(IVAP)+JJ-1
JVAP=NOSAR(JOSO)
SR(JVAP)=SR(JVAP)+B(JOSO)*P
50 CONTINUE
60 CONTINUE
WRITE(*,'(A)')
&'1ANNA riippumattomia vapausasteita vastaavat vapausastekuormat:'
70 PRINT *,'Kuormien lukumaara'
READ (*,* ,ERR=70)NPIS
IF(NPIS.EQ.0)RETURN
80 PRINT *,'Vap.no Kuorma'
DO 90 IPIS=1,NPIS
READ(*,* ,ERR=80)IVAP,P
SR(IVAP)=SR(IVAP)+P
90 CONTINUE
WRITE(*,'(A)')'0Vapausastekuormat OK? (K tai E)'
READ(*,'(A)')OK
IF(OK.NE.'K'.AND.OK.NE.'K')GOTO 10
END

```

Liite 3: Aliohjelma KOKOA.

```

C.....Systeemin jaykkyysmatriisiin ja kuormitusvektorin kokoaja-
C -----
C aliohjelma KOKOA:
C -----
C Aliohjelma kokoaa systeemin jaykkyysmatriisiin ja lisaa systee-
C min kuormitusvektoriin elementeista tulevan osuuden. Systeemin
C symmetrisesta jaykkyysmatriisista talletetaan vain sen diagonaa-
C lin yläpuoleinen osa ns. "skyline"-talletusmuotoon yksidimensi-
C oiseen taulukkoon SK. Elementeista systeemin kuormitusvektoriin
C tuleva osuus lisataan taulukkoon SR.
C Ohjelma kutsuu aliohjelmaa ELMAT, joka muodostaa vuorotellen
C kunkin elementin jaykkyysmatriisin ja kuormitusvektorin alkioit.
C Sisäanmenoparametrit:
C NELE elementtien lukumaara
C NAL systeemin alkuperäisten vapausasteiden lukumaara
C NRI systeemin riippumattomien vapausasteiden lukumaara
C NRII =NRI+1
C NSK systeemin jaykkyysmatriisin sailyytystaulukon alkioiden
C lukumaara
C NOTYP elementtiyypinumerotaulukko
C NELVAP elementtivapausasteiden lukumaaratalukko
C NOVAP elementtien alkuperäisten systeemivapausaste-
C numeroiden taulukko
C ELOM elementtiominaisuustaulukko
C NALKI taulukko, joka sisaltaa matriisin B kunkin rivin
C nollasta eroavien alkioiden lukumaarat
C NOSAR taulukko, joka sisaltaa matriisin B kunkin rivin
C nollasta eroavien alkioiden sarakenumerot
C NOSO taulukko, joka sisaltaa matriisin B kunkin rivin ensim-
C mäisen nollastaeroavan alkion osoitteeen taulukossa B
C B matriisin B nollasta eroavien alkioiden sailyytystaulukko
C Ulostuloparametrit:
C SK systeemin jaykkyysmatriisin sailyytystaulukko
C SR systeemin kuormitusvektorin sailyytystaulukko
C Sisäisia muuttujia:
C EK elementin jaykkyysmatriisi
C ER elememtin kuormitusvektori
C Parametrimuuttujat:
C MELTY maksimi elementtiyyprien lukumaara
C MELVAP maksimi elementtivapausasteiden lukumaara
C MELOM maksimi elementtiominaisuksien lukumaara
C.....MALKI maksimi nollasta eroavien alkioiden lukumaara B-matriisissa

SUBROUTINE KOKOA(NELE,NAL,NRI,NRII,NSK,NOTYP,NELVAP
&,NOVAP,NODI,ELOM,NALKI,NOSAR,NOSO,B,C,SK,SR)
PARAMETER MELTY=5,MELVAP=6,MELOM=12,MALKI=200
DIMENSION NOTYP(NELE),NELVAP(MELTY)
&,NALKI(NAL),NOSO(NAL),NOSAR(MALKI),B(MALKI),C(NAL)
&,NOVAP(NELE,MELVAP),NODI(NRII),ELOM(NELE,MELOM)
DOUBLE PRECISION EK(MELVAP,MELVAP),ER(MELVAP)
&,SK(NSK),SR(NRI)
DO 10 IS=1,NSK
SK(IS)=0.
10 CONTINUE
DO 50 IELE=1,NELE
CALL ELMAT(IELE,NELE,NOTYP,ELOM,EK,ER)
DO 50 IE=1,NELVAP(NOTYP(IELE))
IAL=NOVAP(IELE,IE)
IF(IAL.GT.0)THEN
DO 40 II=1,NALKI(IAL)
IOSO=NOSO(IAL)+II-1
IRI=NOSAR(IOSO)
IF(IRI.GT.0)THEN
SR(IRI)=SR(IRI)+B(IOSO)*ER(IE)
DO 30 JE=1,NELVAP(NOTYP(IELE))
JAL=NOVAP(IELE,JE)
IF(JAL.GT.0)THEN
DO 20 JJ=1,NALKI(JAL)
JOSO=NOSO(JAL)+JJ-1
JRI=NOSAR(JOSO)
IF(JRI.GE.IRI)THEN
ISK=NODI(JRI)+JRI-IRI
SK(ISK)=SK(ISK)+B(IOSO)*EK(IE,JE)*B(JOSO)
END IF
20 CONTINUE
SR(IRI)=SR(IRI)-B(IOSO)*EK(IE,JE)*C(JAL)
END IF
30 CONTINUE
END IF
40 CONTINUE
END IF
50 CONTINUE
END

```

A SUPG FINITE ELEMENT METHOD FOR CONVECTION-DIFFUSION EQUATION USING TRANSFORMATION TO LOCAL COORDINATES

Jouni Freund
Helsinki University of Technology

1 INTRODUCTION

The purpose of this paper is to present the underlying ideas of streamline-upwind Petrov-Galerkin methods (SUPG) used in solving convection-diffusion type equations. The non-self-adjointness of the problem gives rise to many difficulties and only after the discovery of SUPG method there exists a simple finite element method for the problem. First the weak form employed in the discretization of the problem is discussed shortly. Thereafter two slightly different methods applicable for linear and bilinear element types are presented.

1.1 Convection-diffusion boundary value problem

The steady convection-diffusion boundary value problem can be written as

$$(k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta})_{,\alpha} - (u_\alpha\Phi)_{,\alpha} - c\Phi + f = 0 \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\Phi - g = 0 \quad \vec{x} \in \Gamma_g, \quad (2)$$

$$n_\alpha k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta} - h = 0 \quad \vec{x} \in \Gamma_h, \quad (3)$$

where Φ is the unknown function, u_α is the velocity vector, $k_{\alpha\beta}$ is the diffusivity tensor, c is the absorption coefficient and f the source term. In the boundary conditions g and h are given functions and n_α is the outward unit normal to the boundary $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$. Index notation is used to shorten the otherwise rather lengthy expressions. The Einstein summation convention on repeated indices α and β is assumed in force. The equation system is presented without index notation in reference [1].

2 DISCRETIZATION OF THE PROBLEM

The equation system (1) ... (3) is not self-adjoint due to presence of first order derivatives. From the finite element method point of view the situation is not best possible, because a classical variational principle to be used in the discretization of the problem is not available. A well-known fact is, that a variational principle makes a reliable starting point for a finite element method. However, a so called weak form of the problem can be employed. The original

problem is replaced by an integral statement (For a similar exposition in a one-dimensional case see for instance [2])

$$\begin{aligned}
 & \sum_e \int_{\Omega^e} w^1 [(k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta}),_\alpha - (u_\alpha\Phi),_\alpha - c\Phi + f] d\Omega + \\
 & + \sum_e \int_{\Omega^e} w^2 [(k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta}),_\alpha - (u_\alpha\Phi),_\alpha - c\Phi + f] d\Omega + \\
 & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} w^3 [n_\alpha k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta} - h] + \\
 & + \sum_e \int_{\Gamma_{int}^e} w^4 [n_\alpha k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta}] = 0. \tag{4}
 \end{aligned}$$

In the first and second rows field equation (1) is multiplied by a weighting function $w = w^1 + w^2$ and integrated over the domain Ω , which is divided into subdomains Ω^e called elements. The summation is over these elements. In the third row boundary condition (3) is multiplied by a weight function w^3 and integrated over the domain Γ_h . The last row consists of a jump condition, which should remain valid if there are discontinuities in the solution, multiplied by a weight function w^4 . The integration is over the internal boundary Γ_{int} where discontinuity is expected. The decision on what kind of jump condition is valid must be made on the physical basis of the problem. If some other condition seems to be more appropriate, modifications should be made in equation (4). We have not included boundary condition (2) in the weak form. Therefore the admissible function Φ has to satisfy this boundary condition in advance.

Before proceeding further, some reordering and decisions concerning the weighting functions must be made. In following we assume that the approximation for Φ is C^0 -continuous, the weight function w^1 is C^0 -continuous and w^2 is discontinuous over the element boundaries. Each function is supposed to be C^∞ -continuous elsewhere. Internal boundary Γ_{int} consists thus of the portions where elements meets in Ω .

When Greens identity is used elementwise in the first row of (4), an equation

$$\begin{aligned}
 & \sum_e \int_{\Omega^e} [-w_{,\alpha}^1 k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta} - w^1(u_\alpha\Phi),_\alpha - w^1c\Phi + w^1f] d\Omega + \\
 & + \sum_e \int_{\Omega^e} w^2 [(k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta}),_\alpha - (u_\alpha\Phi),_\alpha - c\Phi + f] d\Omega + \\
 & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} [(w^3 + w^1)n_\alpha k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta} - w^3h] d\Gamma + \\
 & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} w^1 [n_\alpha k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta}] d\Gamma + \\
 & + \sum_e \int_{\Gamma_{int}^e} (w^4 + w^1)[n_\alpha k_{\alpha\beta}\Phi_{,\beta}] d\Gamma = 0 \tag{5}
 \end{aligned}$$

is obtained. Now we choose $w^3 = -w^1$ on Γ_h , $w^4 = -w^1$ on Γ_{int} and $w^1 = 0$ on Γ_g . We get thus

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} [-w_{,\alpha}^1 k_{\alpha\beta} \Phi_{,\beta} - w^1 (u_\alpha \Phi)_{,\alpha} - w^1 c \Phi + w^1 f] d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} w^2 [(k_{\alpha\beta} \Phi_{,\beta})_{,\alpha} - (u_\alpha \Phi)_{,\alpha} - c \Phi + f] d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} w^1 h d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Equation (6) is the usual weak form employed in the discretization of the problem (1) ... (3). It can be found for example in references [3] and [4]. Most of the previous discussion can also be found in these references.

In finite element method the unknown function Φ is replaced by the finite element approximation

$$\tilde{\Phi} = \sum_J N_J \Phi_J, \quad (7)$$

where Φ_J are degrees of freedom for the approximation $\tilde{\Phi}$. In this particular case these parameters have a physical interpretation: They are the values of the approximation at the nodal points. The degrees of freedom related to nodal points on Γ_g must be given fixed values in order to satisfy the essential boundary condition. Shape functions N_J are defined elementwise usually by low order polynomials. When we demand equation (6) to be true for as many different selection of w^1 and w^2 as there are unknowns, a linear equation system is obtained, which can be solved using standard methods.

In following we choose weighting functions as $w^1 + w^2 = M_I$ and $w^1 = N_I$, where N_I are the same as in equation (7). In order to avoid awkward expressions we now make some simplifying but by no means necessary assumptions in equation (6) (see [3]): (a) The term consisting of second order derivatives can be neglected. This is reasonable at least when the shape functions N_I are linear, diffusion tensor $k_{\alpha\beta}$ is isotropic and when the elements are not very distorted. (b) Functions $c \equiv 0$ and $f \equiv 0$. These functions will have no effect on the character of the method. The problems arise largely from the convective terms, which cause instability in certain cases. (c) Velocity field is divergence-free. (d) Essential boundary condition (2) is given everywhere on Γ . This case is more difficult to solve numerically than the ones with natural type boundary conditions.

With these assumptions an expression for a typical coefficient in the linear equation system multiplying Φ_J in equation I is

$$K_{IJ} = \sum_e \int_{\Omega^e} [-N_{I,\alpha} k_{\alpha\beta} N_{J,\beta} - M_I u_\alpha N_{J,\alpha}] d\Omega, \quad (8)$$

or if an elementwise defined dimensionless coordinate system $x_{\alpha'}$ is used

$$K_{IJ} = \sum_e \int_{\Omega^e} [-N_{I,\alpha'} k_{\alpha'\beta'} N_{J,\beta'} - M_I u_{\alpha'} N_{J,\alpha'}] d\Omega, \quad (9)$$

where

$$k_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_{\beta'}}{\partial x_\beta} k_{\alpha\beta}, \quad (10)$$

$$u_{\alpha'} = \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial x_\alpha} u_\alpha. \quad (11)$$

In practice coefficients are evaluated using equation (9), because the shape functions obtain the simplest form in the coordinate system $x_{\alpha'}$. Coordinates x_α and $x_{\alpha'}$ are connected through the so called isoparametric transformation. When a numerical integration scheme is used, analytical expressions for the partial derivatives in (10) and (11) are not needed.

3 SUPG TYPE WEIGHT FUNCTIONS

The use of weak forms in contrast with variational principles in discretization of a boundary value problem has certain disadvantages. When a variational principle is employed in discretization no extra functions are needed. But as shown in the previous chapter, a weak form involves new functions, which are not directly related to the original problem.

We will restrict ourselves to the cases in which the shape functions are linear in one dimension and tensorial products of one-dimensional shape functions in multidimensional problems. For the sake of clarity coordinates $\alpha_1' = \xi$, $\alpha_2' = \eta$ and so on are used instead of index notation in some equations. The following discussions are motivated by [3] and [4], though the methods are presented in a somewhat different form.

In one-dimensional SUPG methods the weighting functions are related to shape functions N_I according to expressions

$$M_I = N_I + \tau m_\xi \frac{dN_I}{d\xi}. \quad (12)$$

The dimensionless parameter τ depends both on the element geometry and on the local form of the differential equation. m_ξ is a unit vector in the direction of flow in coordinate system ξ . The form of the second — discontinuous — part of these test functions is arbitrary. In fact any function with certain kind of antisymmetry will do.

If the original problem is self-adjoint ($u_\xi \equiv 0$), symmetric weight functions will make a good numerical method. In fact nodally exact values will be produced if the weight functions shown in Figure 1(a) are used no matter what is the value of f . The use of these symmetric weight functions means that both directions — towards $I - 1$ and towards $I + 1$ — are weighted equally. This is reasonable because the field equation is elliptic in nature. In a non-self-adjoint case, however, these Galerkin method weight functions often lead to wildly oscillating solutions. In a hyperbolic case ($k_{\xi\xi} \equiv 0$) nodally exact results can be achieved by the use of non-symmetric test functions like in Figure 1(b) even if f is included. In the pure convection case the use of these test functions will disregard all information from the downwind side of the typical node I as can be seen from the figure. Now when the field equation is somewhere between these extreme cases we can guess that good test functions should also be somewhere between the functions shown in Figures 1(a) and 1(b). This is achieved by adjusting the parameter τ in (12).

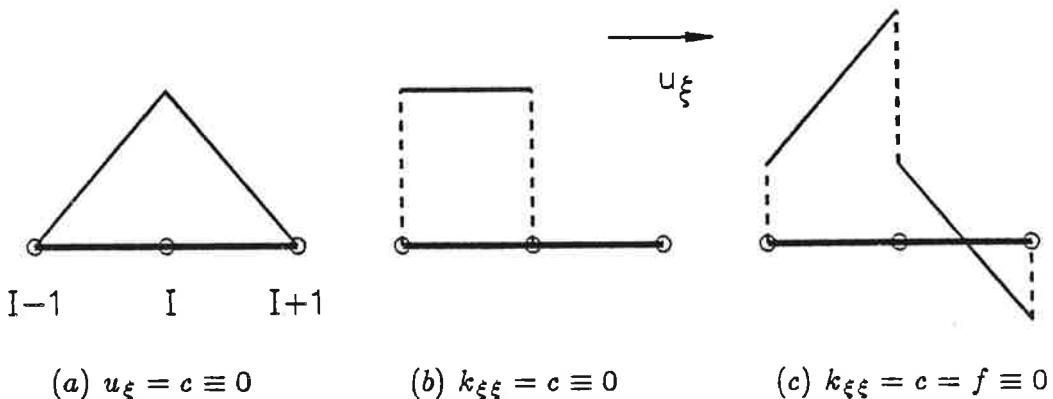


Figure 1. Suitable weight functions for different types of field equations.

After the selection of the suitable form of the test functions the next problem is the free parameter τ . Selection of the value of the parameter is discussed in references [3] and [4], and we do not reproduce it here. In any case the idea is to demand that the finite element method gives nodally exact solution for one-dimensional model problems when the absorption coefficient $c \equiv 0$, the source term $f \equiv 0$, the shape functions are linear and all the elements are identical. According to the reference, a suitable value is

$$\tau = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe}, \quad (13)$$

where

$$Pe = m_\xi u_\xi / k_{\xi\xi}. \quad (14)$$

Pe is the so called Peclet number which is a measure of relative amounts of convection and diffusion. It is easily verified that the Peclet number defined in this way is dimensionless.

Figures 1(a) and 1(c) show typical test functions for the extreme cases. The pure diffusion case $Pe = 0$ gives Galerkin type test functions and the pure convection one $Pe = \infty$ gives a test function, which is shifted upward on the upwind side of the node and downward on the downwind side of the node. Compared with the 'optimal' weight function in Figure 1(b), the behaviour is somewhat different and nodally exact solution will not be produced with an arbitrary f .

After this preliminary discussion of the SUPG method in one dimension we will discuss two slightly different ways to extend the method to multidimensional cases. Numerical solutions for an almost standard model problem are given to show the properties of these methods. Problem definition can be found in [1]. The only exception is that an additional boundary condition $\Phi = 0$ is given on the outflow boundary.

2.1 First formulation

If only one velocity component (say u_ξ) is non-zero, we can extend the one-dimensional formulation easily. For example, the test function for node I can be written as

$$M_I = [N_I(\xi) + \tau m_\xi \frac{\partial N_J(\xi)}{\partial \xi}] N_I(\eta). \quad (15)$$

The first term in brackets depends only on ξ and the second term on η . Evidently we don't need any modifications in η -direction because there is no flow in that direction. The situation holds true when the flow is exactly in some other coordinate direction. We just modify one part of the Galerkin type test function (Figure 1(a)) by adding a discontinuous term. When the flow direction is arbitrary we take a sort of combination of these test functions. The weight function for the node I is then

$$M_I = [N_I(\xi) + \tau m_\xi \frac{\partial N_I(\xi)}{\partial \xi}] [N_I(\eta) + \tau m_\eta \frac{\partial N_I(\eta)}{\partial \eta}]. \quad (16)$$

When the flow is exactly in one coordinate direction, expressions of the type (15) will be produced. To reveal the continuous part w^1 and the discontinuous part w^2 some reordering must be done. If the term which includes 'second order correction' $\tau\tau$ is disregarded, the weight functions can be formed conveniently as

$$u = \max(\text{abs}(u_{\alpha'})), \quad (17a)$$

$$m_{\alpha'} = u_{\alpha'}/u, \quad (17b)$$

$$k_{\alpha'\beta'} Pe_{\beta'} = u_{\alpha'}, \quad (17c)$$

$$Pe = Pe_{\alpha'} m_{\alpha'}, \quad (17d)$$

$$\tau = \coth(Pe) - 1/Pe, \quad (17e)$$

$$M_I = N_I + \tau m_{\alpha'} N_{I,\alpha'}. \quad (17f)$$

In steps (17a) and (17b) the velocity vector is divided by its length. The selection of the norm u of $u_{\alpha'}$ is quite arbitrary and could be replaced by any other norm. In this definition `max` and `abs` have the same meaning as standard FORTRAN functions MAX and ABS. Step (17c) is a straightforward extension of expression (14) and gives us the Peclet numbers for each coordinate direction once solved for these quantities. In step (17d) the Peclet number which is considered now as a vector is projected onto the direction of flow. Steps (17e) and (17f) complete the algorithm in much the same way as in the one-dimensional method. In one-dimensional problems the method gives test functions (12) ... (14) as should be the case.

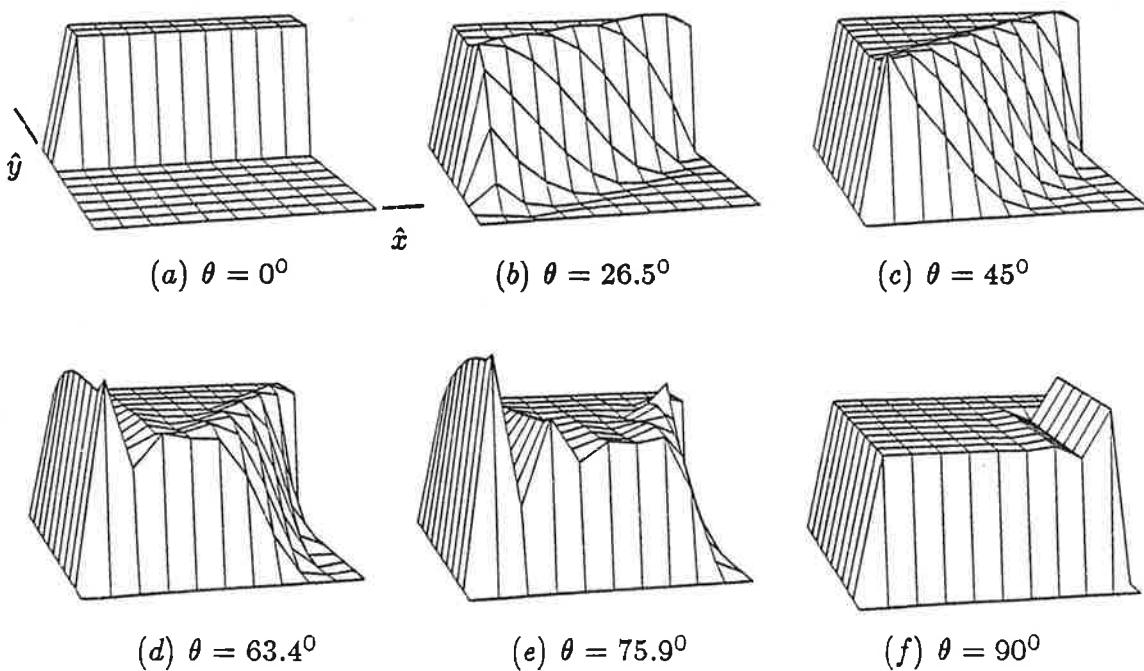


Figure 2. Numerical results for the first formulation.

Figure 2 shows some numerical results when the method is applied to the model problem with different velocity directions. Small angle solutions (a) ... (c) are quite satisfactory, though smearing of the solution in the direction opposite to flow is evident. This phenomenon seems to be common to all fixed grid finite element methods and cannot be cured easily (if at all). When the flow angle exceeds 45° the solution starts to fluctuate near the outflow boundary as Figures (d) ... (f) show. This behaviour is in agreement with results given in references [3] and [4]. As a matter of fact the method described by (17a) ... (17f) is almost identical with the method in the references.

3.2 Second formulation

In order to damp the fluctuations on the outflow boundary we try a slightly different method. Firstly we include the last term in the discontinuous part of the test functions which was dropped in the previous method to make it more 'SUPG-type' (we had no good reason to disregard it). Secondly we will use a different direction vector in equation (17f). This can be viewed as follows: When several velocity components are different from zero, the first formulation gives seemingly somewhat too small coefficients for the discontinuous part of the weight functions because there is instability in the solution. So we simply use the maximum values to be on the safe side regarding the fluctuations. Everything else remains the same in algorithm (17) except step (17f). It will be replaced by the statements

$$l_{\alpha'} = \text{sign}(1, m_{\alpha'}), \quad (17f')$$

$$M_I = N_I + \tau l_{\alpha'} N_{I,\alpha'} + \tau \tau l_{\alpha'} l_{\beta'} N_{I,\alpha' \beta'}. \quad (17g)$$

When the flow is exactly aligned with one coordinate direction this method gives the same test functions as the first formulation. In step (17f') we have introduced a new function **sign**. The name refers to standard FORTRAN function **SIGN**, and in fact this standard function will serve well. However in practice a somewhat different definition has proved to better and we have used a modified function, which is equal to **SIGN** when the absolute value of $m_{\alpha'}$ is greater than a small positive predefined parameter ϵ and otherwise same as $m_{\alpha'}/\epsilon$.

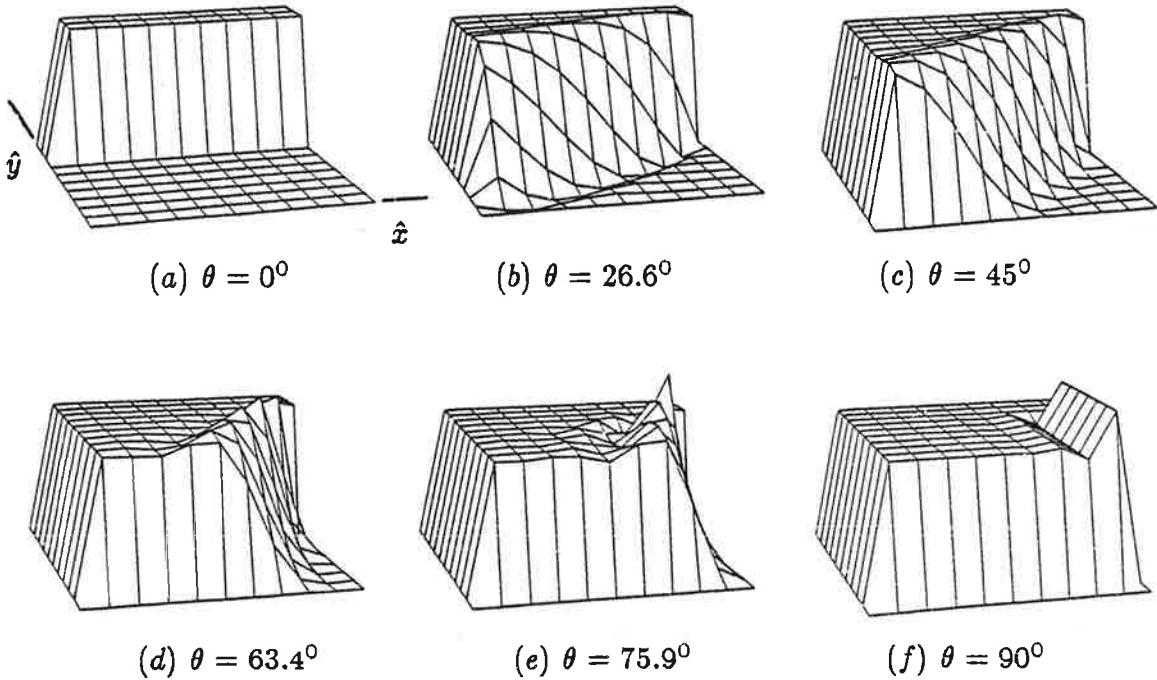


Figure 3. Numerical results for the second formulation.

Numerical results are shown in Figure 3. The method behaves well compared with the first formulation. Fluctuations near the outflow boundary have disappeared completely. Also the in domain boundary layer is somewhat crisper (it may be too crisp because we now get small fluctuations on this boundary instead of the outflow one). The solution behaves exactly as in the previous method on the neutral boundary ($n_\alpha u_\alpha = 0$). Fluctuation on neutral boundary is a phenomenon which seemingly cannot be coped with weight functions of the previous type. This is evident because it happens in the direction opposite to the flow. In [1] and [4] it is shown that use of the first formulation weight functions leads to modification of the methods only in the direction of the flow as compared with Galerkin method.

4 FINAL REMARKS

Both of the previous methods have certain advantages. The first formulation is simple and gives reasonable results except near outflow boundaries. The second formulation is good near boundaries but the modelling of the indomain boundary layer is not as good as in the first formulation. This suggest a method in which weight functions of the second formulation type are used in elements adjacent to boundaries. Elsewhere the first formulation type weight functions could be used. Numerical tests have proved that this type of method works well. The fluctuations near the outflow boundary will be damped and the indomain boundary layer is much like in the first formulation.

Only methods applicable for one or two dimensions have been discussed here, but algorithm (17) can be used in problems with any number of dimensions simply by letting the index have values according to the physical dimensions of the problem. Tensorial product approach can be used in generating weight functions for various element types. For instance a method for six-noded two-dimensional element, in which the shape functions are tensorial products of the linear and quadratic one-dimensional shape functions, can be formed by combining one-dimensional SUPG weight functions for linear and quadratic elements. It is evident that these methods are far from perfect but compared with Galerkin methods some improvements can be expected.

REFERENCES

- [1] Salonen, E-M, Freund, J., Notes on the application of the least squares method to the pure convection equation. These proceedings.
- [2] Salonen, E-M., On the derivation of weak forms. (In Finnish) To appear in the Journal of Structural Mechanics.
- [3] Hughes, T.J.R., Brooks, A., A theoretical framework for Petrov-Galerkin Methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline upwind procedure, Finite Elements in fluids, Volume 4, Wiley 1982, p.47...65.
- [4] Hughes, T.J.R., Brooks, A., A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion, Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, ASME, New York, 1979.

OHUTSEINÄISTEN PROFIILIEN LEIKKAUS- JA VÄÄNTÖSUUREIDEN MÄÄRITTÄMINEN ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

TkT Matti K. Hakala
Valtion teknillinen tutkimuskeskus
Laivateknikan laboratorio

1. JOHDANTO

Pitkänomaisten kappaleiden jännitys- ja muodonmuutostilaa voidaan käytännössä usein riittävällä tarkkuudella kuvata palkkimallilla, jossa vето-, taivutus- ja vääntökuormituksen käsitteily perustuu tunnettuihin oletuksiin. Poikkipinnan normaalijännitysjakautumat ovat tällöin varsin yksinkertaisia ja vastavilla poikkipintasuureilla on selvä geometrinen merkitys. Näitä suureita ovat esim. poikkipinta-ala, painopiste, jäyhyysmomentit jne., joiden laskeminen on suoraviivaista. Sen sijaan taivututuksessa ja väänössä syntyvien leikkausjännitysten jakautumat ovat kertaluokkaa monimutkaisempia ja niiden määrittäminen vaatii yleisessä tapauksessa differentiaaliyhtälön ratkaisemista. Vastaavilla poikkipintasuureilla, kuten esim. tehollisella leikkauspinta-alalla tai leikkauskertoimella, vääntökeskiöllä, vääntöjäyhyysmomentilla jne. ei ole puhtaasti geometrista tulkintaa, vaan niiden määritys perustuu leikkausjännitysjakautumiin.

Erityisesti ohutseinäisillä profiileilla leikkaus- ja vääntösuureiden merkitys korostuu. Taivutuksessa syntyvät leikkausjännitykset ovat ohutseinäisillä profiileilla yhtä merkittäviä kuin normaalijännitykset, kun taas massiivisilla profiileilla leikkausjännitykset voidaan usein unohtaa. Väänössä puolestaan etenkin avoimilla ohutseinäisillä profiileilla syntyy merkittäviä poikkileikkauksien käyristymiä, jotka estettyinä johtavat normaalijännitysten syntyn. Tässä yhteydessä puhutaan estetystä väänöstä ja poikkipintasuureet pyritään määrittämään ns. sektoriaalisen koordinaatin avulla geometrisesti.

Mielivaltaisen ohutseinäisen profiilin leikkaus- ja väwäntösuhureiden määritys on työläs tehtävä ja pyritään tästä syystä tekemään tietokoneella. Käytössä olevat tietokoneohjelmat perustuvat usein perinteisiin laskentamenetelmiin, ks. esim. [1, 2, 3]. Tässä yhteydessä ei yleensä puhuta lainkaan differentiaaliyhtälöistä, vaan ratkaisukaavat johdetaan suoraan differentiaaligeometrin tarkasteluin. Hankaluutena on tällöin, että ratkaisut ovat usein tapauskohtaisia ja vaikeasti yleistettävissä. Sen sijaan muodostamalla vastaavat differentiaaliyhtälöt voidaan tehtäväksi käsitellä huomattavasti yleisemmin ja käyttää tavaramaisia matemaattisia apuneuvoja hyväksi ratkaisuissa. Erityisesti elementtimenetelmä tarjoaa tässä yhteydessä varsin systemaattisen ja yleisen keinon näiden differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi.

Seuraavassa tarkastellaan ohutseinäisten profiilien leikkaus- ja väwäntösuhureiden määrittämistä elementtimenetelmän avulla. Tarvittavat differentiaaliyhtälöt saadaan ns. Saint Venantin probleemasta, jossa vakiopoikkipintaista suoraa sauvaan kuormittavat päässä voimat siten, että sauvaan syntyy taivutusta ja väwäntöä. Tälle probleemalle löytyy tietyillä edellytyksillä täsmällinen kimmoteoreettinen ratkaisu, joka on esitetty siirtymäfunktioiden avulla esim. klassisessa Loven teoksessa [4]. Tehtävän ratkaisua siirtymäelementtimenetelmällä on käsitelty esim. lähteissä [5], [6] ja [7]. Tässä esityksessä johdetaan kaavat erityisesti ohutseinäiselle profiilille ja tarkastellaan ratkaisun soveltuutta myös estettyyn väwäntöön.

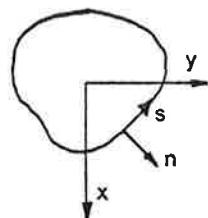
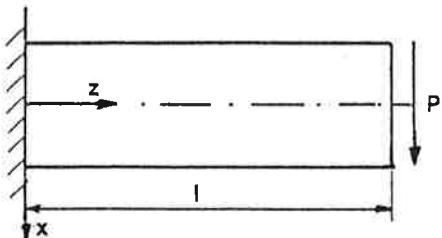
2 TAIVUTUS

2.1 Massiivinen profiili

Kuvan 1 mukaiselle ulkokepalkin taivutukselle löytyy täsmällinen kimmoteoreettinen ratkaisu Saint Venantin puolikäänteisellä menettelyllä [4]. Oletetaan ensin, että $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ja että taivutuksesta aiheutuva normaalijännitys σ_z jakaantuu kuten puhtaassa taivutuksessa eli

$$\sigma_z = \frac{P(1-z)}{I_y} x, \quad (1)$$

missä I_y on poikkipinnan jäyhyysmomentti y-akselin suhteen. Tasapaino- ja kompatibilitetiehtoja soveltamalla saadaan poikkipinnan leikkausjännityksille lausekkeet



Kuva 1. Ulokepalkin taivutus.

$$\tau_{zx} = - \frac{P}{2(1+v)I_y} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{v}{2} (x^2 - y^2) \right] \quad (2)$$

ja

$$\tau_{zy} = - \frac{P}{2(1+v)I_y} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} + vxy \right],$$

missä funktio ψ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\nabla^2 \psi = 2x \quad (3)$$

poikkinpinnan alueella. Reunalla leikkausjännitysresultantin tulee tasapaino-syistä olla reunaviivan tangentin suuntainen, mistä seuraa reunaehdo

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = vxy \frac{dx}{ds} - \frac{v}{2} (x^2 - y^2) \frac{dy}{ds}, \quad (4)$$

missä $\frac{d\psi}{dn}$ on reunan normaalilin suuntainen derivaatta ja s on reunaviivan suuntaisen koordinaatti.

Palkin siirtymille voidaan edelleen johtaa lausekkeet [4]:

$$u = \frac{P}{EI_y} \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{6} z^3 + \frac{v}{2} (1 - z)(x^2 - y^2) \right] + \beta z, \quad (5)$$

$$v = \frac{P}{EI_y} v(1 - z) xy,$$

$$w = - \frac{P}{EI_y} [x(1z - \frac{1}{2} z^2) + \psi] - \beta x.$$

Tässä u tarkoittaa x -akselin, v y -akselin ja w z -akselin suuntaista siirtymää. Vakion β arvo riippuu kiinnityksestä palkin tuetussa päässä. Tässä sovellutuksessa $\beta:lla$ ei ole merkitystä.

Pitkittäisen siirtymän w lausekkeesta voidaan todeta, että hakasulkulausekkeen ensimmäinen osa vastaa teknillisen taivutusopin mukaista siirtymäjakautumaa. Funktio ψ esittää näin ollen poikkeamaa tasomaisuudesta eli poikkipinnan käyristymää taivutuksessa, mikä tavallisessa palkkiteoriassa jätetään kokonaan huomioonottamatta.

2.2 Tehollinen leikkauspinta-ala ja leikkauskerroin

Tavallisen palkkiteorian käyttökelpoisuutta voidaan laajentaa ottamalla huomioon taivutusmuodonmuutoksen lisäksi myös ns. leikkausmuodonmuutos, mikä aiheutuu leikkausjännityksiä vastaavista liukumista ja näkyy myös poikkileikkausten käyristymisenä. Koska leikkausjännitykset eivät ole tasan jakaantuneet, joudutaan niiden aiheuttama liukuma ottamaan huomioon jollakin tavalla määritettynä keskimääräisenä arvona palkkiteorian puitteissa. Keskimääräinen liukuma määritellään tällöin kaavalla

$$\bar{\gamma} = \frac{Q}{KA^G}, \quad (6)$$

missä Q on leikkausvoima, KA on tehollinen leikkauspinta-ala ja G on liukumuoduli. Kertoimesta k käytetään nimitystä leikkauskerroin ja se ilmoittaa, kuinka paljon todellista poikkipinta-alaa A on redusoitava, jotta leikkausmuodonmuutos tulisi mahdollisimman oikein huomionotetuksi.

Tehollinen leikkauspinta-ala ja leikkauskerroin voidaan määrittää monellaakin eri tavalla, jotka kaikki ovat enemmän tai vähemmän likimääräisiä palkkiteorian rajoituksista johtuen [8]. Eräs eleganteimpia ja myös käytännön havaintojen perusteella tarkempia tapoja on Cowperin esittämä menettely, jossa Timoshenkon palkkiteorian yhtälöt saadaan integroimalla kohdassa 2.1 esitetyn ulokepalkin täsmällinen ratkaisu poikkipinnan yli [9]. Palkin siirtyminä käytetään näin saatuja keskimääräisiä siirtymiä, jotka yleensä poikkeavat palkin akselin siirtymistä. Leikkauskertoimen määrittämiseksi saadaan tällöin kaava

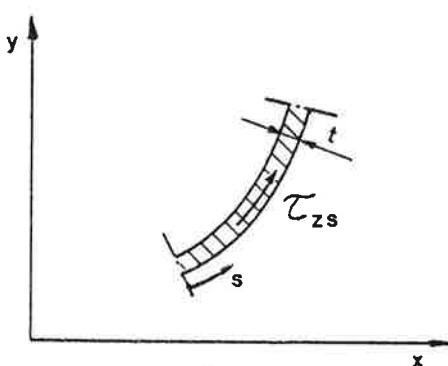
$$k = \frac{2(1 + v) I_y}{\frac{v}{Z} (I_x - I_y) - \frac{A}{I_y} \int x \psi dA}, \quad (7)$$

missä ψ on yhtälöstä (3) ratkaistava poikkipinnan käyristymäfunktio.

2.3 Ohutseinäinen profiili

Ohutseinäisillä profiileilla kohdan 2.1 taivutustapauksen ratkaisua voidaan yksinkertaistaa. Jos seinämän paksuus on pieni poikkipinnan ulkomitttoihin verrattuna, voidaan olettaa, että seinämän suuntainen leikkausjännitys τ_{zs} (ks. kuva 2) on tasaukseen jakaantunut seinämän paksuussuunnassa ja että seinämän paksuussuuntaista leikkausjännitystä ei tarvitse ottaa huomioon.

τ_{zs} saadaan leikkausjännityskomponenttien (2) avulla määritelmällä koordinaatin s suuntainen leikkausjännitysvektori. Tällöin



Kuva 2. Ohutseinäinen profiili.

$$\tau_{zs} = - \frac{P}{2(1+\nu)E_y} \left[\frac{d\psi}{ds} + \frac{\nu}{2} (x^2 - y^2) \frac{dx}{ds} + \nu xy \frac{dy}{ds} \right]. \quad (8)$$

Seinämäälkion tasapainoehdosta

$$\frac{\partial \tau_{zs}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

saadaan kaavojen (1) ja (8) avulla differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = (2 + \nu)x - \frac{\nu}{2}(x^2 - y^2) \frac{d^2x}{ds^2} - \nu xy \frac{d^2y}{ds^2} \quad (10)$$

poikkipinnan käyristyväfunktiolle ψ . Jos profiili on avoin, tulee vapaalla reunalla leikkausjännityksen hävitä. Suljetulla profiililla leikkausjännityksen tulee olla jatkuva. Näillä reunaehtoilla funktio ψ tulee vakiota vaille määritetyksi, mikä riittää leikkausjännityksen (8) määrittämiseen.

Leikkauskerroin voidaan laskea ohutseinäisellekin profiilille kaavalla (7). Myösään tässä ei funktion ψ vakiotermillä ole merkitystä, koska vastaava integraali poikkipinnan yli häviää painopistekoordinaatistossa.

2.4 Elementtiratkaisu

Differentiaaliyhtälön (10) elementtiratkaisu voidaan tavanomaiseen tapaan formuloida esim. Galerkinin menettelyn mukaan. Muotofunktioapproksimaatio käyristymäfunktiolle ψ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\psi(s) = [N(s)] \{\psi\}, \quad (11)$$

missä $[N(s)]$ on muotofunktioit sisältävä matriisi ja $\{\psi\}$ solmuparametriivektori. Kertomalla differentiaaliyhtälön molemmat puolet samanmuotoisella painofunktilla, integroimalla poikkipinnan yli sekä ottamalla lopuksi huomioon reuna- tai jatkuvuusehdot päädytään yhtälöryhmään

$$[K]\{\psi\} = \{F\} \quad (12)$$

missä jäykkyysmatriisi

$$[K] = \int [N, s]^T [N, s] tds \quad (13)$$

ja voimavektori

$$\{F\} = -2(1+\nu) \int [N]^T x tds - \frac{\nu}{2} \int [N, s]^T [(x^2-y^2) \frac{dx}{ds} + xy \frac{dy}{ds}] tds. \quad (14)$$

$[N, s]^T$ tarkoittaa tässä muotofunktioiden derivaatat s-koordinaatin suhteeseen sisältävää matriisia.

Yksinkertaisin ja useimmissa tapauksissa täysin riittävä elementti on 2-solmuinen lineaarinen elementti, joka voi olla myös käyräviivainen. Se antaa tarkan ratkaisun solmuparametreille. Elementin sisällä tähän lineaariseen

ratkaisuun voidaan lisätä differentiaaliyhtälön (10) tarkka ratkaisu, joka häviää elementin päätepisteissä. Kaavalla (8) laskettavat leikkausjännityksetkin saadaan tällöin jatkuviksi.

3 VÄÄNTÖ

3.1 Massiivinen poikkileikkaus

Tarkastellaan vakiopoikkipintaista sauva, jonka päissä vaikuttavat väentömomentit. Saint Venantin puolikäänteisen menettelyn mukaisesti oletetaan ensin, että sauva poikkileikkaukset kiertyvät pituusakselin ympäri muotoaan muuttamatta. Sen sijaan poikkileikkausten käyristyminen tasostaan sallitaan ja sitä kuvataan käyristymäfunktiolla ψ . Kuvan 1 koordinaatistossa siirtymät ovat tällöin

$$\begin{aligned} u &= -\theta y z, \\ v &= \theta x z, \\ w &= \theta \psi. \end{aligned} \tag{15}$$

Tässä θ tarkoittaa sauvan väentymää eli väentökulman derivaattaa, joka oletetaan vakioksi.

Oletettu siirtymätila toteuttaa kompatibiliteettiehdot identtisesti. Kaikki muut jännityskomponentit ovat nollia, paitsi leikkausjännitykset τ_{zx} ja τ_{zy} , joille saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{zy} &= G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right), \end{aligned} \tag{16}$$

missä G on liukumoduuli. Jotta tasapainoehdot toteutuisivat, tulee käyristymäfunktion ψ toteuttaa differentiaaliyhtälö

$$\nabla^2 \psi = 0. \tag{17}$$

Poikkipinnan reunalla leikkausjännitysresultantin tulee tasapainosyistä olla reunaviivan tangentin suuntainen. Tästä saadaan reunaehdoksi

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds}, \quad (18)$$

mikä riittää ψ :n määrittämiseen vakiota vaille. Jännitysten kannalta tämä vakio voidaan valita mielivaltaisesti.

3.2 Ohutseinäinen poikkileikkaus

Ohutseinäisen profiilin väänössä voidaan tehdä samat oletukset kuin kohdan 2.2 taivutustapauksessakin. Seinämän suuntaiseksi leikkausjännitykseksi saadaan kaavojen (16) perusteella

$$\tau_{zs} = G \Theta \left(\frac{d\psi}{ds} - y \frac{dx}{ds} + x \frac{dy}{ds} \right) \quad (19)$$

Seinämäalkion tasapainoehdosta (9) seuraa, että leikkausjännitys on s-koordinatin suunnassa vakio, jos paksuus ei muutu. Edelleen tasapainoehdosta saadaan käyristymäfunktiolle differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = y \frac{d^2x}{ds^2} - x \frac{d^2y}{ds^2} \quad (20)$$

Jos profiili on avoin, tulee vapaalla reunalla leikkausjännityksen hävitää, jolloin

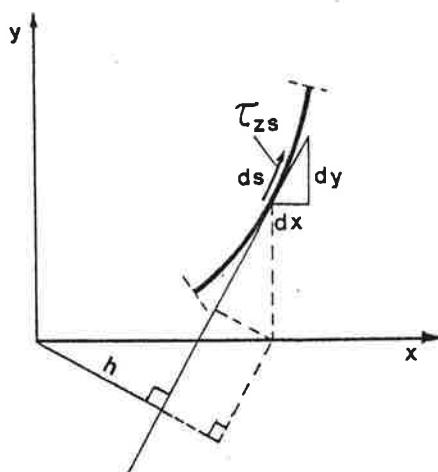
$$\frac{d\psi}{ds} = y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds}. \quad (21)$$

Koska tasapainoehdon mukaan leikkausjännitys on s:n suhteen vakio, ei avoimessa profiilissa synny näillä oletuksilla lainkaan leikkausjännityksiä vapaassa väänössä ja yhtälö (21) on voimassa kaikkialla. Suljetulla profiililla leikkausjännityksen tulee olla jatkuva. Nämä ehdot mahdollistavat ψ :n ratkaisemisen vakiota vaille, mikä riittää leikkausjännitysten määrittämiseen.

Vääntöjäyhyysmomentti saadaan laskemalla leikkausjännityksiä vastaava koko-naisväntömomentti. Kuvan 3 merkinnöin

$$M_v = \int \tau_{zs} h \, ds \quad (22)$$

missä h tarkoittaa origon ja seinämän tangentin välistä kohtisuoraa



Kuva 3.

etäisyyttä. Geometrisin tarkasteluin voidaan kuvasta 3 todeta, että

$$h = x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}, \quad (23)$$

jolloin kaava (22) voidaan kirjoittaa muotoon

$$m_v = G\Theta \int \left(\frac{d\psi}{ds} + h \right) h t ds = G\Theta I_v \quad (24)$$

Tämä määrittelee väentöjäyhysmomentin I_v , jolloin

$$\tau_{zs} = \frac{M_v}{I_v} \left(\frac{d\psi}{ds} + h \right) = \frac{M_v}{I_v} \left(\frac{d\psi}{ds} - y \frac{dx}{ds} + x \frac{dy}{ds} \right). \quad (25)$$

3.3 Estetty väentö

Estetty väentö syntyy, kun poikkipinnan käryistyminen on tavalla tai toisella estetty. Tästä johtuvat normaalijännitykset aiheuttavat ns. sekundäärissä leikkausjännityksistä, jotka etenkin avoimilla profiileilla kantavat huomattavan osan väentökuormituksesta. Edellisessä kohdassa esitetty Saint Venantin väentötehtävän ratkaisu ei periaatteessa päde estetyssä väennössä uusista jännityskomponenteista johtuen. Vapaan väännon käryistymäfunktiota ψ voidaan kuitenkin suoraan käyttää myös estetyssä väennössä.

Avoimien profiilien vapaassa väänössä todettiin edellä leikkausjännityksen häviävän kaikkialla. Tästä johtuen myös liukukulma γ_s on nolla, mikä vastaa Vlasovin [10] oletusta avoimien profiilien estetyssä väänössä. Yhtälö (21) on tällöin voimassa kaikkialla, jolloin kaava (23) huomioon ottaen saadaan

$$d\psi = \left(y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right) ds = -h ds = d\omega. \quad (26)$$

Tämä on sama kuin estetyssä väänössä käytetyn sektoriaalisen koordinaatin ω määritelmä. Suljettujen profiilien vapaassa väänössä syntyy leikkausjännityksiä (19) vastaavia liukukulmia. Estetyssä väänössä oletetaan, että tämän lisäksi ei synny muuta liukumaa, jolloin estetyn väänön poikkipintakäyristymä eli sektoriaalinen koordinaatti saadaan kaavasta

$$d\omega = \left(\frac{\tau_0}{G\Theta} - h \right) ds \quad (27)$$

missä τ_0 tarkoittaa vapaan väänön leikkausjännitystä. Sijoittamalla kaavaan (27) τ_0 :n ja h :n lausekkeet (19) ja (23) todetaan, että suljetullakin profiililla vapaan väänön poikkipintakäyristymä ψ on sama kuin estetyn väänön sektoriaalinen koordinaatti ω .

Kun käyristymäfunktio ψ on ratkaistu differentiaaliyhtälöstä (20), voidaan siis kaikki estetyn väänön suureeetkin määrittää. Normaalijännitys saadaan kaavasta

$$\sigma_z = E \frac{d\Theta}{dz} \omega = \frac{B}{I_\omega} \omega, \quad (28)$$

missä B on ns. bimomentti ja I_ω on sektoriaalinen jähyysmomentti, joka määritellään kaavalla

$$I_\omega = \int \omega^2 t ds. \quad (29)$$

ψ lasketaan kuitenkin painopistekoordinaatistossa, kun taas ω on määritettävä väantokeskiön suhteeseen. Tärä varten määritetään ensin ψ :n avulla väantokeskiön paikka (x_0, y_0) ehdosta, että normaalijännitys (28) ei aiheuta taivutusta kummankaan akselin suhteeseen. Lisäksi ψ :n toistaiseksi avoimeksi jätetty

vakiotermi ψ_0 määrittyy ehdosta, että normaalijännityksen (28) pituussuuntainen resultantti häviää. Lopullinen ω -jakautuma väänkökeskiön suhteen saadaan tällöin tunnetusta kaavasta [11]

$$\omega = \psi - y_0 x + x_0 y + \psi_0 \quad (30)$$

3.4 Estetyn väännon leikkausjännitykset

Estetyn väännon perinteisessä lähetysmistavassa oletetaan liukukulma nollaksi, joten leikkausjännityksiä ei voida muodonmuutoksista laskea, vaan ne määritetään tasapainoehdosta (9). Tämä johtaa kaavan [11]

$$\tau_1(s) = - \frac{dB}{dz} \frac{S_\omega(s)}{I_\omega t} \quad (31)$$

missä τ_1 tarkoittaa estetyn väännon leikkausjännitystä ja S_ω on ns. sektoriaalinen staattinen momentti.

Kaava (31) on hankala ohjelmoida yleispätevästi ja lisäksi se on ristiriidassa kompatibilitetiehtojen kanssa. Vaihtoehtoisesti voidaan yrittää löytää täsmällisempi, liukukulmatkin huomioonottava ratkaisu soveltamalla puolikänteistä menettelyä tähänkin probleemaan.

Oletetaan ensiksi, että normaalijännitys jakaantuu kaavan (28) mukaisesti. Tasapainoehdo (9) saadaan toteutumaan, jos leikkausjännitys määritellään kaavalla

$$\tau_1 = - \frac{dB}{dz} \frac{1}{I_\omega} \frac{d\chi}{ds}, \quad (32)$$

missä funktio $\chi(s)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} = \omega. \quad (33)$$

Normali- ja leikkausjännityksiä vastaavat venymät ε_z , ε_s ($= -v\varepsilon_z$) ja γ_1 toteuttavat myös kompatibilitetiehdon, jos B on z:n lineaarinen funktio ja profiili koostuu suorista seinämistä. Siinä tapauksessa ratkaisu on

täsmällinen, mutta sitä voitaneen soveltaa riittävällä tarkkuudella muulloinkin. Joka tapauksessa estetyn väänön leikkausjännitys on helppompi yleisesti ratkaista differentiaaliyhtälön (33) avulla esim. elementtimenetelmällä kuin suoraan integroida vastavasta kaavasta (31). Lopputulos on kummassakin tapauksessa sama.

3.5 Elementtiratkaisu

Vapaan väänön käyristymäfunktio ψ voidaan ratkaista differentiaaliyhtälöstä (20) elementtimenetelmällä samaan tapaan kuin taivutuksen yhteydessä kohdassa 2.4 esitettiin. Ainoa ero on voimavektorin lausekkeessa, joka vapaan väänön yhteydessä on

$$\{F_0\} = \int [N]_s^T (y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds}) t \, ds. \quad (34)$$

Estetyn väänön "leikkausjännitysdifferentiaaliyhtälön" (33) elementtiratkaisu on myös samanlainen, paitsi että voimavektori on tällöin

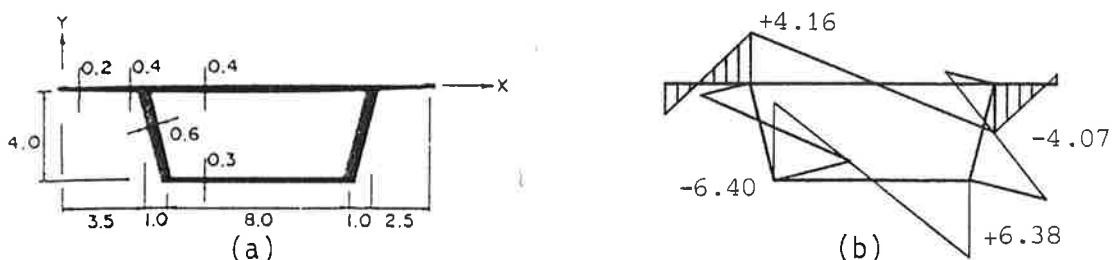
$$\{F_1\} = - \int [N]^T \omega \, t \, ds. \quad (35)$$

Kaiken kaikkiaan taivutus- ja väントtehtävät voidaan ratkaista samaan elementtyyppiä käyttäen yhdellä kerralla. Jäykkyysmatriisi on kaikissa tapauksissa sama. Eri tapausten voimavektorit voidaan käsitellä samassa ajossa kolmena eri kuormitustapauksena.

4 NUMERISIA ESIMERKKEJÄ

4.1 Kotelosiltaprofiili

Lähteessä [3] on esitetty kuvan 4a mukaisen betonisen siltaprofiilin väントsuureiden laskenta "perinteisin" keinoin. Sama esimerkki laskettiin elementtimenetelmällä edellä esitettyllä tavalla. Paksuudeltaan muuttuvat ulokkeet korvattiin 0,5 m pituisilla vakiopaksuisilla elementeillä. Tuloksienvertailu on esitetty taulukossa 1. Ne ovat käytännössä yhteneviä. Kuvassa 4b on esitetty elementtimenetelmällä laskettu sektoriaalisen koordinaatin jakautuma.



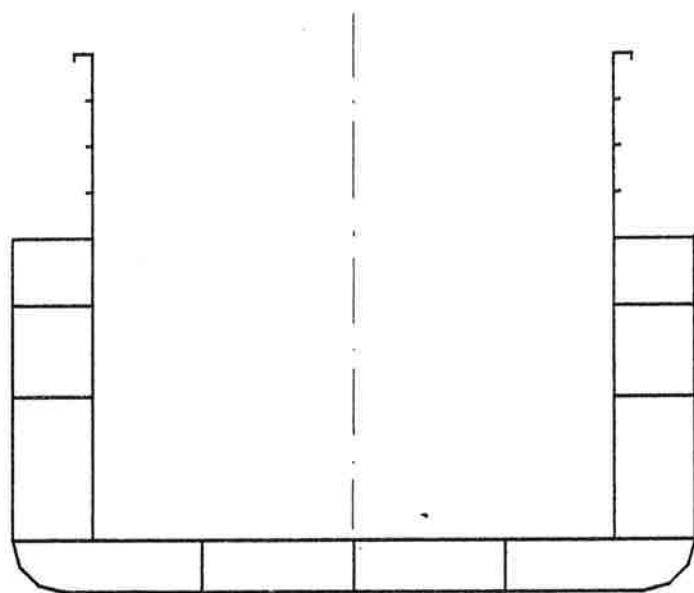
Kuva 4. Kotelosiltaprofiili (a) sekä sektoriaalisen koordinaatin jakatuma poikkileikkaussessä (b).

Taulukko 1. Kotelosiltaprofiilin poikkileikkaussuureet.

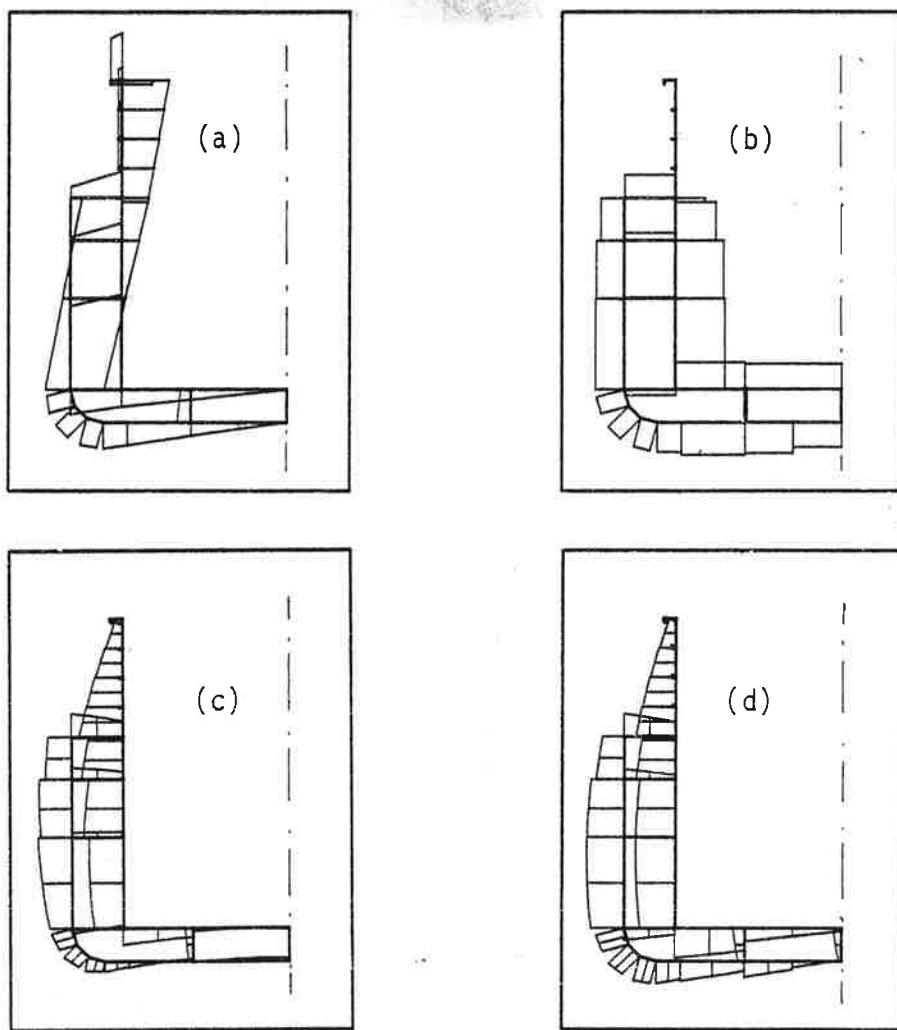
Suure	Elementtiratkaisu	Lähde [3]
Pinta-ala A	13.148 m ²	13.148 m ²
Painopisteen koordinaatit xo	8.325 m	8.325 m
Pääjäyhysmomentit I ₁	-1.483 m	-1.483 m
I ₂	221.1 m ²	220.9 m ⁴
Väントkeskiön koordinaatit x _s	35.8 m ⁴	35.8 m ⁴
y _s	8.513 m	8.513 m
Väントjäyhysmomentti I _v	-1.929 m	-1.929 m
Sektoriaalinen jäyhysmomentti I _w	79.3 m ⁴	79.3 m ⁴
	116.6 m ⁶	116.6 m ⁶

4.2 Avoimen laivan poikkileikkaus

Avoimen laivan rungon poikkileikkaussuureiden määritys on varsin vaativaa tehtävää, koska poikkileikkaus on periaatteessa avoin, mutta koostuu lukuisista suljetuista kotelostaista. Esim. kuvan 5 mukaisen poikkileikkaksen suureiden laskenta käsin on toivotonta. Elementtimenetelmällä ratkaisu sujuu kuitenkin ilman vaikeuksia. Elementtimalli koostui tässä tapauksessa 52 solmupisteestä ja 61 elementistä. Kuvassa 6 on hahmoteltu poikkileikkaksen sektoriaalisen koordinaatin, vapaan ja estetyn väännon leikkausjännityksen sekä taivutuksesta aiheutuvan leikakusjännityksen jakautumat. Pystysuoraa taivutusta vastaavaksi leikkauskertoimeksi saatatiin tälle poikkileikkaukselle $k = 0.376$.



Kuva 5. Eräään avoimen laivan poikkileikkaus.



Kuva 6. Avoimen laivan poikkileikkauden sektoriaalisen koordinaatin (a), vapaan väänön leikkausjännityksen (b), estetyn väänön leikkausjännityksen (c) ja pystysuoran taivutuksen leikkausjännityksetn (d) jakautumat.

KIRJALLISUUSVIITTEET

1. Yoo, C.H. Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section. *Computers & Structures* 22(1986)1, pp. 53 - 61.
2. Vernon, T.A. & Nadeau, Y. Thin-walled beam theories and their applications in the torsional strength analysis of ship hulls. Technical memorandum 87/202, Defence Research Establishment Atlantic, January 1987, 64 p.
3. Waldron, P. Sectorial properties of straight thin-walled beams. *Computers & Structures* 24(1986)1, pp. 147 - 156.
4. Love, A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th edition. New York, Dover Publications, 1944. 643 p.
5. Mason, W.E. & Herrmann, L.R. Elastic shear analysis of general prismatic beams. *Journal of Engineering Mechanics Division of ASCE*, August 1988, pp. 965 - 983.
6. Varsta, P. Elementtimenetelmän soveltamisesta laivatekniikassa esintyvien väentöprobleemien ratkaisemiseen. TKK lisensiaattityö, Espoo 1974. 106 s.
7. Surana, K.S. Isoparametric elements for cross-sectional properties and stress analysis of beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14(1979), pp. 475 - 497.
8. Jensen, J.J. On the shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Sound and Vibration* 87(1983)4, pp. 621 - 635.
9. Cowper, G.R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, June 1966, pp. 335 - 340.
10. Vlasov, V.Z. *Thin-walled elastic beams*, 2nd edition. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1953.
11. Feodosyev, V. *Strength of materials*. Moscow, MIR Publishers, 1973. 608 p.

RATKAISUALGORITMIEN VERTAILUJA LINEAARISEN KOMPLEMENTAARISEN TEHTÄVÄN RATKAISUSSA

Markku Heinisuo, Mika Lepistö

Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Rakennusstatistiikka

1. JOHDANTO

1.1 Lineaarinen komplementaarinen tehtävä

Komplementaarinen tehtävä kappaleen $D(\subseteq R^3)$ pinnan ∂D osalla ∂D_p määritellään siten, että on etsittävä funktio $p(x)$ (tai $h(x)$), kun tiedetään, että yhtälöt

$$p(x) \geq 0, \quad h(x) \geq 0, \quad p(x)h(x) = 0, \quad x \in \partial D_p \quad (1)$$

ovat voimassa. Jos funktioiden p ja h välinen riippuvuus on lineaarinen, niin on kyse lineaarisesta komplementaarisesta tehtävästä (LKT). Moni rakenteiden mekaniikan probleema voidaan formuloida LKT:n muotoon. Esimerkinä mainittakoon laakerin voiteluprobleema, suotovirtaus maapadossa, sauvan kimmoplastinen väntö ja kitkaton kosketusprobleema (*Elliott, Ockendon, 1982*). Tässä esityksessä käsitellään sovellutuksena viimeksi mainittua.

Ratkaisuprosessin tärkein osa on potentiaalisen kosketuspinnan ∂D_p osapinnan ∂D_k etsiminen. Kosketuspinnalla ∂D_k toteutuu yhtälö $h(x) = 0$. Kirjallisuudesta löytyy vain yksi teoreema, jota voidaan käyttää suoraan kosketuspinnan määritykseen. Sen teoreeman mukaan rakenteen jäykkyydellä on infleksiopiste oikean kosketuspinnan kohdalla edellyttäen, että kosketus on lineaarinen (*Parland, 1982*). Lineaarinen kosketus on sellainen, että suhteellisen kuormituksen ollessa nolla pinnalla ∂D_k ei ole välystää eikä kosketuspainetta. Lineaarisesti kimmoinen kappaleiden kitkattomassa kosketustehtävässä funktio $h(x)$ on välys potentiaalisella kosketuspinnalla deformatiuneessa tilassa ja funktio $p(x)$ on kosketuspaine. Itse asiassa yhtälöt (1) takaavat ratkaisun yksikäsiteisyyden (*Parland, 1968*).

LKT joudutaan useimmiten ratkaisemaan iteratiivisesti. Numeerista ratkaisemista varten yhtälö (1) diskretoidaan differenssi- tai elementtimenetelmän (FEM) mukaan. Jatkossa tarkastellaan lähinnä FEM-formalismia. LKT diskretoidussa muodossa on

$$\underline{p} \geq \underline{0}, \quad \underline{h} \geq \underline{0}, \quad \underline{p}^T \underline{h} = 0, \quad (2)$$

missä alaviiva viittaa n -pituiseen vektoriin ja epäyhtälö vektoreilla tarkoittaa, että kaikki alkiot toteuttavat epäyhtälön. LKT voidaan muokata voimamenetelmän muotoon (*Heinisuo, 1984*) käyttämällä muuttujana vektoria \underline{p} . Oletetaan tunnetuksi lineaarinen yhtälö

$$\underline{h} = C\underline{p} + D\underline{q} + \underline{u}, \quad (3)$$

missä vektori \underline{u} on alkuvällys, C on symmetrinen ja positiividefiniitti $n \times n$ joustomatriisi tiivistettynä pinnalle ∂D , n pisteesseen ja $D\underline{q}$ on ulkoisen kuormituksen aiheuttama siirtymävektori. On huomattava, että jäykän kappaleen liike oletetaan nollaksi. Voimamenetelmän mukainen LKT on

$$\underline{p} \geq \underline{0}, \quad C\underline{p} + D\underline{q} + \underline{u} \geq \underline{0}, \quad \underline{p}^T(C\underline{p} + D\underline{q} + \underline{u}) = 0. \quad (4)$$

Siirtymämenetelmässä muuttujana on välysvektori \underline{h} ja LKT on

$$K\underline{h} - K\underline{u} - KD\underline{q} \geq \underline{0}, \quad \underline{h} \geq \underline{0}, \quad (K\underline{h} - K\underline{u} - KD\underline{q})^T \underline{h} = 0, \quad (5)$$

missä jäykkyysmatriisi on $K = C^{-1}$. Yhtälöitä (4) ja (5) voidaan ratkaista suoraan tai tehtävät voidaan muokata optimointitehtäviksi, koska matriisit C ja K ovat symmetriset. Voimamenetelmän mukainen optimointitehtävä on

$$\min_{\underline{p} \geq \underline{0}} \frac{1}{2} \underline{p}^T C \underline{p} - \underline{p}^T \underline{b}, \quad \underline{b} = -D\underline{q} - \underline{u}, \quad (6)$$

ja siirtymämenetelmässä

$$\min_{\underline{h} \geq \underline{0}} \frac{1}{2} \underline{h}^T K \underline{h} - \underline{h}^T \underline{c}, \quad \underline{c} = K\underline{u} + KD\underline{q}. \quad (7)$$

Osoittautuu, että tehtävien (6) ja (7) Kuhn-Tucker ehdot ovat

$$(6) : \underline{h} \geq \underline{0}, \quad (8)$$

$$(7) : \underline{p} \geq \underline{0}. \quad (9)$$

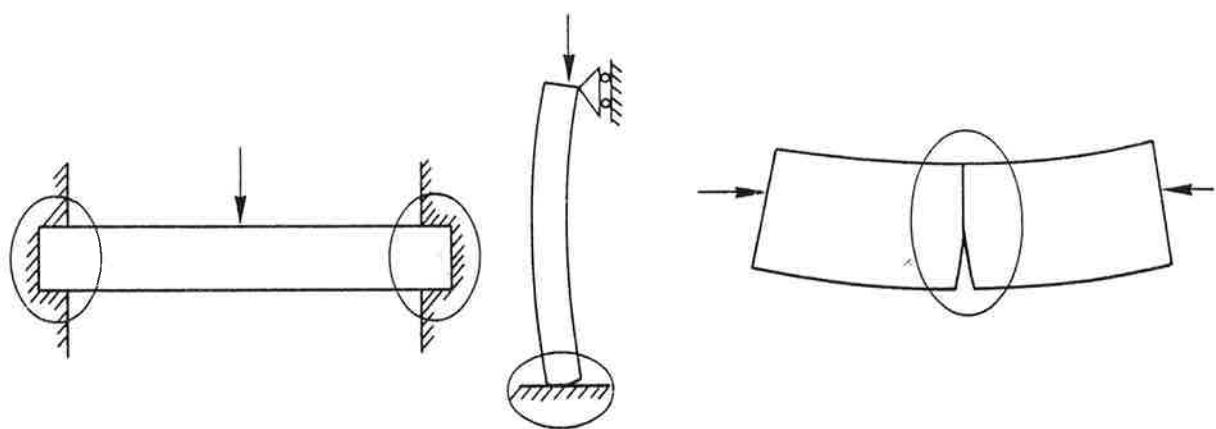
Ratkaisumenetelmän valintaan vaikuttaa se, onko jäykkyys- vai joustomatriisi helpommin laskettavissa. Jäykkyysmatriisi on usein helppo määrittää standardiohjelmistoilla ja lisäksi se voidaan tietyillä algoritmeilla saattaa nauhamaiseen muotoon, mikä on edullista numeerisen laskennan kannalta. Toisaalta joustomatriisi voidaan esimerkiksi palkeille, laatoille ja kuoille määrittää joissain tilanteissa analyttisesti, tarkasti, jolloin ainoa virhe, mikä diskretoinnissa tehdään koskee vain potentiaalisen kosketuspinnan diskretointia. Kosketuspaineen diskreointi pistemäiseksi aiheuttaa hankaluksia, kun lasketaan joustomatriisin alkioita C_{ij} kontinuumilla. Esimerkiksi Boussinesqin tehtävässä $C_{ii} = \infty$, kun lasketaan tarkasti. Käytökelpoiseksi osoittautunut tapa laskea alkiot C_{ij} talläisessa tapauksessa on korvata pistevaima $p_i = 1$ tasaisella piste i keskisellä pintakuormituksella diskreointipisteiden keskisessä

alueessa ∂D_i ja laskea suure C_{ij} työyhtälön mukaan keskimääräisenä siirtymänä (*Heinisuo, Miettinen, 1986*). Toinen tapa voimamenetelmää käytettäessä on arvioida kosketuspainetta trapetsilla (*Kalker, Van Randen, 1972*). Potentiaalisen kosketuspinnan korvaamisen pisteillä (pistetuilla) on likimääräisempää kuin trapetsikaavojen käyttö, mutta toisaalta läpitunkemattomuusehto on tällöin selkeä. Jatkossa tarkastellaan kimoisten kappaleiden kitkatonta kosketusta voimamenetelmän avulla formuloidun optimointitehtävän ratkaisuna.

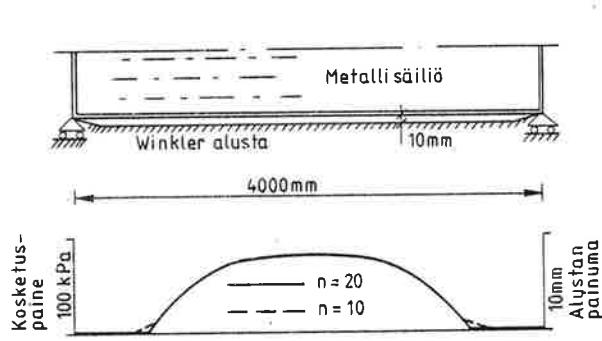
1.2 Tehtävän dimensiosta

Useissa rakennustekniikan kosketusprobleemoissa potentiaalinen kosketuspinta on pieni verrattuna koko rakenteen reunapintaan (kuva 1). Tällaisissa tapauksissa epälineaarisuutta aiheuttava kosketusprobleema kannattaa tiivistää vain potentiaaliselle kosketuspinnalle ja koskettavien lineaaristen ja kimoisten rakenteiden statiikka kokonaisuudessaan ratkaistaan vain yhden kerran. Varsinaisen diskretoidun kosketustehtävän dimensiot saadaan näin menetellen usein pienksi. Viivamaisen kosketuksen tapauksessa esimerkiksi 10-20 solmupisteen käytö potentiaalisella kosketuspinnalla antaa usein riittävän tarkan tuloksen käytännön suunnittelutarpeita silmällä pitäen. Sama pääsee myös koskettavien pintojen tapauksessa, kun kyseessä on esimerkiksi pyörähdyyssymmetrisen sylinterisäiliön pohjalaatta ja Winkler-tyyppisen pohjamaan kosketus (kuva 2, lähde *Heinisuo, Miettinen, 1986*). Kosketuspaineiden paikallisten terävien huippuarvojen selvitys vaatii luonnollisesti tiheää diskretointia.

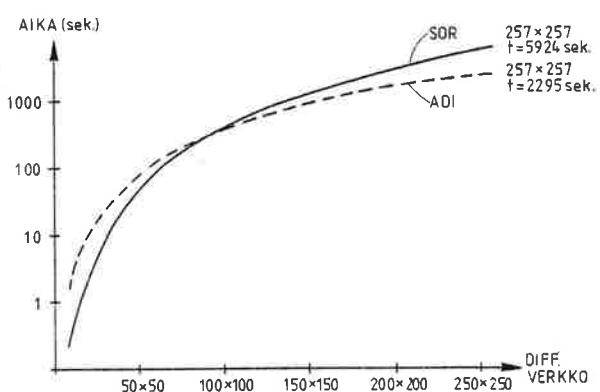
Kirjallisuudesta löytyy ratkaisualgoritmien vertailutuloksia, kun dimensiot ovat suuret (esim. *Neittaanmäki, Tiihonen, 1982, Lin, Cryer, 1985*). Kuvassa 3 on piirrettynä Linin ja Cryerin vertailutuloksia LKT:n ratkaisualgoritmien välillä. Sovellutuksina heillä olivat suotovirtaus padossa ja pyörivän akselin voitelutehtävä. Diskretointi tehtiin differenssimenetelmällä ja kyseessä oli siirtymämenetelmä. Kuvasta 3 näkyy, että jos tehtävä on iso ($n > 10000$), niin tekijöiden kehittämä ADI-algoritmi on tehokkaampi kuin relaksatioon perustuva SOR-algoritmi (huomaa logaritminen asteikko ratkaisuun käytetyn ajan asteikolla). Tässä yhteydessä keskityttiin ratkaisualgoritmien testaukseen, kun dimensiot ovat suhteellisen pienet ($n < 50$). Lisäksi on huomattava, että joustomatriisi C on täysi matriisi. Testirakenteena käytettiin kuvan 4 mukaista vetoakestämättömällä Winkler-tyyppisellä savimaalla olevaa kimoista puupalkkia. Momentit palkin päissä kuvaavat tuulivoiman aiheuttamaa momentia alapohjapalkille. Tarkka analyyttinen ratkaisu löytyy kirjallisuudesta (*Pavlovic, Tsikkos, 1982*). Lopuksi tutkittiin myös alustaluvun k sekä eri kuormitustilanteiden vaikuttusta laskenta-aikaan. Lisäksi testattiin vain kahden tyyppisiä algoritmeja: tarkkoja ja Gauss-Seidel tyyppisiä algoritmeja. Näiden eri muunnoksia tutkittiin testiprobreeman ratkaisussa kuvan 5 kaavion mukaan. Laskelmat suoritettiin tietokoneella HP-9836, joka on 16 bittinen mikro. Tutkimatta toistaiseksi jäivät mm. Simplex-tyyppiset algoritmit sekä konjugaattigradianttimenetelmään perustuvat vastaavat, joita on sovellettu LKT:n ratkaisuun.



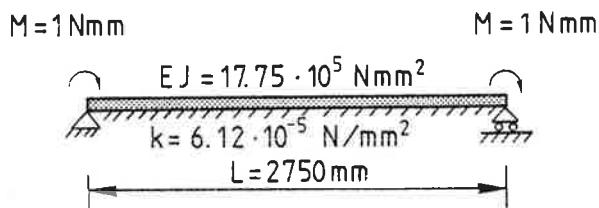
Kuva 1. Rakennustekniikan kosketusprobleemoja



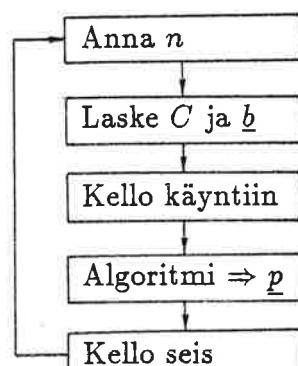
Kuva 2. Laatan ja alustan kosketus



Kuva 3. ADI- ja SOR-algoritmien vertailu



Kuva 4. Testirakenne



Kuva 5. Testauskaavio

2.TESTATUT ALGORITMIT

2.1 Tarkka ratkaisu

Diskretoidun LKT:n tarkka ratkaisu voidaan laskea käyttäen nopeasti ohjelmoitavaa algoritmia

1. Ratkaise $C\underline{p} = \underline{b}$,
2. Onko $\underline{p} \geq 0$, jos on niin seis,
3. Aseta $\min p_i = 0$,
4. Mene kohtaan 1.

Algoritmin täsmällisiä matemaattisia perusteita ei tiettävästi ole esitetty, mutta käytännössä algoritmi on johtanut aina oikeaan tulokseen (*Heinisuo*, 1984B, *Heinisuo, Miettinen*, 1985, *Heinisuo*, 1986, *Heinisuo, Miettinen*, 1986, *Heinisuo, Raikila*, 1987). Fysikaalisesti sen käyttäytymistä voidaan tarkastella havainnollisesti: askeleessa 1 ratkaistaan vetoakestäävää lineaarinen tehtävä ja askeleessa 3 irrotetaan pistetuki, jossa vaikuttaa suurin vetovoima jne. Algoritmi on erittäin lyhyesti ohjelmoitavissa, koska askeleessa 1. voidaan käyttää tietokoneen valmiita matriisin kääntäjiä jos matriisi C on pieni eli $\underline{p} = \text{INV}(C)\underline{b}$. Askeleessa 3 voidaan taas käyttää elementtimenetelmästä tuttua pyyhkimissääntöä. Mikron valmisohjelma laskee käänteismatriisin tiettävästi QR-algoritmilla. Kuvassa 6 on vertailtu ajoikaa, kun askeleessa 1 käytetään mikron omaa INV-käskyä ja itse laadittua Gaussin eliminointiin perustuva ratkaisinta. Jatkossa tarkan ratkaisun tulokset on laskettu käyttäen mikron omaa INV-käskyä. Kuvassa 6 on vertailtu ajoikaa, kun alustan jäykyyttä muutetaan. Arvo $k = 6.12 \cdot 10^{-10} N/mm^2$ vastaa hyvin löysää perusmaata eli lähes kuin sitä ei olisikaan ja arvo $k = 6.12 \cdot 10^{-1} N/mm^2$ vastaa perusmaata, joka on kovempaa kuin betoni. Laskennan nopeuttuminen arvolla $k = 6.12 \cdot 10^{-10} N/mm^2$ johtuu siitä, että kosketuspinta ∂D_k on tällöin lyhin ja nollattavia p_i lukuja on vähiten. Laskentatarkkuus katosi kun $n > 41$ tällä alustaluvun arvolla. Tästä voidaan toisaalta päätellä sääntö, että kannattaa käyttää voimamenetelmää, jos kosketuspinta on suuri $\partial D_k \approx \partial D_p$ ja siirtymämenetelmää, jos kosketuspinta on pieni $\partial D_k \ll \partial D_p$.

2.2 Lineaarisen kosketuksen algoritmi

Edellä esitetty tarkka ratkaisu nopeutuu huomattavasti, jos askel 3. voidaan korvata askeleella

3. Aseta kaikki $p_i < 0$ nollaksi.

Käytännön tehtävässä on osoittautunut, että näin voidaan menetellä, jos kosketus on lineaarinen (eli vapaa). Matemaattiset todistukset tämänkin algoritmin suppenevuudesta tiettävästi puuttuvat, joten algoritmia on pidettävä heuristikena. Alustaluvun vaikutus on sama kuin

edellä ja kuvasta 6 nähdään suuri vaikutus ajoakaan.

2.3 Likiratkaisut

Likiratkaisulla tarkoitetaan tässä menetelmiä, joissa tietystä alkuarvausvektorista \underline{p} (tässä aina $\underline{p} = \underline{0}$) lähtien uutta kosketuspainevektoria pyritään parantamaan iteratiivisesti. Lopetuskriteerinä käytettiin yhtälöä

$$\frac{V^{k-1} - V^k}{V^k} < \epsilon, \quad (10)$$

missä vertailuarvo V^k laskettiin yhtälöstä

$$V^k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{p_i^k}{\max p_i^{k-1}} - \frac{p_i^{k-1}}{\max p_i^{k-1}} \right)^2}, \quad (11)$$

ja riittäväksi lopetuskriteeriksi osoittautui $\epsilon = 10^{-7}$ tässä kuormitustapauksessa. Jos algoritmin suppeneminen on hidasta koko iteroinnin ajan, niin kriteeriä täytyy tiukentaa.

Mangasarian on todistanut (*Mangasarian, 1977*), että algoritmi

$$p_i^{k+1} = (1 - \lambda)p_i^k + \lambda \left\langle p_i^k - \omega E_{ii} \left[\sum_{j=1}^n C_{ij} p_j^k + b_i + \sum_{j=1}^{i-1} D_{ij} (p_j^{k+1} - p_j^k) \right] \right\rangle, \quad k = 0, 1, \dots \quad (12)$$

suppenee aina. Yhtälössä $\lambda (0 < \lambda \leq 1)$ ja $\omega (\omega > 0)$ ovat parametreja, E on positiivi-definiitti lävistäjämatriisi ja D on joustomatriisin C alakolmiomatriisi siten, että lävistäjällä ei ole alkioita. Merkintä $\langle f \rangle$ tarkoittaa, että $\langle f \rangle = 0$ jos $f < 0$ ja $\langle f \rangle = f$ jos $f > 0$. Laskennassa käytettiin arvoja $\lambda = \omega = 1$ ja $E = F^{-1}$, kun lävistäjämatriisi F sisältää joustomatriisin C lävistääalkiot. Itse asiassa tämä erikoistapaus on Cryerin algoritmi (*Cryer, 1971*). Kuvissa 7-10 on esitetty tämän algoritmin tulokset eri alustaluvun arvoilla. Alustaluvun muuttuessa alkuarvauksesta $\underline{p} = \underline{0}$ johtuen ajoajat muuttuvat kuvan mukaan. Algoritmi ei tuntunut olevan kovin herkkä parametrien λ ja ω arvoille.

Van Bokhovenin algoritmi muistuttaa edellistä (*Van Bokhoven, 1980*) ja se on

$$x_i^{k+1} = (1 - \lambda) \frac{|x_i^k| + x_i^k}{2} + \lambda \left\{ \frac{|x_i^k| + x_i^k}{2} - \frac{\omega E_{ii}}{2} \left[\sum_{j=1}^n C_{ij} (|x_j^k| + x_j^k) + b_i + \sum_{j=1}^{i-1} D_{ij} (|x_j^{k+1}| + x_j^{k+1} - |x_j^k| - x_j^k) \right] \right\}, \quad (13)$$

missä pitäisi käyttää apumuuttuja \underline{x} , joka määritellään yhtälöillä

$$p_i = |x_i| + x_i \Leftrightarrow \underline{p} = |\underline{x}| + \underline{x}, \quad (14)$$

$$h_i = |x_i| - x_i \Leftrightarrow h = |\underline{x}| - \underline{x}. \quad (15)$$

Algoritmia ei saatu toimimaan tällaisenaan, vaan apumuuttujan \underline{x} ja vektorin \underline{p} välinen riippuvuus määriteltiin kuten seuraavassa, jolloin algoritmi toimi. Laskennassa käytettiin arvoja $\omega = \lambda = 1$ sekä samoja matriiseja E ja D kuin edellä. Algoritmi oli hieman hitaampi kuin Mangasarianin. Kuvissa 7-10 on piirretynä tulokset.

Noor ja Zarae osoittivat hiljattain 3×3 matriisilla, että Mangasarianin ja Van Bokhovenin algoritmit eivät toimikkaan vaikka matemaattisesti on todistettu, että niiden pitäisi (Noor, Zarae, 1986). He esittivät parannusehdotuksen ja heidän algoritminsä on

$$x_i^{k+1} = (1 - \lambda) \frac{|x_i^k| + x_i^k}{2} + \frac{\lambda}{2} \left\{ |x_i^k| + x_i^k - \omega E_{ii} \left[\sum_{j=1}^n C_{ij} \left(\frac{|x_j^k| + x_j^k}{2} \right) + b_i + \sum_{j=1}^{i-1} D_{ij} (x_j^{k+1} - x_j^k) \right] \right\}, \quad (16)$$

missä on käytetty apumuuttuja, joka määritellään yhtälöllä

$$\underline{p} = \frac{|\underline{x}| + \underline{x}}{2}, \quad (17)$$

$$\underline{h} = (\omega E)^{-1} (|\underline{x}| - \underline{x}), \quad (18)$$

ja parametrit λ ja ω saavat arvot $\lambda > 0$ (huom. eri rajat kuin edellä) ja $\omega > 0$ ja matriiseina E ja D käytettiin samoja kuin edellä. Parametrille ω annettiin arvo $\omega = 1$ ja parametria λ muuteltiin. Kokeilemalla löydettiin, että paras arvo tässä tapauksessa on $\lambda = 2.1$. Tällä arvolla ajoaika asettuu Mangasarianin ja Van Bokhovenin algoritmien tulosten välisiin.

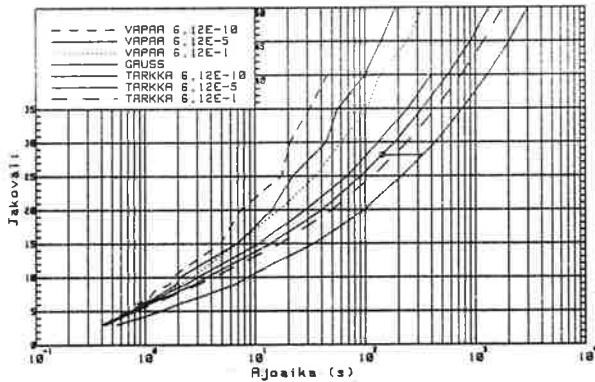
Viimeisenä kokeiltiin Cottlen, Golubin ja Sacherin esittämää algoritmia (Cottle, Golub, Sacher, 1978)

$$p_i^{k+1} = - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} p_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n C_{ij} p_j^k + b_i}{C_{ii}}, \quad (19)$$

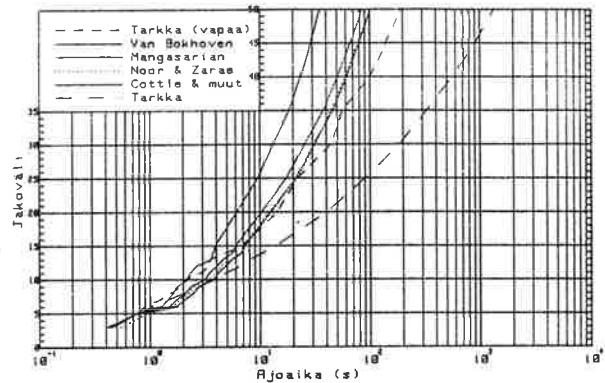
ja lisäksi, jos $p_i < 0$, niin asetetaan $p_i = 0$. Nyt on huomattava, että kaikki tämän algoritmin käytön edellytykset eivät ole täytetyt. Perusoletuksiin kuuluu, että matriisi C on ns. Minkowski-matriisi, eli matriisissa on nollasta poikkeavia alkioita vain lävistäjällä ja tämän vieressä. Nythän näin ei ole, mutta algoritmia päättettiin silti kokeilla. Kuvasta 8 nähdään, että tämä algoritmi on nopein, kun $n > 14$.

2.4 Muut kuormitustapaukset

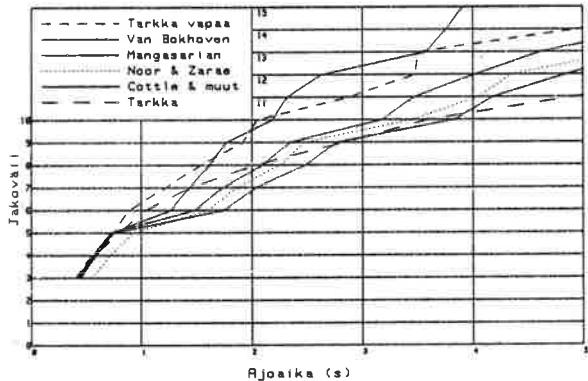
Momenttikuormituksen lisäksi laskenta-aikoja vertailtiin kun kuormituksena oli keskellä jännettä vaikuttava pistevaima sekä tasainen kuormitus yli koko palkin. Cottlen algoritmi ei toiminut ollenkaan näissä kuormitustapauksissa. Kun alustaluku on hyvin pieni, niin palkki painuu alustaansa koko matkalta ja tarkka ratkaisu suppenee ensimmäisellä kierroksella. Tällöin oikeastaan testataan vain yhtälöryhmän ratkaisua ja erot tarkan ja likiratkaisujen



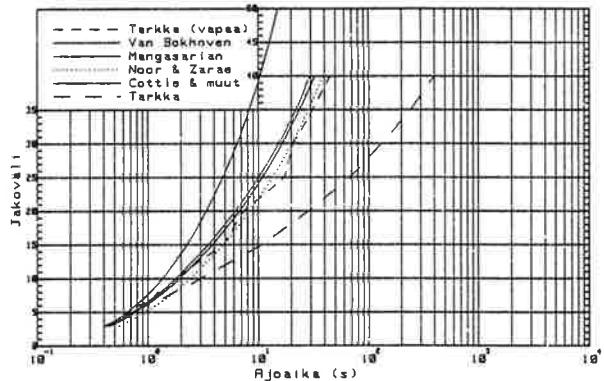
Kuva 6. Tarkka ja lin. kosk.



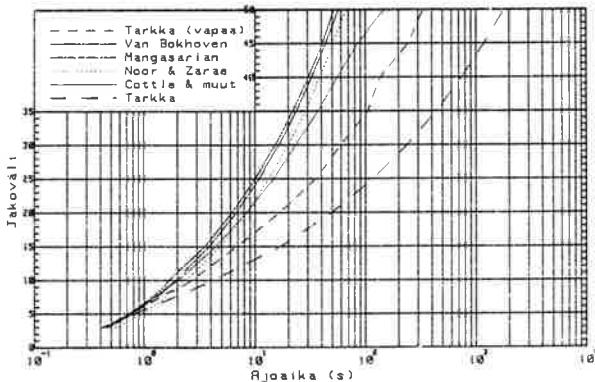
Kuva 7. Algoritmien vert. (savimaa)



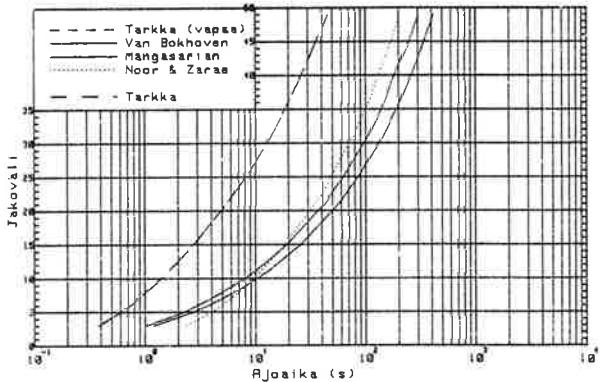
Kuva 8. Tarkennus alkup. (savimaa)



Kuva 9. Algoritmien vert. (löysä maa)



Kuva 10. Algoritmien vert. (kova maa)



Kuva 11. Alg. vert. pistek. (savimaa)

väillä eivät ole suuret. Jos alusta on savea ($k = 6.12 \cdot 10^{-5} N/mm^2$), niin tarkka ratkaisu on n. 4.4-6.7 kertaa nopeampi kuin seuraavaksi nopein eli Noorin algoritmi ($\lambda = 2.1$). Tarkka ratkaisu ja vapaan kosketuksen algoritmi antaa saman tuloksen, koska ratkaisu saadaan edelleen ensimmäisellä kierroksella (kuva 11). Jos alusta on hyvin kovaa, niin tarkka ratkaisu oli jopa 100 kertaa nopeampi kuin likiratkaisut. Lopetuskriteerinä piti nyt käyttää arvoa $\epsilon = 10^{-10}$. Tasaisella kuormituksella tulokset olivat hyvin samanlaiset kuin pistekuormitettulla palkilla. Pidentämällä palkia saadaan pistekuormituksella aikaan se, että palkki nousee myös savimaasta. Yksi koe tehtiin asettamalla palkin pituudeksi $L = 5500mm$ ja kuormitukseksi pistevaimo keskelle palkia. Tulokset olivat samanlaiset kuin edellä pistekuormituksella.

3. YHTEENVETO

Ensinnäkin on mainittava, että käytetyn mikron matriisioperaatiot tuntuivat tehokkailta ja niitä oli helppo käyttää. Lisäksi täysien matriisien käänäminen mikron omilla käskyillä oli nopeampaa kuin itse ohjelmoitu Gaussin eliminaatio. Tarkan ratkaisun tehokkuus loppuu kun $n > 15$, mutta vielä arvolla $n = 20$ tarkka ratkaisu oli vain noin 5 kertaa hitaampi kuin likiratkaisut. Toisaalta laskenta-ajat näillä dimensioilla ovat kokonaisuutena niin pienet, että tuloksella ei ole suurta merkitystä. Vapaan kosketuksen algoritmi oli momentikuormituksessa vielä aivan käyttökelpoinen, kun $n = 40$ lukuunottamatta hyvin kovaa alustaa. Lisäksi on huomattava, että käytännön sovellutuksissa alue $n \leq 40$ on usein riittävä. Vapaan kosketuksen algoritmin voimassaoloaluesta kannattaisi tämän vuoksi etsiä matemaatisesti. Käytännössä se on toiminut kosketustehtävissä, kun alkutilanne on välyksetön ja ilman kosketusjännityksiä. Testatuista likimenetelmistä käyttökelpoisimmalta tuntui Mangasarianin (Cryerin) algoritmi, vaikka se ei ollut kuin yhdessä tapauksessa nopein. Se on kuitenkin taisaisen tehokas ja siten sopiva yleisalgoritmiksi. Cottlen ja muiden algoritmi oli tehokas silloin kun se toimi. Noorin ja Zaraen menetelmän tehokkuus riippuu paljon parametrin λ arvosta ja sitä on hankala valita optimaalisesti. Van Bokhovenin ja Mangasarianin algoritmeissa arvo $\lambda = 1$ oli melko optimaalinen.

4. KIITOKSET

Tekijät kiittävät Suomen Akatemian rahallisesta tuesta projektille: Rakennuselementtien stabilius ja lujuus, jonka rakennustekniikan kosketusprobleemoita koskevaan osatutkimukseen tämä artikkeli kuuluu.

5. LÄHDEKIRJALLISUUS

- [1] Elliot C., Ockendon J., Weak and variational methods for moving boundary problems.

Pitman Advanced Publishing Program, London, 1982.

- [2] Parland H., Vapaan kosketuksen rajatila. I Suomen Mekaniikkapäivien esitelmät (toim. A. Pramila), Oulun Yliopisto, Konetekniikan osasto, Oulu, 1982.
- [3] Parland H., On the stiffness of non-monolithic structures. VTT julkaisu 123, Helsinki, 1968.
- [4] Heinisuo M., Yksinkertainen palkki jäykällä epätasaisella alustalla. Rakenteiden Mekaniikka 17(1984)1, s. 1-16.
- [5] Heinisuo M., Miettinen A., Interaction between the bottom of cylindrical tank and soil. Proc. of the 2nd Int. Symp. on Num. Models in Geomechanics (Eds. Pande G., Van Impe W.), M. Jackson & Sons, England, 1986, pp. 459-464.
- [6] Kalker J., Van Randen Y., A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-Hertzian half-space contact problems. J. Engng. Math. 6(1972), pp. 193-206.
- [7] Neittaanmäki P., Tiihonen T., Optimal shape design of systems governed by a unilateral boundary value problem. Research Report 4, Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, 1982.
- [8] Lin Y., Cryer C., An alternating direction implicit algorithm for the solution of linear complementarity problems arising from free boundary problems. Appl. Math. Optim. 13(1985), pp. 1-17.
- [9] Pavlovic M., Tsikkos S., Beams on quasi-Winkler foundations. Eng. Struct. 4(1982).
- [10] Heinisuo M., Kimmoisalla alustalla olevan palkin ratkaisusta. Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Rakennusstatiikka, Raportti 7, Tampere, 1984B.
- [11] Heinisuo M., Miettinen A., Laatan ja vетоakeстämättömien viivamaisten tukien kitkaton kosketus. II Suomen Mekaniikkapäivien esitelmät (toim. A. Pramila), Tampereen teknillinen korkeakoulu, Konetekniikan osasto, Teknillinen mekaniikka, Raportti 29, Tampere, 1985.
- [12] Heinisuo M., Raiskila M., Teräspilarin ja betonianturan liitos. Teräsrakenne 4(1986), s. 30-34.
- [13] Mangasarian O., Solution of symmetric linear complementarity problems by iterative methods. J. Opt. Theor. Appl. 27(1977), pp. 465-485.
- [14] Cryer C., The solution of a quadratic programming problem using systematic over relaxation, SIAM J. Control 9(1971), pp. 385.

- [15] Van Bokhoven W., A class of linear complementarity problems is solvable in polynomial time. Tech. Report, Department of Electrical Engineering, Technical University, Eindhoven, Holland, 1980.
- [16] Noor M., Zarae S., An iterative scheme for complementarity problems. Engineering Analysis 3(1986)4, pp. 221-224.
- [17] Cottle R., Golub G., Sacher R., On the solution of large, structured linear complementarity problems: the block partitioned case. Appl. Math. Optim. 4(1978), pp. 347-363.

TULIPALON NUMERINEN SIMULOINTI

DI Risto Huhtanen
 VTT/Ydinvoimatekniikan laboratorio
 PL 169, 00181 Helsinki

1 JOHDANTO

Tässä työssä on laskettu tulipaloa kahden turpiiniyksikön hallissa. Palolähteenä on lattialle muodostunut öljylammikko.

Työn tarkoituksena on ollut koota tulipalon simulointia varten riittävä kokonaislaskenta- ja fysikaalisia malleja, hankkia kokemusta simuloinnista ja selvittää laskentaan tarvittavat tietokoneresurssit. Useita palon simulointeja on tehty aikaisemmin ja esitetty referensseissä [1], [2], [3], [4], [5] ja [7], mutta ne on tehty pienemmässä tai erilaisessa laskenta-alueessa kuin nyt käsiteltävä tapaus. Tiedossa ei ole vastaavasta palosta julkaistua mittaustietoa, joten tulosten vertailu jäätä kvalitatiiviseksi.

Nyt käytössä olevassa kolmidimensioisessa laskentamallissa on ajasta riippuvan virtauskentän, entalpian h , turbulenssin kineettisen energian k ja sen dissipaationopeuden ϵ , kemiallisten komponenttien ja säteilyn intensiteetin kuvaus. Lisäksi lämmönsiirto seinämärakenteissa on laskettu yksinkertaisella tavalla.

2 RATKAISUMENETELMÄ

Työ on tehty käyttäen PHOENICS -ohjelmaa, joka on CHAM Ltd:n tekemä ja markkinoinma. Ohjelma ratkaisee yleiset virtausyhtälöt yksi-, kaksi- tai kolmidimensioisessa tapauksessa yhdelle tai kahdelle faasille. Yhtälöt voidaan kirjoittaa yhdelle faasille yleisesti muuttujalle Φ muodossa

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Phi) + \nabla \cdot (\rho v \Phi - \Gamma_\Phi \nabla \Phi) = S_\Phi \quad (1)$$

missä Φ on ratkaistava suure, ρ on tiheys, v nopeusvektori, Γ_Φ on suureen Φ efektiivinen diffuusiotermin ja S_Φ on suureen lähdetermi. Termien Γ_Φ ja S_Φ lausekkeet eri muuttujille on esitetty taulukossa 1.

Taulukko 1. Diffuusiotermi ja lähdetermi eri yhtälöissä

Φ	Γ_Φ	S_Φ
1	0	0 (jatkuvuusyhtälö)
u_i	μ_{eff}	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_{eff} \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$
h	$\frac{\mu_{eff}}{\sigma_h}$	0
k	$\frac{\mu_{eff}}{\sigma_k}$	$G_K - \rho \varepsilon + G_B$
ε	$\frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{\varepsilon}{k} [(G_k + G_B)C_1 - C_2 \rho \varepsilon]$

$C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad C_D = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad \sigma_h = 1.0$
 $\mu_{eff} = \mu_l + \mu_t, \quad \mu_t = C_D \rho k^2 / \varepsilon$
 $G_K = \mu_t [2(\frac{\partial u_i}{\partial x_i})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})^2]$
 $G_B = \mu_t g \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$

PHOENICS-ohjelman ominaisuuksiin kuuluu myös, että käyttäjä voi halutessaan määritellä uusia yhtälöitä yllä olevan muodon mukaisesti. Tässä työssä on otettu säteilyn laskemiseksi käytöön kuusivuo malli (six-flux model) [5]. Keskimääräiselle säteilyintensiteetille R_{xi} saadaan yhtälöt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma \frac{\partial R_{xi}}{\partial x_i}) = S_{xi} \quad (2)$$

$$R_{xi} = 1/2 (F_{xi}^+ + F_{xi}^-) \quad (3)$$

missä F_{xi}^+ ja F_{xi}^- ovat säteilyvuon arvot positiiviseen ja negatiiviseen suuntaan. Kertoimille saadaan

$$S_{xi} = (a+s)R_{xi} - (R_x + R_y + R_z)s/3 - a\sigma T^4 \quad (4)$$

$$\Gamma = 1/(a+s) \quad (5)$$

missä a ja s ovat absorptio ja sirontakerroin ja σ on Stefan-Boltzmanin vakio. Lisäksi säteilyn takia tulee entalpiayhtälöön lähdetermiksi

$$S_h = 2a(R_x + R_y + R_z - 3\sigma T^4) \quad (6)$$

3 FYSIKAALISET MALLIT

Rakennuksen ilma on käsitelty kaasuseoksena, jonka komponentit ovat happy, höyrystynyt polttoaine, savukaasut ja passiiviseksi oletettu typpi. Kaikkia komponentteja on käsitelty ideaalikaasuina. Lämpötila lasketaan entalpiasta, joka sisältää myös polttoaineen kemiallisen entalpian.

Palamista on kuvattu yksivaiheisena reaktionaa, jonka tuotteet ovat hiilidioksiidi ja vesihöyry. Reaktionopeuden määrittelyyn on käytetty Magnussenin ja Hjertagerin eddy-break-up mallia [1]. Tässä oletetaan, että palamista säätelee polttoaineen ja hapen turbulenttiainen sekoittuminen. Lauseke on muotoa

$$R_{fu} = -A \rho \frac{\varepsilon}{k} \min \left[\frac{m_{ox}}{s}, \frac{m_{fu}}{s} \right] \quad (7)$$

missä A on parametri, jonka arvoksi otetaan yleensä 4., m_{ox} on hapen massaosuuus, m_{fu} on polttoaineen massaosuuus ja s on se hapen määrä joka tarvitaan polttamaan 1 kg polttoainetta.

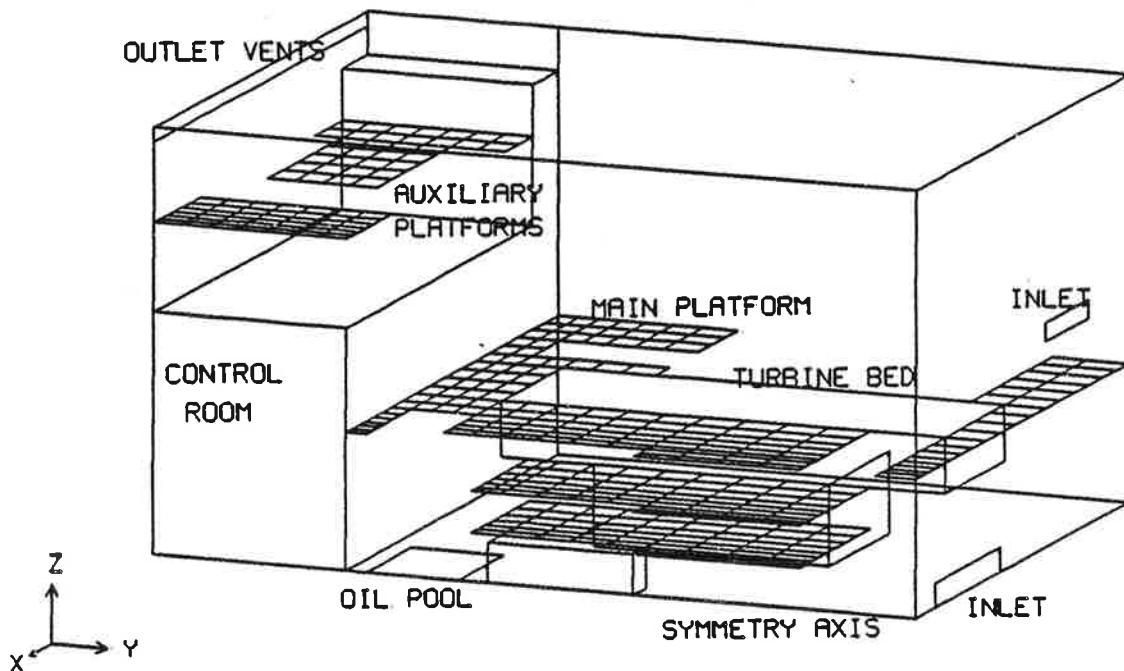
Turbulenssia on kuvattu k- ε mallilla, joka soveltuu isotrooppisiin tapauksiin. Tulipalossa, jossa nosteen vaikutus on suuri, turbulensi on kuitenkin voimakkaasti anisotrooppista. Tämä vaikutus on pyritty ottamaan huomioon nosteesta johtuvilla lähdetermeillä k ja ε yhtälöissä [6].

Säteilylämmönsiirrossa absorptiokerroin riippuu säteilevän kaasun komponenttien suhteesta. Kaksiatomiset kaasut kuten typpi ja happy ovat lähes läpinäkyviä, joten absorptiokertoimeen vaikuttavat vain hiilidioksiidi, vesihöyry ja noki- ja koksihiukkaset. Tässä on kuitenkin absorptiokertoimelle otettu vakiarvo koko alueessa.

4 GEOMETRIA JA DISKRETOINTI

Symmetriasyistä turpiinihallista on mallinnettu vain puolikas. Kuvatun alueen mitat ovat pituus 40 m, leveys 55.5 m ja korkeus 29.6 m (x-, y- ja z-suunnat kuvassa 1). Osassa tilavuutta on virtausta estäviä rakenteita kuten huoltotasoja, turpiinikoneistoja, lämmönvaihtimia, putkiverkkoja ja eri kokoisia

ole piirretty kuvaan. Hallin nettotilavuus on 55000 m^3 . Ilmastointijärjestelmää, jonka puhaltimet on oletettu pysähtyneiksi, on kuvattu kahden aukon avulla. Toinen on lattian tasossa ja toinen 15 m:n korkeudella. Aukkojen pinta-alat ovat 18 m^2 ja 9 m^2 . Kuuma ilma pääsee ulos katon rajassa olevien savunpoistoluukkujen kautta. Luukkujen pinta-ala on 40 m^2 .



Kuva 1. Laskenta-alueen geometria. Kokonaan poistetut kopit ja kokonaan suljetut tasot ovat näkyvissä.

5 REUNAEHDOT

Öljyaltaan koko on 100 m^2 . Höyrystymisnopeudella 3 mm/min polttoainevirta on 4.25 kg/s . Jos polttoaine palaa täydellisesti samalla nopeudella, on paloteho noin 180 MW . Symmetriasyistä malliin on otettu puolet polttoainevirrasta. Öljylammikko on lattialla valvontahuoneen seinän vieressä.

Laskennan alussa ilman on oletettu olevan levossa. Sisään ja ulosvirtausaukoissa on reunaehtona standardi-ilmakehän paine. Sisäänvirtaus on laskettu Bernoullin yhtälön mukaan ja ulosvirtauksessa on oletettu, että reunakopissa on sama paine kuin ulkoilmassa vastaavalla korkeudella.

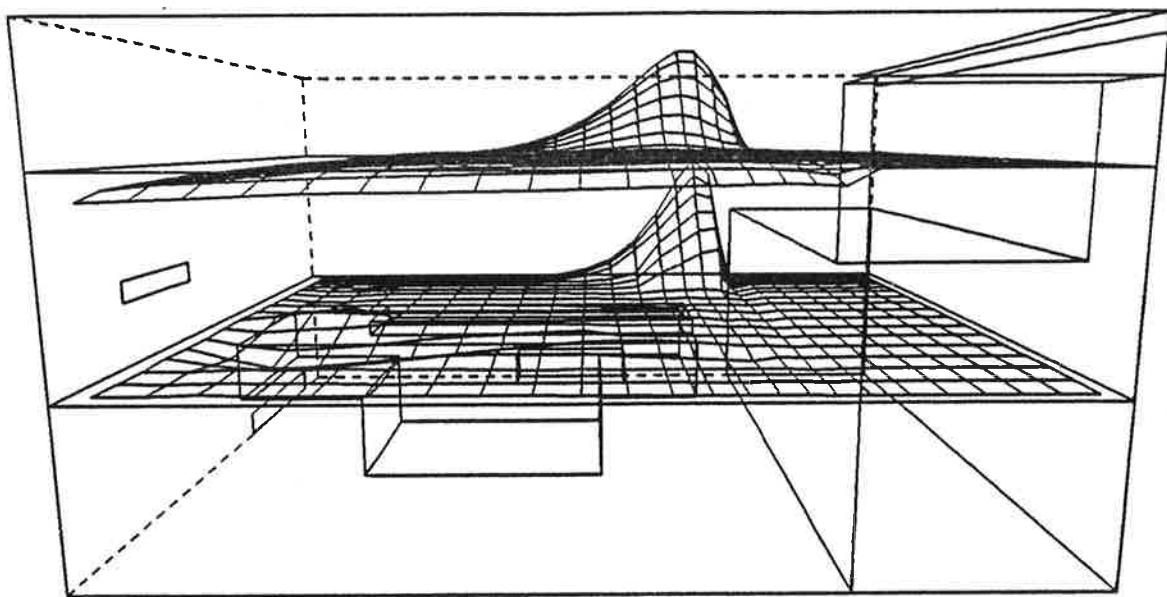
Lämpötilan alkuarvot on otettu samaksi koko alueessa. Jokaisen rakenteen lämpötila lasketaan erikseen. Lämmönjohtuminen rakenteissa lasketaan yksidi-

mensioisesti erillisellä ohjelmalla. Tässä on käytetty yhtätoista rakennetta: liekin yläpuolella oleva katto, muu osa katosta, valvontahuoneen seinä liekin lähellä, muut betoniseinät ja teräselementtiseinät. Lämpövirta rakenteisiin on summa säteilylämmöstä ja konvektiivisesta lämmöstä. Tässä konvektiiviselle lämmönsiirrolle on käytetty vakio lämmönsiirtokerrointa.

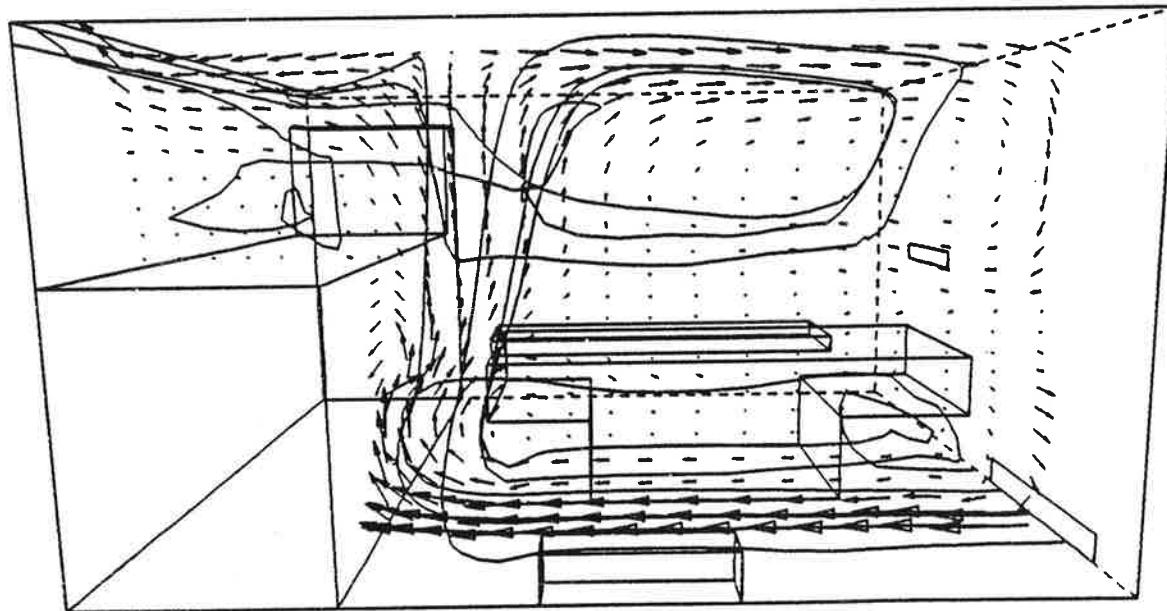
6 TULOKSET

Työ aloitettiin harvalla 9*12*12 laskentakopin verkolla. Tässä ensivaiheessa ei sovellettu säteilymallia. Harvasta verkosta johtuva numeerinen diffuusio vaikuttaa niin paljon lämpötilan arvoihin, että säteilyn laskeminen ei ole luotettavaa. Ilman säteilymalliakin korkeimmat lämpötilan arvot olivat 300...400 K tavanomaisen vapaan liekin lämpötilojen alapuolella. Virtauskenttä oli pääpiirteissään samanlainen kuin tiheämällä verkolla laskettu, mutta gradientit olivat loivempia.

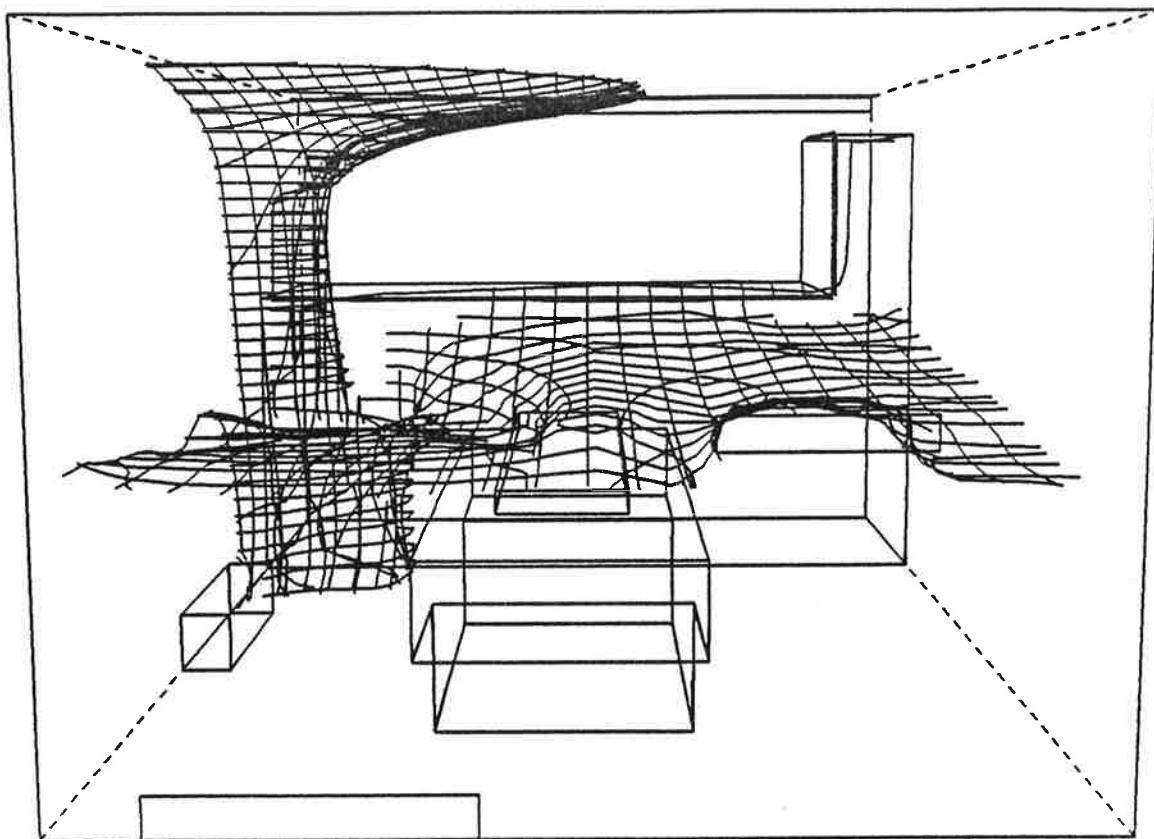
Varsinaiset laskut tehtiin tiheämällä 18*24*24 laskentakopin verkolla. Polttaineen syöttöä lisättiin lineaarisesti nollasta nimellisarvoon 120 sekunnissa. Alkuvaiheessa, kun hallin ilmassa ei ollut suuria tiheyseroja, muodostui palosta sisäinen kierros. Palokaasut nousivat ylös kattoon ja syrjäytetty ilma virtasi vastakkaisista seinää pitkin alas. Vähitellen hallin yläosa täyttyi kuumista kaasuista ja virtaus muodosti kakso erillistä kerrostaa. Yläosassa olivat kuumat palokaasut ja alaosassa kylmä ilma. Sekoittuminen kummankin kerroksen sisällä oli voimakasta, mutta niiden välillä oli lämpötilagradientti. Laskentaa jatkettiin kuuden minuutin kohdalle, jolloin virtauskenttä oli jo asettunut lähes muuttumattomaksi. Rakenteiden lämpötilat nousevat kuitenkin jatkuvasti. Kuvassa 2 on esitetty pystynopeuden jakautuma kahdessa tasossa. Suurin nopeus ylöspäin oli liekin yläpuolella 14 m/s ja alas päin 1.9 m/s. Kuvassa 3 on joitakin virtaviivoja ja nopeusvektoreita. Kuvassa voidaan nähdä kakso erillistä kerrostaa hallin ylä- ja alaosissa. Suurin vaakanopeus katon alla oli 6.8 m/s ja tyypilliset arvot olivat 2...5 m/s. Suurempia arvoja oli vain liekin yläpuolella, katon alla ja sisäänvirtaussuihkuissa. Sisäänvirtausnopeudet olivat 9.8...11 m/s. Verkon tihennys vaikutti huomattavasti lämpötilan arvoihin, erityisesti liekin alueella. Tiheällä verkolla ilman lämmönsiirtoa rakenteisiin korkeimmat arvot olivat jopa 2200 K. Rakenteet ja säteily mukaan otettuna lämpötilat laskivat 1500 K asteeseen. Nämä ovat maksimilämpötiloja liekin alaosassa. Ylös nouseva savupasas jäähtyy kylmän ilman sekoittuessa virtaukseen. Kahdeksan metrin korkeudessa maksimilämpötila on alle 1000 K. Kuvassa 4 on esitetty lämpötilan



Kuva 2. Pystysuuntainen nopeusprofiili tasoilla $z/H = 0.35$ ja $z/H = 0.75$. Arvot ovat $-1.5 \dots 13$ m/s ja $-1.9 \dots 11$ m/s vastaavasti. Ajanhetki on 360 sekuntia palon alkamisesta.



Kuva 3. Nopeusvektoret tasossa $x/X = 0.8$ ajanhettellä 360s palon alkamisesta. Suurin nopeus tasossa on 10 m/s. Virtaviivat alkavat alemmasta sisäänvirtausaukosta. Huomaa, että virtaviivat eivät ole samassa tasossa kuin nopeusvektorit.



Kuva 4. Lämpötilan tasa-arvopinnat 373 K ja 473 K ajanhetkellä 360 s.

tasa-arvopinnat 373 K ja 473 K. Kuvassa 5 on lämpötilan pystysuuntainen profiili kahdessa leikkauksessa. Eri kerrosten välinen lämpötilagradiantti ei ole kovin jyrkkä, mutta sen voi kuitenkin selvästi nähdä kuvasta.

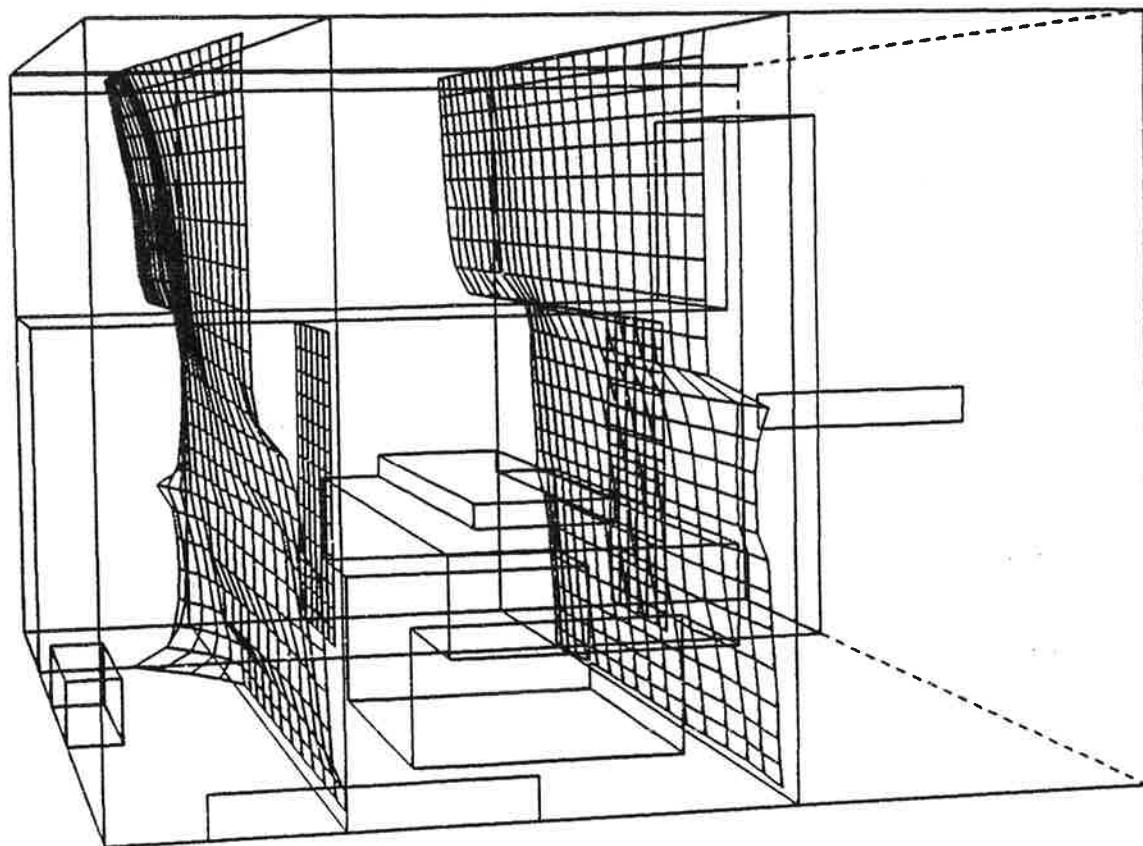
Rakenteisiin siirtyvä lämpöteho voidaan laskea energiayhtälön perusteella. Taulukossa 2 on esitetty rakenteisiin siirtyvä ja savukaasujen mukana poistuva lämpöteho eri ajanhetkinä. Taulukossa 3 on esitetty muutamien rakenteiden pintalämpötilat ja rakenteisiin kosketuksissa olevan kaasun lämpötila-alue.

Taulukko 2. Ulosvirtaus ja lämpötehot eri ajanhetkinä.

aika	massavirta	lämpötila	lämmön siirto rakenteisiin [MW]	lämmön siirto savukaasuihin [MW]
[s]	[kg/s]	[K]		
60	200.	335...415	7.6	37.8
120	318.	395...500	17.8	66.9
180	330.	405...490	24.8	67.9
240	344.	425...490	20.8	69.5
300	350.	435...500	19.2	71.6
360	352.	440...520	17.7	73.2

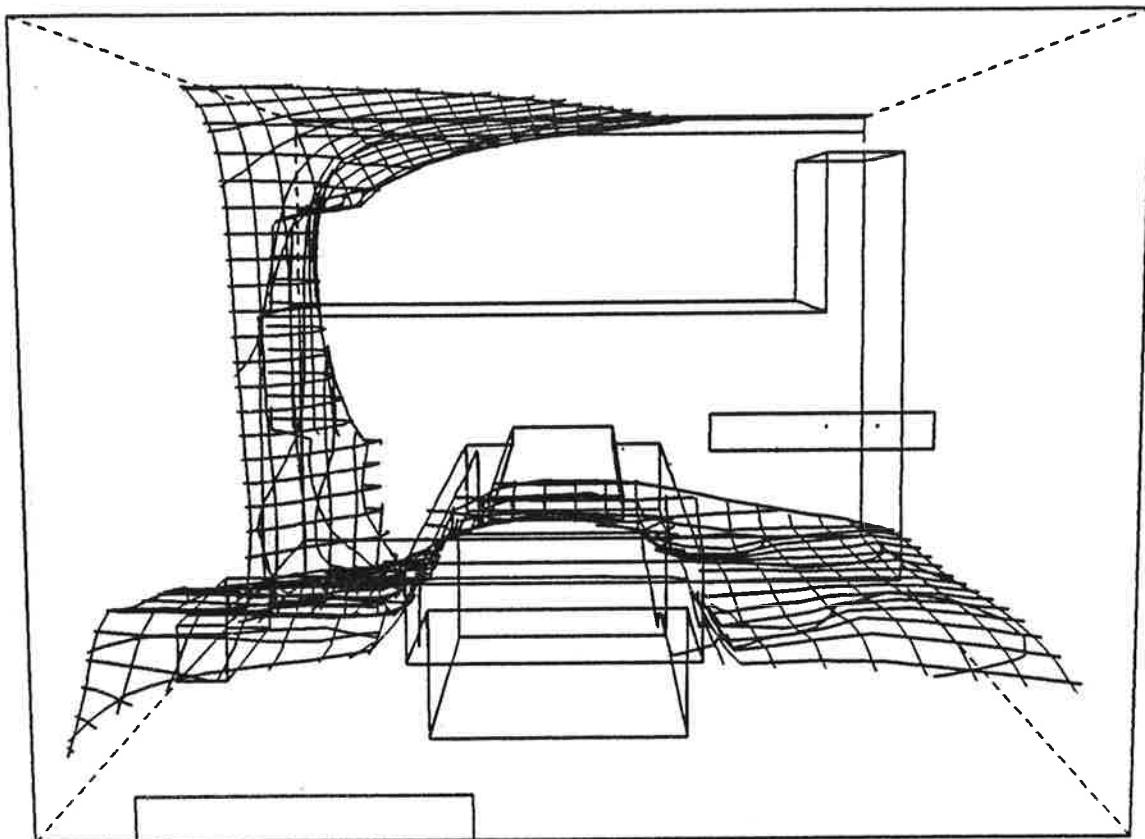
Taulukko 3. Muutamien rakenteiden pintalämpötila ja rakenteiden kanssa kosketuksissa olevan kaasun lämpötila-alue 6 minuuttia palon alkamisesta.

Rakenne	pinnan lämpötila [K]	kaasun lämpötila [K]
katto liekin yläpuolella	440	495...580
muu osa katosta	376	430...530
teräselementtiseinä	420	350...440
betoniseinä liekin lähellä	380	465..1350
betoniseinä kaukana liekistä	299	300...340



Kuva 5. Lämpötilaprofiilit kohdissa $x/X = 0.35$ ja $x/X = 0.78$. Lämpötila-alueet ovat 300...470 K ja 290...520 K vastaavasti.

Savukaasujen massaosuus on esitetty kuvassa 6. Massaosuus päätason alla on suurempi kuin oli odotettu. Tämä johtunee numeerisesta diffuusiosista, joka on vielä melko voimakas myös tiheämässä verkossa.



Kuva 6. Savukaasun massaosuuden tasa-arvopinnat. Ylemmän arvo on 2.5 % ja alempaan 0.5 %.

7 JOHTOPÄÄTÖKSET

Työssä on suoritettu tulipalon simulointi PHOENICS-ohjelmalla käyttäen k-ε turbulenssimallia ja turbulenssista riippuvaa palamismallia. Myös säteilylämmönsiirto ja lämmönsiirto rakenteisiin on otettu huomioon. Ne fysikaaliset suureet, joiden käytäytymistä voidaan arvioida kvalitatiivisesti edes jollain tarkkuudella, kuten lämpötila ja nopeus, saavat oikealta näyttäviä arvoja. Kuvattu tapaus muistuttaa hyvin paljon Hanasaaren voimalaitoksessa Helsingissä kesäkuussa 1986 tapahtunutta onnettomuutta. Molemmissa tapauksissa kylmä ulkoilma virtasi lattatasolle päätason alapuolelle ja hallin alaosa säilyi kohtalaisen kylmänä ja vahingoittumattomana.

Ongelman geometrinen määrittely tai reunaehojen asettaminen ohjelmaan ei ollut erityisen vaikeaa. Suurempi ongelma on tietää mitä reunehtoja ja fysi-

kaalisia malleja pitäisi käyttää tapauksen olennaisten piirteiden kuvaamiseen.

Harvassa verkossa laskenta-aika oli 29.3 CPU tuntia yhdeksän minuutin transientin kuvaamisessa. Tiheämässä verkossa on käytetty 225 CPU tuntia kuuden minuutin transientin kuvaamiseen. Laskuissa on käytetty microVAX II konetta. Monimutkaisten virtaustilanteiden laskeminen tuntuu vievän runsaasti tietokoneikaa. Toisaalta käsiteltävän informaation määrä on melkoinen. Aktiivisia laskentakoppeja on runsaat 8000, ja kun joka koppiin liittyy 13 suuretta, kertyy tuntemattomia 104000 kappaletta jotka kaikki pitää ratkaista joka aika-askeleella. Tässä käytetty minikone ei varsinaisesti sovellu paljon laskentatehoa vaativiin ongelmiani. Tehokkaammilla tietokoneilla voidaan päästä alle vuorokauden laskenta-aikoihin vastaavissa tapauksissa.

Yleisesti ottaen ohjelman voi sanoa olevan hyödyllinen tulipalon arvioinnissa, etenkin kun turpiinihallin kaltaisten suurten tilojen palon arvointi muilla menetelmillä on kovin hankalaa.

8 VIITTEET

1. G. Cox, S. Kumar: Field modelling of fire in forced ventilated enclosures. Combustion Science and Technology, 1987, vol 52, pp.7-23.
2. G. Cox, S. Kumar, N.C. Markatos: Some field model validation studies. Fire safety science. Proceedings of the first international symposium. Hemisphere 1986.
3. E.R. Galea, N.C. Markatos: A review of mathematical modelling of aircraft cabin fires. Applied mathematical modelling, 1987, vol 11, June, pp.162-176.
4. N.C. Markatos, M.R. Malin, G. Cox: Mathematical modelling of buoyancy-induced smoke flow in enclosures. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 25, p.63-75, 1982.
5. N.C. Markatos, K.A. Pericleous: An investigation of three dimensional fires in enclosures. ASME/AICHE, HTD, Vol 25, 1983. Proceedings of 21st National Heat Transfer Conference.
6. S. Kumar: Mathematical modelling of natural convection in fire - A state

of the art review of the field modelling of variable density turbulent flow. Fire and materials, Vol 7, No 1, 1983, pp.1-24.

7. S. Kumar, G. Cox: Mathematical modelling of fires in road tunnels. 5th International Symposium on the Aerodynamics & Ventilation of Vehicle Tunnels. Lille, France, 20-22 May, 1985.

HARMONISESTI HERÄTETTYJEN KEHÄMÄISTEN KONEPERUSTUSTEN ANALYSointi

Dipl.ins. P. Iivonen,
Tekn. tri J. Puttonen ja
Tekn. tri P. Varpasuo
Rakennusosasto, Imatran Voima Oy

1 JOHDANTO

Kehämäisten koneperustusten, kuten höyryturbien perustusten, suunnittelu on suurelta osin perustunut kokemukseen. Turbiiniperustusten suunnittelussa on viime vuosikymmeninä käytetty DIN 4024-normia vuodelta 1955 [2]. Tässä normissa on esitetty menetelmä dynaamista harmonista herätevoimaa vastaavan staattisen korvausvoiman määrittämiseksi. Perustusten värähtelyominaisuuksien, kuten ominaismuotojen ja ominaisarvojen sekä harmonisen herätteen vasteen, määrittämistä normi ei käsittele. Nykyisin on kuitenkin käytettävissä menetelmät ja mahdollisuudet ominaismuotojen ja rakenteen vasteen määrittämiseksi.

Esiteltävän tutkimuksen ensimmäisessä osassa kehitettiin menetelmä perustuksen vasteen määrittämiseksi harmoniselle herätevoimalle. Menetelmä kehitettiin laajennuksena SAP IV-ohjelmaan [1]. SAP IV-ohjelman massaan on valmiina moduli, joka laskee ominaisarvot ja ominaismuodot. Rakenteen vaste harmoniselle herätteelle saadaan kombinoimalla kunkin ominaismuodon vaste. Ominaismuodon vaste on myös harmoninen ja sen taajuus on sama kuin herätteen taajuus. Vaste on määritetty, kun tunnetaan vasteen amplitudi ja vaihekulma.

Kirjoituksen toisessa osassa on käsitelty tärkeimpien vasteeseen vaikuttavien ominaismuotojen määritystä. Ominaismuodon vaikutus rakenteen vasteeseen määritetään tässä tutkimuksessa yleistetyn osallistumiskertoimen käsitteen avulla. Osallistumiskerroin

muodostetaan kolmesta eri tekijästä: ensimmäinen kuvailee herätetäajuuden ja ominaistaajuuuden suhdetta, toinen kuvailee kuormituksen geometrisen jakauman ja ominaismuodon geometrian yhteensovivuutta ja kolmas kuvailee ominaismuodon siirtymääplitudin suuruutta tietyn pisteen tutkittavan siirtymääplitudin kohdalla. Rakenteen vasteen määrittely suoritetaan kombinoimalla osallistumiskertoimiltaan suurimmat ominaismuotovasteet. Kirjoituksen kolmannessa osassa kehitettyä menetelmää sovellettiin höyryturbiinien kehämaisten perustusten vasteiden analysointiin.

2 HARMONISEN VÄRÄHTELYN ANALYYSIOHJELMA

Lineaarista ja kimmoista teoriaa noudattavan rakenteen dynaamista käyttäytymistä voidaan kuvata tasapainoyhtälöllä:

$$[M] \{ \ddot{x} \} + [C] \{ \dot{x} \} + [K] \{ x \} = \{ P \} \sin(\omega t) \quad (1)$$

missä

$[M]$, $[C]$, $[K]$	massa-, vaimennus- ja jäykkyysmatriisi
$\{ \ddot{x} \}$, $\{ \dot{x} \}$, $\{ x \}$	kiertyvyys-, nopeus- ja siirtymävektori
$\{ P \}$	kuorman amplitudivektori
w , t	kuorman kulmanopeus ja aika

Ratkaisemalla yhtälön (1) ominaisarvot ja -muodot voidaan tehdä koordinaatiston muunnot

$$\{ x \} = [\Phi] \{ y \} \quad (2)$$

missä

$[\Phi]$	ominaismuotomatriisi
$\{ y \}$	yleistetyt koordinaatit

Koordinaattimuunnoksen (2) avulla saadaan matriisiyhtälö (1) muunnettua erillisiksi yhtälöiksi:

$$\ddot{y}_i + 2\beta_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = p_i \sin(\omega t) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

missä

β_i vaimennuksen ja kriittisen vaimennuksen suhde

ω_i ominaisarvo

$p_i = \{\Phi_i\}^T \{P\}$

m ominaisarvojen lukumäärä

Yhtälössä (3) on ominaisvektorit skaalattu siten, että yleistetty massa $M_i = 1$. Yhtälöä (3) ratkaistaessa voidaan homogenisen osan ratkaisu jättää huomioon ottamatta, koska se vaimenee eksponentiaalisesti asymptoottina nolla. Koska kuormitus on pitkääikainen, riittää yhtälön (3) ratkaisuna sen erikoisratkaisu:

$$y_i = a_i \sin(\omega t - b_i) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

missä

$$a_i = p_i / \sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\beta_i \omega_i \omega)^2}$$

$$b_i = \arctan [2\beta_i \omega_i \omega / (\omega_i^2 - \omega^2)]$$

Yleistetyt koordinaatit (4) muunnetaan takaisin alkuperäiseen koordinaatistoon kaavalla (2) eli siirtymiksi saadaan

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{i=1}^m \Phi_{j,i} a_i \sin(\omega t - b_i) \\ &= R_j \sin(\omega t - s_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

missä

$$R_j = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} \quad s_j = \arctan (T_1/T_2)$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^m \Phi_{j,i} a_i \sin(b_i) \quad T_2 = \sum_{i=1}^m \Phi_{j,i} a_i \cos(b_i)$$

n vapausasteiden lukumäärä

Yleensä ollaan kiinnostuneita vain siirtymien maksimiарвоista R_j . Siirtymistä aiheutuvat jännitykset lasketaan jännitys-siirtymä riippuvuuden avulla.

Edellä kuvattu harmoninen analyysi ohjelmoitiin lisäyksenä SAP IV-ohjelmaan. SAP IV-ohjelmassa on valmiina moduli, joka laskee ominaisarvot ja -muodot. Ominaismuodot on skaalattu siten, että yleistetty massa $M_i = 1$. Myös jännitysmatriisi saadaan suoraan SAP IV:n tiedostosta. SAP IV-ohjelmaan ohjelmoitiin kaavassa (4) tarvittavien harmonisen analyysin lähtötietojen lukeminen, yleistetyjen koordinaattien (4), siirtymisen (5) ja jännitysten laskeminen sekä tulostus.

3 TÄRKEIMMÄT VASTEESEEN VAIKUTTAVAT OMINAISMUODOT

Perinteisesti koneperustusten dynaamisten ominaisuuksien määrittäminen on perustunut alimpiin ominaistaajuksiin. Puhutaan alas- ja ylösvirityistä perustuksista sen mukaan, onko herätetaajuus suurempi tai pienempi kuin alin ominaistaajuus. Kehämäiset turbiiniperustukset ovat lähes poikkeuksetta alasviritettyjä. Ne pyritään suunnittelemaan siten, että alimmat ominaistaajuudet reagoivat herätteeseen pääosin hitausvoimilla. Korkeampia ominaistaajuksia suunnittelussa ei ennen tietokoneita mainittavasti tarkasteltu. Tämä on kuitenkin teoreettisesti epätarkkaa, koska suurin osa dynaamisesta vasteesta aiheutuu muista kuin alimmista ominaisuuksista.

Tekniseksi ja taloudelliseksi optimoitu perustusta suunniteltaessa on oleellista jo suunnitteluvaiheessa löytää herätteen kannalta rakenteen haitallisimmat ominaismuodot. Samalla on syytä selvittää, minkälaisin rakenteellisin muutoksin haitallisiin ominaismuotoihin voidaan tarvittaessa vaikuttaa. Analysoinnin kannalta merkittävä on, että dynaamisen vasteen arvioinnissa tarvitaan ainoastaan valitut haitalliset ominaismuodot.

Ominaismuotojen merkittävyyttä arvioidaan laskemalla ominaismuoto kohtainen osallistumiskerroin, joka täydellisimmillään muodostuu kolmesta tekijästä. Näistä ensimmäinen kuvailee herätetaajuuden ja

ominaismuodon taajuuden suhdetta. Toinen tekijä esittää ominaismuodon geometrian ja kuormituksen geometrisen jakautuman keskinäistä samankaltaisuutta. Kolmannen tekijän arvo määräytyy ominaismuodon merkityksestä valitun pisteen liiketilaan. Tämä tekijä on vapausastekohtainen. Näiden kolmen tekijän tulona saadaan kokonaisosallistumiskerroin.

Määritellyn osallistumiskertoimen fysikaalisen merkityksen havainnollistamiseksi tarkastellaan yksiaukkoista vapaasti tuettua palkkia, jonka ominaismuodot saadaan yhtälöistä:

$$\Phi_n = \sin(n\pi x/L), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{EI/(mL^4)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

missä

- L palkin jännemitta
- EI palkin jäykkyys
- m palkin massa pituusyksikköä kohti
- n ominaismuodon järjestysnumero
- x tarkasteltavan pisteen etäisyys tuelta

Jos palkkia kuormittaa harmoninen heräte, jonka kulmataajuus on w, on kunkin ominaismuodon dynaaminen osallistumiskerroin

$$D_n = (1-w^2/\omega_n^2)^{-1} \quad (8)$$

Yhtälö (8) on itseasiassa vaimentamattoman väärähtelijän kuorman dynaaminen suurennuskerroin.

Ominaismuodon geometrian ja kuormituksen geometrisen jakautuman välistä suhdetta kuvaavat kuormituksesta ominaismuodolle tulevan kuorman osuus. Jos herätteen jakautumaa palkille kuvaava funktio $p(x)$, saadaan etsitylle kertoimelle G_n lauseke

$$G_n = \int_0^L p(x) \sin(n\pi x/L) dx \quad (9)$$

Kolmas kerroin, α_n , on ominaismuodon koordinaatti valitussa pisteessä. Esimerkiksi palkin keskipisteessä kertoimen arvoksi saadaan

$$\alpha_n = \sin(n\pi/2) \quad (10)$$

Omniaismuodon kokonaisosallistumiskertoimelle K_n voidaan nyt kirjoittaa yhtälö

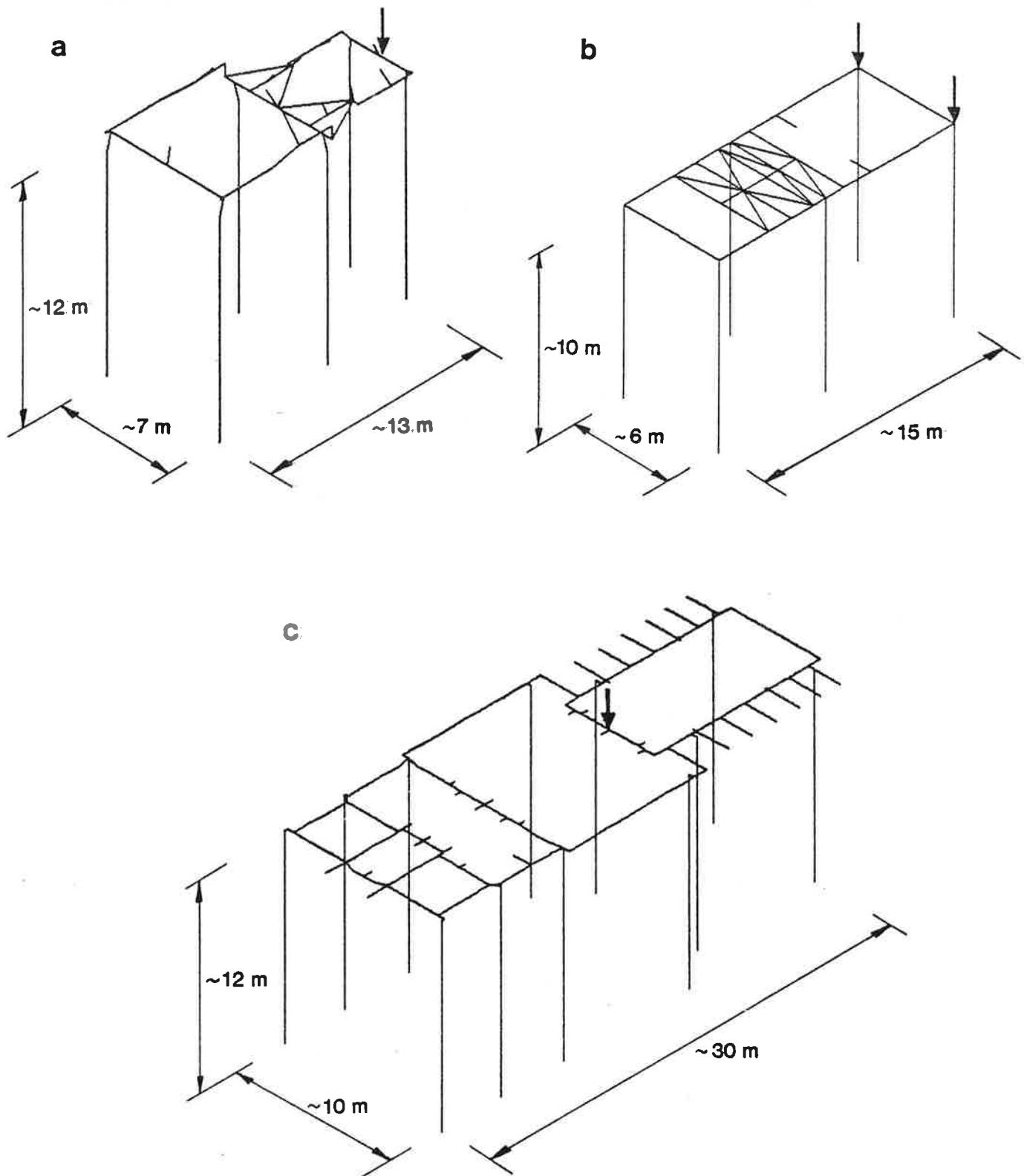
$$K_n = \alpha_n G_n D_n \quad (11)$$

Palkille esitetty osallistumiskertoimen muodostaminen on analoogisesti sovellettavissa diskreeteillä massoilla kuvattuihin systeemeihin. Yhtälön (11) mukaisesta kertoimesta nähdään suoraan, mitkä rakenteen ominaismuodoista ovat herätteen kannalta vaaralisimmat. Kertoimien α , G ja D perusteella voidaan päätellä, mistä tekijöistä ominaismuodon haitallisuus johtuu. Tämä helpottaa sekä rakenteen analysointia että dynaamisilta ominaisuuksiltaan optimaalisen rakenteen suunnittelua.

4 SOVELLUTUSESIMERKIT

Johdetun laskentamenetelmän sovellutuksena esitetään kolmelle höyryturbiniin perustukselle saatuja tuloksia. Turbiineista kaksi, a ja b, ovat teholtaan 80 MW. Kolmannen, c:n, teho on 150 MW. Perustukset on kuvattu palkkielementeillä. Laskentamalleissa on aakkosjärjestyksessä 59, 55 ja 221 solmupistettä. Kuvassa 1 on esitetty laskentamallit. Turbiini sijaitsee kunkin mallin vasemmanpuoleisessa osassa, joten generaattori on oikealla puolella.

Analyysissä tarkastelteltiin kahta eri kuormitustilannetta. Osallistumiskerroinselvitys tehtiin normaalilin käytönaikaisella 50 Hz:n taajuudella esiintyväällä dynaamisella kuormalla. Siirtymä-amplitudit laskettiin turbiinin siiven irtoamisen aiheuttamalle



Kuva 1. Tarkasteltujen turbiiniperustusten laskentamallit.
Maksimisiirtymääplitudien sijainti on merkity nuolilla.

onnettomuustilanteelle. Normaalin käytönaikaisen dynaanisen kuorman jakautuma koneen kiinnityspisteille arvioitiin laitte-toimittajien antamista kuormitustaulukoista. Samoista taulukoista saatiin myös siiven irtoamisesta syntyvän kuorman maksimiampli-tudi. Laskennassa oletettiin onnettomuuskuorman esiintyvän harmonisena 50 Hz:n taajuudella.

Kuvassa 2 on taulukkona esitetty eri perustuksilla saadut viisi suurinta osallistumiskerrointa. Annetuissa kertoimissa ei ole

Turbiini-perustus	Ominaismuodon taajuus Hz	Ominaismuodon järjestysnum.	Skaalattu osallis-tumiskerroin K=GD
a	51,96	18	1,00
	59,98	21	0,15
	65,56	22	0,13
	144,57	39	0,12
	71,08	23	0,12
b	55,46	25	1,00
	82,32	40	0,22
	60,39	27	0,17
	77,30	38	0,15
	72,39	32	0,15
c	49,56	54	1,00
	45,86	53	0,60
	54,03	58	0,12
	51,47	56	0,11
	51,17	55	0,10

Kuva 2. Osallistumiskertoimet liittyen normaalin käytönaikaiseen dynaaniseen kuormaan.

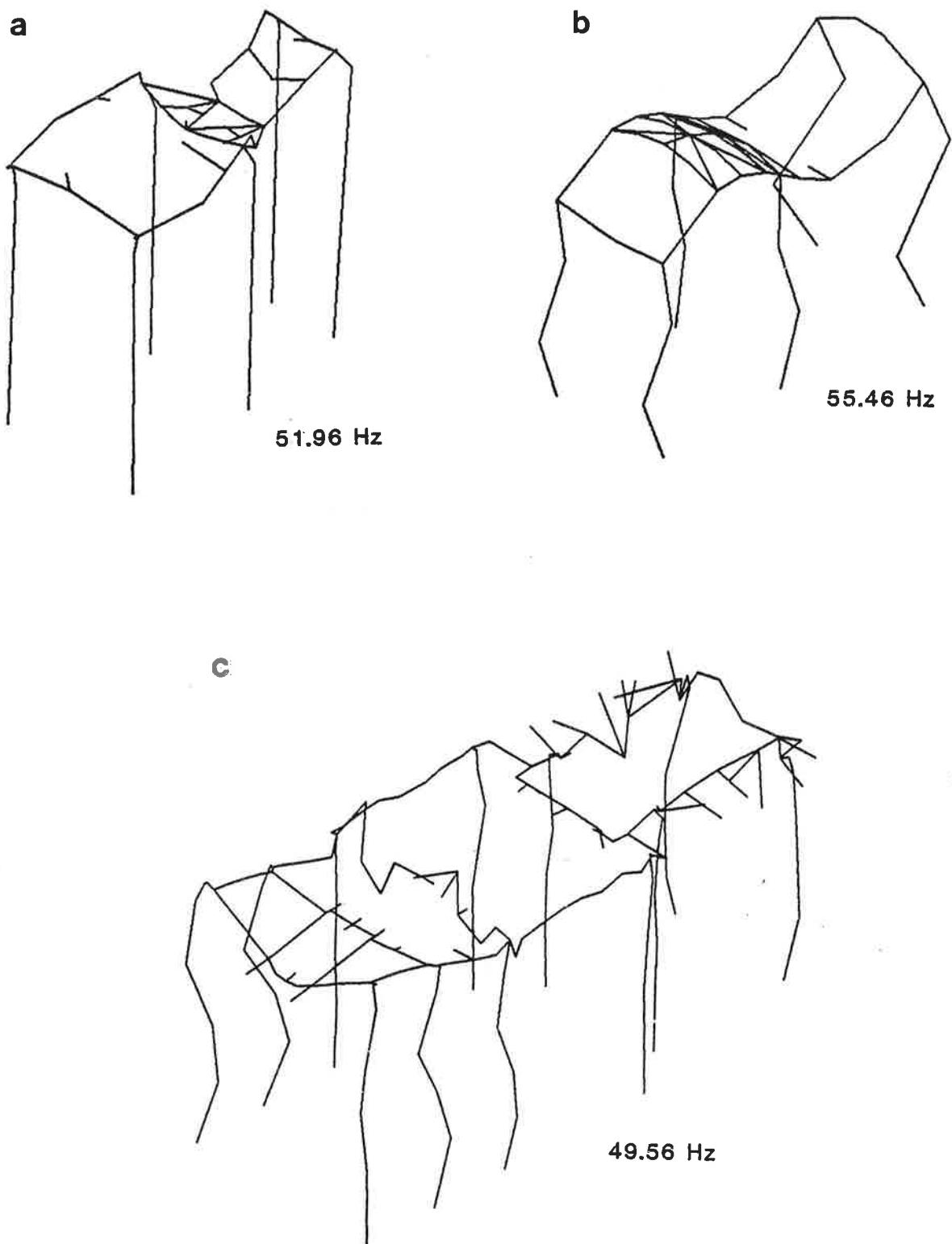
otettu huomioon paikkakohtaista tekijää α_n . Tuloksista huomataan dynaanisen tekijän vaikutus merkittäväksi tärkeintä ominaismuotoa etsittäessä. Tärkein ominaismuoto löytyi kaikissa tapauksissa läheltä 50 Hz:ä olevista ominaistaajuksista. Toisaalta on todettava, että esimerkiksi kohdassa b taulukon ulkopuolelle jäi esitettyjä lähempänä 50 Hz:ä olevia ominaismuotoja. Taulukossa annetut ominaismuotojen järjestysnumerot osoittavat, että

geometrinen tekijä tulee tulee hallitsevaksi etäännystääessä herätetaajuudesta. Eri perustuksia vertailtaessa todetaan a- ja b-tapauksessa yhden ominaismuodon olevan selvästi hallitseva ja kaikkien viiden tärkeimmän ominaismuodon olevan herätetaajuuden yläpuolella. c-tapauksessa erottuu kaksi hallitsevaa ominaismuotoa. Lisäksi kaikki taulukoidut taajuudet ovat lähellä herätetaajuutta c-tapauksessa. Diskretoinnin tarkkuus vaikuttaa luonnollisesti tuloksiin, mutta kuitenkin voidaan todeta rakenneosien keskinäisten jäykkyyssuhteiden olevan herätteen kannalta epäedullisimmat c-kohdassa. Suurinta osallistumiskerrointa vastaavat ominaismuodot on perustuskohtaisesti esitetty kuvassa 3.

Siiven irtoaminen aiheuttaa perustukselle vähintään useita minuutteja kestävän rasituksen. Tämän kuorman analysointia ei normeissa ole käsitelty. Mielestämme siirtymääamplituiden olisi kuormituksen aikana pysytävä VDI 2056 [3] normin määrittelemällä sallitulla alueella. Tämän normin mukainen suurin sallittava siirtymä 50 Hz:n taajuudella on $80 \mu\text{m}$. Tuloksena saatiin suurimiksi siirtymääamplitudeiksi perustuksille a, b ja c mainitussa järjestyksessä $46 \mu\text{m}$, $47 \mu\text{m}$ ja $574 \mu\text{m}$. Kuvassa 1 on merkitty nuolilla maksimiamplituidien sijainti. Perustus c poikkeaa myös siirtymääamplituiden osalta muista perustuksista. Syynä tähän voivat olla joko epärealistisen suuriksi arviodut siivenirtoamiskuormat tai perustuksen huonot ominaisuudet dynaamiselle kuormalle. Osallistumiskerrointarkastelu tukisi viimeksi mainittua vaihtoehtoa.

LÄHTEET

- [1] SAP IV - A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems. Bathe K.J. et al., 1974.
- [2] DIN 4024
- [3] VDI 2056



Kuva 3. Suurinta osallistumiskerrointa vastaavat ominaismuodot eri perustuksilla.

EPÄKESKISEN ISKUMAISEN HERÄTTEEN KUORMITTAMA PALKKI

Juha Kaski

Tampereen teknillinen korkeakoulu
Teknillinen mekaanikka

1 JOHDANTO

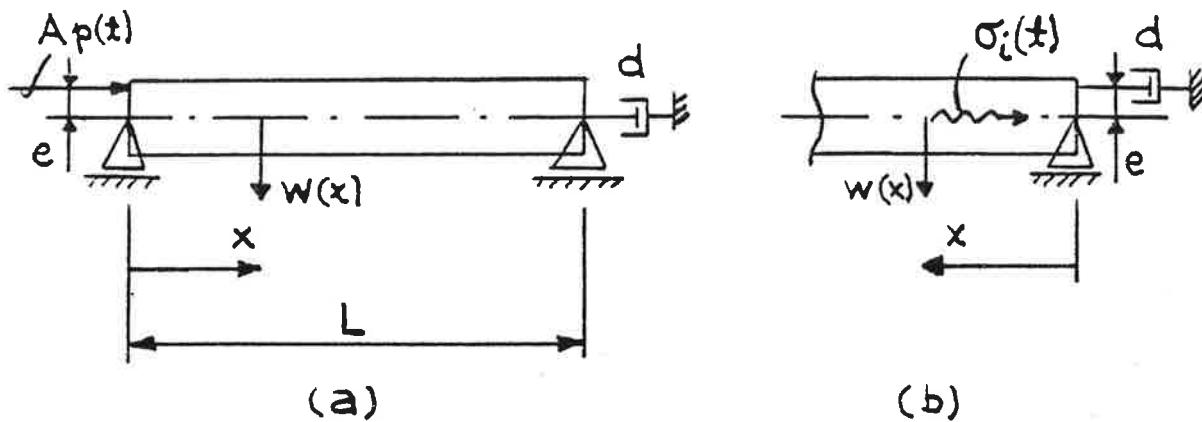
Iskevässä kalliorausprosessissa syntyvä jännitysaalto ei koskaan ole puh- taasti aksiaalinen, vaan erilaisista häiriötekijöistä johtuen porakankeen aiheutuu myös poikittainen aaltoliike (vertaa [3]). Poikittaisen aallon syntymisen luonnollisesti vaatii osan iskumännän kankeen välittyneestä liike-energiasta, ja taiutusefektin taas katsotaan varsin yleisesti olevan pääasiallinen kangen säteilemän melun lähde.

Alueen tutkimuksen uranuurtajia ovat japanilaiset Shimizu ja Takata, jotka tarkastelevat epäkeskisen herätteen ja kangen alkukäyrystymän vaikutusta taiutusefektin synnyssä [5]. Carlvik [1] on tarkastellut analyyttisesti taiutukseen kuluvala energiaa ja Ögren [6] on taas kokeellisesti havainnollistanut taiutusefektin syntyä optisia menetelmiä käyttäen. Kaski et al. [3, 4] ovat tutkinneet ongelmaa sekä numeerisesti että kokeellisesti todellisella männällä ja kangella. ja Hawkes et al. [2] ovat tehneet alustavaa tutkimusta meluongelman selvittämiseksi.

Tässä kirjoituksessa tarkastellaan analyyttisesti taiutusaallon heräämistä epäkeskisen herätteen vaikutuksesta yksinkertaistettujen mallien avulla. Carlvikin [1] tuloksia hyödyntäen osoitetaan, että taiutusefektin syntymisenä suoran porakangen kallionpuoleinen pää on merkittävin tekijä.

2 ONGELMAN MUOTOILU

Asetetaan kaksi ongelmaa. Ensiksikin, mikä osuus puhtaasti pitkittäisen aallon energiasta kuluu taiutukseen herätteen vaikuttaessa epäkeskisesti, ja toiseksi, mikä osuus energiasta kuluu taiutukseen, kun kangen kallionpuoleinen pää on tuettu pitkittäissuunnassa epäkeskisesti (kuva 1).



Kuva 1. Epäkeskinen heräte palkin päässä, toinen pää keskeisesti tuettu (a); keskeisesti tuleva heräte σ_i , tuenta epäkeskinen (b).

Ongelman ratkaisemiseksi joudutaan selvittämään palkin siirtymätila herätteen kohdalla. Tarkastellaan tässä kirjoituksessa lähemmin kuvan 1(a) tapausta. Kuvaan 1(b) mukainen tapaus on käsitelty lähteessä [1]. Käytetään tarkastelussa Euler-Bernoullin palkkiteoriaa, ja oletetaan $p(t)$ ja $\sigma_i(t)$ tunnetuiksi. Tällöin kuvan 1(a) tilanteessa voidaan muotoilla alku-reuna-arvo-probleema

$$EIw''' + \mu \ddot{w} = 0 \quad (1)$$

$$w(0, t) = w(L, t) = w''(L, t) = 0 \quad (2)$$

$$EIw''(0, t) + eAp(t) = 0 \quad (3)$$

$$w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0 \quad (4)$$

missä

- w poikittaissiirtymä
- E kimmomoduuli
- μ pituustiheys
- A, I poikkipintasuureet
- e epäkeskisyys.

3 ONGELMAN RATKAISU

Haetaan kuvan 1(a) mukaisen probleeman ratkaisu ominaismuotomenetelmällä. Vapaaasti tuetun palkin ominaismuodot ovat

$$W_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (5)$$

Otetaan reunaehto (3) mukaan "herätteenä", jolloin pakkovärähelyä hallitsee yhtälö

$$EIw''' + \mu \ddot{w} = -e A p(t)[\delta(x)]' \quad (6)$$

missä

δ Diracin deltafunktio

Käyttääm yhtälön (6) ratkaisemiseen yritettä

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) q_n(t) \quad (7)$$

saadaan tavalliseen tapaan q_n :lle differentiaaliyhtälö

$$\ddot{q}_n + \alpha_n^2 q_n = \beta_n p(t) \quad (8)$$

missä

$$\alpha_n^2 = \frac{EI/L^3}{\mu L} (n\pi)^4 \quad , \quad \beta_n = \frac{2n\pi e A}{\mu L^2} \quad (9)$$

Oletetaan, että heräte on muotoa

$$p(t) = \sigma_0 e^{-\gamma t} \quad , \quad \gamma = \frac{EA}{mc} \quad (10)$$

missä $p(t)$ yrittää kuvata iskumännän synnyttämää pitkittäisaaltoa. γ on parametri, joka liittyy iskumäntään. Olettaen se täysin jäykäksi kappaleeksi, jonka massa on m , on syntvä aalto juuri yhtälön (10) mukainen. c on jännitysaallon etenemisnopeus. Yhtälön (8) ratkaisuksi alkuehdolla $q_n(0) = \dot{q}_n(0) = 0$ (katso yhtälö (4)) saadaan

$$q_n(t) = \frac{\sigma_0 \beta_n}{\gamma^2 + \alpha_n^2} \left(\frac{\gamma}{\alpha_n} \sin \alpha_n t - \cos \alpha_n t + e^{-\gamma t} \right) \quad (11)$$

Yhtälöiden (7) ja (11) perusteella saadaan

$$w(x, t) = \sigma_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{\gamma^2 + \alpha_n^2} \left(\frac{\gamma}{\alpha_n} \sin \alpha_n t - \cos \alpha_n t + e^{-\gamma t} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (12)$$

4 ENERGIATARKASTELU

Taivutukseen menevä energia U on

$$U = - \int_0^{\infty} EI w''(o, t) \dot{w}'(o, t) dt \quad (13)$$

$w''(o, t)$ saadaan suoraan yhtälöstä (3) sijoittamalla siihen yhtälön (10) mukainen heräte. Määrittämällä $\dot{w}'(o, t)$ yhtälöstä (12) ja integroimalla yhtälön (13) mukaisesti saadaan energiaksi

$$U = \frac{(e A \sigma_0)^2 L}{\pi^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{r^4 + n^4}, \quad r^4 = \frac{\mu \gamma^2 L^4}{\pi^4 EI} \quad (14)$$

Jos heräte olisi ideaalinen, so. keskeinen, olisi syntyvän jännitysaallon energia

$$U_0 = \frac{Ac}{E} \int_0^{\infty} [p(t)]^2 dt \quad (15)$$

ja integroimalla

$$U_0 = \frac{Ac \sigma_0^2}{2 \gamma E} \quad (16)$$

Energioiden suhde K_1 on tällöin

$$K_1 = \frac{2 e^2 A \gamma L}{\pi^2 c I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{r^4 + n^4} \quad (17)$$

Ottamalla päättymättömästä sarjasta 1000 ensimmäistä termiä mukaan, saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{r^4 + n^4} \leq 0,10117 + 5 \cdot 10^{-4} \approx 0,102$$

jolloin

$$K_1 \leq 0,204 \frac{e^2 A \gamma L}{\pi^2 c I} \quad (18)$$

Lähteestä [1] saadaan kuvan 1(b) tapauksessa vastaavasti energioiden suhteeksi

$$K_2 = \frac{1}{1+d} \left[\frac{4h}{h^2+1} - \frac{16}{\pi} \frac{h^2}{h^4-1} \ln(h) \right] \quad (19)$$

missä

$$h = (1+d) \sqrt{\frac{1}{32} \left(\frac{D}{e} \right)^4 \frac{l}{D}} \quad (20)$$

missä D on ympyräpoikkileikkauksisen palkin halkaisija ja l vastaa iskumännän "pituitta" siten, että l:n pituisen palkin osan massa on sama kuin iskumännän massa m. Käytämällä taulukon 1 mukaisia arvoja saadaan

$$K_1 \leq 0,127$$

Taulukko 1. Suureille käytetyt arvot. Katso [3].

E GPa	A mm ²	I mm ⁴	L m	D mm	e mm	l m	c m/s	μ kg/m	m kg	γ s ⁻¹
204	508	24831	3.468	25.4	11	1.4	5114	3.962	5.55	$3.651 \cdot 10^3$

K₂:n lausekkeessa tarvitaan vaimennusparametria d, jonka määrittäminen on ongelmallista.

Aikaisemman tutkimuksen [3] pohjalta sille voi esittää jonkinlaisen arvion. Saadut tulokset viittaavat siihen, että reaktiovoima tuetussa päässä on suuri myös silloin kun epäkeskisyys on suuri (tämä on ristiriidassa Carlvikin [1] arvoiden kanssa). Tällöin taas kertoimen d tulee olla suhteellisen pieni, joten oletetaan, että d ≤ 0.5. Yhtälössä (19) K₂ kasvaa d:n vähetessä, joten asetetaan d = 0.5, jolloin saadaan

$$K_2 = 0,179$$

Saadaan siis, että K₂ > K₁, toisin sanoen kallionpuoleinen pää tuottaa suuremman taivutushäiriön kuin männän puoleinen pää. Tulos on samansuuntainen kuin mitä kirjoituksessa [3] esitetään.

5 ERÄITÄ HUOMIOITA

Tutkimustuloksia on syytä arvioida kriittisesti ja vähintäänkin esittää eräitä kysymyksiä.

Tarkastelussa on nojauduttu Euler-Bernoullin teoriaan. Onko tämä riittävän tarkka teoria tässä yhteydessä? Kokeellisen tutkimuksen yhteydessä on havaittu, että merkittävin taajuusalue tarkastellun porakangen kohdalla on $[0,1]$ kHz, jolloin aallonpituus $\lambda > 0,23$ m. Voidaan osoittaa [5], että vastaavanlainen kangen kohdalla rajaehdot $\lambda_{\min} \geq 0,18$ m, joten Euler-Bernoullin teoria riittää tarkastelussa.

Tarkasteltu pulssin muoto $p(t)$ ei vastaa todellista iskuualtoa, mutta yhtäläisyksiä toki voidaan havaita [3]. $p(t)$:n valinnan sanelee ensisijaisesti analyttisten laskelmien mahdolliseksi tekeminen.

Reunaehto (viskoosivaimennin) on ehkä tarkastelun heikoin kohta. Kimmoisa tuenta (jousi) olisi ilmeisesti todellisuutta lähempänä, kuten myös Carlvik esittää. Tekijän alkuperäinen tarkoitus oli mallintaa tuenta jousella, mutta tämä johtaa erittäin hankaliin integraaleihin, joiden käsitteily suljetussa muodossa on ehkä mahdotonta.

LÄHDELUETTELO

- [1] Carlvik I., The Generation of Bending Vibrations In Drill Rods. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 18 (1981), 167-172.
- [2] Hawkes I., Wright D.D. & Dutta P.K., Development of a Quiet Rock Drill, Vol. 2: Sources of Drill Rod Noise. Bureau of Mines Open File Report 132-178, Washington 1977.
- [3] Kaski J., Kinnunen J. & Siekkinen V., Bending Wave Generation in a Drill Rod. Tampereen teknillinen korkeakoulu, koneensuunnittelu, raportti 27, Tampere 1986.
- [4] Kaski J., Kinnunen J. & Siekkinen V., Bending Wave Generation in the Drill Rod. II Suomen mekaniikkapäivien esitelmät, TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 29, s. 273-281.

- [5] Shimizu H. & Takata M., Dynamic Stresses in the Drilling Rod, Memoires of the Faculty of Engineering (Kyushu University) 19 (1960), 191-228.
- [6] Ögren J.E., A Dynamic Photoelastic Study of Flexural Wave Generation in a Model of Percussive Drilling, J. Sound Vib. 86 (1983), 243-252.

TERÄSBETONISEN MAANVARAISLATTIALAATAN VAAKASUORISTA SIIRTYMISTÄ LAATTAAN AIHEUTUVAT KITKAVOIMAT JA RASITUKSET

Mikko Kilpeläinen
Oulun yliopisto

1 JOHDANTO

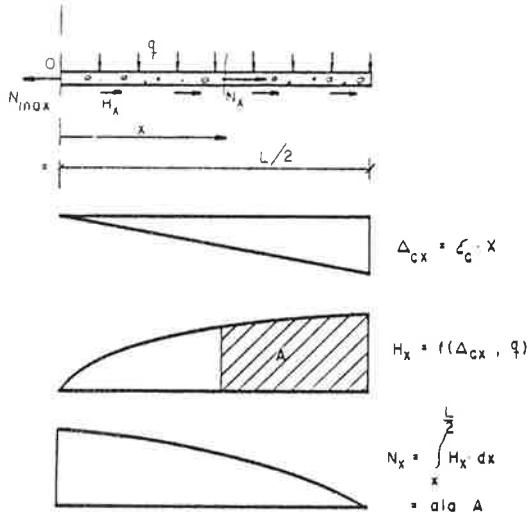
Tavanomainen asuin-, liike- ja toimistorakennusten sekä pienituloisuuusrakennusten lattiarakenne on seuraava: perusmaan sekä hiekkaka- ja sorakerrosten päälle asetetaan lämmöneriste, joka useimmiten on jäykkää mineraalivillaa tai solumuovia. Tämän päälle valtaan tasapaksu teräsbetonilaatta, jonka pintaan kiinnitetään lattiapäällyste. Lämmöneristeen ja betonilaatan väliin asennetaan joskus tervapaperi tai muovikelmu.

Kun betoni kovettuessaan kutistuu, tai kun laattaa esijännitetään, saa laatta vaakasuoria siirtymiä alustaansa nähdä, ts. laatta liukuu alustallaan. Laatan lämpötilan vaihtelusta aiheutuu laataan luonteeltaan samankaltaista liukumista alustansa suhteen.

Laatan liukuessa syntyy laatan ja alustan välille kitkavoimia, jotka pyrkivät estämään liikkettä ja aiheuttavat siten laattaan vaakasuorassa suunnassa vaikuttavia rasituksia.

Niiden pienentämiseksi laattaan tehdään liikuntasauomoja, joiden tarpeellisuuden ja keskinäisten etäisyyskien arvioimiseksi on alustan kitkavoimat ja niiden laattaan aiheuttamat jännitykset pystyttävä arvioimaan.

Jos tarkastellaan alustallaan lepäävää suorakaiteen muotoista laattaa, joka kutistuu, ovat sen puolikkaan siirtymät, kuormitukset ja rasituukset kuvan 1 mukaisia.



Kuva 1. Suorakaiteen muotoisen laatan kutistumisesta aiheutuvat laatan puolikkaan siirtymät, kuormituksset ja rasitukset.

Δ_{cx} laatan liukuma alustaansa nähdien m

ϵ_c betonilaatan kutistuma

q laatan pystysuora tasainen kuormitus MN/m^2

H_x laatan ja alustan välinen kitkavoima MN/m^2

N_x laatassa vaikuttava vaakasuora voima MN/m .

ϵ_c voi olla myös lämpötilan muutoksesta tai laatan esijännittämästä aiheutuva pituuden muutos.

Kun laatan kutistuma ϵ_c tunnetaan, voidaan laattaan syntyvä vaakasuora voima N_x laskea edellyttääen, että kitkavoiman H_x riippuvuus liukumasta ja kuormituksesta eli funktio $H_x = f(\Delta_{cx}, q)$ tunnetaan.

Lämmeristealustalla olevan betonilaatan ja alustan välisistä kitkavoimista ei kuitenkaan tutkimustuloksia ole käytettävissä. Laskelmissa yleensä esitetään täysin kehittynyt kitkavoima, eli kun se on saavuttanut maksimiarvonsa, muodossa

$$H_s = \mu \cdot (\gamma \cdot h + q) \quad (1)$$

μ laatan ja alustan välinen kitkakerroin

γ betonin tilavuuspaino MN/m^3

h laatan paksuus m

Kitkavoiman riippuvuudelle liukumasta ei ole olemassa luotettavia arvioita.

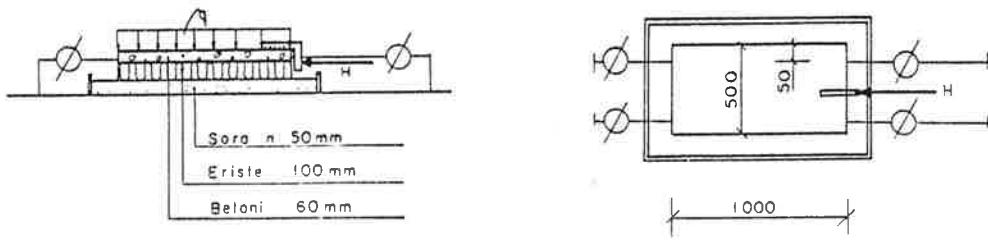
2 KUORMITUSKOKKEET

2.1 Koekappaleet ja koejärjestelyt

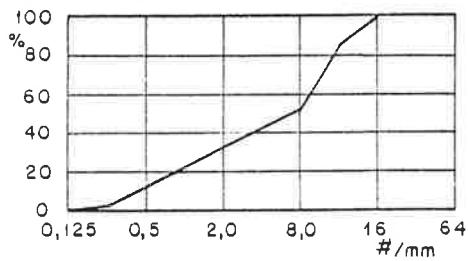
Jotta laatan ja alustan välisestä kitkavoimasta saataisiin luotettavampaa tietoa, suoritettiin Oulun yliopiston rakennetekniikan laboratoriossa eräitä kuormituskokeita sen määrittämiseksi. Tavoitteena oli selvittää kitkavoiman riippuvuutta laatan kuormituksesta, laatan vaakasuorasta liukumasta ja eristemateriaalien vaikutuksesta. Lämmöneristeiksi valittiin mineraalivillalevy PV-LAL 100, PV-LAL 100 + vuorauspaperi sekä polystyreeni 15 kg/m^3 (N 15) 100 mm. Koekappaleet ja koejärjestelyt kävät ilmi kuvasta 2.

Tasaiselle betonilattialle levitetyn muovikelmun pääälle levitettiin n. 50 mm:n paksuinen sorakerros, jota ei tiivistetty. Soran rakenne on esitetty kuvassa 3. Soran pääälle asetettiin 100 mm:n paksuiset eristyslevyt, joiden pääälle valettiin 60 mm:n paksuinen betonilaatta. Laattaa työnnettiin vaakasuunnassa laatan alapinnan tasossa voimalla H, joka mitattiin. Myös laatan vaaka-suora siirtymä Δ mitattiin neljällä mittakellolla.

Laatan kuormitusta q ja alustamateriaaleja yhdisteltiin taulukon 1 mukaisiksi kombinaatioiksi.



Kuva 2. Koelaatat ja koejärjestelyt.



Kuva 3. Koelaatojen alussoran rakeisuuskäyrä.

Taulukko 1. Koelaattojen kuormitus, alustamateriaalit ja tunnukset.

Alusta q	0 kPa	3,50 kPa	8,0 kPa
PV-LAL	A1	A2	A3
PV-LAL + vuorauuspaperi	B1	B2	B3
Polystyreeni N15	C1	C2	C3

Kuormitettavia laattoja oli siis 9 kpl. Betonin lujuusluokkaa ei testattu, mutta se suhteitteliin olevaksi K30. Laatat kuormitettiin noin kahden viikon ikäisinä.

Kuormaa H lisättiin hydraulisesti vaiheittain. Sen lukematarkkuus oli 0,05 kN. Kuormitus oli lyhytaikainen.

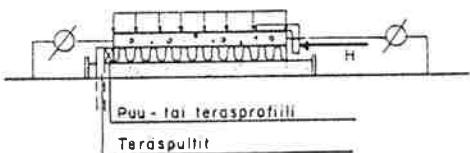
2.2 Koetulokset

Kaikilla laatoilla tapahtui liukuminen niitä työnnettäessä lämmöneristeen ja alussoran välillä. Betonilaatta oli kovettuessaan tarttunut alustaansa kaikissa tapauksissa niin lujasti, että liukumista laatan alapinnassa ei tapahtunut.

Kun laatta ja eriste liukuivat sora-alustallaan voiman H enää sanoittavasti kasvamatta, pyrittiin eristeen liukuminen estämään sisjoittamalla puu- tai teräsprofiili tiiviisti eristeen ja lattiaan kiinnitetyn pultin väliin kuvan 4 mukaisesti.

Eristeen tuennan jälkeen kuormaa H lisättiin. Kun kuormaa H oli

lisätty tarpeeksi, tapahtui eristeessä puristusmurtuma siinä reunassa, joka vastasi tueksi asetettuun puu- tai teräsprofiiliin,

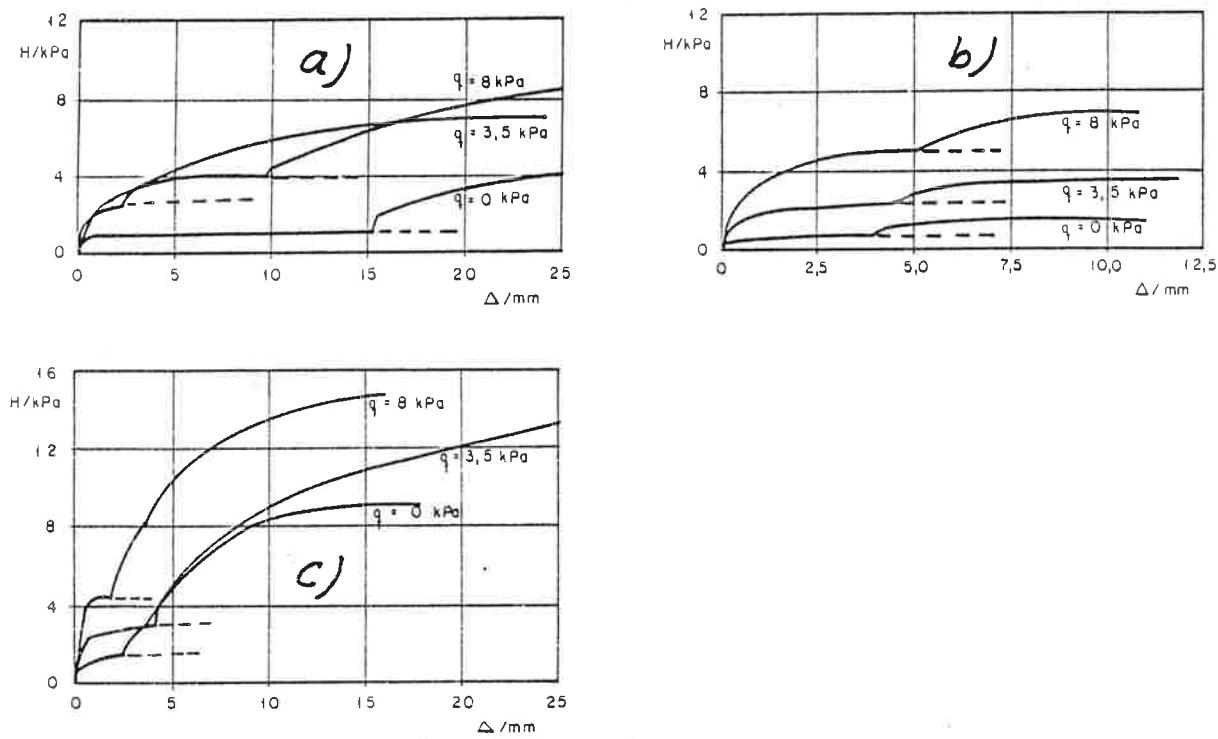


Kuva 4. Eristeen tuenta liukumista vastaan.

jolloin koe lopetettiin. Liukumista betonilaatan ja sen alustan välillä ei siis vieläkään tapahtunut. Ainoastaan koelaatoilla B (alustana PV-LAL + vuorauspaperi) eristeen puristusmurto jäi tapahtumatta. Niissä liukuma syntyi eristen tuennan jälkeen vuorauspaperin ja mineraalivillan välillä.

Kuvassa 5 on esitetty kunkin koelaatan liukuman Δ ja kuorman H välinen riippuvuus. Kuvaajissa näkyvät taiteepisteet ovat kohtia, joissa eristen vaakasuora tuenta tehtiin.

Lämmöneristen ja alussoran välille saatiin taulukon 2 mukaiset kitkavoimat ja -kertoimet, kun kitka oli täysin kehittynyt.



Kuva 5. Koelaattojen kuormaliukumakuvaajat.

- a) Alustana PV-LAL 100 mm
- b) Alustana PV-LAL 100 mm + vuorauspaperi
- c) Alustana polystyreeni N15 100 mm.

Taulukko 2. Koelaattojen lämmöneristeen ja alussoran väliset kitkavoimat ja -kertoimet täysin kehittyneen kitkan alkaessa.

q	0,0 kPa		3,5 kPa		8,0 kPa	
	H _s kPa	μ —	H _s kPa	μ —	H _s kPa	μ —
Alusta						
PV-LAL	1,0	0,67	2,6	0,52	4,0	0,42
PV-LAL + vuorauspaperi	0,5	0,34	2,2	0,44	4,8	0,51
Polystyreeni N15	1,0	0,67	2,4	0,48	4,2	0,44

Taulukosta 2 voidaan todeta, että kitkakertoimen arvo on jokseenkin riippumaton eristemateriaalista ja että laatan kuormituksen ollessa pieni kitkakertoimelle saadaan hieman suurempi arvo kuin suurilla laatan kuormituksilla. Kitkakertoimen keskiarvoksi saadaan kaikista kokeista noin 0,50.

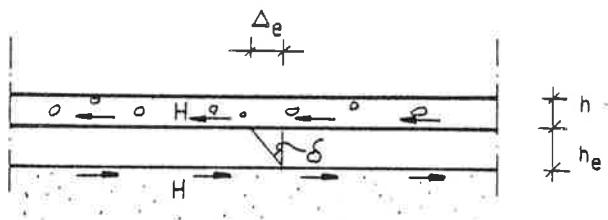
Laatoilla B1, B2 ja B3 saatettiin vuorauspaperin ja mineraalivillan välille taulukon 3 mukaiset kitkavoimat ja -kertoimet, kun kitka oli täysin kehittynyt.

Taulukko 3. Vuorauspaperin ja mineraalivillan PV-LAL väliset kitkavoimat ja -kertoimet koelaatoilla B1, B2 ja B3 täysin kehittyneen kitkan alkaessa.

q = 0,0 kPa		q = 3,5 kPa		q = 8,0 kPa	
H _s kPa	μ —	H _s kPa	μ —	H _s kPa	μ —
1,6	1,07	3,6	0,72	7,0	0,74

Kitkavoiman H_s arvointi eri tapauksissa oli vaikeaa ja tulkinnanvaraista, koska kuvan 5 kuvaajista ei löydy selvää pistettä, jossa kitka olisi saavuttanut täysin kehittyneen vaiheen. Tästä syystä on vaikea arvioida myöskin sitä liukumaa, joka vastaa täysin kehittyneen kitkan syntyhetkeä.

Koska liukuminen tapahtui kaikissa tapauksissa eristeen ja alussooran välillä, sisältyy mitattuihin liukuma-arvoihin myös eristeen leikkausmuodonmuutos Δ_e , jonka työntövoima H siihen aiheuttaa, kuvan 6 mukaisesti.



Kuva 6. Työntövoiman H aiheuttama leikkausmuodonmuutos Δ_e eristeessä.

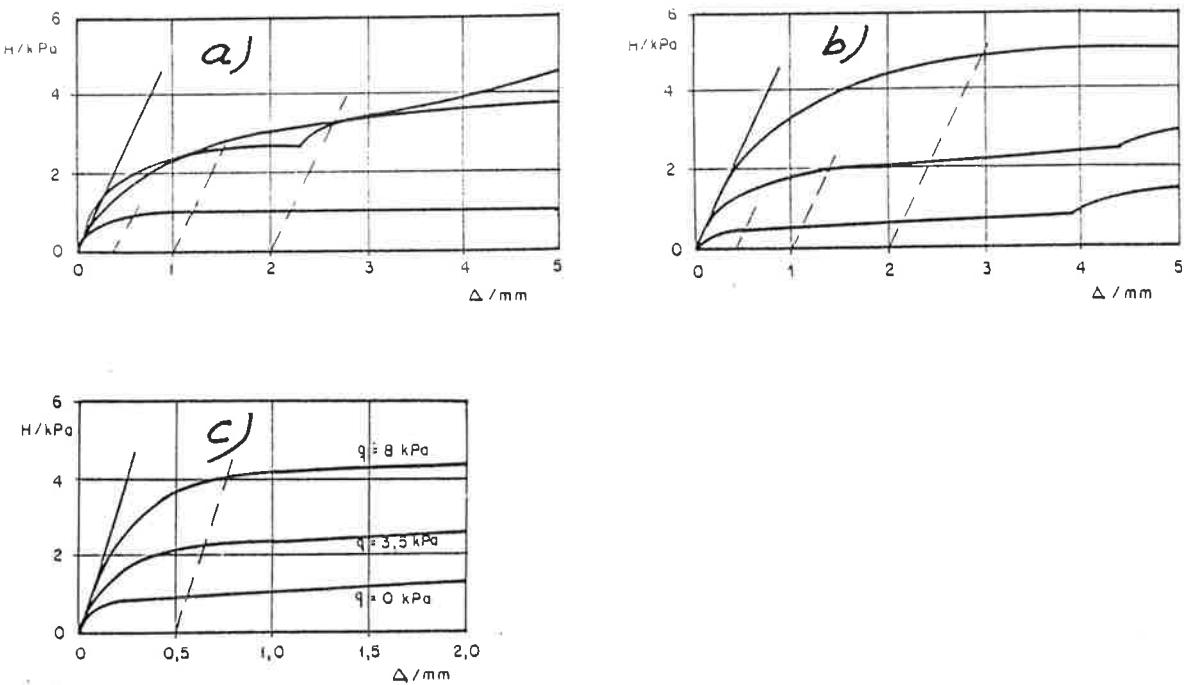
$$\Delta_e = \delta \cdot h_e = \frac{H}{G_e} \cdot h_e , \quad (2)$$

missä

$$\begin{aligned} G_e & \text{ eristeen liukumoduli } \text{MN/m}^2 \\ h_e & \text{ eristeen paksuus } \text{m} \\ \delta & \text{ liukukulma eristeessä rad.} \end{aligned}$$

Leikkausmuodonmuutos Δ_e on eliminoitu kuvassa 7, jossa kuvan 5 kuvaajien alkuosat on piirretty suuremmassa mittakaavassa ja joihin kuvaajille on piirretty tangentit origoon. Tällöin kuvaajia tarjastellaan vinokulmaisessa koordinaatistossa, jonka akselit ovat Δ -akselit ja ko. tangentit.

Kun kuvaan 7 piirretään ko. tangenttien suuntaiset katkoviivat pistettiä, joissa kitkavoima H arvioidaan olevan täysin kehittynyt, saadaan katkoviivojen ja Δ -akselin leikkauspisteistä ne liukuma-arvot, jotka vastaavat täysin kehittyneen kitkan alkuliukumaa Δ_s . Tällöin saadaan taulukon 4 mukaiset arvot.



Kuva 7. Koelaattojen kuormaliukumakuvaajien alkuosat.

- a) Alustana PV-LAL 100 mm
- b) Alustana PV-LAL 100 mm + vuorauspaperi
- c) Alustana polystyreeni N15 100 mm.

Taulukko 4. Liukuma-arvot Δ_s mm, joilla eristeen ja sora-alustan välinen kitkavoima on saavuttanut täysin kehittyneen arvonsa.

Alusta	q	0 kPa	3,5 kPa	8,0 kPa
PV-LAL	0,0	0,4	1,0	2,0
PV-LAL + vuorauspaperi	0,0	0,4	1,0	2,0
Polystyreeni N15	0,0	0,5	0,5	0,5

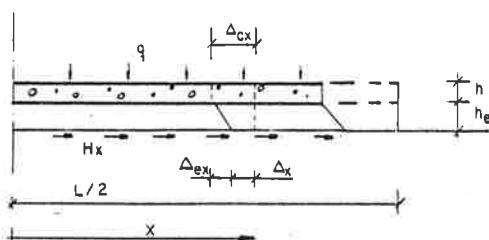
Kuvan 7 origoon piirrettyjen tangenttien avulla voidaan yhtälöä 2 käyttää arvioida eristemateriaalien liukumoduulin arvoa. Käytetyn mineraalivilaille saadaan $G_e = 0,5 \text{ MN/m}^2$ ja polystyreeni N15:lle $G_e = 1,7$, mitkä arvot vastaavat varsin hyvin kirjallisuuudessa esiintyviä arvoja.

3 LAATAN KITKARASITUSTEN LASKENTA

3.1 Teoria

Kun laatta pysyy eristeessä kiinni ja liukuminen tapahtuu eristeen ja sen alustan välillä, ei laatan siirtymä- ja rasitustila ole erää kuvan 1 mukainen. Eristeen leikkausmuodonmuutos ja vaakasuora muodonmuutos vaikuttavat myös laatan saamiin rasituksiin.

Laatan ja eristen saamat muodonmuutokset käyvät ilmi kuvasta 8, jossa on esitetty laatan puolikkaan siirtymätila.



Kuva 8. Koelaatan puolikkaan ja sen alapuolisen lämmöneristen siirtymätila.

Tällöin

$$\Delta_{ex} = \frac{H_x}{G_e} \cdot h_e = \frac{H_s}{G_e} \cdot h_e , \quad (3)$$

jos kitka on Δ_{ex} :n kohdalla täysin kehittynyt. Alueella, jolla näin ei ole, voidaan liukuman ja kitkavoiman välistä riippuvuutta kuvata kuvien 7 ja 8 perusteella yhtälöllä

$$H_x = H_s \cdot \sqrt[4]{\frac{\Delta_x}{\Delta_s}} = H_s \cdot \sqrt[4]{\frac{\Delta_{cx} - \Delta_{ex}}{\Delta_s}} \quad (4)$$

Yhtälöissä (3) ja (4) H_s on täysin kehittynyt kitkavoima, ja se saadaan yhtälöstä (1). Sijoittamalla yhtälö (4) yhtälöön (3) saadaan

$$\Delta_{ex} = \frac{h_e}{G_e} \cdot H_s \cdot \sqrt[4]{\frac{\Delta_{cx} - \Delta_{ex}}{\Delta_s}} , \quad (5)$$

josta Δ_{ex} voidaan ratkaista joko suljetussa muodossa neljännen asteen yhtälöstä tai iteroimalla.

Tämän jälkeen

$$\Delta_x = \Delta_{cx} - \Delta_{ex} \quad (6)$$

on pelkästään x :n funktio, koska $\Delta_{cx} = \varepsilon_c \cdot x$.

Kohta, jossa kitkavoima muuttuu täysin kehittyneeksi, saadaan laskemalla ensin sitä vastaava Δ_{cxs} yhtälöitää (3) ja (5) hyväksikäytetään yhtälöstä

$$\Delta_{cxs} = \frac{h_e}{G_e} \cdot H_s + \Delta_s \quad (7)$$

Koska $\Delta_{cxs} = \varepsilon_c \cdot x_s$, saadaan k.o. kohta eli x_s :n arvo yhtälöstä

$$x_s = \frac{\Delta_{cxs}}{\varepsilon_c} \quad (8)$$

Tämän jälkeen voidaan kitkavoiman H_x kuvaaja piirtää.

Eristeen vaakasuorasta kokoonpuristumisesta aiheutuu laattaan vektori vetovoima N , joka saadaan yhtälöstä

$$N = h_e \cdot E_e \cdot \varepsilon_c , \quad (9)$$

kun E_e on eristeen kimmomoduli.

Kitkavoimasta laattaan aiheutuva vetovoima laatan eri kohdissa saadaan yhtälöstä

$$N_x = \int_x^{\frac{L}{2}} H_x \cdot dx + N , \quad (10)$$

jonka kuvaaja voidaan piirtää numeerisen integroinnin jälkeen.

3.2 Esimerkki

Tarkastellaan teräsbetonilaattaa mineraalivilta-alustalla PV-LAL ilman vuorauspaperia. Eriste on sora-alustalla. Käytetään seu-

raavia lähtöarvoja:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_c &= 0,0005 \quad (\text{betonin kutistuma}) \\
 \gamma &= 0,025 \text{ MN/m}^3 \\
 h &= 60 \text{ mm} \\
 L &= 12000 \text{ mm} \\
 q &= 0,0035 \text{ MN/m}^2 \\
 h_e &= 100 \text{ mm} \\
 G_e &= 0,50 \text{ MN/m}^2 \\
 E_e &= 5 \text{ MN/m}^2 \\
 \mu &= 0,52 \quad (\text{taulukko 2}) \\
 \Delta_s &= 1,0 \text{ mm} \quad (\text{taulukko 4}).
 \end{aligned}$$

Yhtälöstä (1) saadaan

$$H_s = 0,52 \cdot (0,025 \cdot 0,060 + 0,0035) = 0,0026 \text{ MN/m}^2.$$

Edelleen yhtälöistä (7) ja (8) saadaan

$$\Delta_{cxs} = \frac{0,100}{0,5} \cdot 0,0026 + 0,001 = 0,00152 \text{ m}$$

$$x_s = \frac{0,00152}{0,0005} = 3,04 \text{ m} .$$

Tämän jälkeen kitkavoiman H_x kuvaajan piirtämiseen tarvittavat laskelmat on koottu taulukkoon 5.

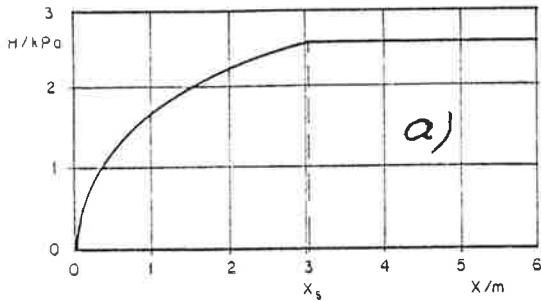
Taulukko 5. Esimerkkilaatan laskelmat kitkavoiman H_x kuvaajan määrittämiseksi.

x m	Δ_{cx} m	Δ_{ex} m	Δ_x m	H_x Mpa
1	0,0005	0,000332	0,000168	0,00166
2	0,0010	0,000448	0,000552	0,00224
3	0,0015	0,000517	0,000983	0,00259
4	0,0020	0,000520	0,001480	0,00260
5	0,0025	- " -	0,001980	0,00260
6	0,0030	- " -	0,002480	0,00260

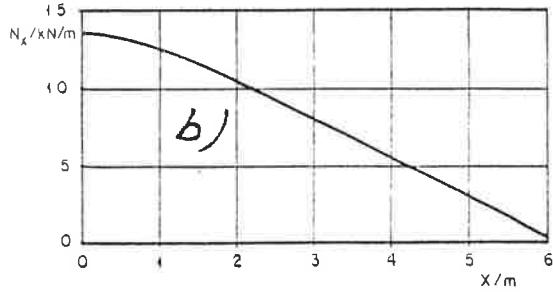
Eristeen ja sora-alustan väliselle kitkavoimalle saadaan siten kuvaan 9a mukainen kuvaaja.

Eristeen kokoonpuristumisesta aiheutuu laattaan vetovoima

$$N = 0,100 \cdot 5 \cdot 0,0005 = 0,00025 \text{ MN/m} = 0,25 \text{ kN/m}.$$



a)



b)

Kuva 9. Esimerkkilaatan rasitukset.

- a) Eristeen ja sora-alustan välinen kitkavoima H_x
- b) Laatassa vaikuttava vетовоима N_x .

Yhtälön (10) perusteella saadaan laatalle kuvan 9b mukainen vетовоимапinta. Maksimivetovoiman suuruus laatana keskellä on 13,6 kN/m, joka aiheuttaa latattaan vетojännityksen 0,227 MPa.

Nähdään, että eristeen vaakasuorasta puristumisesta aiheutuva vетовоима laatassa 0,25 kN/m on varsin pieni maksimivetovoimaan 13,6 kN/m verrattuna (< 2 %).

4. YHTEENVETO

Suoritettujen kokeiden ja edellä esitetyn perustella voidaan todeta seuraavaa:

1. Betonilaatan ja sen välittömän alustan (lämmöneriste tai vuoraspaperi) välinen tartunta on erittäin luja. Tämän vuoksi liukuminen kokeissa tapahtui lämmöneristeen ja sora-alustan välillä tai vuoraspaperia käytettääessä sen ja lämmöneristeen välillä. Betonin tartuntalujuutta samoinkin eristeen leikkauslujuutta ei kokeissa testattu.
2. Kokeissa käytettyjen lämmöneristeidien ja sora-alustan välinen kitkakerroin täysin kehittyneessä kitkassa oli suuruusluokkaa 0,5. Jos alussora olisi ollut hyvin tiivistettyä, olisivat kitkakertoimet luultavasti olleet suurempia.

Vuoraspaperin ja lämmöneristeen välinen kitkakerroin on suuruusluokkaa 0,75.

Kun laatalla ei ollut kuormitusta ($q = 0$), saatiin molemmissa tapauksissa hieman suuremmat kitkakertoimet, mikä voi johtua mm.

pienten mitattavien voimien mittausepätarkkuudesta.

3. Liukuman Δ_s arvo, joka tarvitaan täysin kehittyneen kitkan syntymiseen, ei ollut kokeissa vakio, vaan riippui eristemateriaalista ja laatan kuormituksesta vaihdellen välillä 0,4 - 2,0 mm.

4. Laatteen syntyviä rasituksia laskettaessa on syytä ottaa huomioon myös eristeen leikkausmuodonmuutos ja etenkin kovilla eristeillä myös sen vaakasuora kokoonpuristuminen.

5. Lämönéristen ja sora-alustan välisen kitkavoiman ja liukuman välistä riippuvuutta voidaan kuvata käyrällä viivalla alueella, missä kitkavoima ei ole täysin kehittynyt, ja suoralla viivalla (kitkavoima on vakio) alueella, jossa kitka on täysin kehittynyt.

6. Kitkavoiman laatteen aiheuttamat vennyt ovat häviävän pieniä laatan kutistumisesta ja lämpötilan vaihtelusta aiheutuvien vennymin verrattuina, ja ne voidaan laskelmissa jättää huomioonottamatta.

7. Kokeissa saadut arvot ovat vain suuntaa antavia, koska kokeita tehtiin vain pieni määrä. Lisäkokeita tarvitaan mm. sora-alustan rakenne ja tiivistykseen vaikutuksen selvittämiseksi. Samoin tarvitaan luotettavampaa tietoa eristemateriaalien muodonmuutost ominaisuuksista (liukukerroin ja kimmokerroin) sekä leikkauslujuudesta ja tartuntalujuudesta betoniin. Koska lämmönéristekerros tehdään useimmiten kahdesta kerroksesta, tulisi levyjen välistä kitkaa myös selvittää. Olisi myös mietittävä keinoja, joilla kitkavoima laatan alustarakenteessa saataisiin mahdollisimman pieneksi, jotta sen laatteen aiheuttamat rasitukset saataisiin minimoituiksi.

HIEKAN MEKAANINEN MALLI

K.-H. Korhonen, Teknillinen korkeakoulu
Rainer Laaksonen, Suomen Akatemia

1 JOHDANTO

Hiekan mekaaninen malli on kehitetty Teknillisen korkeakoulun pohjarakennuslaboratoriossa. Mallia sovelletaan pohja- ja maarakenteiden geoteknisessä suunnittelussa hiekkakerrokseen kehittyvien elastisten ja plastisten muodonmuutosten sekä kerroksen murtotilan määrittämiseen.

Hiekkakerros otaksutaan elastoplastiseksi ja myötölujittuvaksi materiaaliksi. Dilataation johdosta tapahtuva plastinen leikkausmuodonmuutos ja tilavuudenmuutos otaksutaan ei-assosiativiseksi. Hydrostaattisen jännityksen aiheuttamat muodonmuutokset otaksutaan sitä vastoin assosiativisiksi. Ajan ja muodonmuutosnopeuden vaikutusta ei oteta huomioon. Palautuvat muodonmuutokset otaksutaan hyperelastisiksi.

Teksti on kirjoitettu maamekaniikassa käytössä olevalla terminologialla.

2 MALLIN RAKENNE

Hiekan mekaaninen malli jakautuu kuuteen pääosaan taulukon mukaisesti. Taulukossa on mainittu osien keskeisin sisältö. Mallia esitellään taulukon mukaisessa järjestyksessä. Mallin kehittämistä varten tehtyjen kolmiakselikokeiden tulokset esitetään kuvissa oktaedrijännitysten ja -muodonmuutosten avulla. Maamekaniikan merkisäännön mukaisesti puristusjännitystä ja puristumaa pidetään positiivisina.

Taulukko. Hiekan mekaaninen malli.

Mallin osa	Sisältö
1. Mallin empiiriset perusteet.	Hiekkakerroksen rakenne. Leikkaus- ja kolmiakselikokeet. Kuormitus- ja mallikokeet.
2. Dilataatio.	Dilataatiomekanismi. Elastinen dilataatio, Plastinen dilataatio ja potentiaaliyhtälö. Kuvat 2 ja 3.
3. Elastiset muodonmuutokset.	Kokonaismuodonmuutokset. Hyperelastiset muodonmuutokset ja muodonmuutosyhtälöt.
4. Plastiset muodonmuutokset. Myötö- ja murto.	Myötösääntö. Myötöfunktio- ja plastinen potentiaali. Myötölujittuminen ja plastinen moduuli. Murtokriteeri. (Kuvat 2 ja 6). Plastiset muodonmuutosyhtälöt.
5. Maaparametrit.	Kokonaismuodonmuusten parametrit. Elastiset parametrit. Plastisten muodonmuutosten ja murtotilan parametrit. Parametriiden määritysmenetelmät.
6. Mallin sovellutukset.	Maaparametriiden määritys. Pohja- ja maarakenteiden geoteknisen toimintatavan määritys ja geotekniset mitoituslaskelmat.

3 TUTKIMUKSET

Mallin kehitystyön yhteydessä tehtiin laboratoriokokeita empiristen materiaaliyhtälöiden tarkistamiseksi. Kokeita suoritettiin klassisella ja todellisella ("true triaxial apparatus") kolmiakselilaitteella. Todellisella kolmiakselilaitteella näytteeseen saadaan kolmiulotteinen jännitystila, joten myös keskimmäisen pääjännityksen vaikutus hiekan mekaanisiin ominaisuuksiin voidaan selvittää. Tutkimusten yhteydessä kehitetty mittaus- ja koetekniikka mahdollistaa automaattisten kolmiakselikokeiden suorittamisen /5/. Koetulosten käsittely, parametriiden laskenta ja koetuksen piirtäminen tapahtuu tutkimuksen yhteydessä kehitetyillä ohjelmilla. Laboratorion koealtaassa suoritettuja levykuormitus- ja laattakoiteita tullaan käyttämään hiekan mallin tarkistamiseen.

Suomen Akatemia myönsi tutkimusta varten määrärahan vuosiksi 1983 ...1986. Todellinen kolmiakselilaite rakennettiin pohjarakennuslaboratoriossa. Laitteen rakentamista varten Teknillinen korkeakoulu myönsi erityismäärärahan.

4 MALLIN EMPIIRISET PERUSTEET

Hiekkakerroksen mekaanista käyttäytymistä simuloivan matemaattisen mallin teoreettinen osa on kehitetty pääasiallisesti kimmomo- ja plastisuusteorioiden perusteella. Mallissa on lisäksi empiirisiä materiaaliyhtälöitä, jotka on muodostettu kolmiakselikokeilla tehtyjen tutkimusten perusteella (kuvat 1...6). Kolmiakseli- ja kuormituskokeiden sekä kirjallisuustutkimusten perusteella on tehty seuraavat olettamuukset A...G:

- A. Kuormitetun hiekkakerroksen kokonaismuodonmuutokset muodostuvat kahdesta komponentista; elastisista ja plastisista muodonmuutoksista.
- B. Hiekan rakeet tulkitaan jäykiksi kappaleiksi. Hiekkakerroksen muodonmuutokset tapahtuvat tämän vuoksi kerroksen huokostilassa.
- C. Hiekkakerroksen muodonmuutokset kehittyvät välittömästi jännityksen lisäyksen jälkeen niin nopeasti, ettei ajan ja hiipuman vaikutusta tarvitse ottaa huomioon muodonmuutoksia ja murtumismahdollisuutta laskettaessa.
- D. Hiekkakerroksen mekaaninen käyttäytyminen riippuu maakerroksen tiiviydestä, jännityshistoriasta ja -polusta.
- E. Hiekkakerroksen plastinen käyttäytyminen riippuu kolmesta jännitysinvariantista. Kerroksen elastista käyttäytymistä approksimoivat konstitutiiviset yhtälöt esitetään kahden ensimmäisen jännitysinvariantin avulla /6/.
- F. Leikkausjännitysten johdosta maakerrokseen kehittyvät plastiset tilavuudenmuutokset otetaan huomioon jännitys-dilataatioyhtälöllä (1) (kuva 3).
- G. Hiekkakerroksen muodonmuutosmekanismi käsittää avoimessa tilassa kaksi erillistä komponenttia; leikkausmuodonmuutoksen

γ_{oct} ja tilavuudenmuutoksen ϵ_v . Nämä komponentit ovat toisiinsa "sidottuja" sekä elastisella että plastisella alueella. Hiekan malli on "rakennettu" em. muodonmuutoskomponenttien avulla, siten, että mallissa on sekä deviatorinen että hydrostaattinen osa.

5 DILATAATIO

Kuvissa 1,3 ja 5 on esitetty löyhän ja tiiviin hiekan jännitysmuodonmuutoskäytätyminen avoimen kolmiakselikokeen leikkausvaiheen aikana. Plastisen tilavuudenmuutoksen ja leikkausmuodonmuutoksen inkrementtien suhdetta sanotaan dilataatiokulmaksi. Kuvan 3 perusteella todetaan, että dilataatiokulman ja jännityssuhteen välinen vuorosuhde on likipitääen lineaarinen ja riippumaton jännityspolun suunnasta. Em. vuorosuhdetta voidaan approksimoida yhtälöllä (1) /3/. Yhtälöä (1a) kutsutaan jännitys-dilataatioyhtälöksi. Muodonmuutosinkrementtien suhde kirjoitetaan maamekanikassa yleensä yhtälössä (1a) esitetyllä tavalla.

$$\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} = M(\alpha) - N(\alpha) \frac{d\epsilon_v^p}{d\gamma_{oct}^p} \quad (1a)$$

$$\alpha = \frac{3 + \mu\nu}{[(3 + \mu^2)(3 + \nu^2)]^{1/2}} \quad (1b)$$

$M(\alpha)$ ja $N(\alpha)$ ovat Loden kulmasta riippuvaisia parametrejä

μ Loden jännitysparametri

ν Loden muodonmuutosparametri

Kishino /3/ on otaksunut, että myötölujenemisprosessi etenee niin, että deviatorinen jännitys saavuttaa minimiarvonsa. Parametrien μ ja ν välillä on tällöin yksikäsittinen vuorosuhde, jos μ ja σ_{oct} ovat vakioita. Hiekan mekaanisen mallin deviatorisen osan plastisen potentiaalin yhtälö (3) on muodostettu yhtälön (1a) ja plastisuusteorian normaalisuussäynnön (2) avulla. Yhtälö (3) on

voimassa silloin kun $N(\alpha) = 2/3$.

$$\frac{d\tau_{oct}}{d\sigma_{oct}} = -\frac{2}{3} \frac{d\epsilon_v^p}{d\gamma_{oct}^p} \quad (2)$$

$$g_d = \frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} + M(\alpha) \ln\left(\frac{\sigma_{oct}}{p_a}\right) \quad (3)$$

g_d on deviatorinen plastinen potentiaali
 p_a vertailujännitys
 ϵ_v^p plastinen tilavuudenmuutos
 γ_{oct}^p plastinen leikkausmuodonmuutos

6 MYÖTÖ

Hiekkakerroksen myötöprosessia simuloidaan hydrostaattisella ja deviatorisella systeemillä. Hydrostaattinen myötö otaksutaan assosiaiviseksi. Myötöfunktio f_c ja plastisen potentiaalin funktio g_c ovat tämän vuoksi identtisiä. Hydrostaattisen myödön plastinen moduuli H_c on vastaavasti identtinen plastisen tilavuudenmuoksen moduulin K^p kanssa. Hydrostaattisen myödön funktiot ja parametrit on yhtälössä (4) merkitty alaindeksillä c.

$$f_c = g_c = p = \sigma_{oct} \quad (4a)$$

$$H_c = K^p = K_c p_a \left(\frac{\sigma_{oct}}{p_a} \right)^{m_c} \quad (4b)$$

K_c ja m_c ovat hydrostaattisen myödön maaparametreja
 p_a vertailujännitys

Plastisen tilavuudenmuutosmoduulin yhtälö (4b) on analoginen ödometrikkokeen tangenttimoduulin yhtälölle (5), jota voidaan soveltaa yhtälön (4b) likiarvona /2/.

$$M_t = mp_a \left(\frac{\sigma_1}{p_a} \right)^\beta \quad (5)$$

M_t on kokoonpuristuvuusmoduuli (tangenttimoduuli)
 m yksisuuntaisen muodonmuutoksen moduuliluku
 β moduulieksponeentti

Deviatorisena myötöfunktiona on käytetty yhtälöä (6) /1,10/.

Mallin deviatorisen osan symbolit on varustettu alaindeksillä d.

$$f_d = \frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} \quad (6)$$

Hiekan mallissa otaksutaan, että deviatorinen myötö etenee Moroton /9/ kehittämän tilafunktion (7) mukaisesti. Yhtälössä (7) Ω on normaalistettu plastinen työ.

$$d\Omega = \frac{dW^p}{\sigma_{oct}} = d\epsilon_v^p + \frac{3}{2} \frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} d\gamma_{oct}^p \quad (7)$$

Kuvan 4 perusteella todetaan, että normaalistettu työ on lineaarisesti riippuvainen leikkausmuodonmuutoksesta ja, että yhtälö (7) on riippumaton jännityspolusta. Momen ja Ghaboussi /8/ sekä Moroto /9/ ovat lisäksi osoittaneet, että normaalistettu työ on riippumaton tiiviydestä. Em. tilafunktio yksinkertaistaa tämän vuoksi merkittävästi plastisen moduulin yhtälön kehittelyä. Ojakalan hiekalla tehtyjen kolmiakselikokeiden perusteella on todettu, että deviatorinen plastinen moduuli H_d voidaan laskea yhtälöllä (8) /4/.

$$H_d = \frac{1}{ae^{b\Omega} + c} \quad (8)$$

$\Omega = \Omega(\gamma_{oct})$ on normaalistettu työ (kuva 4).
 a, b ja c maaparametreja

Laaksonen /5/ on osoittanut, että parametrit a, b ja c riippuvat mm hiekan mobilisoituneesta kitkakulmasta. Maaparametrien a, b ja c sekä klassisen maamekaniikan maaparametrien keskinäisiä riippuuksia ei käsitellä tässä yhteydessä.

Plastiset muodonmuutosinkrementit lasketaan yhtälöllä (9), jossa $h = 1/H$ on myötölujittumisparametri.

$$d\epsilon_{ij} = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (9)$$

7 MURTUMINEN

Maamekaniikassa sovelletaan yleisesti Mohr-Coulombin ja Drucker-Pragerin murtokriteerejä. Matsuoka ja Nakai /7/ ovat kehittäneet uuden murtokriteerin (10), jossa otetaan huomioon myös kolmannen jännitysinvariantin vaikutus.

$$J_1 J_2 / J_3 = C_f \quad (10)$$

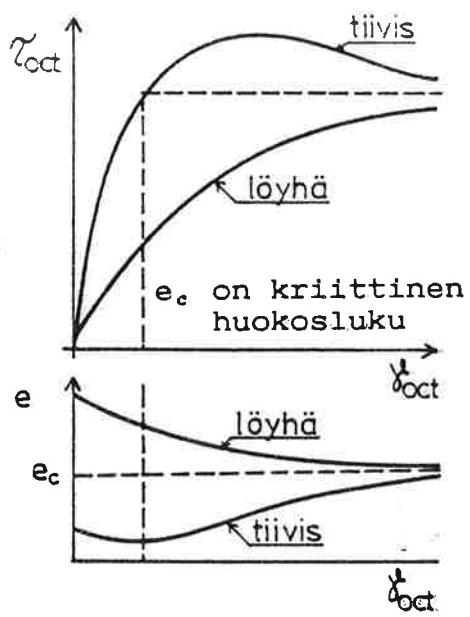
$$\begin{array}{ll} J_1, J_2 \text{ ja } J_3 & \text{ovat jännitysinvariantteja} \\ C_f & \text{murtotilan määrävä vakio} \end{array}$$

Kuvan 6 perusteella todetaan, että Matsuoka-Nakain murtokriteeri (10) approksimoi hyvin Ojakkalan hiekalla tehtyjen kolmiakselikoideiden tuloksia. Matsuoka-Nakain murtokriteeri on lineaarinen hydrostaattisen jännityksen σ_{oct} suhteen, ja se kuvaa hyvin suomalaisien kovista mineraaleista koostuvien karkearakeisten maalajien lujuuskäytäytymistä. Kuvassa 5 on esitetty Loden jännitysparemetrin vaikutus leikkausmuodonmuutoksen ja jännityssuhteen väliseen riippuvaisuuteen. Murtotilan jännitykset eri Loden parametrin μ arvolla on esitetty kuvassa 6.

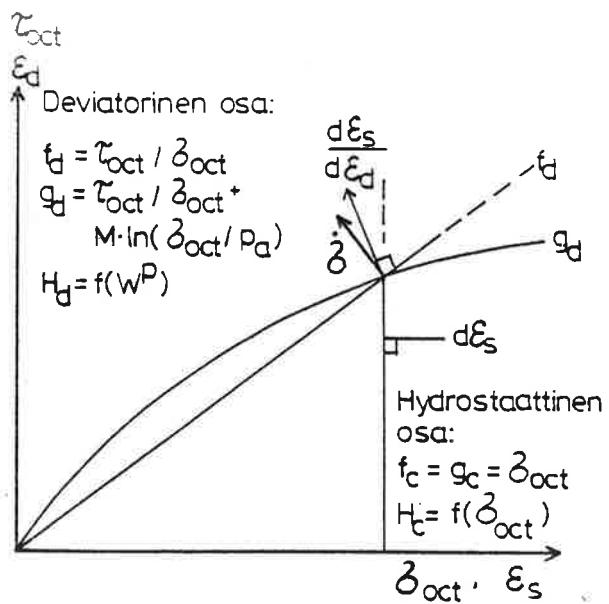
Myötöfunktion muoto π -tasolla on otaksuttu analogiseksi murtokriteerin (10) kanssa. Tämän vuoksi myötölujenemista säätelylevän tilafunktion Ω yhtälöön (7) on lisätty korjausfunktio $R(\theta)$, jolla otetaan huomioon Loden kulman θ vaikutus.

KIRJALLISUUS

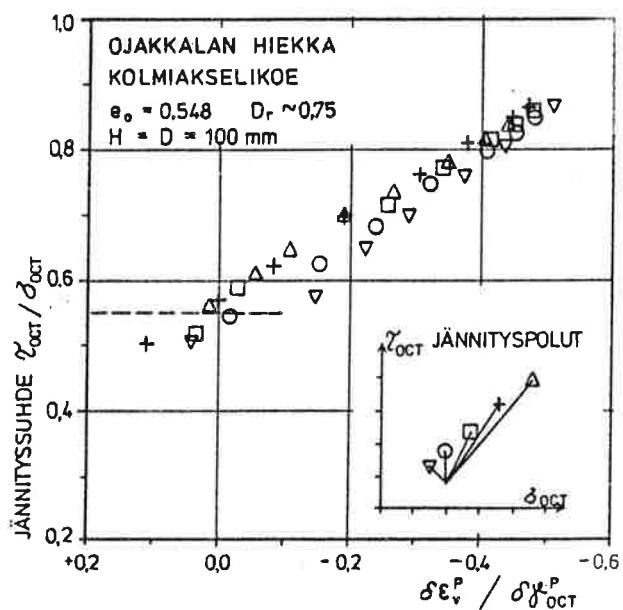
- /1/ Frydman, S., The strain hardening behaviour of particulate media. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 13, No. 3, Aug. 1976. ss. 311-323.
- /2/ Janbu, N., Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. European Conference on Soil Mechanics in Wiesbaden 1963. Vol. 1, ss. 19-26.
- /3/ Kishino, Y., A generalized relationship between the stress and the dilatancy in granular materials. Mechanics of Granular Materials. Ed. Jenkins, J.T., Satake, M., Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam 1983.
- /4/ Korhonen, K-H., Laaksonen, R., Workhardening behaviour of Ojakkala sand. Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications Vol. 1, Elsevier Science Publishing Co. 1987. ss. 589-596.
- /5/ Laaksonen, R., Hiekan elasto-plastinen malli. Lisensiaatti-työ. TKK, MR -osasto, Pohjarakennuksen ja maamekaniikan laboratorio 1988. Moniste. 124s.
- /6/ Loret, B., Problèmes numériques et théoriques de la géo-mécanique. These de doctorat d'état. Paris 1986, 363s.
- /7/ Matsuoka, H., Nakai, T., Stress-strain relationship of soils based on the SMP. Proc. of Specialty Ses. 9, 9th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng. Tokyo 1977. ss. 153-162.
- /8/ Momen, H., Ghaboussi, J., Stress dilatancy and normalized work for sands. IUTAM Conf. on Deformations and Failure of Granular Materials. Delft, 31 Aug. - 3 Sept. 1982. ss. 265 - 274.
- /9/ Moroto, N., A new parameter to measure degree of shear deformation of granular material in triaxial compression tests. Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, 1976, ss. 1-9.
- /10/ Poorooshshab, H.B., Holubec, I., Sherbourne, A.N., Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression. Canadian Geotechnical Journal, Part I, Vol. III, No. 4, Nov. 1966. ss. 179-190. Parts II, III, Vol. IV, No. 4, Nov. 1967, ss. 376-397.



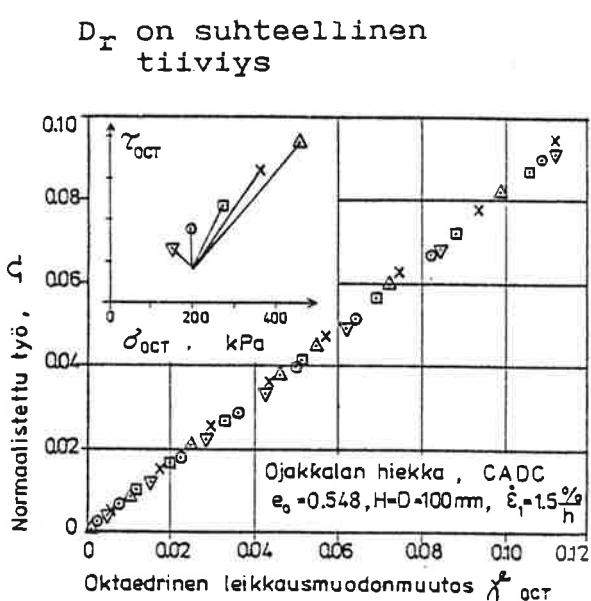
Kuva 1. Löyhän ja tiiviin hiekanäytteen käyttäytymisen kolmiakselikokeen leikkausvaiheen aikana.



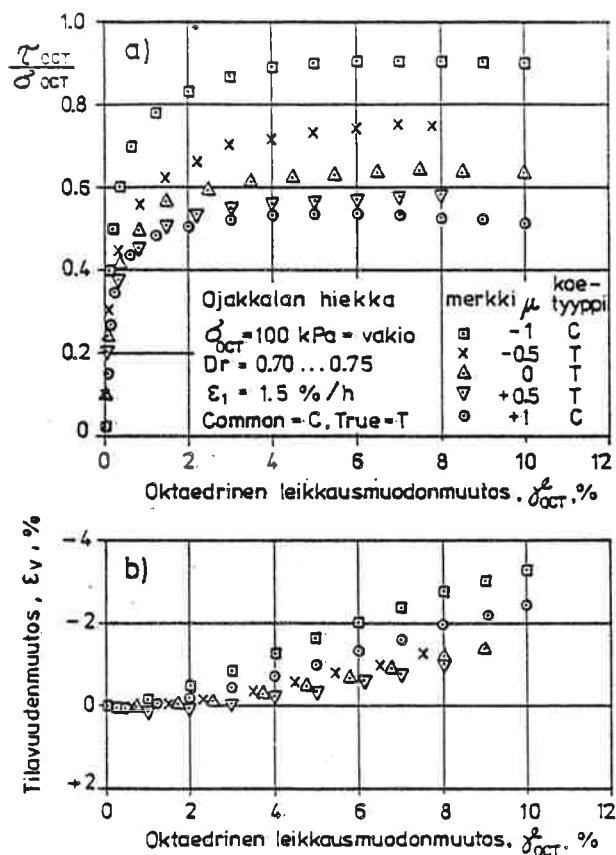
Kuva 2. Hiekan malli. Deviatorisen ja hydrostaattisen osan myötö- ja plastiset potentiaalifunktiot.



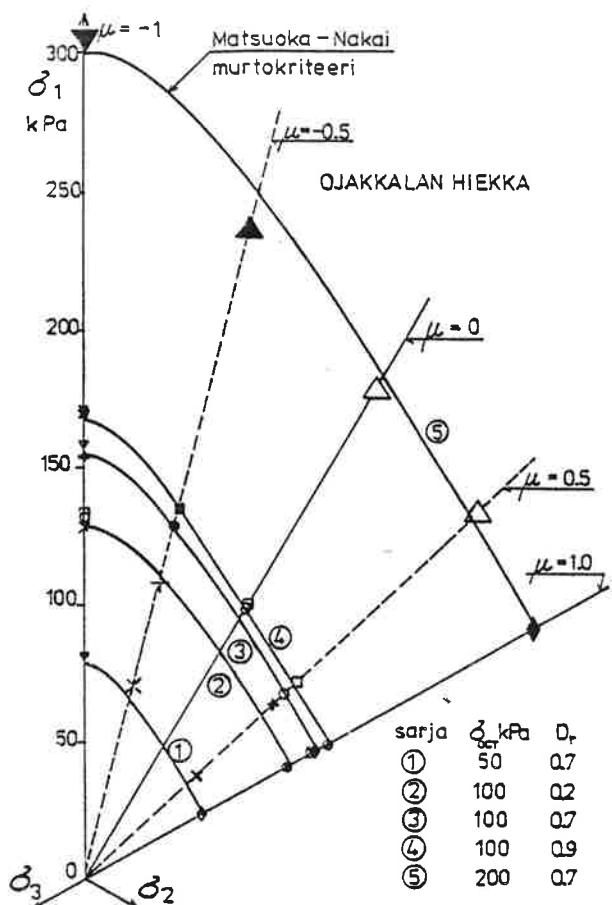
Kuva 3. Dilataatiokulman ja jännityssuhteiden välinen riippuvaisuus.



Kuva 4. Leikkausmuodonmuutoksen ja normaalistetun työn välinen riippuvaisuus.



Kuva 5. Loden kulman vaikutus kolmikselikokeen jännitys-muodonmuutosominaisuuksiin.



Kuva 6. Matsuoka-Nakain murto-kriteeri. Murtotilan pääjännitykset π -tasolla.

SAVEN MEKAANINEN MALLI

K-H. Korhonen, M. Lojander
 Teknillinen korkeakoulu

1. MALLIN RAKENNE JA TUTKIMUKSET

Teknillisen korkeakoulun Pohjarakennuksen ja maamekaniikan laboratoriossa on kehitetty kriittisen tilan mallin /9/ pohjalta anisotrooppisen saven mekaaninen malli MAC, joka on elastoplastinen, myötölujeneva ja assosiaatiivinen /5/. Mallia voidaan soveltaa vaativien maa- ja pohjarakenteiden geoteknisessa suunnittelussa sekä laboratorio- ja maastotutkimusmenetelmien kehittelyssä. Mallin kehittämistä varten Suomen Akatemia myönsi määrärahan vuosiksi 1983...1986.

Mallin rakenne on esitetty taulukossa 1. Tässä yhteydessä käsitellään lähinnä kohtia 4 "Plastisuus" ja 5 "Parametrit". Taulukossa 2 on esitetty MAC:n plastiset perusparametrit, sekä suljetun tilan parametrit a ja b, joita ei pidetä perusparametreinä. Geoteknisessä suunnittelussa tarvitaan samanaikaisesti, suunniteltavan koteen laadusta ja laajuudesta riippuen, 4...8 parametriä. Malli on kehitetty niin, että siinä voidaan soveltaa klassisen maamekaniikan parametreja. Taulukossa 2 mainitut parametrit α_0 ja p_0 ovat kuitenkin "uusia". Mallin parametrit voidaan määrittää kolmiakselilaitteilla ja ödometreillä sekä likimääräisesti indeksiminaisuksien perusteella. Parametrien määritystapaa valitetaessa ja mallia sovellettaessa on selvitettyvä maakerrosten tiiviys, kyllästysaste ja konsolidaatiotila sekä tärkeimmät luokitusminaisuudet (rakeisuus, humuspitoisuus ja vesipitoisuus). Taulukossa 2 lueteltujen parametrien fysikaalinen merkitys on esitetty kuvissa 1...4.

MAC:n konstitutiiviset yhtälöt kirjoitetaan kriittisen tilan mallin /9/ jännitys- ja muodonmuutosinvarianttien ja symbolien avulla.

Tekstissä käytetään maamekaniikan terminologiaa. Maamekaniikan merkkisäännön mukaisesti puristusjännitystä ja puristumaa pidetään positiivisena. MAC:n plastiset yhtälöt on koottu taulukkoon 3. Yhtälöt on muodostettu klassisen kolmiakselikokeen sellissä val-litsevaa jännitys- ja muodonmuutostilaan varten ($\sigma_2 = \sigma_3$) /9/. Empiirisää yhtälöitä (1...6) käytetään mm. maaparametrien määrit-tämiseen laboratoriokoetuloksista.

Maan mekaanista mallia kehitettäessä on testattu useita "klassisia" ja "uusia" teorioita sekä laboratoriokokeiden, että maasto-mittausten avulla. Maanäytteet on otettu häiriintymättöminä Etelä-Suomen savi- ja silttiesiintymistä. Laboratoriossa on tut-kittu sekä normaalisti konsolidoituneita että ylikonsolidoituneita maanäytteitä. Mallin yksityiskohtia on lisäksi testattu alan kan-sainvälistä kirjallisuudesta lainattujen tutkimustulosten avulla.

Muodonmuutosten ja jännitysten välistä riippuvaisuutta suljetussa tilassa on yleisesti approksimoitu hyperbelillä (1) /3/. Hyperbelin parametrit a ja b eivät ole vakioita, vaan ne ovat riippuvaisia mm. savikerroksen tiiviydestä ja kolmiakselikokeen leikkausnopeudesta /7/. Suljetun tilan hyperbeli (1) soveltuu geotekniseen suunnitteluum vain silloin, kun ko. maakerroksessa vallitsee likimain samanlainen muodonmuutos- ja jännitystila kuin kolmiakselikokeen sellissä. Parametreja a ja b (kuva 2) ei lueta MAC:n perusparametreihin.

Hydrostaattisen jännityksen logaritmin ($\ln p'$) ja ominaistilavuu-den (v) välinen riippuvaisuus on "pienillä" jännityslisäyksillä kuvan 3 mukaisesti lineaarinen. Kriittisen tilan mallin /9/ parametrit λ ja κ luetaan myös MAC:n perusparametreiksi.

Geoteknisessä suunnittelussa on kiinnitettävä erityistä huomiota siihen, missä fysikaalisessa tilassa kuormitettu kerros tulee mahdollisesti sortumaan. Sovellettava murtokriteeri riippuu em. tilasta ja kuormitusajan pituudesta. Normaalisti konsolidoitunut savikerros voi murtua joko avoimessa tai suljetussa tilassa.

Pitkääikaisesti kuormitetun savikerroksen murtumisen otaksutaan MAC:ssa tapahtuvan avoimessa kriittisessä tilassa, jolloin koheesi $c=0$. Kriittisessä tilassa jännityssuhde $\eta=q/p'$ lähestyy arvoa M. Klassisen maamekanikan sovelluksissa pitkääikainen stabiliteetti lasketaan tehokkailta maaparametreilla c' ja ϕ' . Lyhytaikeinen stabiliteetti lasketaan ns. $\phi=0$ -menetelmällä. Ylikonsolidoituneen saven murtoehtona MAC:ssa sovelletaan Mohr-Coulombia tai Hvorslevin /2/ murtokriteeriä. Näitten kriteerien parametrejä c ja ϕ ei kuitenkaan pidetä MAC:n perusparametreina. Parametri c ja ϕ arvot ovat riippuvaisia huokosluvusta /2/. MAC:n ja klassisen maamekanikan murtokriteerit eroavat toisistaan. Erityisesti pitkääikaisen vakavuuden osalta otaksuma $c=0$ johtaa reaalistisempaan ja varmempaan tulokseen. Klassisen maamekanikan laskentamenetelmillä on oma, mutta usein suppea, soveltuvuusalueensa.

2. REOLOGIA

MAC:n reologiaa koskevasta osasta laaditaan erillinen julkaisu.

3. ELASTISUUS

Normaalisti konsolidoituneissa maakerroksissa elastisten muodonmuutosten osuus on yleensä merkityksetön. Voimakkaasti ylikonsolidoituneissa maakerroksissa elastiset muodonmuutokset ovat sitä vastoin määräväviä. MAC:n maaelastiset ominaisuudet ja yhtälöt on esitetty julkaisussa /5a/.

4. PLASTISUUS

4.1 Myötöfunktio

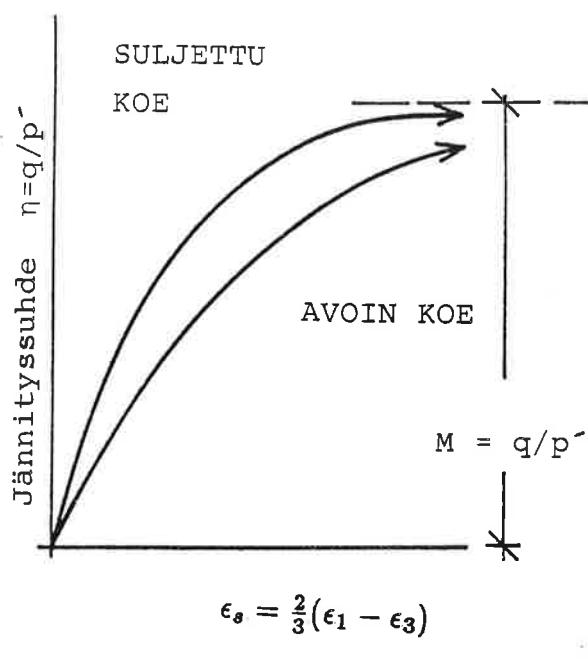
Tutkitut savimuodostumat ovat olleet voimakkaasti anisotrooppisia /5, 7/. Anisotropiaparametri määräää myötöfunktion kuvaajan eli myötöpinnan asennon p-q-tasossa kuvan 4 mukaisesti. Laboratorio-tutkimusten perusteella /5, 7/ on todettu, että pehmeän, anisotrooppisen savikerroksen myötöfunktioita voidaan approksimoida

Taulukko 1. MAC. Saven mekaanisen mallin rakenne /5/

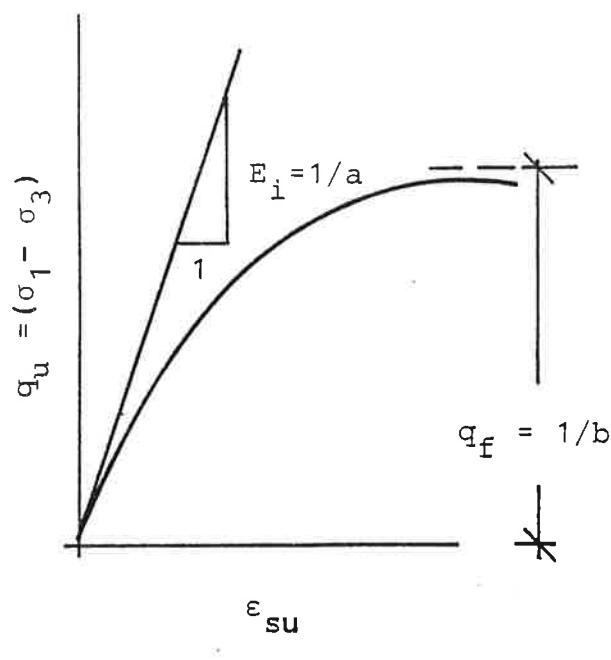
1. EMPIIRISET PERUSTEET Savikerroksen rakenne Savikerroksen varaan perustettujen rakenteiden ja savenäytteiden havaittu mekaaninen käyttäytyminen	2. REOLOGIA Savikerrosten jännityshistoria Kuormitusnopeuden vaikutus Konsolidaatio Hiipuminen
3. ELASTISUUS Hooken elastisuus Kokonaismuodonmuutokset Elastinen dilataatio Hyperelastisuus	4. PLASTISUUS Myötö Plastinen dilataatio Normaalisuus Myötölujeneminen Murto
5. PARAMETRIT Klassiset ja uudet parametrit Parametriiden määritys maastossa ja laboratorioissa Suunnittelussa sovellettavien parametriiden arvointi	6. LASKELMAT MAC:n käyttö geoteknissessä suunnittelussa Käsilaskenta Numeeriset menetelmät

Taulukko 2. MAC. Saven mekaanisen mallin plastiset parametrit /5/

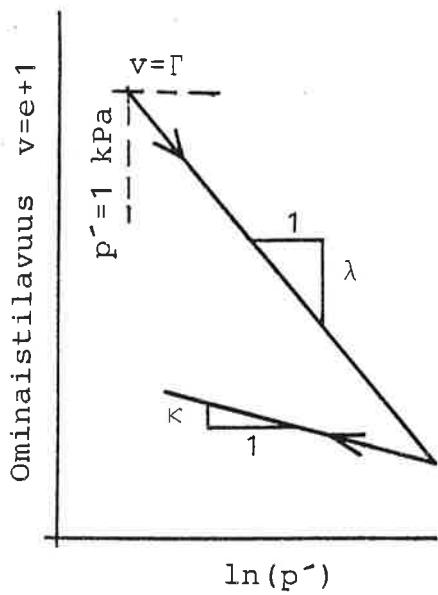
α_0 : anisotropiaparametri	Γ ominaistilavuus kriittiseessä tilassa
p_0 : myötöparametri initiaalitilassa	c koheesio
λ : kokonaistilavuudenmuutoksen parametri	ϕ kitkakulma
κ : elastisen tilavuudenmuutoksen parametri	a suljetun tilan hyperbelimallin parametri, 1/a on initiaalimoduuli
$\lambda - \kappa$: plastisen tilavuudenmuutoksen parametri	b suljetun tilan hyperbelimallin parametri, 1/b on teoreettinen puristuslujuus
M: kriittisen tilan jännityssuhde	



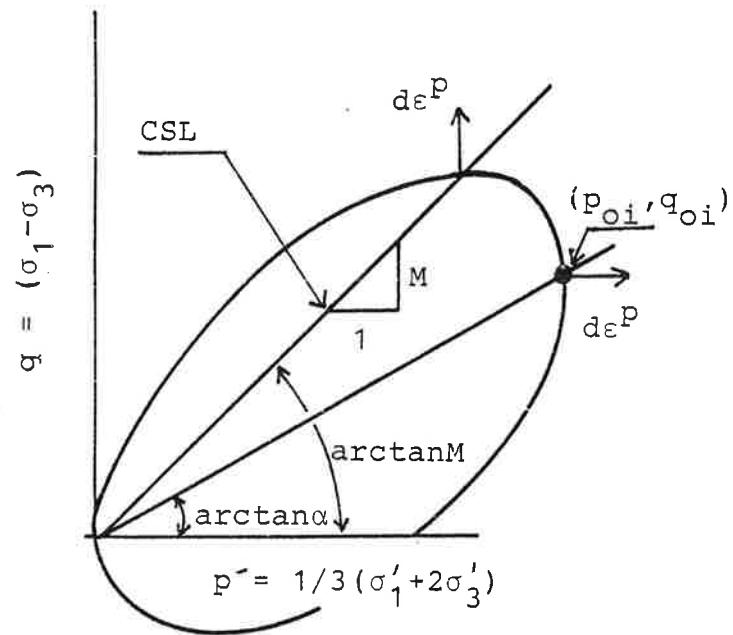
Kuva 1. MAC. Avoin ja suljettu kolmialkoe. Jännityssuhde.



Kuva 2. MAC. Suljettu kolmialkoe. Hyperbelin (1) parametrit a ja b. /3/



Kuva 3. MAC. Hydrostaattinen jännitystila. Parametrit λ ja κ .



Kuva 4. MAC. Initiaalimyötöpinta (6a). Parametrit α_{oi} ja p_{oi} . /9/

Taulukko 3. MAC. Klassinen kolmiakselikoe. Saven mekaanisen mallin empiriset yhtälöt (1)...(6) ja teoreettiset yhtälöt (7)...(11). /5b/

SOVELLUS/NIMITYS	YHTÄLÖ	No	VIITE	KUVA
Hyperbelimalli, Muodonmuutokset suljetussa ti- lassa	$\Delta q_u = \frac{\epsilon_{su}}{a + b\epsilon_{su}}$	(1)	/3/	2
Tilavuudenmuu- tokset kriitti- sessä tilassa	$v_c = \Gamma - \lambda \ln p'$	(2)	/9/	3
Elastiset tila- vuudenmuutokset	$v = v_\kappa - \kappa \ln p'$	(3)	/9/	3
Kriittinen tila, Normaalisti kon- solidoituneen saven murto	$q = Mp' \quad (CSL)$	(4)	/9/	4
Ylikonsolidoi- tuneen saven murtoehdot	$\tau = c + \sigma \tan \varphi$	(5)	/2/	
Myötöfunktio (ellipsi)	$q^2 + \frac{p'}{p_o}(q_o^2 - 2qq_o) = M^2(p_o - p')p'$	(6a)	/4, 5/	4
Anisotropia- parametri	$\alpha = q_o/p_o$	(6b)	/4, 5/	4
Myötösääntö	$d\epsilon_{ij}^p = d\Lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$	(7)		
Assosiaatiivi- suusehdo	$g \equiv f$	(8a)		
Normaalisuus- sääntö	$dq/dp = -d\epsilon_v^p/d\epsilon_s^p$	(8b)		
Konsistenssi- yhtälö	$f = 0 \quad df = 0$	(9)		
Plastinen moduuli	$H = \frac{1 + e_o}{\lambda - \kappa} p_o p^2 [1 - (\frac{\eta}{M})^2] [1 - (\frac{\alpha}{M})^2]$	(10)	/5/	
Isotrooppinen myötölujittu- mislaki	$dp_o = \frac{1 + e_o}{\lambda - \kappa} p_o d\epsilon_v^p$	(11a)	/5/	
Deviatorinen myötölujittumis- laki	$dq_o = \frac{1 - e_o}{\lambda - \kappa} p_o [M^2 - (\frac{q}{p})^2] d\epsilon_s^p$	(11b)	/5/	

ellipsillä (6), jonka yhtälö on esitetty taulukossa 3. Kun jännityspiste liikkuu myötöpinnan sisäpuolella ovat muodonmuutokset maaelastisia /5/. Jännityspisteen kohdateessa myötöpinnan ellipsi laajenee ja plastiset muodonmuutokset tulevat määrääviksi. Myötöpinta voi liikkua myödön aikana niin, että α pysyy vakiona. Myötöpinta voi laajetessaan myös kiertynä joko niin, että anisotropiaparametri α pienenee tai suurenee. Myötöellipsin kiertymissuunta on riippuvainen jännityspolin suunnasta p-q-tasossa. Jos myötöellipsi laajenee siten, että α pysyy vakiona, on yhtälössä (6) vain yksi myötölujittumisparametri p_0 , joka määritetään yhtälöllä (11a). Jos ellipsi (6) kiertyy myödön aikana merkittävästi, otetaan käyttöön myös deviatorinen parametri q_0 yhtälön (11b) mukaisesti.

4.2 Normaalisuussääntö

Normaalisuussäännöllä (8b) tarkoitetaan sitä, että plastinen muodon muutosinkrementti on kohtisuorassa asennossa plastista potentiaalipintaa vastaan. MAC:ssa myödön otaksutaan tapahtuvan assosiodusti. Myötöpinta yhtyy tällöin plastiseen potentiaalipintaan ($f=g$). On ilmeistä, että pehmeät, normaalisti konsolidoituneet savikerrokset myötäävät assosiodusti, jolloin yhtälö (8) on voimassa.

4.3 Myötölujittuminen

MAC:ssä otaksutaan, että myötöellipsin muoto säilyy myödön aikana. Ellipsin pääakselien pituuksien suhde on tällöin vakio (M). Anisotropiaparametrin α arvo saattaa sensijaan muuttua. Myötöellipsin laajeneminen ja mahdollinen kiertyminen hallitaan kahdella myötölujittumislailalla, joita kutsutaan isotrooppiseksi (11a) ja deviatoriseksi (11b) myötölujittumislaiksi. Myötölujittumislait (11a) ja (11b) kuvaavat pisteen (p'_0, q'_0) liikettä p-q-tasossa savikerroksen myödön aikana. Tässä pisteessä $d\epsilon_s^p$ on nolla.

Myötölujittumislaisissa (11) maaparametri λ edustaa hydrostaattisen jännityksen p' ja ominaistilavuudenmuutoksen Δv^t välistä riippuvaisuutta. Parametri κ kuvailee puolestaan hydrostaattisen jännityksen p' ja elastisen ominaistilavuudenmuutoksen Δv^e välistä riippuvaisuutta (kuva 3). Parametrien erotus $\lambda-\kappa$ edustaa saviker-

roksen plastista käyttäytymistä. Maamekaniikassa tekninen tilavuudenmuutos ϵ_v korvataan yleensä ominaistilavuudenmuutoksenla Δv ($\Delta \epsilon_v = \Delta v/v$).

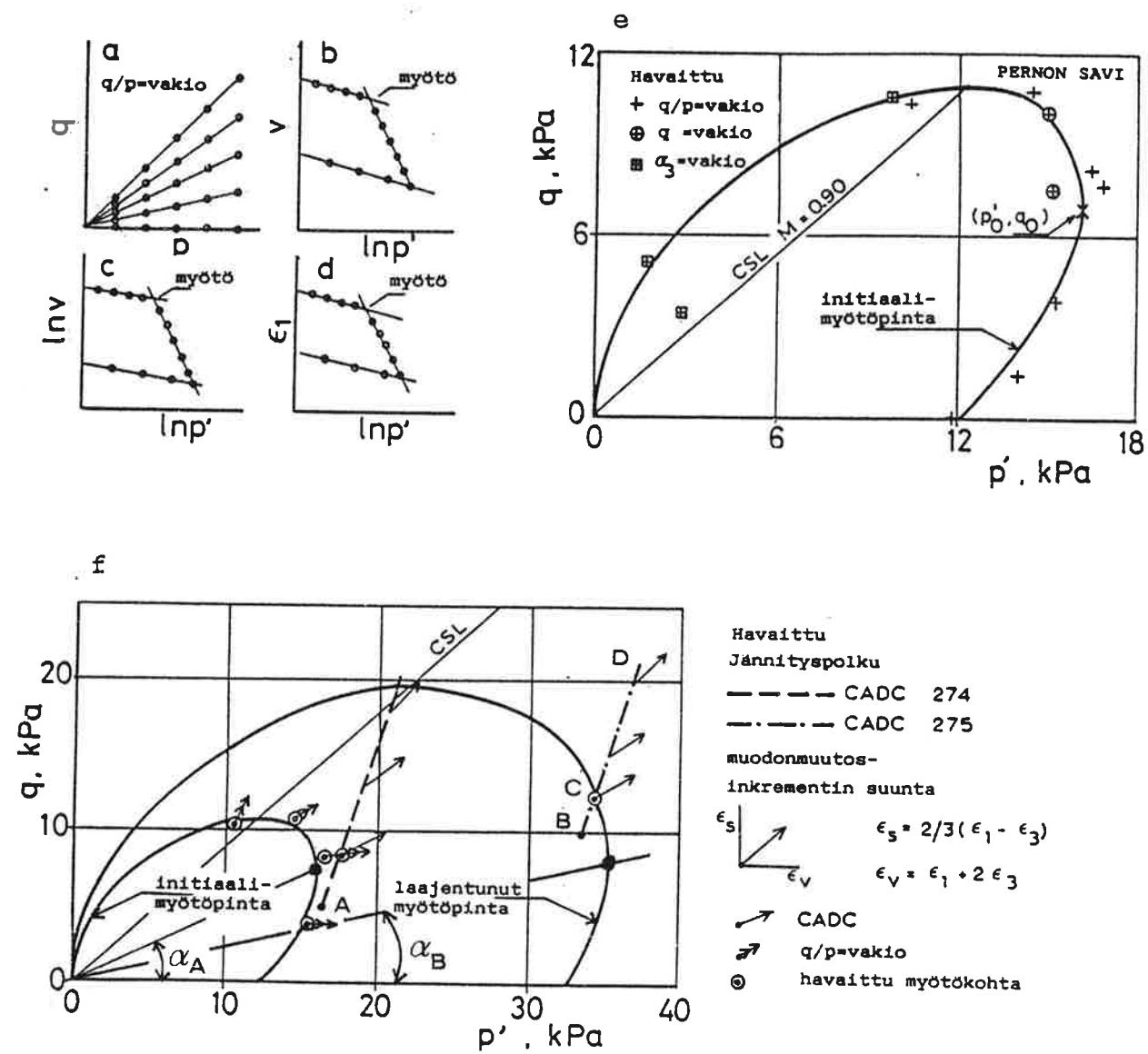
Kun savinäytettä konsolidoidaan isotrooppisesti ($q=0$), saattaa anisotropiaparametri α muuttua siten, että kun $p \rightarrow \infty$, pienenee $\alpha \rightarrow 0$. Myötöellipsi kiertyy tällöin myötäpäivään. Kun savinäytettä leikataan siten, että $\eta = q/p$ kasvaa, saattaa myös α kasvaa, kunnes η saavuttaa kriittistä tilaa vastaavan arvon $\eta = M$. Anisotropia-parametrin α muutokset myödön aikana vaikuttavat niin vähäisiltä, että otaksumalla $\alpha = \text{vakio}$, ilmeisesti päästään riittävän tarkaan tulokseen.

Kuvassa 5 on esitetty pehmeän savikerroksen myötöpinnan määrittämiseen kolmiakselikokeissa käytetyt jännityspolut /4, 5a/. Myötökohta on kokeiden tuloksista selvitetty kuvissa 5b...5d esitetyillä tavoilla. Havaittujen myötöpisteiden kautta on piirretty myötöellipsi (6a) kuvan 5e mukaisesti. Kuvaan 5f on konstruoitu laajentunut myötöpinta normaalisuussäänön (8b) avulla. Avoimessa kolmiakselikokeessa jännityspolulla BCD näyte on myötänyt pisteeessä C. Kuvaan on piirretty plastinen muodonmuutosinkrementti tässä pisteeessä . Myötöpinta on kohtisuorassa em. mitattua muodonmuutos inkrementtiä vastaan. Myötöellipsin ja kriittisen tilan suoran leikkauspisteeessä tilavuudenmuutoksen inkrementti on nolla. Kuvasta havaitaan, että konsolidointi pistestä A pisteeseen B on kiertänyt ellipsiä hieman myötäpäivään. Anisotrooppinen konsolidointi on aiheuttanut myös vähäistä deviatorista lujittumista, sillä konsolidoinnin päättympiste B jää uuden myötöpinnan sisäpuolielle. Kuten edellä mainittiin, käytäytyy savikerros maaelastisesti, kun jännityspiste liikkuu myötöpinnan sisällä. Maakerrosta sanotaan tällöin ylikonsolidoituneeksi.

4.4 Plastinen moduuli

Plastisen muodonmuutoksen inkrementit lasketaan yhtälön (7) avulla. Inkrementtien laskemista varten on tunnettava plastisen potentiaalin yhtälön lisäksi kerroin $d\Lambda$, joka on riippuvainen plastisesta moduulista H. Plastisen moduulin yhtälön (10) kehit-

täminen on ollut MAC:n vaikein tehtävä, koska sitä ei ole voitu testata välittömästi koetulosten avulla. Yhtälö (10), taulukossa 3, on kehitetty anisotrooppista savikerrosta varten. Yhtälön johto on esitetty julkaisussa /5b/.



Kuva 5. MAC. Avoin kolmiakselikoe. /4/.

- a...e) Initiaalimyötöpinnan määritys.
- f) Initiaalimyötöpinta (6a) ja myödön aikana laajentunut myötöpinta.

KIRJALLISUUS

- /1/ Houlsby, G.T., Wroth, C.P., Wood, D.M. 1982. Predictions of the results of laboratory tests on a clay using a critical state model. International Workshop on Constitutive Behaviour of Soils. Grenoble. University of Oxford. O.U.E.L. Report No. 1504/83. 53 s
- /2/ Hvorslev, M.J. 1937. Über die Festigkeitseigenschaften gestörter Bindiger Böden. Danmarks Naturvidenskabelige Samfund. København. 163 s
- /3/ Kondner, R.L. 1963. Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Foundation Division, ASCE., 89, No. SM1, February, 115-144.
- /4/ Korhonen, K-H., Lojander, M. 1987. Yielding of Perno Clay. Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications. Vol. II. Elsevier Science Publishing Co. 1249-1255.
- /5a/ Korhonen, K-H., Lojander, M. 1988. Mechanical Model for Anisotropic Clay. Nordiska Geoteknikermötet. Oslo.
- /5b/ Korhonen, K-H., Lojander, M. 1988. Anisotrooppisen saven mekaaninen malli. Moniste. Teknillinen korkeakoulu. Otaniemi. Julkaisematon.
- /6/ Lojander, M. 1987. Pehmeikkömaalaisten laboratoriotutkimukset. Pehmeikkörakentamisen geotekniikka. RIL K73-1987. Suomen Rakennusinsinöörien Liitto. Helsinki. 77-105.
- /7/ Lojander, M. 1988. The Parameters of the Mechanical Model of Anisotropic Clay. Nordiska Geoteknikermötet. Oslo.
- /8/ Roscoe, K.H., Burland, J.B. 1968. On the Generalized Stress-Strain Behaviour of "wet" Clay. Engineering Plasticity. Papers for a Conference. J. Heyman, F.A. Leckie, Editors. Cambridge. 535-609
- /9/ Schofield,A., Wroth, C.P. 1968. Critical State Soil Mechanics. McGraw-Hill, London.

KOSTEUSMUODONMUUTOKSISTA AIHEUTUVAT ORTOTROOPPISEN MATERIAALIN MUODONMUUTOKSET JA JÄNNITYKSET

Markku Kortesmaa

VTT

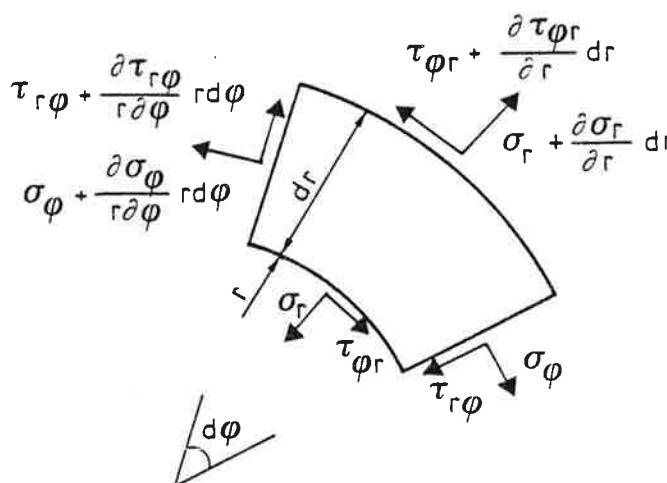
1 JOHDANTO

Seuraavassa esityksessä tarkastellaan ortotrooppisen materiaalin kosteusmuodonmuutoksista syntyviä siirtymiä ja jännityksiä kaksiulotteisessa tapauksessa. Koska tarkastellaan erityisesti puuta, materiaalimalli on sylinterimäisesti ortotrooppista. Tarkasteltavat poikkipinnat voivat olla ympyröitä, ympyräsektoja tai suorakaiteita. Lopussa tarkasteltu esimerkki on ympyrästä.

2 PERUSYHTÄLÖT TASOJÄNNITYSTILASSA

Rakenteiden mekaniikan perusyhtälöstä esitetään seuraavassa vain ne, joihin on myöhemmin viitataan.

Sylinterikoordinaattien r , φ ja z avulla lausuttaessa tasapainoyhtälöt ovat



$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Kuva 1. Yhtälön (1) merkinnät.

Ympyräsymmetrisessä tapauksessa, jossa jännitykset ovat vain r :n funktioita, saadaan

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (2)$$

2.2 Yhteensovivuusehdot

Muodonmuutosten ja siirtymien väliset yhtälöt ovat

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right). \quad (3)$$

Kun yhtälöstä (3) eliminoidaan siirtymät u ja v saadaan tasossa r , φ yhteensovivuusehdoksi

$$\frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \epsilon_\varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) \quad (4)$$

2.3 Konstitutiiviset yhtälöt

Kaksiulotteisessa tapauksessa konstitutiiviset yhtälöt ovat

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= S_{11}\sigma_r + S_{13}\sigma_\varphi + \epsilon_r^0 \\ \epsilon_\varphi &= S_{31}\sigma_r + S_{33}\sigma_\varphi + \epsilon_\varphi^0 \\ \gamma_{r\varphi} &= S\tau_{r\varphi} \end{aligned} \quad (5)$$

missä

ϵ_r^0 ja ϵ_φ^0 alkumuodonmuutoksia.

3 LINEAARINEN VIRUMISMALLI

Muodonmuutosten ja jännitysten välille voidaan lineaarisessa tapauksessa kirjoittaa kaavan (6) mukainen yhtälö, kun siirrytään osittain tensorimerkintöihin /2/

$$\epsilon_{ij} = S_{ij} \int_{-\infty}^t j_{ijkl}(t-\tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau \quad (6)$$

Kaavassa (6) ja myöhemmin kaavoissa (9), (13), (14) summataan vain indeksien k ja l yli.

Virumisfunktio $J(t)$ voidaan esittää tulona

$$j_{ijkl}(t) = A_{ijkl}(t)H(t) \quad (7)$$

$$\dot{j}_{ijkl}(t) = A_{ijkl}(t)\delta(t) + \dot{A}_{ijkl}(t)H(t) \quad (8)$$

missä

$H(t)$ Heavesiden yksikköfunktio ja

$\delta(t)$ $H(t)$ derivaatta ajan suhteen.

Kun kaavan (8) tulos sijoitetaan kaavaan (6), saadaan

$$\epsilon_{ij}(t) = S_{ij} A_{ijkl}(0) \sigma_{kl}(t) + S_{ij} \int_0^t \dot{A}_{ijkl}(t-\tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau \quad (9)$$

Yhtälöstä (9) voidaan $\sigma_{kl}(t)$ ratkaista, jos tunnetaan $\epsilon_{ij}(t)$ ja virumisfunktio $J_{ijkl}(t)$, siis myös $A_{ijkl}(t)$.

Numeerisen integroinnin kaavoilla päädytään tulokseen, jossa integraalin sisällä numeerisen laskun viimeinen termi sisältää tuntemattoman $\sigma(t)$:n ja muut termit sisältivät vain tunnetujen, aikaisemmin laskettuja jännityksiä.

Kun mukaan otetaan myös alkumuodonmuutos ϵ_{ij}^0 , saadaan kaavasta (9)

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^c + \epsilon_{ij}^o \quad (10)$$

missä

ϵ_{ij}^e kimmoinen muodonmuutos (= ensimmäinen termi kaavassa (9))

ϵ_{ij}^c virumismuodonmuutos (= integraalitermi kaavassa (9))

Kun kaavasta (10) ratkaistaan kimmoinen muodonmuutos, saadaan potentiaalienergian lausekkeksi /3/

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV - \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon^c\} dV - \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon^o\} dV \quad (11)$$

Kun muodonmuutokset $\{\epsilon\}$ lausutaan nurkkapistesiritymien $\{u_i\}$ avulla derivaatamatrisiin $[B]$ välityksellä ja varioidaan potentiaalienergian lauseke siirtymän $\{u_i\}$ suhteen, saadaan, kun $\delta U = 0$

$$\int_V [B]^T [D] [B] \{u_i\} dV = \int_V [B]^T [D] \{\epsilon^c\} dV + \int_V [B]^T [D] \{\epsilon^o\} dV \quad (12)$$

Kun tarkastellaan kaavaa (12), huomataan, että normaaliihin kimmoseen yhtälöön on tullut lisää oikealle puolelle virumismuodonmuutoksen $\{\epsilon^c\}$ sisältävä termi, eräänlainen "muistikuorma". Virumismuodonmuutos $\{\epsilon^c\}$ on kaavan (9) termi

$$\epsilon_{ij}^c = S_{ij} \int_0^t \dot{A}_{ijkl}(t-\tau) \sigma_{kl}(\tau) d\tau \quad (13)$$

Tämä voidaan hajottaa numeerisesti integroitaessa kahdeksi termiksi, joista edellinen sisältää jännityksiä $\sigma_{kl}(t_i)$ $t_i < t$ ja jälkimmäinen tuntemattoman jännityksen $\sigma_{kl}(t)$.

Trapetsikaavaa käytettäessä saadaan

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^c &= S_{ij} \Delta \left\{ \frac{1}{2} \dot{A}_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \dot{A}_{ijkl}[(n-1)\Delta] \sigma_{kl}(i\Delta) + \frac{1}{2} \dot{A}_{ijkl}(0) \sigma_{kl}(n\Delta) \right\} \\ &= -f_{muisti} + S_{ij} \frac{\Delta}{2} \dot{A}_{ijkl}(0) \sigma_{kl}(n\Delta) \end{aligned} \quad (14)$$

Kun kaavasta (14) siirretään viimeinen termi yhtälön (12) vasemmalle puolelle, saadaan yhtälö, jossa vain vasen puoli sisältää tuntemattomia termejä ja oikea puoli aikaisemmilta aika-askelilta tunnetuksi tulleita termejä. Täten saadaan

$$\int [B]^T [\bar{D}] [B] dV \{u_i\} = [\bar{K}] \{u_i\} = - f_{muisti} + \int_V [B]^T [D] \{\epsilon^0\} dV \quad (15)$$

Yhtälö (15) on formulointu kimmisen yhtälön muotoon. Erona kimmiseen yhtälöön verrattuna on jäykkyysmatriisiin K tehty pienennys, joka ottaa huomioon yhtälön (14) viimeisen termin, ja kuormavektoriin f tehty lisäys joka ottaa huomioon kaavan (14) $\{\epsilon^c\}$ termit viimeistä termiä lukuunottamatta.

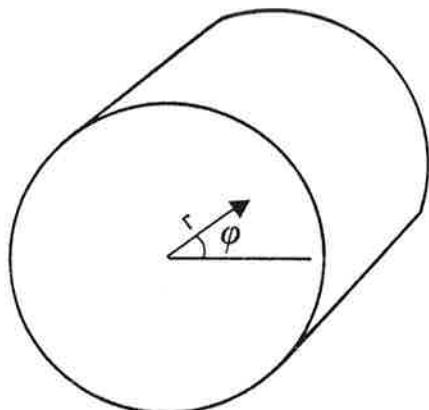
Jäykkyysmatriisiin $[\bar{K}]$ voidaan laskea seuraavasti trapetsikaavan tapauksessa

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \int_V [B]^T [D] [B] dV - \int_V [B]^T \frac{\Delta}{2} [\dot{A}] [D] [B] dV \\ &= \int_V [B]^T [D] \left\{ I - \frac{\Delta}{2} [S] [\dot{A}] [D] \right\} [B] dV \end{aligned} \quad (16)$$

"Muistikuormaksi" saadaan vastaavasti

$$f_{muisti} = - \int [B]^T [D] \left[\frac{\Delta}{2} [S] [\dot{A}(t)] \{\sigma(0)\} + \sum_{i=1}^{n-1} [S] [\dot{A}((n-i)\Delta)] \{\sigma_{k_1}(i\Delta)\} \right] [B] dV \quad (17)$$

4 ANALYYTTISET RATKAISUT



Analyyttisia ratkaisuja on helppo löytää pyöreän puun tapauksessa, jos jännitykset ja muodonmuutokset riippuvat vain koordinaatista r (kuva 2).

/5:ssä on esitetty ratkaisu.

Kuva 2. Pyöreän puun koordinaatisto.

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= C_1 r^{-1+\alpha} + C_2 r^{-1-\alpha} + \frac{A_1 - 3A\alpha}{8+k} \frac{\Delta u}{S_{3,3}} \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 + \frac{A_1 - A_3}{k} \frac{u_0}{S_{3,3}} \\
 \sigma_\varphi &= C_1 \alpha r^{-1+\alpha} - C_2 \alpha r^{-1-\alpha} + \frac{3(A_1 - A_3)}{8+k} \frac{\Delta u}{S_{3,3}} \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 + \frac{A_1 - A_3}{k} \frac{u_0}{S_{3,3}} \\
 u_R &= C_1 (S_{3,3}\alpha + S_{1,3}) r^\alpha - C_2 (S_{3,3}\alpha - S_{1,3}) r^{-\alpha} \\
 &\quad + \left[\frac{A_1 - 3A_3}{8+k} \left(3 + \frac{S_{1,3}}{S_{3,3}} \right) + A_3 \right] \Delta u r \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 + \left[\frac{A_1 - A_3}{k} \left(1 + \frac{S_{1,3}}{S_{3,3}} \right) + A_1 \right] u_0 r
 \end{aligned} \tag{18}$$

kun kosteusjakautuma on

$$u(r) = u_0 + \Delta u \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 \tag{19}$$

$$\text{Muut kaavan (18) merkinnät ovat } k = \frac{S_{3,3} - S_{1,1}}{S_{3,3}}, \quad \alpha = \sqrt{1-k}$$

Koska puun sydän on huomattavasti pehmeämpää kuin muun puun, voidaan puun sydäntä approksimoida reiällä, jonka säde on r_1 . Tällöin saadaan reunaehtoiksi

$$\sigma_R(r_1) = \sigma_R(r_2) = 0$$

Kun nämä sijoitetaan yhtälöihin (18) saadaan, kun valitaan $\Delta u = 0$

$$\sigma_R = C \left\{ \left(\frac{r_1}{r} \right) \left[\left(\frac{r_2}{r} \right)^\alpha - \left(\frac{r}{r_2} \right)^\alpha \right] + \left(\frac{r_2}{r} \right) \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^\alpha - \left(\frac{r_1}{r} \right)^\alpha \right] + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^\alpha - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^\alpha \right\} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\varphi &= C \alpha \left\{ - \left(\frac{r_1}{r} \right) \left[\left(\frac{r}{r_2} \right)^\alpha + \left(\frac{r_2}{r} \right)^\alpha \right] + \left(\frac{r_2}{r} \right) \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^\alpha + \left(\frac{r_1}{r} \right)^\alpha \right] + \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^\alpha - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^\alpha \right] \right\} \\
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 u_R &= C r \left\{ - (S_{1,3} + \alpha S_{3,3}) \left[\left(\frac{r_1}{r} \right) \left(\frac{r}{r_2} \right)^\alpha - \left(\frac{r_2}{r} \right) \left(\frac{r}{r_1} \right)^\alpha \right] \right. \\
 &\quad \left. + (S_{1,3} - \alpha S_{3,3}) \left[\left(\frac{r_1}{r} \right) \left(\frac{r_2}{r} \right)^\alpha - \left(\frac{r_2}{r} \right) \left(\frac{r}{r_1} \right)^\alpha + (S_{1,3} + S_{3,3}) \left[\left(\frac{r_1}{r_2} \right)^\alpha - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^\alpha \right] \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$C = \frac{(A_1 - A_3)u_0}{S_{3,3}k\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha} - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\alpha}\right]} \quad (23)$$

4 ELEMENTTIMENETELMÄ

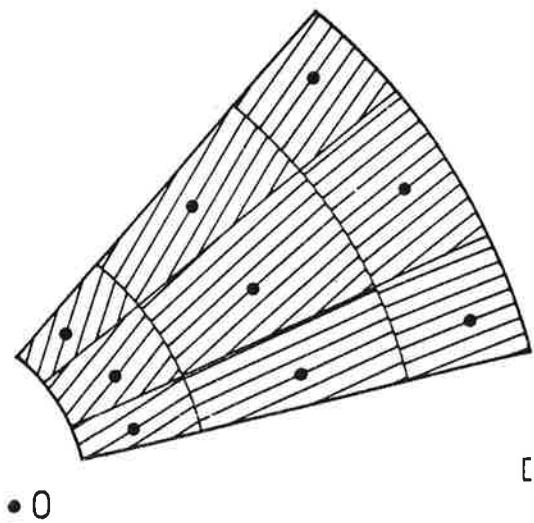
4.1 Yleistä

Seuraavassa esitetään lyhyt kuvaus muodonmuutosten ja jännitysten laskemisesta käytetyn elementtimenetelmällä puuttumatta ratkaisun yksityiskohtiin. Lähinnä kiinnitetään huomiota poikkeamiin tavanomaisesta lineaarisesta kimmoleisestä ratkaisusta.

4.2 Elementtityyppi, integrointi ja ortotropia

Elementtityyppinä on käytetty 8-solmuista isoparametrista elementtiä. Rakenteen jäykkyysmatriisia ja kuormitusvektoria laskettaessa integrointi on tehty laskimella funktiot ns. Gausein pisteissä (kuva 3).

Ortotropia on otettu huomioon määritelmällä materiaalivakiot kussakin Gaussin pisteessä ja kiertämällä ne sitten xy-koordinaatistoon kaavalla



$$[D] = [T][D'][T]^T \quad (24)$$

$$\epsilon = [T^T]^{-1}\epsilon'$$

jossa

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix} \quad (25)$$

Kuva 3. Integroimispisteet (Gaussin pisteet) ja ortotropiasuunnat.

Jokaisessa integroimispisteessä on jäykkyysmatriisi [D] laskettu uudelleen, koska on haluttu ottaa huomioon kosteuden vaikutus kimmoarvoihin.

4.3 Viskoelastisuus

Viskoelastisuus on otettu huomioon kaavaa (16) käyttäen siten, että integroimisvälien lukumäärän ollessa pariton on viimeiseen väliin sovellettu trapetsikaavaa ja muihin Simpsonin kaavaa ja lukumäärän ollessa parillinen on sovellettu pelkästään Simpsonin kaavaa. Virumisfunktio voi olla jokaiseen jäykkyysvakion suuntaan erilainen ja se voi riippua paikallisen integroimispisteen kosteustilasta.

Kun siirtymät on laskettu kaavasta (12), niin jännitykset voidaan laskea kaavan (9) periaatteita soveltaen, koska siirtymien kautta myös ϵ_{ij} on tunnettu.

5 TULOKSET

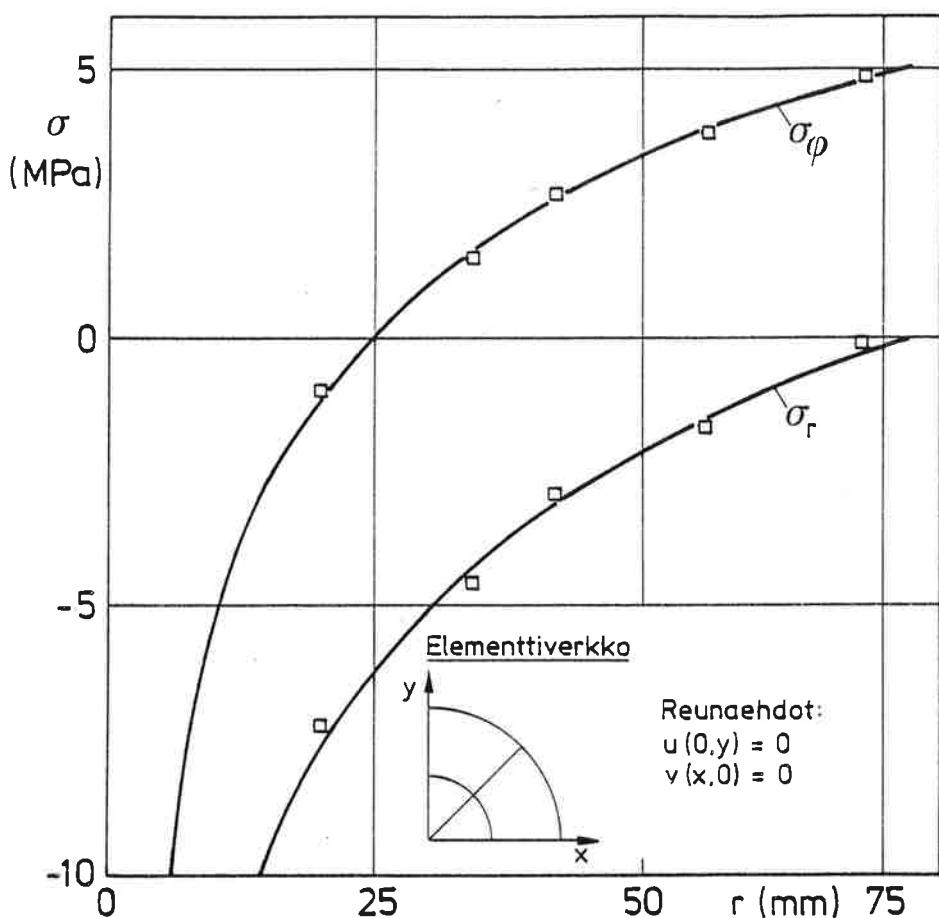
Tässä on tulosten vertailu tehty vain ympyräpoikkileikkaukselle, kun kosteusmuodonmuutos $u_0 = -0,15$. Tällöin voidaan tarkka tulos laskea kaavoista (20), (21) ja (22) joten on helppo verrata elementtimenetelmällä saatuja tuloksia analyttisiin tarkkoihin tuloksiin. Virumisfunktiona on käytetty Maxwellin mallia

$$J(t) = 1 + 2t \quad (26)$$

Kimmoisesta ratkaisusta on esitetty kuvassa 5 säteen suuntainen jännitys σ_R ja tangentin suuntainen jännitys σ_ϕ . Laskennassa on käytetty seuraavia materiaalivakioita, jota kuvaavat puun käytäytymistä syitä vastaan kohtisuorassa tasossa

$$\begin{array}{lll} S_{11} = 0,00129 & S_{13} = -0,0007 & S_{33} = 0,00222 \\ S = 0,025 & A_1 = 0,134 & A_3 = 0,266 \end{array}$$

S_{ij} :n ja S:n yksikkö on 1/MPa ja A_1 ja A_3 :n arvo edellyttää kosteudenmuutoksen annettavan absoluuttiarvoina, ei prosentteina kuivapainosta.



Kuva 5. Elementtimenetelmällä saatujen (\square) ja analyyyttisten arvojen vertailu.

Virumistuloksista on annettu esimerkki taulukossa 1, johon on laskettu säteen arvolla $r = 33,6$ mm saadut arvot.

Taulukko 1. Esimerkki jännityksistä kun kosteuden muutos $u = -0,15$ ja virumisfunktio on $J(t) = 1+2t$.

t	$\sigma_R(t)$	$\frac{\sigma_R(t)}{\sigma_R(0)}$	$\sigma_\phi(t)$	$\frac{\sigma_\phi(t)}{\sigma_\phi(0)}$	Tarkka $\frac{\sigma(t)}{\sigma(0)}$
0	-4,60	1,00	1,45	1,000	1,000
0,2	-3,07	0,667	0,96	0,667	0,670
0,4	-2,08	0,451	0,65	0,451	0,449
0,6	-1,38	0,301	0,44	0,301	0,301
0,8	-0,94	0,203	0,29	0,203	0,202
1,0	-0,62	0,136	0,20	0,136	0,135

KIRJALLISUUTTA

- [1] Archer, R., R., Growth Stresses and Strains in Trees.
Heidelberg 1987. Springer-Verlag. Springer Series in Wood Science. 240 s.
- [2] Thelandersson, S., Notes on linear viscoelasticity. Lund 1987. Lund
institute of technology. Division of structural Mechanics.
Report TVSM-3009. 28 s.
- [3] Hannus, M., Viskoelastiset rakenteet. Helsinki 1971.
Rakennusstatistiikan seminaari. 11 s.
- [4] Zienkiewicz, O.C., The finite element method. Third edition. 1977.
Mc Graw-Hill Book Company (UK) Limited.
- [5] Ranta-Maunus, A., Pyöreän puun kuivumisjännitysten lineaarinen analyysi.
Helsinki 1986. Rakenteiden mekaniikka, Vol. 19. No. 2 1986, s. 43-55.

NONLINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SPACE FRAMES

Reijo Kouhia ¶, Martti Mikkola †, Markku Tuomala ‡

¶ The Academy of Finland

† Helsinki University of Technology

‡ Tampere University of Technology

1 INTRODUCTION

Steel frames are common load carrying structures in engineering constructions. Effective use of high strength steel results in thin-walled members, and due to slenderness and increased imperfection sensitivity the stability problems become more important. In design recommendations there is a trend to utilize plastic material properties, and therefore material nonlinearities have to be considered, too. Coupled geometrical and material nonlinearities complicate the structural analysis, and only numerical solutions are feasible in practical cases.

In the present study the geometrically nonlinear elasto-plastic finite element analysis of space frames is considered. Finite deformations are taken into account by adopting an incremental Lagrangian formulation. Several two node space frame elements are constructed by using linear polynomials as shape functions. Accuracy and efficiency of the constructed elements is demonstrated by two test problems. Some other problems are solved to show the capability of the method in statical and dynamical cases.

2 EQUILIBRIUM EQUATIONS

The principle of virtual work in the Lagrangian description is

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV - \int_{\Omega} {}^1\rho^2 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{A_t} {}^2t \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\Omega} {}^1\rho^2 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dV = 0, \quad (1)$$

where \mathbf{S} is the 2nd Piola-Kirchhoff stress tensor, \mathbf{E} is the Green-Lagrange strain tensor, \mathbf{u} is the displacement vector, ${}^1\rho$ is the material density in the reference configuration, \mathbf{f} and \mathbf{t} are the body force and the surface traction vectors, respectively, and $\ddot{\mathbf{u}}$ is the acceleration. The displacement vector \mathbf{u} is interpolated within an element by shape functions \mathbf{N} and nodal point displacement variables \mathbf{q} in the form

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{N}(\mathbf{X})\mathbf{q}, \quad (2)$$

where \mathbf{X} is the material coordinate vector. Inserting Eq. (2) into the incremental form of Eq. (1) gives the following discretized form of equilibrium equation

$${}^1\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} + {}^1\mathbf{M}^2 \ddot{\mathbf{q}} = {}^2\mathbf{Q} - {}^1\mathbf{R}, \quad (3)$$

where $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_g$ is the tangent stiffness matrix, \mathbf{K}_g the geometrical stiffness matrix, \mathbf{Q} the external force vector and \mathbf{R} the vector of internal forces and $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^*$ the incremental nodal point displacement vector between current and reference configuration. In the incremental Lagrangian formulation the matrix \mathbf{K}_1 depends also on the deformations between configurations 1 and 2. Configuration 2 is found by iteration using equilibrium configuration 1 as reference state.

3 KINEMATICAL RELATIONS

Incremental displacements for three dimensional straight beam element with solid cross-section are assumed to be

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y, z) &= \Delta u_0(x) + z\Delta\phi_y(x) - y\Delta\phi_z(x) - \omega(y, z)\Delta\phi_{x,z}(x) \\ \Delta v(x, y, z) &= \Delta v_0(x) - z\Delta\phi_x(x) - \frac{1}{2}y\Delta\phi_z^2(x) \\ \Delta w(x, y, z) &= \Delta w_0(x) + y\Delta\phi_x(x) - \frac{1}{2}z\Delta\phi_x^2(x),\end{aligned}\quad (4)$$

where $\phi_{x,z} = \partial\phi_x/\partial z$, and u_0, v_0, w_0 are the displacement components of the centroidal axis and ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z are the rotations with respect to x, y and z axes. The warping function ω has been chosen in such a way that it yields correct values for the St. Venant torsional rigidity in the integration of stiffness matrices and for the torque in the internal force vector. In the case of rectangular cross-section the warping function has been approximated by the formula [1]

$$\omega(y, z) = Cyz,\quad (5)$$

where

$$C = \frac{I_z - I_y}{I_z + I_y}, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA.$$

The incremental components of the Green-Lagrange strain tensor are obtained by inserting Eqs. (4) into the general expressions

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_x &= \Delta u_{,x} + \frac{1}{2}(\Delta u_{,x}^2 + \Delta v_{,x}^2 + \Delta w_{,x}^2) \\ \Delta\gamma_{xy} &= \Delta u_{,y} + \Delta v_{,x} + \Delta u_{,x}\Delta u_{,y} + \Delta v_{,x}\Delta v_{,y} + \Delta w_{,x}\Delta w_{,y} \\ \Delta\gamma_{xz} &= \Delta u_{,z} + \Delta w_{,x} + \Delta u_{,x}\Delta u_{,z} + \Delta v_{,x}\Delta v_{,z} + \Delta w_{,x}\Delta w_{,z}.\end{aligned}\quad (6)$$

Substituting the finite element displacement assumptions

$$\begin{aligned}\Delta u_0 &= \mathbf{N}\Delta\mathbf{q}_u \\ \Delta v_0 &= \mathbf{N}\Delta\mathbf{q}_v \\ \Delta w_0 &= \mathbf{N}\Delta\mathbf{q}_w \\ \Delta\phi_x &= \mathbf{N}\Delta\mathbf{q}_{\phi_x} \\ \Delta\phi_y &= \mathbf{N}\Delta\mathbf{q}_{\phi_y} \\ \Delta\phi_z &= \mathbf{N}\Delta\mathbf{q}_{\phi_z}\end{aligned}\quad (7)$$

into Eqs. (6), the strain increments are found in terms of the nodal parameters $\Delta\mathbf{q}$. The term $\omega\Delta\phi_{x,z}$ is omitted in the expression of $\Delta\epsilon_x$.

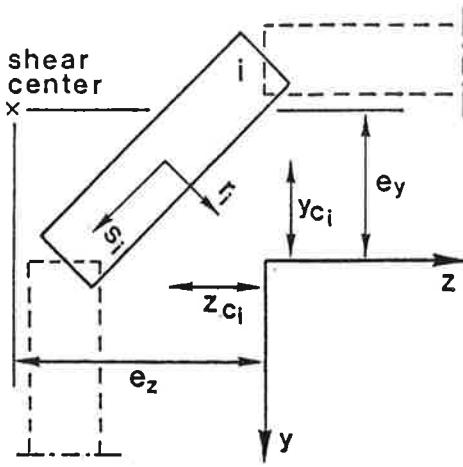


Fig. 1. Thin walled cross-section.

The displacement increments in an arbitrary part i of the cross-section are

$$\begin{aligned}\Delta u_i(x, y, z) &= \Delta u_0(x) + z\Delta\phi_y(x) - y\Delta\phi_z(x) - \omega_s(s)\Delta\theta(x) - \omega_r(s, r)\Delta\phi_{z,x}(x) \\ \Delta v_i(x, y, z) &= \Delta v_0(x) \cos \alpha_i + \Delta w_0(x) \sin \alpha_i - e_r\Delta\phi_x(x) - \frac{1}{2}e_s\Delta\phi_x^2(x) \\ \Delta w_i(x, y, z) &= -\Delta v_0(x) \sin \alpha_i + \Delta w_0(x) \cos \alpha_i + e_s\Delta\phi_x(x) - \frac{1}{2}e_r\Delta\phi_x^2(x),\end{aligned}\quad (9)$$

where

$$\begin{aligned}e_r &= (z_{ci} - e_z) \cos \alpha_i - (y_{ci} - e_y) \sin \alpha_i + r_i \\ e_s &= (z_{ci} - e_z) \sin \alpha_i + (y_{ci} - e_y) \cos \alpha_i + s_i,\end{aligned}$$

and e_y, e_z are the coordinates of the shear-center in the principal coordinate system of the cross-section, and y_{ci}, z_{ci} are the coordinates of the centroid of part i . The strain increments are evaluated using the formulas

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_x &= \Delta u_{i,x} + \frac{1}{2}(\Delta u_{i,x}^2 + \Delta v_{i,x}^2 + \Delta w_{i,x}^2) \\ \Delta\gamma_{xz} &= \Delta u_{i,s} + \Delta v_{i,x} + \Delta u_{i,x}\Delta u_{i,s} + \Delta v_{i,x}\Delta v_{i,s} + \Delta w_{i,x}\Delta w_{i,s}.\end{aligned}\quad (10)$$

Application of the chain rule

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} = \cos \alpha_i \frac{\partial}{\partial y} + \sin \alpha_i \frac{\partial}{\partial z},$$

yields the expressions for $\Delta u_{i,s}, \Delta v_{i,s}$ and $\Delta w_{i,s}$

$$\begin{aligned}\Delta u_{i,s} &= \sin \alpha_i \Delta\phi_y - \cos \alpha_i \Delta\phi_z - \omega_{s,s} \Delta\theta - \omega_{r,s} \Delta\phi_{z,x} \\ \Delta v_{i,s} &= -\frac{1}{2} \Delta\phi_x^2 \\ \Delta w_{i,s} &= \Delta\phi_x.\end{aligned}$$

In the case of a thin-walled beam, the cross-section is composed of narrow rectangular parts (Fig. 1). The warping function is assumed to consist of two parts $\omega_s(s)$ and $\omega_r(s, r)$

$$\begin{aligned}\omega_s(s) &= h_s(s)s \\ \omega_r(s, r) &= h_r(s)r,\end{aligned}\quad (8)$$

where h_s and h_r are the components of the radius vector \mathbf{R} onto the normal and tangential directions at an arbitrary point of the cross section

$$\begin{aligned}h_s(s) &= \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ h_r(s) &= \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{s}},\end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{s}}$ and $\hat{\mathbf{r}}$ are the tangential and normal unit vectors, respectively.

Three versions of thin-walled beam element have been constructed. In the element, which has 6 degrees of freedom at each node, the overall warping ω has not been taken into account. In other two elements, the overall warping has been included in the formulation and an additional degree of freedom is required. Many investigators [2,3,4] have used cubic polynomials as shape functions (Hermitian polynomials) for the angle of twist. Then the additional degree of freedom is the derivative of the angle of twist. In this study, the angle of twist and its derivative have independent approximations.

In Vlasov's theory of thin-walled beams with open cross section, the assumption of vanishing shear strain in the middle surface leads to a discrepancy between the strain and stress fields. Using separate approximations for the angle of twist and its derivative, these shear strains can easily be taken into account e.g. in symmetric I-section beams. For beams with unsymmetric thin-walled cross-section, these shear strains can be taken into account by modifying the assumption of warping function. In Ref.[5] the following approximation for axial displacement due warping is used

$$u_\omega = \sum_i u_i(x) \phi_i(s). \quad (11)$$

There ϕ_i are the shape functions in the middle line of cross-section. In this study, only beams with I-section have been considered, and the average shear deformation in flanges due to torsion has been taken into account.

The second element, which includes the warping of the cross-section, is based on Vlasov's theory. The constraint $\phi_{x,x} - \theta = 0$ has been added using the penalty method.

4 CONSTITUTIVE MODEL

The strain rate \mathbf{D} is decomposed into elastic and plastic parts [6]

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p. \quad (12)$$

The elastic part \mathbf{D}^e is related to the corotational Jaumann rate of Cauchy stress tensor \mathbf{T} by the elastic law

$$\dot{\mathbf{T}}^* = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p), \quad (13)$$

in which \mathbf{C}^e is the elastic constitutive tensor. The J_2 -flow theory is used to evaluate the plastic strain rate

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}, \quad (14)$$

where $f = \sqrt{3J_2}$ and J_2 is the second invariant of the deviatoric Cauchy stress. The elasto-plastic constitutive law can be written in the form

$$\dot{\mathbf{T}}^* = \left(\mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e : \mathbf{aa} : \mathbf{C}^e}{E_p + \mathbf{a} : \mathbf{C}^e : \mathbf{a}} \right) : \mathbf{D}, \quad (15)$$

in which $\mathbf{a} = \partial f / \partial \mathbf{T}$, $E_p = EE_t / (E - E_t)$ and $E_t = d\sigma_y / d\bar{\varepsilon}^p$. Strain hardening is taken into account by expressing the true yield stress σ_y as a function of the logarithmic inelastic strain

$$\bar{\varepsilon}^p = \int \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p} dt, \quad (16)$$

rate is of order 2 for both linear and cubic elements. Calculated midpoint rotations and bimoment values are shown in table 1.

Table 1. Comparison of the results using different elements . Bimoment values are at the midpoint of the element nearest to support and twist angles at the midpoint of the bar. Five elements are used to discretize half of the beam. The beam has same cross-section as in example 6.3 (Fig. 7).

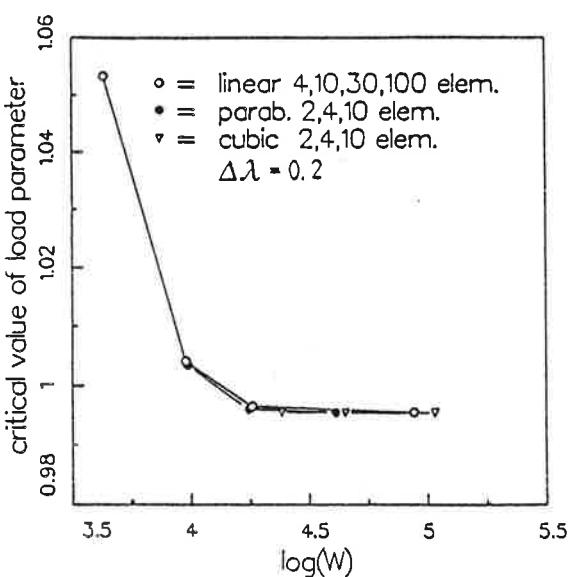
	$k =$ ϕ_x/rad	0.495 B/kNm^2	$k =$ ϕ_x/rad	4.95 B/kNm^2	$k =$ ϕ_x/rad	14.84 B/kNm^2
Vlasov's theory	$1.81 \cdot 10^{-5}$	$9.76 \cdot 10^{-2}$	$5.47 \cdot 10^{-3}$	0.300	$2.36 \cdot 10^{-2}$	0.146
cubic elem.	$1.81 \cdot 10^{-5}$	$9.77 \cdot 10^{-2}$	$5.47 \cdot 10^{-3}$	0.312	$2.35 \cdot 10^{-2}$	0.159
6 dof/node elem.	$9.15 \cdot 10^{-4}$	-	$9.15 \cdot 10^{-3}$	-	$2.75 \cdot 10^{-2}$	-
7 dof/node elem.	$2.41 \cdot 10^{-5}$	$9.71 \cdot 10^{-2}$	$5.49 \cdot 10^{-3}$	0.333	$2.38 \cdot 10^{-2}$	0.204
penalty elem.	$1.74 \cdot 10^{-5}$	$9.78 \cdot 10^{-2}$	$5.45 \cdot 10^{-3}$	0.332	$2.36 \cdot 10^{-2}$	0.203

5.2 Lateral buckling in pure bending

The accuracy of elements based on assumptions (4) is studied by computing the critical load of a simply supported beam with narrow rectangular cross-section. The expression for the critical moment is [7]

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{\sqrt{(1 - I_y/I_z)(1 - GI_t/EI_z)}}. \quad (22)$$

This formula includes the effect of pre-buckling deflections.



Elements compared are linear isoparametric element with two nodes, parabolic and cubic subparametric elements with three and four nodes, respectively. In subparametric elements the geometry of an element is interpolated by linear approximation. Figure 3 shows the convergence of these elements as a function of computational work $W = nm_k^2$, where n is the number of degrees of freedom and m_k is the half bandwidth (including diagonal) of the stiffness matrix. Load parameter value 1 corresponds to the critical moment M_{cr} . The increment of load parameter has been $\Delta\lambda = 0.2$. The critical moments obtained by different elements converge to smaller values than M_{cr} of Eq.(22). This is due to the effect of shear deformations which is not allowed for in Eq. (22).

Fig. 3. Convergence of the critical load in pure bending.

where t is time or load parameter in static loading cases. Using the relationship between the strain rate \mathbf{D} and the rate of Green-Lagrange strain $\dot{\mathbf{E}}$ an appropriate constitutive equation for the incremental Lagrangian formulation is obtained in the form

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}_L : \dot{\mathbf{E}}. \quad (17)$$

5 CONVERGENCE TESTS

5.1 Torsion bar

The potential energy functional for Vlasov's theory of thin-walled torsion bar can be written as follows

$$\Pi_P(\phi_x) = \frac{1}{2} \int_0^L (GI_t \phi_{x,x}^2 + EI_\omega \phi_{x,xx}^2) dx - \int_0^L m_t \phi_x dx, \quad (18)$$

where GI_t is the St. Venant's torsional rigidity, EI_ω the warping rigidity, and m_t the distributed torque along the axis of the bar. Numerical solution of the variational equation $\min \Pi_P(\phi_x)$ by FEM requires C^1 continuity for approximate functions of the angle of twist ϕ_x . The derivative of the angle of twist is taken as an independent function, and the constraint equation $\phi_{x,x} - \theta = 0$ is included using the penalty method. Then the functional (18) becomes

$$\Pi_P(\phi_x, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L (GI_t \phi_{x,x}^2 + EI_\omega \theta_{,x}^2) dx + \frac{1}{2} \alpha \int_0^L (\phi_{x,x} - \theta)^2 dx - \int_0^L m_t \phi_x dx, \quad (19)$$

where α is a penalty parameter. Linear interpolation functions are used for both ϕ_x and θ . The penalty term has to be underintegrated in the FE equilibrium equations, in order to avoid locking phenomenon.

Numerical convergence study has been performed for a cubic element used in functional (18) and for a linear element used in functional (19). The error in bimoment $B = EI_\omega \phi_{x,xx} = -EI_\omega \theta_{,x}$ is of interest. It is measured by the maximum norm

$$\|B - B_h\|_\infty = \max_e |B(x_c^e) - B_h(x_c^e)|, \quad (20)$$

where B is the exact bimoment, B_h the finite element approximation and x_c^e the midpoint of element e . Relative errors

$$e_r(B) = \frac{\|B - B_h\|_\infty}{\|B\|_\infty} \quad (21)$$

are calculated for different values of the dimensionless parameter $k = L \sqrt{GI_t/EI_\omega}$, which characterizes the torsional behaviour of the beam. Clamped beam with concentrated torque in the middle of beam is considered. Results are shown in Fig. 2. The convergence

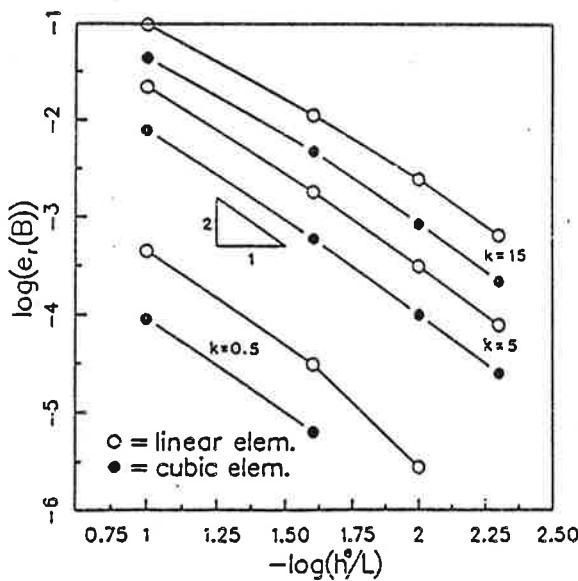


Fig. 2. Convergence of bimoment.

6 NUMERICAL EXAMPLES

6.1 Circular bend

The response of a cantilever 45-degree bend subjected to a concentrated end load was calculated. Results agree well with those reported in Ref. [8]. The bend was also analysed employing the element described in Ref. [9]. Results obtained are shown in Fig. 4. In all static analyses the arc-length algorithm [10] was used in solution of the nonlinear incremental equilibrium equations.

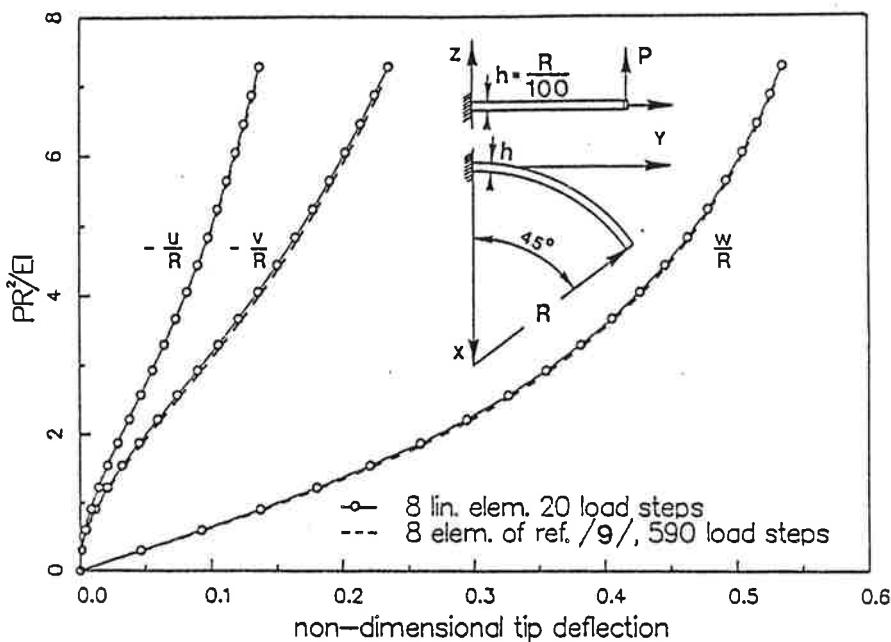


Fig. 4. Large displacement analysis of a circular bend.

6.2 Shallow frame

This example exhibits a snap-through behaviour. Experimental limit load reported in Ref. [11] is 251 N. Using 4 or 8 linear elements in each member, limit point was reached at load level 260 N or 253 N, respectively. Other numerical solutions are given in Refs. [9, 11, 12]. The load deflection curves are shown in Fig. 5.

6.3 Lateral buckling of cantilever

A cantilever beam with narrow rectangular cross-section acted upon by a force applied at the centroid of the cross-section was analysed. Both elastic and elasto-plastic analyses are shown in figures 6a and 6b. It can be concluded from the results that parabolic and cubic subparametric elements do not work well, when the displacements become large.

In figure 7 load deflection curves are presented for lateral buckling analysis of an I beam. The critical load P_{cr} in Fig. 7 corresponds to the value in which the warping effect has not been taken into consideration. As it can be seen from the figure, the effect of warping increases the critical load about 20 %.

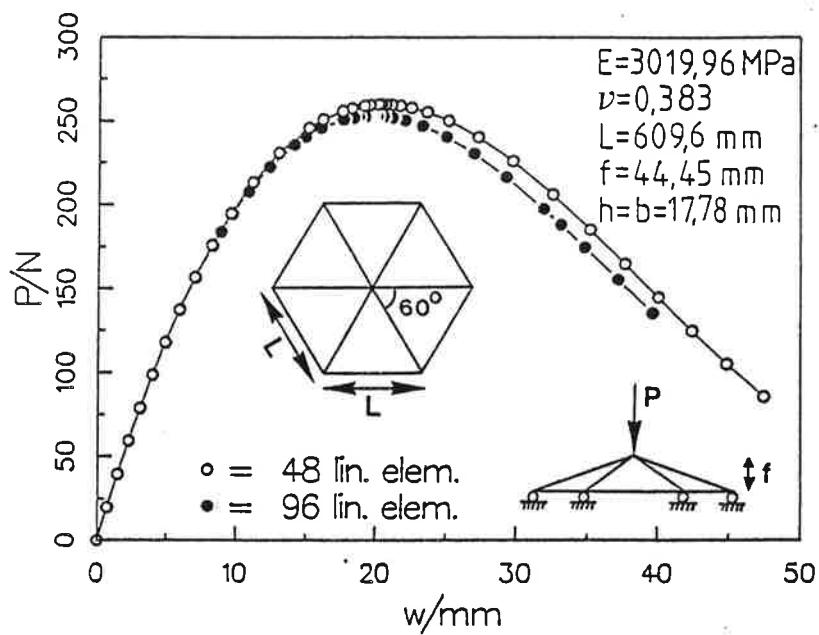
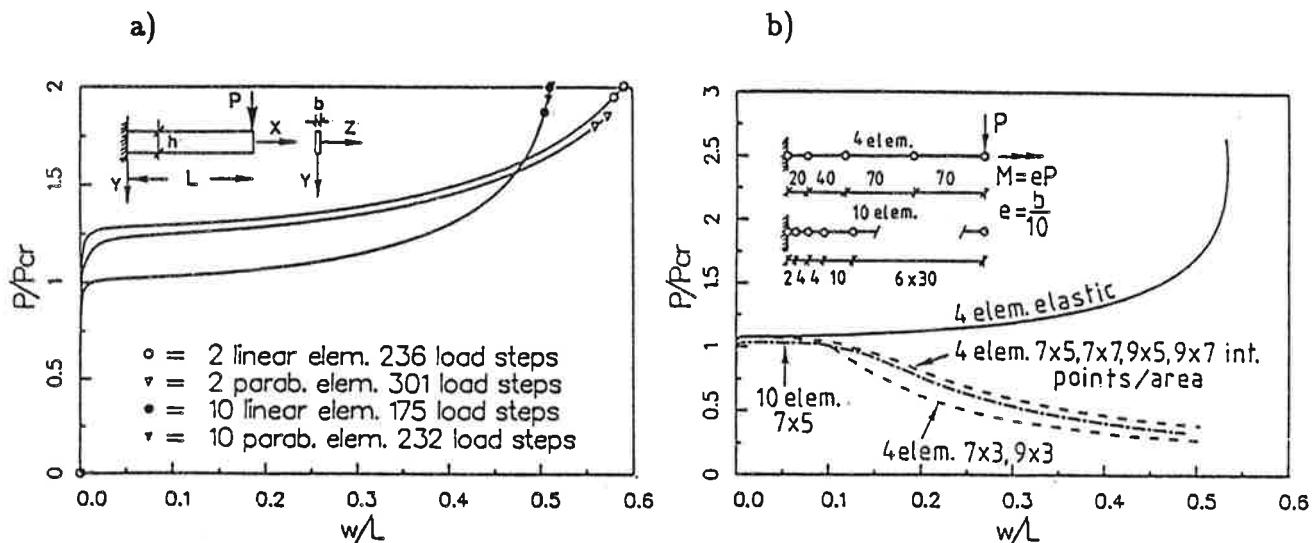


Fig. 5. Load deflection curve of a shallow frame.

Fig. 6. Elastic (a) and elasto-plastic (b) lateral buckling analysis of a cantilever beam, $h = L/20$, $b = h/10$, $\sigma_y = 250$ MPa, $E = 210$ GPa, $E_t = 0$, $L = 200$ mm. One point Gaussian numerical integration rule is used in element axis direction. Over the cross-sectional area Simpson's integration rule is used.

6.4 Dynamically loaded portal frame

A portal frame, clamped at its supports, with a mass fixed in the middle of the horizontal beam, is subjected to an impact load perpendicular to the plane of the frame. Central difference scheme with diagonal mass matrix is used to solve the ordinary differential equations of motion. The deflection of the mass as a function of time is shown in Fig. 8. Ten and twenty equal elements are used to discretize half of the frame.

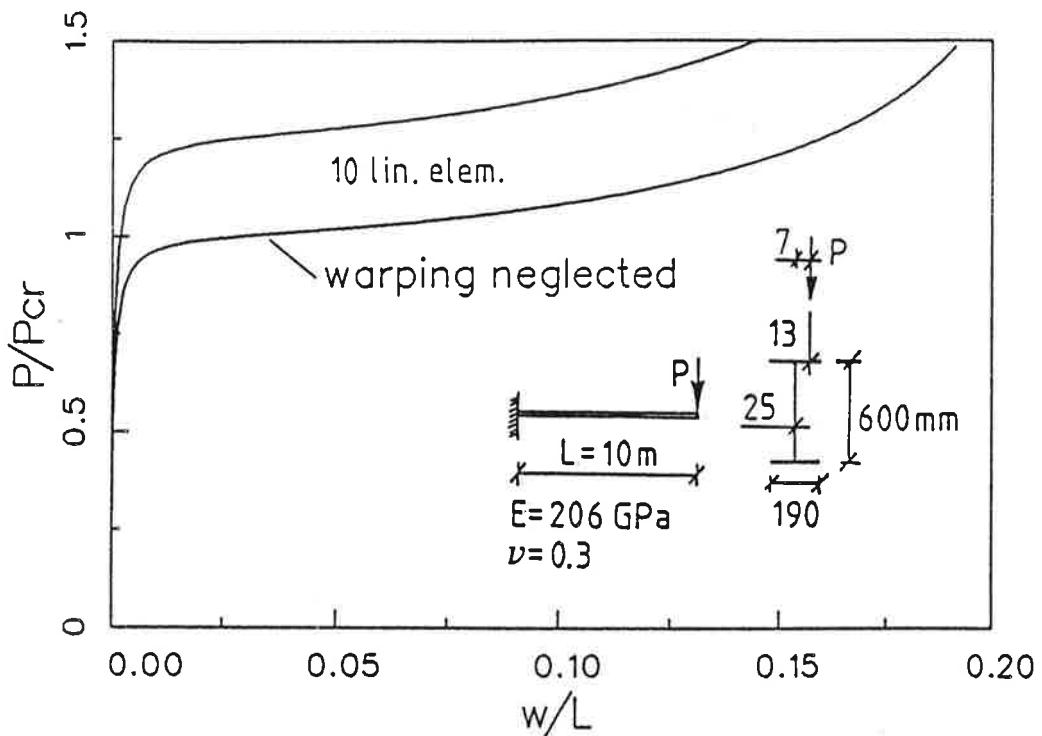


Fig. 7. Lateral buckling analysis of an I-section cantilever beam.

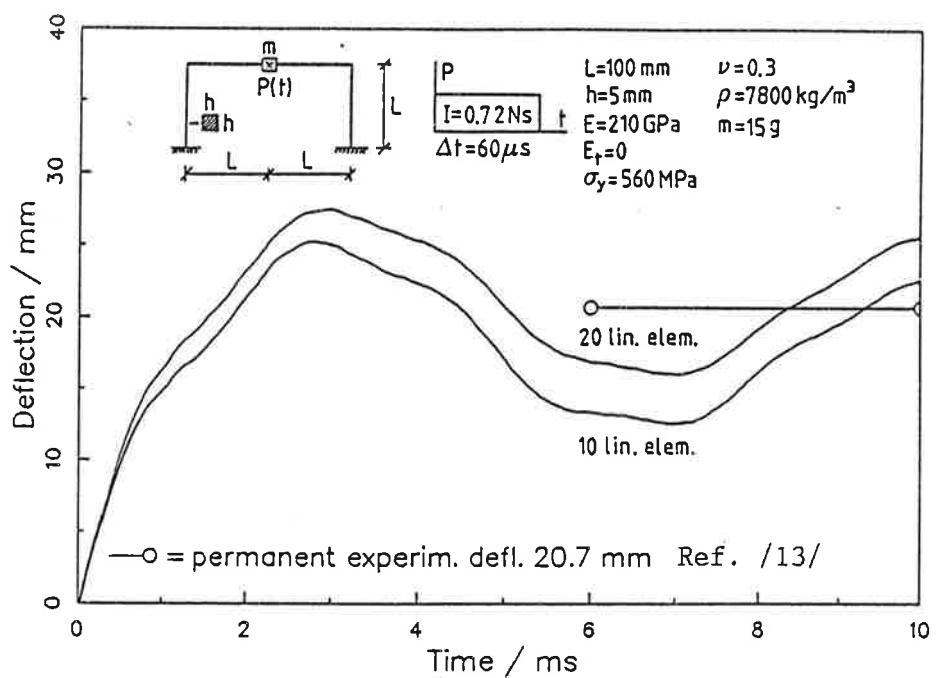


Fig. 8. Deflection of a dynamically loaded frame.

REFERENCES

- [1] PARLAND, H., *Torsion of Structures*. TTKK, Division of structural engineering, Lecture notes n:o 1, Tampere 1972, 153 p., in Finnish.
- [2] BARSOUM, R.S., GALLAGHER, R.H., *Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems*. IJNME **2** (1970), pp. 335-352.
- [3] BAŽANT, Z.P., EL NIMEIRI, M., *Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frames*. J. Engng. Mech. Div. ASCE **99** (1973) EM 6, pp. 1259-1281.
- [4] ATTARD, M.M., *Lateral buckling of beams by the FEM*. Comp. & Struct. **23** (1986), pp. 217-231.
- [5] SEKULOVIĆ, M., *Geometrically nonlinear analysis of thin-walled members*. Proceedings of the Invited Papers for the International Conference 'Seel Structures: Recent Research Advances and Their Applications to Design'. Budva, Yugoslavia, 29.9-1.10.1986, Elsevier Applied Science Publishers Ltd. 1986, pp.219-243.
- [6] HILL, R., *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*. JMPS **7** (1959), pp. 209-225.
- [7] TRAHAIR, N.S., WOOLCOCK, S.T., *Effect of major axis curvature on I-beam stability*. J. Engng. Mech. Div. ASCE **99** (1973) EM1, pp. 85-98.
- [8] BATHE, K-J., BOLOURCHI, S., *Large displacement analysis of three-dimensional beam structures*. IJNME **14** (1979), pp. 961-986.
- [9] VIRTANEN, H., MIKKOLA, M., *Geometrically nonlinear analysis of space frames*. J. Struct. Mech. **18** (1985), pp. 82-97, in Finnish.
- [10] CRISFIELD, M.A., *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through*. Comp. & Struct. **13** (1981), pp. 55-62.
- [11] CHU, K-H., RAMPETSREITER, R.H., *Large deflection buckling of space frames*. J. Struct. Div. ASCE **98** (1972) ST12, pp. 2701-2722.
- [12] CONNOR, J.Jr., LOGHER, R.D., CHAN, S.C., *Nonlinear analysis of elastic framed structures*. J. Struct. Div. ASCE **94** (1968) ST6, pp. 1525-1547.
- [13] MESSMER, S., *Dynamic elastic-plastic behaviour of a frame including coupled bending and torsion*. Transactions of the 9th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology.

PALKKIPROFIILIEN LASKENTAA PAPERIKONEEN SUUNNITTELUUMPARISTÖSSÄ

Jorma Kölö
Valmet Paperikoneet oy

1 TAUSTAA

Paperikoneen kantavat runkorakenteet ovat enimmäkseen palkkimaisia suorakaidekoteloiita, joten rakenne käyttäätyy kokonaisuutena kehä-rakenteen tapaan. Monimutkaisempia poikkileikkausmuotoja esiintyy kokonaiskantavuuden kannalta sekundäärissä osissa, mm. kaapimissa, imulaatikoissa, höyrylaatikoissa ja taipumakompensoitujen telojen kiinteissä sisäakseleissa. Viimeksi mainitutkin ovat silti usein varsin kuormitetut.

Koneen tuottavuus ja hyvä käytettävyys ovat tärkeitä kilpailuteki-jötä kansainvälisillä markkinoilla. Ne edellyttävät sekä nopeutta että hyviä dynaamisia ominaisuuksia. Niinpä tarve entistä tarkem-paan palkkiprofiilien sekä jayhyys- että massahitaussuureiden las-kentaan on myös lisääntynyt.

Valmet Paperikoneet oy:n (aiemmin Valmet oy Paperikonetehdas) käytössä on useita palkkipoikkileikkausten laskentaohjelmia, mutta edellä mainituista syistä otettiin 31.12.1985 suunnittelulosaston teknisen tietojenkäsittelyryhmän kehityskohdeksi uuden ohjelman haku- / kehitysprojekti. Tavoitteena oli tuottaa työkalu, joka omi-naisuksiltaan kattaa kaikkien aiempien piirteet sekä mahdollistaa nopean profiilien geometriamäärittelyn. Nähtiin myös tärkeänä tuottaa jayhyyssuureet suoraan käytössämme olevan yleiselementtimene-telmähjelman lähtötietomuodossa. Kaikkia tarpeitamme täyttävää oh-jelmaa ei löydetty, joten loppukeväästä 1986 aloitettiin oma kehitys.

Tässä esityksessä käsitellään palkkien jayhyys-suureiden laskentaa sekä analyyttisesti että numeerisesti elementtimenetelmää käyttäen niiden suureiden osalta, joille yleisessä tapauksessa ei ole löy-dettavissa analyyttista ratkaisua.

2 TEHTÄVÄN RAJAUS

Tehdään seuraavat otaksumat:

- Palkin neutraaliakseli on suora.
- Poikkileikkaus on yhdesti yhtenäinen (ei erillisia osia) ja vakio akselin suunnassa.
- Poikkileikkaus ei muuta muotoaan omassa tasossaan.
- Materiaali on homogenista, isotrooppista ja lineaarista.
- Tilavuusvoimat voidaan jättää huomiotta.
- Lisätaksumia tehdään leikkaus- ja väntötehtävän yhteydessä ja ne esitetään kyseisessä jaksossa.

3 ANALYYTTISESTI RATKAISTAVISSA OLEVAT JÄYHYYSSUUREET

Kaikki poikkileikkaukset muodostetaan yhdistelemällä kahta perusmuotoa, jotka ovat kolmio ja ympyrän sektori. Nämä ovat poikkileikkausalta, pintakeskiö, neliömomentit ja massahitaussuureet voidaan integroida analyttisesti.

Nämä myös tehdään ohjelmiston esikäsittelyosassa. FEM modulissa (joka on ensisijaisesti tarkoitettu väntö- ja leikkaussuureiden laskentaa varten) vastaavat suureet lasketaan Gaussian numeerisella integroinnilla interpoloimalla kutakin suuretta elementtien muoto-funktioilla.

Kaarevia reunuja parabolisilla elementeillä kuvattaessa tehdään likimääristys, jonka merkitystä voidaan arvioida vertaamalla analyttiseen ratkaisuun. Mikäli tulokset eivät yhdy 3 - 4 merkitseväällä numerolla, elementtijakoa on syytä tihentää. Tämä siksi, että väntö ja leikkaussuureet ovat yleensä elementtijaon suhteen herkempiä kuin analyttisesti ratkaistavissa olevat suureet.

4 LEIKKAUSTEHTÄVÄN RATKAISU

Tehtävänä on löytää poikkileikkaussessa vaikuttavan leikkausvoiman ja leikkausjännitysten välinen yhteys yleiselle profiilille. Tästä varten tehdään lisätaksumata palkin kokonaistoiminnalle: palkki on vakioleikkausvoiman kuormittama, esim. vapaasta päästä

leikkauusvoimakuormitettu ulokepalkki. Yleinen ratkaisu voidaan johtaa kolmidimensioisen kimmoteorian perusteella tekemällä yksinkertaistavia otaksumia sopiville jännitys- ja siirtymäkomponenteille. Vapaita muuttujia jätetään riittävästi, jotta tasapaino- ja yhteensopivuusehdot voidaan toteuttaa (lähde [2]).

Näin ollen leikkaustehtävässä tehdään seuraavat lisäotaksumat:

- Poikkileikkauksen suuntaiset normaalijännitykset σ_x ja σ_y sekä leikkausjännitys τ_{xy} voidaan jättää huomiotta.
- Akselin suuntainen normaalijännitys σ_z jakaantuu kuten puhtaassa taivutuksessa.
- Vaikka kuormituksena käsitellään vakioleikkauusvoimaa, oletetaan, että leikkauusvoiman ja -jännitysten välinen riippuvuus on likimäärin voimassa myös muille kuormitustapauksille.

Seuraavassa elementtimenetelmäratkaisussa ensisijainen tuntematon on poikkipinnan käyristyvä (poikkipintapainuma) ja menetelmä on analoginen siirtymämenetelmän kanssa. Tällöin voidaan käyttää samoja elementtityyppuja ja muotofunktioita.

Käytetään lähteen [2] merkintöjä sekä korvataan lineaariselle kolmioelementille johdetut kaavat yleisellä muotofunktiomerkinnällä:

I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}	= poikkileikkauksen neliömomentit
V_x, V_y	= leikkauusvoima X- ja Y- suuntaan
E, G, n_y	= kimmokerroin, liukukerroin ja Poisson suhde
$\phi(X, Y)$	= poikkipinnan käyristyvä
L, A	= palkin pituus ja poikkipinta-ala
N, N_x, N_y	= elementin muotofunktiot ja niiden osittaisderivaatat
ϕ_e, ϕ_i	= elementin e käyristymisfunktio ja sen arvo solmussa i
ϕ_x, ϕ_y	= käyristymisfunktion derivaatat

$$\begin{aligned}
 C_x &= (V_x I_{xx} - V_y I_{xy}) / [E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy} I_{xy})] \\
 C_y &= (V_y I_{yy} - V_x I_{xy}) / [E(I_{xx} I_{yy} - I_{xy} I_{xy})] \\
 a_4 &= -n_y L [C_x I_{xy} + C_y (I_{xx} - I_{yy}) / 2] / A \\
 a_5 &= -n_y L [C_y I_{xy} + C_x (I_{yy} - I_{xx}) / 2] / A
 \end{aligned} \tag{1}$$

π, π^e = mallin ja elementin e potentiaalienergia

$d\pi_i, d\pi_i^e$ = mallin ja elementin potentiaalienergian osittais-derivaatta vapausasteen i suhteen

$$\phi_e = N \frac{\phi}{\sim_x \sim_i} \quad (2)$$

$$\pi^e = - \frac{G}{6} \frac{3}{A} \int (C_x X + C_y Y)^2 dA +$$

$$- \frac{G}{2} \frac{1}{A} \int \left\{ N_{\sim_x} \phi_{\sim_i} - ny \left[- \frac{1}{2} C_x (X^2 - Y^2) + C_y X Y \right] \right\} dA +$$

$$- \frac{G}{2} \frac{1}{A} \int \left\{ N_{\sim_y} \phi_{\sim_i} - ny \left[- \frac{1}{2} C_y (Y^2 - X^2) + C_x X Y \right] \right\} dA -$$

$$V_x \left(- \frac{1}{3} C_x L + a_x \right) - V_y \left(- \frac{1}{3} C_y L + a_y \right) -$$

$$E L [C_x \int_{A}^{T} N_{\sim_x} \phi_{\sim_i} X dA + C_y \int_{A}^{T} N_{\sim_y} \phi_{\sim_i} Y dA] \quad (3)$$

$$d\pi_i^e = G L \int_{A}^{T} N_{\sim_x} \left\{ N_{\sim_x} \phi_{\sim_i} - ny \left[- \frac{1}{2} C_x (X^2 - Y^2) + C_y X Y \right] \right\} dA +$$

$$G L \int_{A}^{T} N_{\sim_y} \left\{ N_{\sim_y} \phi_{\sim_i} - ny \left[- \frac{1}{2} C_y (Y^2 - X^2) + C_x X Y \right] \right\} dA -$$

$$E L [C_x \int_{A}^{T} N_{\sim_x} X dA + C_y \int_{A}^{T} N_{\sim_y} Y dA] = 0 \quad (4)$$

Koska oletetaan: $E = 2(1 + ny) G$

$$\sum_{1}^{ne} \left\{ \int_{A}^{T} (N_{\sim_x} N_{\sim_x} + N_{\sim_y} N_{\sim_y}) dA \phi_{\sim_i} \right\} =$$

$$\sum_{1}^{ne} ny \int_{A}^{T} N_{\sim_x} \left[- \frac{1}{2} C_x (X^2 - Y^2) + C_y X Y \right] dA +$$

$$ny \int_{A}^{T} N_{\sim_y} \left[- \frac{1}{2} C_y (Y^2 - X^2) + C_x X Y \right] dA +$$

$$2(1 + ny) \int_{A}^{T} N_{\sim_x} (C_x X + C_y Y) dA \quad (5)$$

Yhtälö (5) johtaa lineaariseen yhtälöryhmään, jonka ratkaisuna saatetaan käyristymisfunktion arvot elementtiverkon solmupisteissä. Tämän jälkeen leikkausjännitykset voidaan ratkaista seuraavista yhtälöistä:

$$\tau_{zx} = G \{ \phi - ny [\frac{1}{2} C_1 (X^2 - Y^2) + C_2 XY] \} \quad (6)$$

$$\tau_{yz} = G \{ \phi - ny [\frac{1}{2} C_1 (Y^2 - X^2) + C_2 XY] \} \quad (7)$$

Edellisessä on otaksuttu, ettei poikkileikkaukseen synny väantöä. Nämäkin ulkoisten leikkausvoimien tulee vaikuttaa siten, että niiden resultantit leikkaavat tietyn pisteessä ns. leikkauskeskiössä. Sisäisten leikkausjännitysten resultantit leikkaavat myös tassä samassa pisteessä. Laskemalla erikseen X- ja Y-suuntaisten leikkausvoimien kuormitustapaukset, pintakeskiön momenttitasapainoehdon avulla voidaan määritellä leikkauskeskiön sijainti.

Samalla tämä mahdollistaa X- ja Y-suuntaisten leikkauskertoimien laskemisen. Leikkauskertoimilla voidaan ottaa huomioon leikkausmuodonmuutosten aiheuttama lisätäipuma. Kertoimet saadaan integroimalla käyristymisfunktio numeerisesti poikkipinnan yli. Leikkauskeskiön ja -kertoimien kaavat on esitetty lahteessa [2].

5 VAPAAN VÄÄNNÖN RATKAISU

Käsitellään päästään väennettyä palkkia, jolloin väantömomentti on vakio koko palkin pituudella. Vapaassa väänössä oletetaan, että palkin poikkileikkauksen käyristyminen pääsee esteettä tapahtumaan.

Merkinnät:

u, v, w = siirtymät X-, Y-, ja Z-suuntaan (Z on palkin akseli)
 θ, m = väantymä ja väantömomentti palkin pituusyksikköä kohti
 π, ϕ, N ja niiden osittaisderivaatat kuten leikkaustehtävässä

Saint Venant'in mukaan:

$$u = -\Theta Z Y \quad (8)$$

$$v = \Theta Z X \quad (9)$$

$$w = \Theta \phi(X, Y) \quad (10)$$

$$\tau_{zx} = G \Theta (\phi - Y) \quad (11)$$

$$\tau_{yz} = G \Theta (\phi + X) \quad (12)$$

$$m = G \Theta \int_A (X \phi - Y \phi + X^2 + Y^2) dA \quad (13)$$

Elementtimenetelmän mukainen ratkaisu lähteestä [1] pohjalta kolmioelementistä yleistään:

$$\phi = \sum_i N_i \phi_i \quad (14)$$

$$\pi = -\frac{G}{2} \sum_i \int_A [(\phi_i - Y)^2 + (\phi_i + X)^2] dA \quad (15)$$

$$d\pi = G \Theta L \sum_i \int_A [N_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} (N_i \phi_i - Y) + N_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} (N_i \phi_i + X)] dA = 0 \quad (16)$$

$$\sum_i \int_A (N_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} N_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + N_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} N_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}) dA \phi_i = \sum_i \int_A (N_i Y - N_i X) dA \quad (17)$$

Jälleen päädytään lineaariseen yhtälöryhmään käyristymisfunktion ratkaisemiseksi. Yhtälöiden (5) ja (17) vasemmät puolet ovat samat. Näin ollen molemmat leikkaustehdavien kuormitustapaukset ja väントtehtävä voidaan ratkaista samaa jäykkyysmatriisia käyttäen. Yhtälöryhma ratkaistaan siis kolmelle kuormitustapaukselle, kaksi ensimmäistä yhtälön (5) mukaan ($V_x \neq 0$, $V_y = 0$ ja $V_x = 0$, $V_y \neq 0$) ja kolmas yhtälön (17) mukaan. Yksikkökiertymää vastaava väントmomentti integroidaan yhtälöstä (13) ja leikkausjännitykset lasetaan yhtälöistä (11) ja (12).

Vapaan vännön ratkaisu on käyttökelpoinen seuraavissa tapauksissa:

- Kaikille profiileille, mikäli väントmomentti on vakio, eikä poikkipinnan käyristymää ole estetty.

- Niille poikkileikkauksille, joihin väntökuormitus ei aiheuta käyristymää kuten pyörähdysymmetriset ja ne hyvin kapeista suorakaiteista koostuvat profiilit, joissa suorakaiteet leikkavat toisensa samassa pisteessä.
- Vapaamuotoisille profiileille, mikäli palkin pituus on riittävä.

6 ESTETTY VÄANTÖ

Jos väntömomentti ei ole vakio tai tuenta rajoittaa palkin poikkipinnan käyristy mistä, kysymyksessä on estetty (rajoitettu) väntö. Vapaa ja estetty väntö eivät yleensä esiinny puhtaina. Poikkileikkaus, palkin pituus, tuenta ja kuormitus määrittelevät, kumpi dominoi.

Estetyn vännön ratkaisu perustuu lähteessä [3] esitettyyn massiiviprofiilien väntöteoriaan. Lähteessä käytetään poikkipinnan käyristymälle hyperbolista approksimaatiota, mutta mainitaan myös vapaan vännön käyristymisfunktion käyttömahdollisuus. Tässä noudatetaan samaa menettelytapaa, mutta johdetaan estetyn vännön differentiaaliyhälö vapaan vännön käyristymisfunktiota käyttäen.

Käytetään seuraavia lyhennysmerkintöjä:

$$\begin{aligned}
 \beta &= G / E \\
 F &= \int dA ; \quad S_x &= \int Y dA \\
 S_y &= \int X dA ; \quad J_x &= \int Y^2 dA \\
 J_y &= \int X^2 dA ; \quad J_{xy} &= \int XY dA \\
 S_\phi &= \int \phi dA ; \quad J_\phi &= \int \phi^2 dA \\
 J(X, \phi) &= \int X \phi dA ; \quad J(Y, \phi) = \int Y \phi dA \\
 J(\phi_x) &= \int \phi_x dA ; \quad J(\phi_y) = \int \phi_y dA \\
 J(X, \phi_y) &= \int X \phi_y dA ; \quad J(Y, \phi_x) = \int Y \phi_x dA \\
 J(\phi_x^2) &= \int \phi_x^2 dA ; \quad J(\phi_y^2) = \int \phi_y^2 dA
 \end{aligned} \tag{18}$$

Poikkileikkausen pisteen siirtymätilaksi oletetaan seuraavat lausekkeet, näissä w_1 , w_2 , w_3 ja w_4 ovat Z :n tuntemattomia funktioita.

$$u(X, Y, Z) = u(Z) + \Theta(Z) Y \quad (19)$$

$$v(X, Y, Z) = v(Z) + \Theta(Z) X \quad (20)$$

$$w(X, Y, Z) = w_1(Z) + w_2(Z) X + w_3(Z) Y + w_4(Z) \phi(X, Y) \quad (21)$$

Jos koordinaatisto valitaan siten, että koordinaattiakselit yhtyvät palkin pääjäyhyysakseleihin ja palkissa esiintyy ainoastaan väントkuormitus, saadaan läheen [3] mukaisesti differentiaaliyhtälöryhmä:

$$F w_{1zz} + S_\phi w_{4zz} = 0 \quad (22)$$

$$J_y w_{2zz} - \beta F w_2 + J(X, \phi) w_{4zz} - \beta J(\phi_x) w_4 - \beta F u_z = 0 \quad (23)$$

$$J_x w_{3zz} - \beta F w_3 + J(Y, \phi) w_{4zz} - \beta J(\phi_y) w_4 - \beta F v_z = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} S_\phi w_{1zz} + J(X, \phi) w_{2zz} - \beta J(\phi_x) w_2 + J(Y, \phi) w_{3zz} - \beta J(\phi_y) w_3 + \\ J_\phi w_{4zz} - \beta [J(\phi_x)^2 + J(\phi_y)^2] w_4 - \beta J(\phi_x) u_z - \beta J(\phi_y) v_z + \\ \beta [J(Y, \phi_x) - J(X, \phi_y)] \Theta_z = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$F w_{2z} + J(\phi_x) w_{4z} + F u_{zz} = 0 \quad (26)$$

$$F w_{3z} + J(\phi_y) w_{4z} + F v_{zz} = 0 \quad (27)$$

$$[J(X, \phi_y) - J(Y, \phi_x)] w_{4z} + (J_x + J_y) \Theta_{zz} = - \frac{m}{G} \quad (28)$$

Tuntemattomat funktiot w_1 , w_2 , w_3 ja w_4 voidaan eliminoida, jolloin päädytään kolmeen differentiaaliyhtälöön. Määritelään seuraavat lyhennysmerkinnät:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= J(X, \phi) - J_y J(\phi_x) / F \\ A_y &= J(Y, \phi) - J_x J(\phi_y) / F \\ Q &= J(X, \phi_y) - J(Y, \phi_x) \\ R &= J(\phi_x)^2 + J(\phi_y)^2 - \{ [J(\phi_x)]^2 + [J(\phi_y)]^2 \} / F \\ S &= J(X, \phi) J(\phi_x) + J(Y, \phi) J(\phi_y) - F J_\phi + S_\phi^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$E J_y u^{(4)} + [E (J_x + J_y) A_x / Q] \theta^{(4)} = 0 \quad (30)$$

$$E J_x v^{(4)} + [E (J_x + J_y) A_y / Q] \theta^{(4)} = 0 \quad (31)$$

$$E J(X, \phi) u^{(4)} + E J(Y, \phi) v^{(4)} - [E (J_x + J_y) S / (F Q)] \theta^{(4)} =$$

$$G [(J_x + J_y) R / Q - Q] \theta_{zz} = (R / Q) m \quad (32)$$

Eliminoimalla vielä u ja v päädytaan estetyn väennön differentiaaliyhtälöön (33). Yhtälö on analoginen avoimien ohutseinäisten profiilien yhtälön kanssa, joten θ :n toisen ja neljännen osittaisderivaatan kertoimille käytetään tassaa myös nimityksiä väantöneliomomentti ja sektoriaalinen neliömomentti. Nyt voidaan kuitenkin käsitellä yleisiä poikkileikkausmuotoja.

$$\frac{E}{R} (J_x + J_y) \{ \frac{[J(X, \phi)]^2}{J_y} + \frac{[J(Y, \phi)]^2}{J_x} - J_\phi + \frac{(S_\phi)^2}{F} \} \theta^{(4)} + \\ (G (J_x + J_y) - \frac{Q^2}{R}) \theta_{zz} = -m \quad (33)$$

Sektoriaalisen neliömomentin laskenta on nopeaa, koska yhtälöryhmää ei ratkaisuta uudelleen, tarvitaan ainoastaan jo ratkaistun vapaan väennön käyristymisfunktion numeerinen integrointi poikki-pinnan yli. Tämän jälkeen yhtälön (33) käsitteilyä voidaan jatkaa reunaehtojen osalta samoin kuin ohutseinäissäkin profiileissa. Laadittu tietokoneohjelma hyväksyy palkin päiden kimmisan tuenan. Reunaehdo on normalisoitu bi-momentin suhteeseen välille nolla - yksi. Nolla vastaa tuentaa, jossa käyristyminen pääsee tapahtumaan vapasti, arvolla yksi päässä vaikuttaa bi-momentti, joka estää täysin käyristymisen.

Estetyn väennön kaava (33) on vielä tarkistuksen alaisena, koska kirjallisuudesta ei ole löytynyt sille tukea. Verrattaessa ohutseinäisten profiilien ratkaisuihin tulokset ovat hyvin yhteensoivia paitsi koteloiden sektoriaalisen neliömomentin osalta, jolle saadaan n. 2 ... 3.5 kertaisia arvoja. Tosin suljetuissa profiileissa palkin jäähyttä yleensä dominoi vapaa väntö eika estetyn väennön suureita välttämättä tarvita.

7 TESTITAPAUKSIA

Tasasivuisen kolmion käyristymisfunktio voidaan ilmaista analyttisesti ja kaavan (33) kertoimet (väänöneliömomentti I_t ja sektoriaalinen neliömomentti I_w) integroida suljetussa muodossa.

$$I_t = \frac{\sqrt{3} a^4}{80} ; \quad I_w = \frac{\sqrt{3} a^6}{16128} \quad (34)$$

FEM ohjeilma tuottaa kohtuullisella verkkotihedellä kaavan (34) molemmat suureet kolmella merkitseväällä numerolla.

Umpinaisen suorakaiteen ($b = 2$, $h = 1$) väänöneliömomentti ja leikkauskertoimet saadaan alle 1 % tarkkuudella jo neljällä parabolisella elementillä, yhdeksällä elementillä tarkkuus on n. 0.2 %.

Ohutseinäinen profiilityyppi	I_w	Leikkauskeskiö X	Leikkauskeskiö Y
U (250x50x3)	2.0735 E9 (2.0686 E9)	-11.591 (-11.617)	125.00 (125.00)
Z (200x100x3)	1.1594 E10 (1.1590 E10)	1.500 (1.500)	100.00 (100.00)
I (200x100x 5.6x8.5)	1.3007 E10 (1.2988 E10)	2.1515 E-5 (0.0)	100.00 (100.00)
Halkaistu putki ($\phi=2.0$ $t=0.1$)	0.77888 (0.77657)	-1.9947 (-1.9997)	1.0172 E-6 (0.0)
Suorakaidekoteloa (100x150x3)	9.0840 E8 (2.6040 E8)		

Suluissa esitettyt arvot perustuvat lähteiden [3 ja 4] kaavoihin. Koteloa lukuunottamatta kaikkien suureiden yhteensopivuus on hyvä.

LÄHTEET:

- [1] L.R. Herrmann, Elastic torsional analysis of irregular shapes. Journal of the engineering mechanics division (1965).
- [2] W.E. Mason, L.R. Herrmann, Elastic shear analysis of general prismatic beams. Journal of the engineering mechanics division (1968)
- [3] V.Z. Vlasov, Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations Ltd, Jerusalem 1963.
- [4] C.F. Kollbrunner, N. Hajdin, Dunnwandige Stäbe, Band 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1975.

OMINAISARVOALGORITMIEN VERTAILU KÄYTETÄESSÄ ELEMENTTIMENENTELMÄÄ

Jari Laukkanen

Tampereen teknillinen korkeakoulu

Konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Lisääntynyt käytännön kiinnostus väärähtelymekaanisiin ongelmien ja elementtimenetelmän käytön yleistymisen väärähtelyongelmien ratkaisussa ovat johtaneet suuriin elementtimalleihin ja pitkiin tietokoneajoihin. Rinnakkaisprosessorikoneiden kehityksen myötä on kiinnostus perusratkaisumenetelmien sovittamisesta moniprosessorikoneille lisääntynyt ulkomailta huomattavasti. Samalla vanhoista menetelmistä on löydetty uusia piirteitä ja lisää tehoa.

Valitsemalla kuhunkin ongelmaan sopiva ratkaisumenetelmä ja ratkaisualgoritmi voidaan laskenta-aikaa ja kustannuksia säästää huomattavasti.

Seuraavassa käsitellään tavallisimpien ominaisarvoalgoritmien ominaisuuksia ja tehokkuutta käytettäessä elementtimenetelmää. Vertailun perustana käytetään kirjallisuudesta löytyviä testiesimerkkejä sekä algoritmien laskutoimitusten lukumäärää.

2 KÄSITELTÄVÄT RATKAISUMENETELMÄT

Ominaisarvotehtävät pyritään saattamaan standardimuotoon

$$\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad (1a)$$

tai

$$\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{B} \underline{x}, \quad (1b)$$

mistä ominaisarvot ω^2 ja ominaisvektorit Φ voidaan ratkaista lukuisilla erilaisilla ratkaisumenetelmissä sekä hyviksi ja tehokkaaksi käytännössä todettuilla algoritmeilla. Näistä algoritmeista tunnetuimmat ovat Householder-QR [1-3], yleistetty Jacobin menetelmä [1-3], determinantimenetelmä [1-3,10],

kaanteinen matriisi-iteraatio [1-3,10], aliavaruusiteraatio [1-4], Givensin menetelmä [1-3,10] ja Lanczosin menetelmä [2,5-10].

3 RATKAISUMENETELMÄN VALINNASTA

Kirjallisuudessa esiintyvät erilaiset yhtälön (1) ratkaisualgoritmit ovat enemmän tai vähemmän kohdassa 2 mainittujen kaltaisia. Suurimmat erot eri ratkaisualgoritmilla ovat niiden konvergenssiteissä ja yritevektoreiden korjaustavoissa, mistä johtuu niiden erilainen kyky käsitellä moninkertaisia, lähekkäisiä ja ryhmissä esiintyviä ominaisarvoja.

Edellä mainituista ratkaisualgoritmista yleistetty Jacobin iteraatio on tehokas, kun halutaan laskea kaikki ominaisarvot, eikä matriisien nauhaleveys ole suuri ja diagonaalinen ulkopuoliset termit ovat suhteellisen pieniä. Tämän takia Jacobin iteraatiota käytetään mielellään aliavaruusiteraatiossa redusoidun ominaisarvotehtävän ratkaisuun [1-3]

Householder-QR-kääntiesiteraatio on tehokas menetelmä, kun lasketaan kaikki ominaisarvot ja -vektorit sekä matriisien nauhaleveys on suuri tai matriisit ovat täysiä. Tällainen tilanne syntyy, kun käytetään staattista kondensaatiota tai ominasiarvotehtävä muutetaan standardimuotoon. Staattisen kondensaation ja pienennetyn ominasiarvotehtävän ratkaisun edullisuus riippuu jäykkyysmatriisin alkuperäisestä nauhaleveydestä, staattisen kondensaation aiheuttamasta nauhaleveyden kasvusta, alakuperäisten ja lopullisten vapausasteiden lukumäärästä sekä laskettavien ominaisarvojen ja ominaisvektoreiden lukumäärästä. Muunnos standardimuotoon (la) ei käytännössä ole suositeltavaa, kun massamatriisi on nauhamainen ja matriisien koko on suuri [1-3].

Determinanttimenetelmä on tehokas laskettaessa alimpia ominasipareja (ω^2, Φ) , kun matriisien nauhaleveys on pieni. Tällä menetelmällä voidaan laskea suhteellisen suuria tehtäviä riippuen tiedon käsiteltäytävasta. Nauhaleveydestä riippuen determinanttimenetelmä voi olla tehokkaampi kuin Householder-QR-kääntiesiteraatio [1-3].

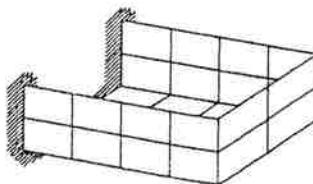
Givensin menetelmä on tehokkuudeltaan yleistetyn Jacobin menetelmän ja Householder-QR-algoritmin veroinen. Se on suoriteltava ratkaisumenetelmä kun etsitään kaikki ominaisavot ja matriisien nauhaleveys on suuri [2,10].

Aliavaruusiteraatio on tehokas ratkaisumenetelmä, kun etsitään alimpia ominaispareja ja matriisien nauhaleveys on suuri. Koska yhtälöitä (1) vastaava redusoitu ominaisarvotehtävä ratkaistaan kokonan keskusyksikössä, asettaa käytettävissä oleva keskusyksikkötila ylärajan etsittäville ominasiarvopareille. Wilsonin ja Itohin [4] versio nostaa tästä ylärajaan huomattavasti [1-3].

Lanzosin menetelmä on tehokas etsittäessä lukuisia ominaispareja, kun matriisien nauhaleveys ja vapausasteiden määrä on suuri. Etsittäessä alimpia ominaispareja nauhaleveydellä ei ole suurtakaan vaikutusta menetelmän tehokkuuteen. Tämä menetelmä soveltuu hyvin tavanomaisimpien ominaisarvotehtävien ratkaisuun [5-9].

Käänteinen matriisi-iteraatio on menetelmä, joka soveltuu suurille vapausaste-määritteille, kun etsitään vain muutamia alimpia ominaispareja. Siirrostekniikan yhdistäminen tähän menetelmaan mahdollistaa suurtenkin ominaisparimäärien etsimisen [2,10].

Taulukossa 1 on esitetty eri ratkaisumenetelmien tarvitsemien keskusyksikkö-aikeja erilaisille käytännön systeemeille lähteen [3] mukaan. Jacobin, Householder-QR-käänteisiteraatio ja determinantimenetelmissä ominaisarvot on laskettu 12 merkitsevän numeron tarkkuudella. Aliavaruusiteraatiossa suurin ominasiarvo on laskettu 5 merkitsevän numeron tarkkuudella. Taulukossa on huomattava, että keskusyksikköaikea antaa vain suuntaa ratkaisumenetelmästä. CDC 6400-, CDC 6600- sekä CDC 7600-tietokoneiden keskusyksikköjen nopeuden suhde on n. 1:3:8 .



28 elementtiä
n=163
b=32

Taulukossa 2 on esitetty kuvan 1 mu-kaisen rakenteen 24 alimman ominais-taajuuden ja ominaismuodon laskentaan tarvitut laskutoimitukset ja työtilan tarve lähteen [11] mukaan kolmelle eri-lasiselle ratkaisualgoritmille. Kuvissa 2-5 on esitetty eri ominaisarvoalgo-ritmien laskentaoperaatioiden määrä verrattuna käänteisen matriisi-iteraa-tion laskentaoperaatioihin.

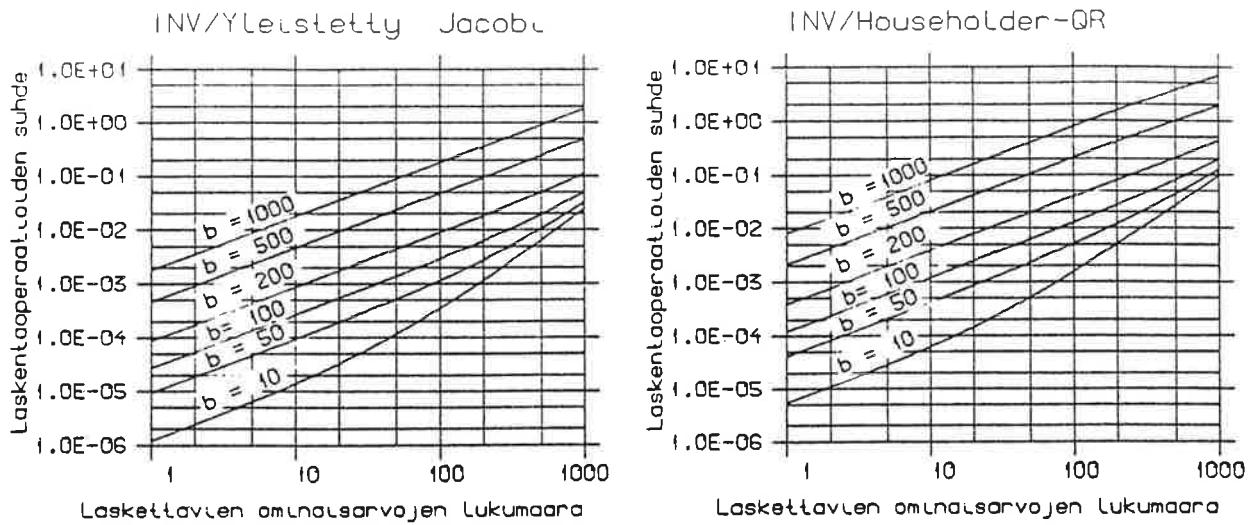
Kuva 1. Taulukon 1 laskennassa käytetty laatikko [11].

Taulukko 1. Esimerkkiratkaisuja eri ratkaisumenetelmillä [3].

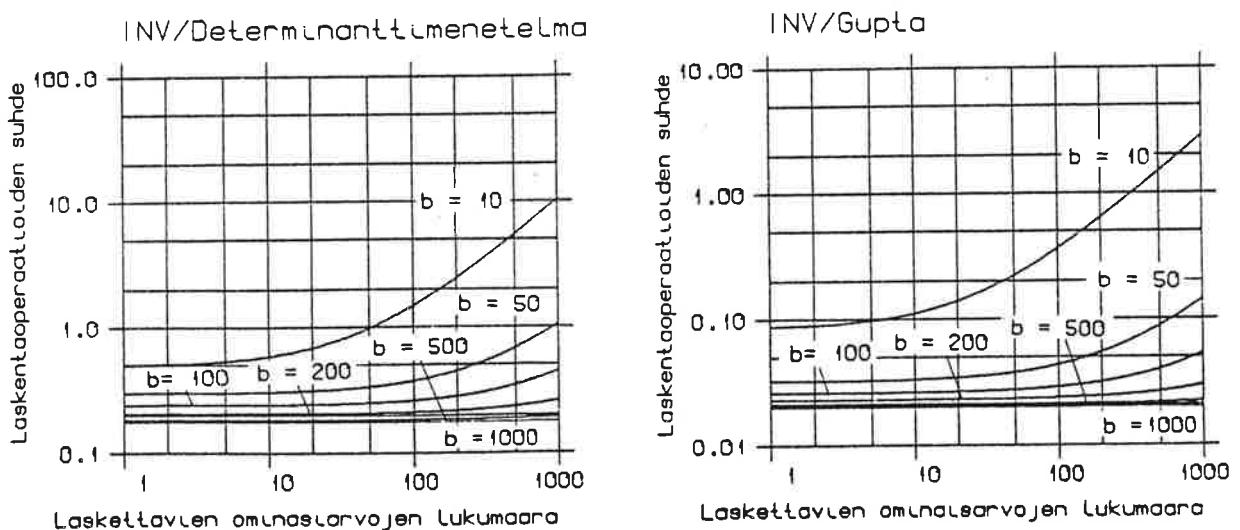
Systeemi	Systeemin koko n	Maksimi nauhaleveyden puolikas m	Masseomatrisi	Vektorien lukumäärä	Ratkaisumenetelmä	Tielokone	Keskusyksikkööiko (s)
Lävy-palkki	50	Täysi	Täysi	50	Jacobi	CDC 7600	2
Yleinen systeemi	100	Täysi	Nauhamainen, positiivisesti definitti	100	Householder-OR-käänteisiteraatio	CDC 6400	46
Tasokehä	297	29	Diagonaalinen, semi-definitti	3	Determinanttimenetelmä	CDC 6400	40
Tasokehä	297	29	Diagonaalinen, semi-definitti	3	Allavaruuusiteraatio	CDC 6400	25
Kolmijulotteinen rokennuksen kehä	468	155	Diagonaalinen, semi-definitti	4	Allavaruuusiteraatio	CDC 6400	160
Kolmijulotteinen laatikko	403	113	Diagonaalinen, semi-definitti	8	Allavaruuusiteraatio	CDC 7600	12
Pato	724	114	Nauhamainen	20	Allavaruuusiteraatio	CDC 6600	518
Pato	226	68	Nauhamainen	7	Determinanttimenetelmä	CDC 6600	71
Putkisto	566	11	Diagonaalinen, semi-definitti	28	Allavaruuusiteraatio	CDC 6600	142
Putkisto	566	11	Diagonaalinen, semi-definitti	7	Determinanttimenetelmä	CDC 6600	11
Rokennus perus-tukaineen	1174	137	Diagonaalinen, semi-definitti	45	Allavaruuusiteraatio	CDC 6600	890
Rokennus	340	31	Diagonaalinen, semi-definitti	7	Determinanttimenetelmä	CDC 6600	20
Siltä	342	35	Diagonaalinen, semi-definitti	10	Allavaruuusiteraatio	CDC 6600	31

Taulukko 2. Laskutoimitusten lukumäärä ja työtilan tarve kuvan 1 rakentelle [11].

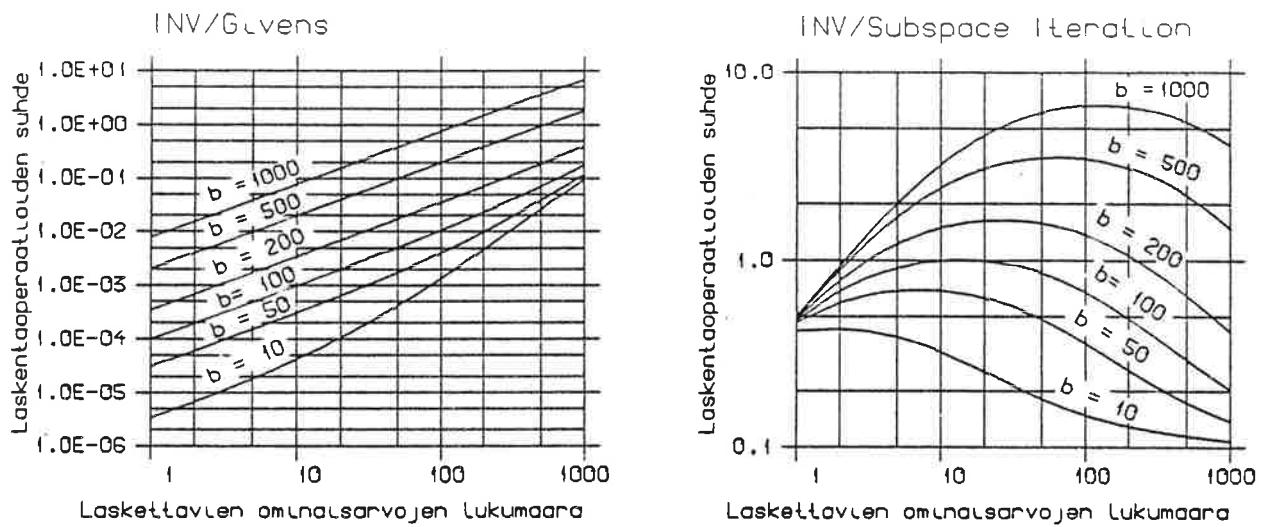
M=10 ⁶	Gupta SS/II		SII					Iteratiomenetelmä		
	epäsymmetrinen	symmetrinen	3	4	5	6	7	27	28	29
Työvektoreiden määrä	1	1	3	4	5	6	7	27	28	29
Ä siirostien määrä	-	-	8	5	4	3	2	-	-	-
Hojoitusten kokonais-määrä	50	50	10	7	6	5	4	1	1	1
Vektori-iteraatioita	153	153	186	204	215	222	245	283	259	281
Hojoituksessa tarvittuja kertolaskuja	12.51M	4.17M	0.83M	0.58M	0.50M	0.42M	0.33M	0.08M	0.08M	0.08M
Vektori-iteraatioissa tarvittuja kertolaskuja	3.99M	3.17M	4.11M	4.59M	4.92M	5.17M	5.81M	9.02M	8.36M	9.18M
Kertolaskuja yhteensä	16.50M	7.34M	4.94M	5.17M	5.42M	5.59M	6.14M	9.10M	8.44M	9.26M
Tarvittava työtila (sanaa)	3820	2180	1700	1850	2050	2200	2400	5750	5900	6050
Tarvittava tiedostotila (sanaa)	26900	16140	20050	20210	20380	20540	20700	14850	15000	15160



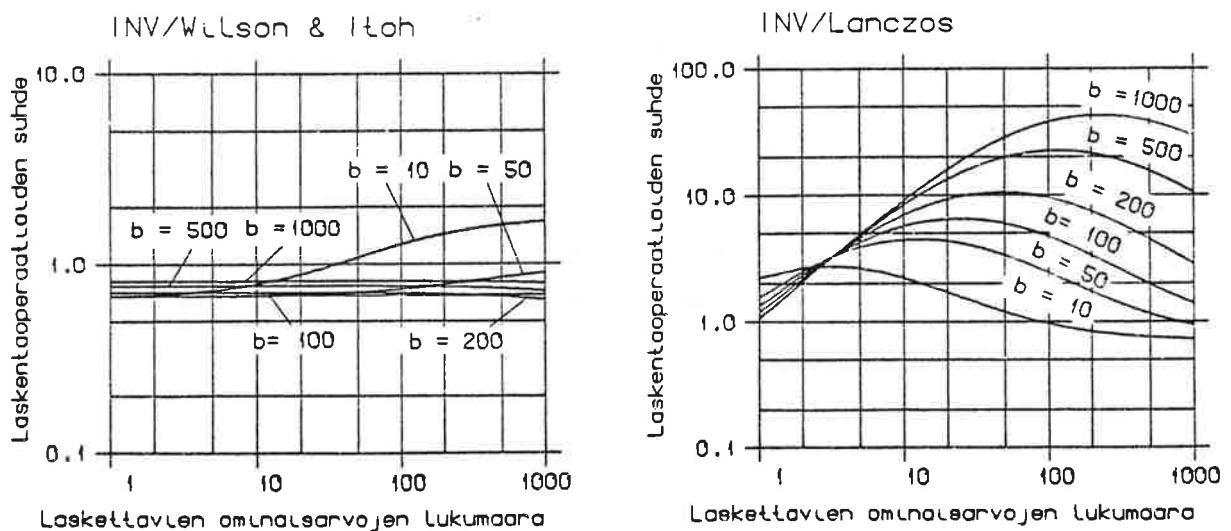
Kuva 2. Käänteisen matriisi-iteraation (INV) ja yleistetyn Jacobin iteraation sekä Householder-QR-algoritmin laskentaoperaatioiden lukumäärän suhde eri nauhaleveyden puolikkaan b arvoilla. Vapausasteiden lukumäärä $n > 200$, massamatriisi nauhamainen.



Kuva 3. Käänteisen matriisi-iteraation (INV) ja determinanttimenetelmän sekä Guptan ratkaisualgoritmien [12,13] askentaoperaatioiden lukumäärän suhde eri nauhaleveyden puolikkaan b arvoilla. Vapausasteiden lukumäärä $n > 200$, massamatriisi nauhamainen.



Kuva 4. Käänteisen matriisi-iteraation (INV) ja Givensin menetelmän [2,10] sekä aliavaruusiteraation laskentaoperaatioiden lukumäärän suhde eri nauhaleveyden puolikkaan b arvoilla. Vapausasteiden lukumäärä $n > 200$, massamatriisi nauhamainen.



Kuva 5. Käänteisen matriisi-iteraation (INV) ja Wilsonin ja Itohin aliavaruusiteraation sekä Lanczošin menetelmän laskentaoperaatioiden lukumäärän suhde eri nauhaleveyden puolikkaan b arvoilla. Vapausasteiden lukumäärä $n > 200$, massamatriisi nauhamainen.

4 LÄHDELUETTELO

- [1] Bathe, K.-J., Solution methods for large generalized eigenvalue problems in structural engineering, Report UC SESM 71-20, Civil Engineering Department, University of California, Berkeley, California, 138 s.
- [2] Bathe, K.-J., Finite element procedures in engineering analysis, Prince-Hall Inc., New Jersey, 1982, 735 s.
- [3] Bathe, K.-J., Wilson, E.L., Solution methods for eigenvalue problems in structural mechanics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 6 (1973) 2, s. 213-226.
- [4] Wilson, E.L., Itoh, T., An eigensolution strategy for large systems, Computers & Structures, 16 (1983) 1-4, s. 259-265.
- [5] Lanczos, C., An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integration operations, J. Res. Nat. Bureau Standards, 45 (1950), s. 255-282.
- [6] Ojalvo, I.U., Newman, M., Vibration modes of large structures by an automatic matrix-reduction method, AIAA Journal, 8 (1970) 7, s. 1234-1239.
- [7] Ojalvo, I.U., Proper use of Lanczos vectors for large eigenvalue problems, Computers & Structures, 16 (1985) 1-3, s. 115-120.
- [8] Matthies, H.G., A subspace Lanczos method for the generalized symmetric eigenproblem, Computers & Structures, 21 (1985) 1/2, s. 319-325.
- [9] Chang, S-C., Lanczos algorithm with selective reorthogonalization for eigenvalue extraction in structural dynamics and stability analysis, Computers & Structures, 23 (1986) 2, s. 121-128.
- [10] The NASTRAN theoretical manual (level 15.5), The MacNeal-Schwendler Corporation, Los Angeles, California, December 1972.
- [11] Jennings, A., Agar, T.J.A., Progressive simultaneous inverse iteration for symmetric linearized eigenvalue problems, Computers & Structures 14 (1981) 1-2, s. 51-61.
- [12] Gupta, K.K., Eigenvalue solution by combined Sturm sequence and inverse iteration techniques, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 7 (1973) 1, s. 17-42.
- [13] Xiaoshu, Pan, Hua, Dai, A theorem for locating eigenvalues, Computing, 35 (1985), s. 93-96.
- [14] Laukkonen, J., Elementtimenetelmäytälöiden ratkaisualgoritmien vertailu - lineaarinen statiikka ja dynamiikka, TTKK, Konetekniikan osasto, Teknillinen mekaniikka, Raportti 37, 110 s.

BETONIN TARTUNTALIITOKSEN MURTOEHTO

Matti Leskelä

Oulun yliopisto

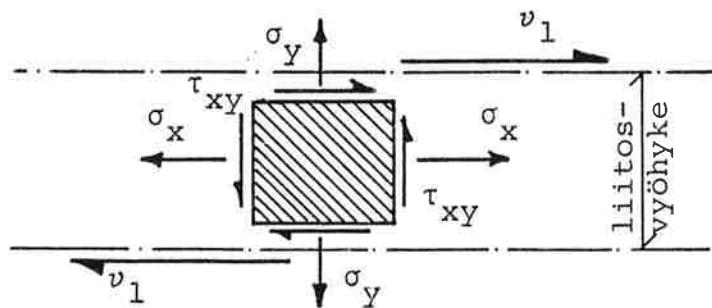
1 JOHDANTO

Betonin tartuntaliiitosta toisen materiaalin kanssa (mukaan luettuna toinen betonimateriaali) on hyödynnetty yleisesti, mutta tartunnan suuruutta ja siihen liittyviä tekijöitä ei ole paljonkaan analyyttisesti tarkasteltu. Tartuntaa on hyödynnetty mm. ankkuroitaessa jännepunos betoniin, samoin kuin tavallinenkin betoniteräs. Liittorakenteissa tartuntaa betonin ja teräksen tai toisen betonin kanssa esiintyy myös, mutta sitä ei aina kyötä hyödyntämään täysimäärisesti.

Tartunnan luonne ja tehokkuus riippuu betonin jännitystilasta ja olosuhteista liitosvyöhykkeessä. Tässä kirjoituksessa esitetään eräs tarkastelutapa tartunnan murtoehdoksi ja arviodaan tartuntaluuuden suuruutta käyttäen hyväksi betonin murtumisen perusteita.

Betonia tarkastellaan liitoksen rajapinnan lähistöllä (liitosvyöhyke) jossa rajapintojen välillä vaikuttaa leikkausvuo ja betonin normalijännitykset oletetaan tasojännitystilan tai tasomuodonmuutostilan mukaisiksi. Tartuntajännityksiä τ_b tarkastellaan leikkausjännityksien τ_{xy} keskiarvoina. Liitoksen leikkausvuo v_1 muodostuu tartuntajännityksistä siten, että

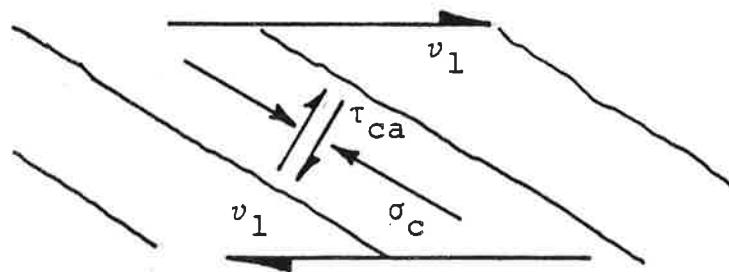
$$v_1 = \tau_b A_b = \frac{1}{A_b} \int \tau_{xy} dA = k_d \tau_{xy} A_b. \quad (1)$$



Kuva 1. Liitosvyöhykkeen jännitykset

2 TARTUNNAN MURTUMISEN VAIHEET

Riippuen jännitysten σ_x , σ_y ja τ_b keskinäisestä suuruudesta murtoehdon toteutuminen voi tuottaa puristustyyppisen tai halkeilutyyppisen murtumisen. Siinä tapauksessa, että murtuminen on halkeilutyyppinen, voi jännitystila järjestyä uudelleen ja halkeilumekanismi voi yrittää kantaa lisäkuormaa. Leikkausvuon täytyy siirtyä liitoksen yli halkeamien välisiä vinoja betonikaistoja pitkin.



Kuva 2. Leikkausvuon tuottamat jännitykset halkeilun alettua

Vinohalkeilua syntyy vain silloin, kun pääjännityksistä vähintään yksi on vetävä. Jännitysten suuruudesta riippuu, mitä halkeilun alettua tapahtuu.

3 HALKEILUEHTO

Jännityksistä vетоа tarkastellaan positiivisena. Tasojännitystilassa pääjännitykset ovat kuvan 1. tapauksessa

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xya}^2}. \quad (2)$$

Liitosvyöhykkeessä betoni muodostuu sementtikivistä ja murtumista on tarkasteltava sementtikiven ominaisuuksien perusteella. Murtoehdo, jolla on hyvä yleisyys, on Ottosenin murtoehdo [1]. Sen käytämisen hankalutuutena on kuitenkin sovitusparametrien pätevyyden toteaminen, sillä murtoehdon tarkkoja pisteitä ovat aksiaalivetolujuus, -puristuslujuus ja kaksiakselinen puristuslujuus. Tasojännitystilassa on käytökelpoinen myös Kupferin ja Gerstlen murtoehdo [2]. Se on muodoltaan paljon yksinkertaisempi, kuin Ottosenin ehto, mutta sen hankalutuutena yleisyyden puute ja esitystapa: murtoehdo on esitetty eri funktioina eri jännityskombinaatioille.

Ottosenin ehto on valittu käytettäväksi, koska se tarjoaa saman funktion kaikille jännitysyhdistelmiille. Laskennassa tulokset esitetään betonin vettolujuuteen verrannollisena ja sitä varten tarvitaan tietoja lujuussuheteista f_{mt}/f_{ct} , f_{mc}/f_c ja f_c/f_{ct} . f_{mt} ja f_{mc} ovat sementtikiven veto- ja puristuslujuudet.

Murtoehdo on

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = A \frac{J_2}{f^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f} + B \frac{I_1}{f} - 1, \quad (3)$$

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3, \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

$$I_1 = 3\sigma_0,$$

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}^{1/2},$$

$$J_2 = 1,5\tau_0^2,$$

$$I_3 = (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0)$$

$$\cos 3\theta = \sqrt{2}J_3/\tau_0^3, \quad -60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ,$$

$$\lambda = K_1 \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos \cos(K_2 \cos 3\theta) \right\}, \text{ kun } \cos 3\theta \geq 0,$$

$$\lambda = K_1 \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \cos(-K_2 \cos 3\theta) \right\}, \text{ kun } \cos 3\theta \leq 0.$$

(3):ssa f on materiaalin aksiaalipuristuslujuus. Laskennassa sementtikiven ja betonin lujuuksien suhteille käytetään arvoja [3]

$$f_{mt}/f_{ct} \approx 4/3 \text{ ja } f_{mc}/f_c \approx 2/3. \quad (4)$$

Murtoehdossa käytetään $f = f_{mc}$ ja vakiot A , B , K_1 , K_2 olisi valittava niin, että ehdon toteuttavia tarkkoja pisteytä olisivat f_{mt} , f_{mc} ja f_{2mc} , kun f_{2mc} on tasojännitystilan mukainen puristuslujuus silloin kun $\sigma_1 = 0$ ja $\sigma_2 = \sigma_3$.

Tarkempien tietojen puuttuessa f_{2mc} :stä, (3):n vakiot on valittu [1], [4] ja [5]:n perusteealla siten, että ne tukisivat mahdollisimman hyvin asetuksia (4):

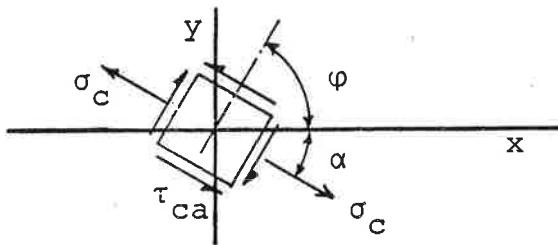
$$A = 0,6252, \quad B = 2,1386, \quad K_1 = 8,1620, \quad K_2 = 0,9647. \quad (5)$$

Jännitystilan invariantit on esitetty pääjännityksien avulla, jolloin saadaan lyhimät lausekkeet.

4 JÄNNITYKSET VINOHALKEILUN TAPAHDETTUA

Vinohalkeilun tapahduttua on tarkistettava, johtaakö muuttunut tilanne välitömään murtoon vai kyetääkö leikkausvuota vielä kasvattamaan. Jännitystila halkeilukaistoissa muodostuu normaalijännityksistä σ_c ja leikkausjännityksistä τ_{ca} , joiden keskiarvo on τ_{ca} . Nämä muunnetaan xy-koordinaatistoon yhtälöillä

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_c \cos^2 \alpha - 2\tau_{ca} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma_{ya} &= \sigma_c \sin^2 \alpha + 2\tau_{ca} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{xya} &= \sigma_c \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{ca} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).\end{aligned}\quad (6)$$



Kuva 3. Halkeilukaistojen jännitykset

σ_{ya} ja τ_{xya} ovat murtumistapahtuman määritteleviä kuormituskomponentteja. σ_{ya} voi olla puristusta tai vетoa. Se on joko aktiivinen, kuormituksesta johtuva komponentti tai passiivinen, kiinnityksestä, räudoituksesta tai muusta vinohalkeamien estämisestä johtuva. Kulma $\alpha = \pi/2 - \varphi$, kun φ on pääjännitysten (2) suuntakulma.

(6):n kaksi viimeistä yhtälöä ratkaistaan σ_c :n ja τ_{ca} :n suhteeseen,

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \frac{-\tau_{xya} \sin 2\alpha + \sigma_{ya} \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha}, \\ \tau_{ca} &= \frac{\tau_{xya} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sigma_{ya} \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha}.\end{aligned}\quad (7)$$

Pääjännitykset näistä ovat

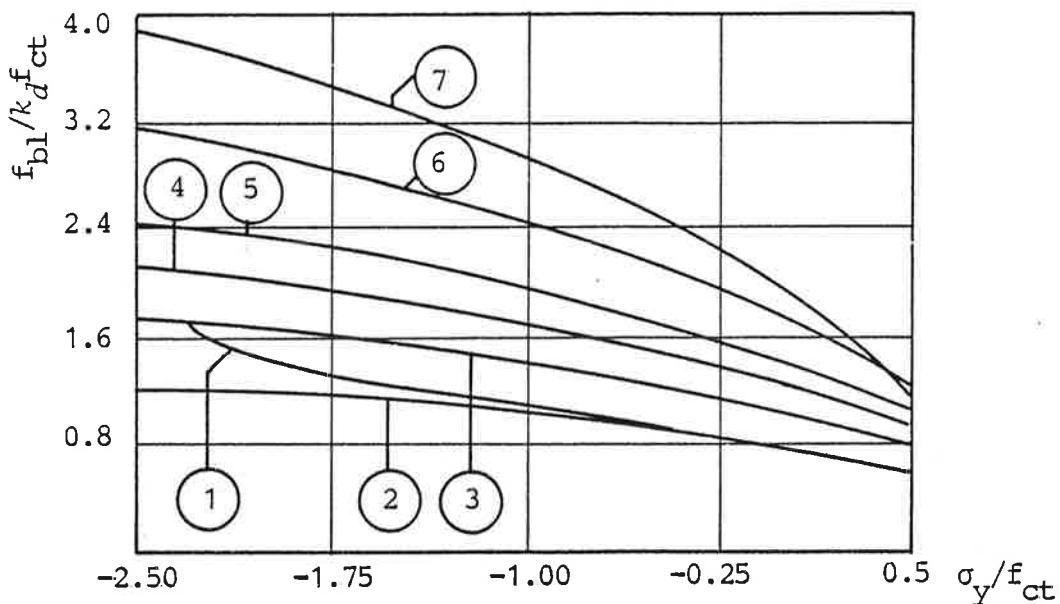
$$\sigma_{I,II} = \sigma_c/2 \pm \sqrt{(\sigma_c/2)^2 + \tau_{ca}^2}. \quad (8)$$

Jännityksiin (8) sovelletaan murtoehotoa (3), josta nähdään, toteutuuko se samalla arvolla τ_{br} (= halkeilua aiheuttava tartuntajännitys), joka laskettiin (1):n ja (2):n perusteella.

5 LASKENTATULOKSIA

Esitettyä teoriaa sovellettiin tasojännitystilaan ja iteroimalla laskettiin halkeilua aiheuttava $\tau_b = \tau_{br}$ ja sitä vastaavat kulmat φ, α . Yhtälöitä (7) ja (8) käytettiin sen jälkeen toteamaan, pystyykö uusi tasapainomekanismi pitämään kuormaa, eli onko $F < 0$. Jos $F < 0$, kun $\tau_b = \tau_{br}$, kasvatettiin τ_b :tä kunnes $F \geq 0$, jolloin $\tau_b = f_{bl}$.

Laskennan tulokset on esitetty kuvassa 4 eri jännityssuheteita σ_x/f_{ct} edustavina $\sigma_y/f_{ct} - f_{bl}/k_d f_{ct}$ käyrinä.



Kuva 4. Tartuntaluujuuskäyriä

σ_x/f_{ct}	1,0	0,5	0	-0,5	-1,0	-2,5	-5,0
Käyrä n:o	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

Kun σ_x ja σ_y ovat puristavia, murtumisen määrittelää halkeilujännitys τ_{br} , jonka yli leikkausvuota ei voida enää kasvattaa, eli $f_{bl} = \tau_{br}$. Vähennettäessä liitokseen nähdä poikittaista puristusta tartuntaluuuden arvo pienenee huomattavan jyrkästi liitoksen suuntaisen puristusjännityksen ollessa suuri ja lievemmin silloin kun liitoksen suunnassa on pieni normaalijännitys.

Kun liitoksen suunnassa esiintyy vетоа, halkeilujännitys τ_{br} on hyvin pieni, mutta muuttunut mekanismi kyкenee kantamaan lisäkuormaa ja $f_{bl} > \tau_{br}$. Kuvassa 4 käyrä (1), jolla $\sigma_x/f_{ct} = 1$, alkaa käyrältä (3) ja lähestyy käyrää (2), kun suhdetta σ_y/f_{ct} muutetaan kohti positiivista suuntaa. Kaikilla käyrillä (1), (2) ja (3) on $\sigma_x/f_{ct} \geq 0$.

Kuvassa 4 pystyakselina on $f_{bl}/k_d f_{ct}$, missä k_d on pienempi kuin yksi. Tutkimuksessa [6] talle kertoimelle on ehdotettu arvoa $k_d = 0,84$, mikä parhaiten näytti soveltuvan koestuloksiin [6]:ssa.

5.1 Eräitä tartuntatapauksia

Yksi tyypillinen tartuntatapaus, jota ei käytetä mitoitukseissa hyväksi, on liittopalkin leikkausliitos. Tällaisessa rakenteessa taivutuksen neutraaliakseli sijaitsee usein liitoksen lähistöllä ja $\sigma_x \geq 0$. Jos kuvan 4 käyriä käytetään varmalle puolelle, voidaan arvioida, että liittopalkkien laatta- ja uumaosan välinen tartentalujuus on $f_{bl}/k_d \approx 0,8f_{ct}$, eli $f_{bl} \approx 0,7f_{ct}$.

Toisena tapauksena tarkastellaan jännepunoksen ankkuroitumista betoniin. Ontelolaatan valmistuksessa pitkä laattalinja, jossa jännitettyjen punoksienvympärille valettuun betoniin on päästetty punoksienv jännytys, sahataan halutuksi tuotteiksi. Kun punos sahauksessa laatan päässä katkeaa, punoksissa alunperin ollut suppeuma purkautuu ja punos laajetessaan puristaa betonia ($\sigma_y < 0$). Jos $\sigma_x = 0$, on tartentalujuuden vähimmäisarvo $f_{bl}/k_d \approx 1,6f_{ct}$, eli $f_{bl} \approx 1,34f_{ct}$.

Jännepunosten tartentalujuuskokeessa, jossa lyhyestä sahausnäytteestä punos painetaan irti, ensimmäiset huomattavammat siirtymät havaitaan kuormalla, joka vastaa nimellistä tartuntajännytystä $(1,0 \dots 1,5)f_{ct}$. Arvo riippuu punoksen asemasta laatan poikkileikkauksessa siten, että reunimaisissa punoksissa esiintyy pienimmät jännytykset. Kuorma kasvaa vielä mainitusta arvosta, riippuen punoksen pinnan laadusta, mutta selvästi rajaa voidaan pitää tartuntamurron alkamiskohdana. Tämä tulos näyttäisi sopivan hyvin yhteen edellisessä kappaleessa esitetyn kanssa.

Tutkimuksessa [7] on esitetty tuloksia jännyttämättömiен punosten ulosvetokokeista, joissa punosten jännytys ei tartuntaliukumisen alkamisen aikaan ollut merkittävä.

Kokeissa voidaan katsoa olevan $\sigma_x = 0$ ja $\sigma_y = 0$ ja siten tartuntalujuutta arvioidaan käyrältä (3), $f_{bl}/k_d \approx 1,0f_{ct}$, eli $f_{bl} \approx 0,84f_{ct}$. Keskiarvona kokeista ensimmäiset havaittavat liukumat punoksissa todettiin, kun nimellisellä tartuntajännityksellä oli arvo $0,9f_{ct}$. Tämäkin tulos näyttäisi tukavan esitettyä.

6 YHTEENVETO

Esitetyssä teoriassa betonin murtumista tarkasteltiin tasojännitystilan mukaisesti. Sovellettu murtoehdo (3) on kuitenkin yleinen eikä mikään estää käytämästä sitä myös muissa jännitystiloissa. Tartunnan murtumiselle asetettiin kaksivaiheinen malli, (i) ensin muodostuu vinohalkeilua ja tasapainomekanismi järjestyy uudelleen. (ii) Vinohalkeilumekanismista tarkastetaan, murtuuko se välittömästi muodostumisen jälkeen vai pystytäänkö rasitustilaan kasvattamaan.

Laskenta osoitti, että normaalijännitystilan ollessa vetävä, vinohalkeilu alkaa jo pienillä leikkausvuon arvoilla, mutta uusi mekanismi pystyy kasvattamaan kuormaa. Normaalijännityksien ollessa puristavia on tartuntalujuus huomattavasti suurempi kuin betonin vetolujuus, mutta liitoksen tartuntamurtuminen tapahtuu heti halkeilun alettua.

Laskettujen arvojen sopivuutta koetuloksiin ei pystytty yleisesti vertaamaan, koska kaikkea haluttua kirjallisuutta ei ollut käytettävissä. Esitetyt yksittäistapaukset sopivat kuitenkin teorian kanssa yhteen.

Betonin vetolujuudesta f_{ct} on huomattava, että se ei välittämättä ole mikään 'eksakti' suure ja siihen liittyy huomattava hajonta. Valmistustekniikkaa voidaan pitää ehkä eniten vaikuttavana tekijänä koko rakenteen f_{ct} :n ja ankkuroiduvien osien ympärillä vaikuttavan arvon välillä. Käytetyissä vertailuissa ei vetolujuutta koetuloksena ollut olemassa, vaan se laskettiin ilmoitettun kuutiolujuuden K perusteella kaavasta

$$f_{ct} = 0,25K^{2/3}. \quad (9)$$

Terästen ankkuroitumista betoniin on tässä yhteydessä tarkasteltu vain tartuntamurtumiseen saakka. On muistettava, että varsinainen ankkurointimurto tapahtuu vasta suuremilla leikkausvuon arvoilla, koska tartuntamurron jälkeen astuu kuvaan kitkamekanismi. Se ei kuulu tämän kirjoituksen aihepiiriin.

KIRJALLISUUSLUETTELO

- [1] N.S. Ottosen:
A Failure Criterion for Concrete
ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division,
Vol 103, No EM3, 1977
- [2] H.B. Kupfer, K.H. Gerstle:
Behavior of Concrete under Biaxial Stresses
ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division,
Vol 99, No EM4, 1973
- [3] A.M. Neville:
Properties of Concrete
Longman Scientific and Technical, 3rd Edition, 1986
- [4] G.G. Balmer:
Shearing strength of concrete under high triaxial stress -
computation of Mohr's envelope as a curve
Structural Research Report No SP 23 US Dept of Int.,
Bureau of Reclamation, Denver, Colorado 1949
- [5] F.E. Richardt, A. Brandtzaeg, R.L. Brown:
A study of failure of concrete under combined compressive stresses
University of Illinois, Bulletin No 185, Eng. Exp. Stat.,
Urbana 1928
- [6] A.H. Mattock, N.M. Hawkins:
Shear Transfer in Reinforced Concrete - Recent Research
PCI-Journal 1972
- [7] J. Jokela:
Betonin ja raudoituksen yhteistoiminta ja suomalaisten betoniterästankojen tartuntaominaisuudet
VTT, Betonitekniikan laboratorio, Tiedonanto 52, Espoo 1979
- [8] M. Leskelä:
Betonin muodonmuutosominaisuudet ja lujuus tasojännitys- ja tasomuodonmuutostilassa
Rakenteiden mekaniikka, Vol 18, No 2, 1985

MONIVERKKO-OHJELMISTON PLTMG ESITTELY

Markku Lindroos

Teknillinen korkeakoulu, laskentakeskus

1 JOHDANTO

PLTMG-ohjelmisto (Piecewise Linear Triangle Multi Grid Package) on professori Randolph E. Bankin (University of California at San Diego) työtovereineen kehittämä, moniverkkomenetelmää käyttävä Fortran-kielinen ohjelmisto elliptisten, tasoalueissa määriteltyjen toisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöiden numeeriseen ratkaisemiseen [2], [3]. Ohjelmistolla ratkaistavissa olevat tehtävät voidaan ilmaista matemaattisesti seuraavassa muodossa:

$$-\nabla \cdot a(x, y, u, \nabla u, \lambda) + f(x, y, u, \nabla u, \lambda) = 0 \quad \text{alueessa } \Omega, \quad (1)$$

$$u = g_1(x, y, \lambda) \quad \text{reunanosaalla } \partial\Omega_1, \quad (2)$$

$$a \cdot n = g_2(x, y, u, \lambda) \quad \text{reunanosaalla } \partial\Omega_2 = \partial\Omega - \partial\Omega_1. \quad (3)$$

Tässä u on määritettävänä oleva skalarifunktio, Ω yhtenäinen tasoalue, $\partial\Omega$ sen paloittain sileäksi oletettu reuna (osista $\partial\Omega_1$ ja $\partial\Omega_2$ koostuva), n reunan ulkonormaalilin suuntaan osoittava yksikkövektori, a skalarifunktioista a_1 ja a_2 muodostuva vektori, f , g_1 ja g_2 skalarifunktioita ja $a \cdot n$ vektoreiden a ja n sisätulo. Skalaari λ on parametri, jolla käytännön sovellutuksissa on usein jokin fysikaalinen merkitys.

PLTMG-ohjelmisto käyttää lineaarisii kolmioelementteihin perustuvaa elementtimenetelmää yhdistettynä moniverkkoalgoritmiin, jolla ratkaistaan diskretoinnista syntyvät lineaariset tai epälineaariset yhtälöt. Diskretointi aloitetaan alkukolmioinnilla, jolla samalla määritellään ratkaisualue. Alkukolmioinnista lähtien generoidaan joukko tiheämpää kolmioverkkoja ja niitä vastaavia yhtälöryhmiä. Ohjelma osaa tihentää adaptiivisesti eli se muodostaa ratkaisun edetessä virhearvioita ja tihentää verkkoa siellä, missä se on tarkkuuden parantamisen kannalta tarpeellisinta. Ohjelmisto on sisältyvä grafiikka tekee tulosten havainnollistamisen helpoksi. Hienona lisäpiirteenä PLTMG:ssä on, että jos ratkaistavaan probleemaan sisältyy jokin parametri, pystyy ohjelma seuraamaan ratkaisun muuttumista tämän parametrin muuttuessa. Nämä ollen ohjelma on verraton apuväline esimerkiksi bifurkaatio-ongelmien tutkimisessa.

Esitelmän avulla tehdään tunnetuksi ohjelmistoa ja sen tarjoamia mahdollisuuksia.

2 MONIVERKKOMENETELMISTÄ YLEISESTI

Viime vuosien huomattavimpia edistysaskeleita osittaisdifferentiaaliyhtälöiden numeerisessa käsittelyssä on moniverkkomenetelmien käyttöönotto yhtälöitä approksimoivien diskreettien yhtälöiden ratkaisemiseksi. Moniverkkomenetelmien pioneeritöinä mainitaan tavallisesti Fedorenkon artikkeli [6] vuodelta 1964 ja Bakhvalovin artikkeli [1] vuodelta 1966. Fedorenko esitti ensimmäisenä menetelmien periaatteen ja todisti neliön muotoisessa alueessa määritellylle Poissonin yhtälön differenssiapproksimaatiolle, että diskreettien yhtälöiden virheen pienentämiseen tekijällä ϵ riittää suuruusluokkaa $O(n|\log(\epsilon)|)$ oleva työ, kun yhtälöryhmässä on n yhtälöä. Haluttu tarkkuus on siis mahdollista saavuttaa yhtälöiden määrään verrannollisella laskutoimitusten määrellä. Bakhvalov yleisti tuloksen sellaisille toisen kertaluvun elliptisille yhtälöille, joissa kerroinfunktiot ovat jatkuvia mutta eivät välttämättä vakiota.

Menetelmien käytännön tehokkuuden jo varsin pienillä n :n arvoilla osoitti 1970-luvulla Achi Brandt. Vuonna 1977 hän julkaisi artikkelin [5], jonka välityksellä menetelmä tuli yleisempään tietoisuuteen ja johon nykyäänkin hyvin usein viitataan. Käytännön ongelmia ratkovien keskuudessa menetelmä tuli yleisemmin hyväksytyksi vasta 1980-luvulla. Aiheesta on järjestetty omia tieteellisiä konferenssejaan (tässä mainittakoon näin syntyneistä julkaisuista vain [7] ja [8]), ja moniverkkomenetelmää käsittelevä kirjallisuus on muutenkin kasvanut nopeasti. Teokseen [9] liitetty Multigrid Bibliography sisältää yli 600 kirjaa, artikelia tai raporttia. Moniverkkomenetelmää on sovellettu menestyksellisesti monenlaisiin käytännön tehtäviin, mikä on omalta osaltaan vauhdittanut teoreettistakin tutkimusta.

Moniverkkomenetelmien idea on tässä esitettävä tilarajoitusten vuoksi hyvin lyhyesti. Tarkastellaan (elliptisen) osittaisdifferentiaaliyhtälön $Lu = f$ diskretointia hilaverkossa, jota kuvatkoon parametri h (tavallisten differenssimenetelmien tapauksessa tämä voisi olla hilaväli, kolmioverkkoon perustuvien elementtimenetelmien tapauksessa jonkin verkkoa karakterisoivan kolmion halkaisija). Differentiaalioperaattori L ja funktio f ovat annettuja, u on määritettävä. Diskretoimalla saatu yhtälöryhmä olkoon $L^h u^h = f^h$. Ajatellaan, että ryhmää on ryhdytty ratkaisemaan sopivasta alkuarvauksesta lähtien iteratiivisesti jollain relaksatiomenetelmällä (esimerkiksi Jacobin tai Gaussian-Seidelin iteraatiolla) ja on saatu approksimatiivinen ratkaisu \tilde{u}^h . Jäännös eli residuaali $r^h = f^h - L^h \tilde{u}^h$ on nyt laskettavissa ja mittaa sitä, kuinka hyvin yhtälöt toteutuvat. Jos L on lineaarinen operaattori, niin $r^h = L^h u^h - L^h \tilde{u}^h = L^h(u^h - \tilde{u}^h)$. Approksimaatioon \tilde{u}^h tarvittava korjaus $v^h = u^h - \tilde{u}^h$ voidaan siis määrittää yhtälön $L^h v^h = r^h$ ratkaisuna. Yhtälö on samaa muotoa kuin alkuperäinen diskreetti yhtälö. Oikea puoli on muuttunut, mutta on edelleen tunnettu. Kuten jäljempää ilmenee, residuaaleilla on hyvin tärkeä asema moniverkkomenetelmissä.

Jos alkuarvauksen virhe kirjoitetaan Fourier'n sarjaksi ja tarkastellaan relaksation vaikutusta sarjan eri termeihin, huomataan, että relaksatio vaimentaa nopeasti niitä virheen komponentteja, joiden aallonpituuus on hilavälin suuruusluokkaa, mutta pitempiaaltoiset komponentit vaimenevat hitaasti. Kokonaishirhe ei siten yleensä pienene kovin nopeasti, mutta se tulee

sileämänäksi.

Koska tarvittava korjaus v^h (joka on itseisarvoltaan virheen suuruinen mutta vastakkaismerkkinen) on relaksaation jäljiltä varsin sileä, se voidaan ilmeisesti kohtalaisen hyvin esittää harvemmassa verkossa, johon liittyvä hilaparametri olkoon H . Korjaustermin v^h approksimoimiseksi voidaan tällöin kirjoittaa residuaaliyhälö $L^H v^H = r^H$, missä oikea puoli muodostetaan painottuna keskiarvona tiheämän verkon naapurisolmujen residuaaleista, v^H approksimoi v^h :ta ja L^H on L^h :n vastine harvemmassa verkossa. Harvemmassa verkossa yhtälöryhmä on samaa muotoa kuin tiheämässä, mutta siinä on vähemmän tuntemattomia ja siten sen ratkaisemiseen riittää pienempi työ. Kun residuaaliyhälön ratkaisulle v^H on saatu riittävän hyvän approksimaatio, muodostetaan siitä interpolatio-operaatioilla likimäärisratkaisu tiheämän verkon residuaaliyhälölle, tehdään sen mukainen korjaus alkuperäisen ryhmän likimäärisratkaisuun ja lopuksi tulosta ehkä vielä silotellaan relaksaatiolla.

Harvemmassa verkossa on myös luonnollista käyttää relaksaatiomenetelmää ratkaisun v^H hakemiseen. Alkuarvaukseksi on luonnollisinta ottaa nollavektori. Muutaman relaksaatiokierroksen jälkeen virhe on sileä, joten – sen sijaan, että virhettä yritettäisiin pienentää lisäiteraatio-kierroksilla – voidaan siirtyä vielä harvempaan verkkoon. Nämä ajatusta voidaan toteuttaa rekursiivisesti. Kullakin verkolla (paitsi alkuperäisellä) on kyse approksimaation hakemisesta yhtä pykälää tiheämän verkon residuaaliyhälössä esiintyvälle korjaikselle. Lopulta ollaan niin harvassa verkossa, että residuaaliyhälö voidaan pienellä työllä ratkaista tarkasti. Sen jälkeen palataan astettain takaisin tiheämpiin verkkoihin ja lisätään korjaustermit ratkaisuihin. Tavallisesti kullakin tasolla myös relaksoidaan korjaustermin lisäämisestä jälkeen. Kun tullaan ylimmälle tasolle eli lähtötasolle, on yksi ns. V-sykli valmis. (Monimutkaisemmassa W-syklissä ratkaisua korjataan kullakin tasolla kahdesti (käytämällä harvempia verkkoja hyväksi) ennen kuin siirrytään ylemmälle tasolle, ja vielä yleisemmässä μ -syklissä korjaus tehdään μ kertaa. Harvoin kuitenkaan käytetään muita kuin arvoja $\mu = 1$ ja $\mu = 2$.) Yksi moniverkkosykli redusoit virhettä tekijällä, joka on lähes riippumaton n :stä. Suppenemisnopeus on siten käytännöllisesti katsoen riippumaton n :stä, toisin kuin perinteisissä iteraatiomenetelmissä, joissa suppeneminen yleensä hidastuu merkittävästi n :n kasvaessa.

Menetelmän tehokkuutta voidaan vielä lisätä käyttämällä ns. sisäkkäisten iteraatioiden teknikkaa. Iteraatiota ei aloitetakaan tiheimmän verkon alkuarvauksesta, vaan lähtöapproksimaatio johdetaan iteratiivisesti harvemmista verkoista käsin. Harvimmassa verkossa haetaan ensin tarkka ratkaisu suoralla ratkaisumenetelmällä (esimerkiksi Gaussian eliminatiolla) tai iteroimalla riittävän pitkään; kummassakin tapauksessa tarvittava työ on pieni, koska yhtälöiden luku on pieni. Seuraavan tason lähtöapproksimaatio muodostetaan harvemman verkon tuloksesta interpoloinalla. Approksimaatiota parannetaan tällä tasolla tapahtuvalla relaksaatiolla ja harvempaan verkkoon asti ulottuvilla korjaussykleillä. Kullakin tasolla relaksaatio likvidoi nopeasti ne virheen komponentit, jotka ovat kyseisen tason hilakoon suuruusluokkaa. Usein jo yksi moniverkkosykli tihennystä kohti riittää. Tällaista sisäkkäisten iteraatioiden teknikkaa käyttämällä tiheintä verkkoa vastaava ratkaisu saadaan lopulta yhtälöryhmän tuntemattomien

määrään verrannollisella laskutoimitusten määräällä (kun yhtälöitä ei ratkaista tarkasti, vaan tyydytään diskretointivirhettä vastaavaan tarkkuuteen; ratkaisun kokonaisvirhe ei tällöin ole ollenaisesti diskretointivirhettä suurempi).

Jos L on epälineaarinen, ei residuaaliyhtälö sievne muotoon $L^h v^h = r^h$, vaan jää muotoon $L^h(\tilde{u}^h + v^h) - L^h \tilde{u}^h = r^h$, missä $r^h = f^h - L^h \tilde{u}^h$. Jäljempänä PLTMG:n yhteydessä on esimerkki siitä, kuinka Newtonin iteraatiolla ja moniverkkosyklien yhdistämällä tällainen epälineaarinen ryhmä ratkaistaan. Epälineaarisuus ei ollenaisesti vaikuta ratkaisua.

Moniverkkomenetelmä toimii yhtälöryhmän koosta, alueen Ω muodosta ja $\partial\Omega$:lla annettujen reunaehojen tyypistä riippumatta tehokkaasti. Tarvittava tietokoneen muistitila on pieni.

3 PLTMG:N MONIVERKKOALGORITMI

Probleeman (1)-(3) heikossa muodossa (variaatioformuloinnissa), joka on PLTMG:ssä käytetään elementtimenetelmän lähtökohtana, on etsittävä $u \in H_E^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ siten, että

$$a(u, v) = \langle g, v \rangle \quad \forall v \in H_{E0}^1(\Omega), \quad (4)$$

missä

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \{a(x, y, u, \nabla u, \lambda) \cdot \nabla v + f(x, y, u, \nabla u, \lambda)v\} dx dy, \quad (5)$$

$$\langle g, v \rangle = \int_{\partial\Omega_2} g_2(x, y, u, \lambda)v ds. \quad (6)$$

$H^1(\Omega)$ on tavallinen Sobolev-avaruus varustettuna normilla

$$\|u\|_1 = \left\{ \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + u^2] dx dy \right\}^{1/2}, \quad (7)$$

$$H_E^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega_1} = g_1\} \text{ ja } H_{E0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega_1} = 0\}.$$

Diskretointia varten alue Ω jaetaan kolmioihin. Kullakin kolmiolla voi olla yksi kääyräviivainen sivu, jos tämä sivu on $\partial\Omega$:lla. Kääyräviivaista sivua approksimoidaan ympyränkaarella, joka kulkee sivun päätepisteiden ja tietyllä tavalla määrätyvän keskipisteen kautta. Olkoon M tehtyyn kolmioon τ liittyvä jatkuvien, paloittain lineaaristen polynomien avaruus. Olkoon M_0 se M :n aliavaruuus, johon kuuluvat polynomit ovat nollia τ :n reunalla $\partial\Omega_1$ olevissa kärjissä, ja olkoon M_e se M :n aliavaruuus, jonka alkiot toteuttavat yhtälön (2) kanssa yhtensopivan Dirichlet-reunaehdon τ :n $\partial\Omega_1$:lla olevissa kärjissä. Probleeman diskreetin ratkaisun $u^h \in M_e$ toteutettavaksi saadaan tällöin yhtälöryhmä

$$a(u^h, v) = \langle g, v \rangle \quad \forall v \in M_0. \quad (8)$$

Moniverkkoalgoritmia käytettäessä tällainen ryhmä tulee kirjoitettavaksi kullakin verkolla. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi seuraavassa algoritmin kuvaussessa oletetaan [2]:n tapaan,

että $\partial\Omega_1 = \emptyset$ ja $\partial\Omega_2 = \partial\Omega$. Olkoot τ_j , $j = 1, 2, \dots, MAXL$, käytetyt kolmioinnit ja M_j olkoon τ_j :hin liittyvää jatkuvien, paloittain lineaaristen polynomien avaruuus (dimensioltaan N_j). PLTMG:n käyttäjä antaa karkean alkukolmioinnin, $\tau_1:n$, jolla samalla määritellään ratkaisualue Ω . Kolmointi voidaan tehdä myös ohjelmistoon kuuluvalla aliohjelmalla TRIGEN, kunhan alueen reunat on ensin kiinnitetty. Alkukolmioinnista lähtien ohjelmistolla voidaan generoida muut kolmioinnit ja niitä vastaavat diskreetit probleemat. Verkko tihennettääessa diskretointi ja yhtälöiden ratkaiseminen etenevät rinnakkain. Lopullisena päämäääränä on saada tiheintä verkkoa vastaava ratkaisu. Verkossa τ_j on haettava $u_j^h \in M_j$ siten, että

$$a(u_j^h, v) = \langle g, v \rangle \quad \forall v \in M_j. \quad (9)$$

Tätä varten ratkaistaan useita probleemoja, jotka ovat yleisempää muotoa: Etsi $z_j \in M_j$ siten, että

$$b(z_j, v) = G(v) \quad \forall v \in M_j, \quad (10)$$

missä $b(\cdot, \cdot)$ on $a(\cdot, \cdot)$:han liittyvä bilineaarimuoto ja $G(\cdot)$ on lineaarinen funktionaali. PLTMG Users' Guide [2] ei sisällä näitä muotoja, eikä niihin tässäkään puututa. Artikkeleissa [3] ja [4] muodot on annettu hieman yksinkertaisemmissa tapauksissa.

Yhtälön (10) ratkaisemiseksi määritellään j -tasoinen moniverkkoiteraatio seuraavasti (verkkojen väliset siirto-operaattorit jätetään yksinkertaisuuden vuoksi merkitsemättä): Jos $j = 1$, ryhmä (10) ratkaistaan tarkasti harvojen matriisien käsittelyyn suunnitellulla suoralla (ei-iteratiivisella) menetelmällä. Jos $j > 1$, ryhmää relaksoidaan m kertaa symmetristä Gauss-Seidelin menetelmää käyttäen. Nämä lähtöalkiosta $z_j^0 \in M_j$ saadaan alkio $z_j^m \in M_j$. Haetaan sitten residuaaliyhälön

$$b(\delta, v) = G(v) - b(z_j^m, v) \quad \forall v \in M_{j-1} \quad (11)$$

ratkaisulle $\delta \in M_{j-1}$ approksimaatio $\bar{\delta} \in M_{j-1}$ lähtemällä alkuarvauksesta $\bar{\delta} = 0$ ja suorittamalla kaksi kierrosta $(j-1)$ -tasosta moniverkkoiteraatiota (tässä tulee esille rekursioajatus), jos $j-1 > 1$, mutta vain kerran, jos $j-1 = 1$. Sen jälkeen asetetaan $z_j^{m+1} = z_j^m + \bar{\delta}$ eli suoritetaan korjausvaihe. Lopuksi tulosta vielä silotellaan m relaksatiokierroksella.

PLTMG:ssä ratkaisualgoritmi koostuu ulkoisista ja sisäisistä iteraatioista. Ulkoisella iteratiivisella prosessilla problema (9) ratkaistaan peräkkäin arvoilla $j = 1, 2, \dots, MAXL$, edeten siis harvimmasta verkosta tiheimpään. Lähtöapproksimaatio tasolla j muodostetaan edellisellä tasolla saadun ratkaisun u_j^h avulla. Jokaisella tasolla suoritetaan s iteraatioaskelta vaimennetulla Newtonin menetelmällä. Kullakin askeleella tulee ratkaistavaksi yhtälön (10) mukainen lineaarinen problema. Tämä ratkaistaan soveltamalla edellä määriteltyä j -tasosta moniverkkoiteraatiota r kertaa, jos $j > 1$, mutta vain kerran, jos $j = 1$. Parametrit m , r ja s ovat tavallisesti pieniä kokonaislukuja, 1:stä 4:ään.

Kolmointia τ_j tarvitaan vasta sen jälkeen, kun u_{j-1}^h :lle on saatu approksimaatio, ja τ_j muodostetaankin tasolla $j-1$ saadun ratkaisun perusteella. Adaptiivista verkon tihennystä varten

tarvitaan *a posteriori*-virhearvioita. Täydellisen virheanalyysin suorittaminen olisi liian raskeasta, joten tehokkuussyyistä arviot muodostetaan paikallisen informaation perusteella. Kullekin kolmioille $t \in \tau_{j-1}$ lasketaan virhearvio $H^1(t)$ -avaruuden normia käyttäen. Arvio perustuu ratkaistavana olevan osittaisdifferentiaaliyhtälön residuaaliin t :ssä ja u_j^h :n normaaliderivaatassa ∂t :n yli mentäessä tapahtuvaan hyppyn. Normaalisti tihennetään niitä kolmioita, joissa virhe on tiettyä kynnsarvoa suurempi. Usein näin kolmioiden määrää kasvaa liian vähän, etenkin jos ratkaisu sisältää singulariteetteja; laskutyön ja muistitilan säästämiseksi avaruuskien M_j dimensioiden pitäisi kasvaa geometrisesti. PLTMG:ssä pyritään siihen, että uudessa verkossa olisi aina noin 4 kertaa niin paljon kolmioita kuin edellisessä ($N_j \sim 4N_{j-1}$). Usein tarvitaan monta adaptiivisen tihennyksen vaihetta ennen kuin uusi verkko on tassä mielessä kelvollinen.

Tihennettävä kolmio jaetaan tavallisesti neljään kolmioon yhdistämällä sivujen keskipisteet toisiinsa. Muodostuneet uudet kolmiot ovat tällöin alkuperäisen kanssa samanmuotoisia. Jos verkkoa tihennetään vain joissakin osissa paikallisesti, joudutaan tihennettyjen ja tihentämätöiden osien rajamailla jotkut kolmiot jakamaan kahtia yhdistämällä yksi kärki vastakkaisen sivun keskipisteesseen. Noin on tehtävä, jotta verkon minkään kolmion kärki ei olisi toisen kolmion sivun sisäpisteessä. Kolmioiden kahtiajot poistetaan, jos verkko myöhemmin vielä tihennetään samoilta paikoin. Missään vaiheessa ei siis pääse syntymään kolmioita, joissa olisi numeerisen tarkkuuden säilyttämisen kannalta liian pieniä kulmia (ellei sellaisia ole jo alkukolmioinnissa).

PLTMG-ohjelmistoon kuuluu aliohjelma PLTCNV, jolla voidaan tutkia konvergenssinopeuksia. Jos tarkka ratkaisu u tunnetaan, voidaan tutkia, millä nopeudella elementtiratkaisu u_j^h lähestyy sitä, kun iteraatiotasojen lukumäärä kasvaa. (Jos tarkkaa ratkaisua ei tunnetta, voidaan sen asemesta usein käyttää riittävän tiheällä verkolla saatua elementtiratkaisua.) Ratkaisun oikeiden numeroiden määrää voidaan arvioida kaavasta

$$\text{digits}(j) = -\log_{10}\{\|u - u_j^h\|/\|u\|\}, \quad (12)$$

missä $\|\cdot\|$ voi viitata avaruuskien $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ ja $L^\infty(\Omega)$ normeihin. Jos verkkotasoja on enemmän kuin yksi, voidaan pienimmän neliösumman keinon mukaisella sovituksella hakea vakiot C ja q siten, että

$$\|u - u_j^h\|/\|u\| \sim CN_j^{-q/2}. \quad (13)$$

Kun käytetään paloittain lineaarisia elementtejä, on q :n optimaalinen arvo teorian mukaan H^1 -normin tapauksessa yleensä 1, L^2 - ja L^∞ -normien tapauksessa 2. (Jos ratkaisu sisältää singulariteettejä, on näihin arvioihin pääsemiseksi käytettävä adaptiivista verkon tihennystä.) Käytännössä PLTMG:llä q :lle saadaankin H^1 -normin tapauksessa ykköstä lähellä oleva arvo, jos verkkotasoja on riittävän monta ja turvaudutaan adaptiiviseen verkon tihennykseen. Koska PLTMG:ssä adaptiivinen tihennys perustuu H^1 -normin avulla laskettuihin virhearvioihin, ei

L^2 - ja L^∞ -normeilla mitatuille konvergenssinopeuksille voi yleensä odottaakaan optimaalisia arvoja.

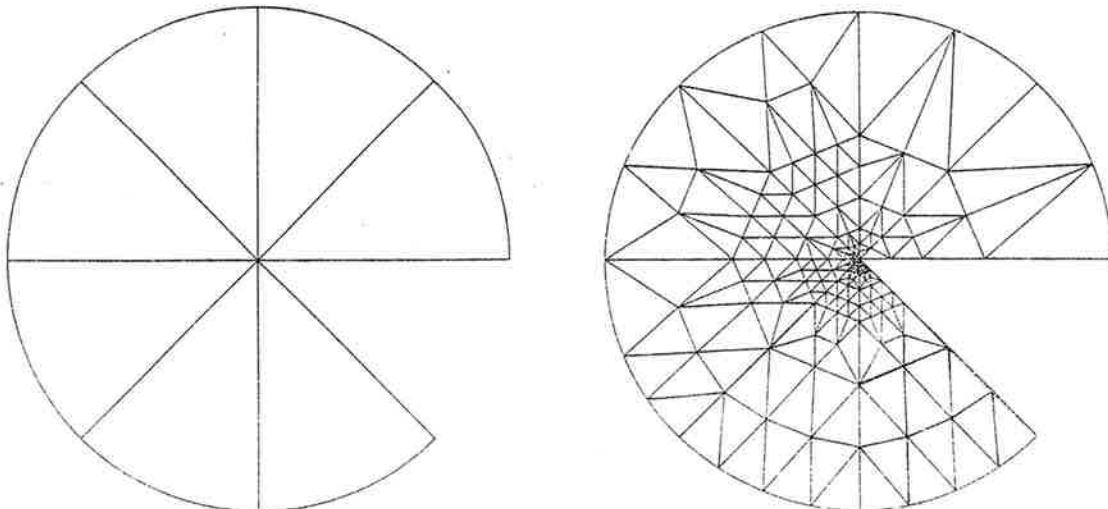
Riippumatta siitä, onko tarkka ratkaisu u tunnettu vai ei, voidaan PLTCNV:llä myös tutkia edellä määritellyn moniverkkoiteraation konvergenssia parametrien m ja r funktiona.

Kappaleen lopuksi tarkastellaan lyhyesti yksinkertaista esimerkkiä. Haetaan Laplacen yhtälölle $\Delta u = 0$ ratkaisua alueessa $\Omega = \{(r, \theta) | 0 < r < 1, 0 < \theta < k\pi/4\}$, kun $u = 0$ janalla $\partial\Omega_1 = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, \theta = 0\}$, $\partial u / \partial n = (2/k)\sin(2\theta/k)$ kaarella $\partial\Omega_2 = \{(r, \theta) | r = 1, 0 \leq \theta \leq k\pi/4\}$ ja $\partial u / \partial n = 0$ janalla $\partial\Omega_3 = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, \theta = k\pi/4\}$. Kun parametrina esiintyvä kokonaisluku k kasvaa 1:stä 8:aan, alue Ω laajenee ympyrän kahdeksannesta täydeksi ympyräksi. Probleeman tarkka ratkaisu on $u = r^{2/k}\sin(2\theta/k)$.

Vaikka reuna-arvotekijän määrittelyyn on käytetty napakoordinaatteja (r, θ) , PLTMG:llä tehtävää kuitenkin käsitellään tavallisessa suorakulmaisessa (x, y) -koordinaatistossa. Ratkaisun u ensimmäiset osittaisderivaatat $\partial u / \partial x$ ja $\partial u / \partial y$ ovat origossa singularisia, jos $k > 2$, ja k :n kasvaessa niiden singularisuus voimistuu. Vaihtelemalla k :n arvoa voidaan kokeilla, kuinka singulariteetin voimistaminen vaikuttaa adaptiiviseen tihentämiseen.

Oheisessa kuvassa vasemmalla on arvoa $k = 7$ vastaava alue Ω ja siihen on piirretty alkukolmiointi (τ_1), oikealla kahden adaptiivisen tihennysten jälkeen saatu kolmiointi (τ_3). Tehtävää on käsitelty Teknillisen korkeakoulun AS/8043-tietokoneella, johon PLTMG-ohjelmisto (saatu professori Bankilta korvauksetta) on asennettu. Kuten on odotettavissa, verkko tulee tiheäksi singulariteetin ympäristössä. Muilla k :n arvoilla generoituvia verkkovaihtoehtoja sen paremmin kuin numeerisia ratkaisujakaan ei tässä ole mahdollista tilanpuutteen vuoksi esittää.

Kaavassa (13) esiintyvälle q :lle saadaan PLTMG:n avulla melko hyvin ykköstä lähellä olevia arvoja, kun käytetään adaptiivista verkon tihennystä. Tasaisella tihennysmallilla q :n teoreettinen optimiarvo olisi origossa olevan singulariteetin vuoksi vain $q = 2/k = 2/7$.



4 JATKAMISMENETELMÄSTÄ

PLTMG-ohjelmisto on erityisesti suunniteltu ottamaan huomioon ratkaisun u riippuvuus parametristä λ . Ryhmän (1)-(3) sijasta tässä voidaan aluksi tarkastella yleisempää yhtälöä

$$G(u, \lambda) = 0, \quad (14)$$

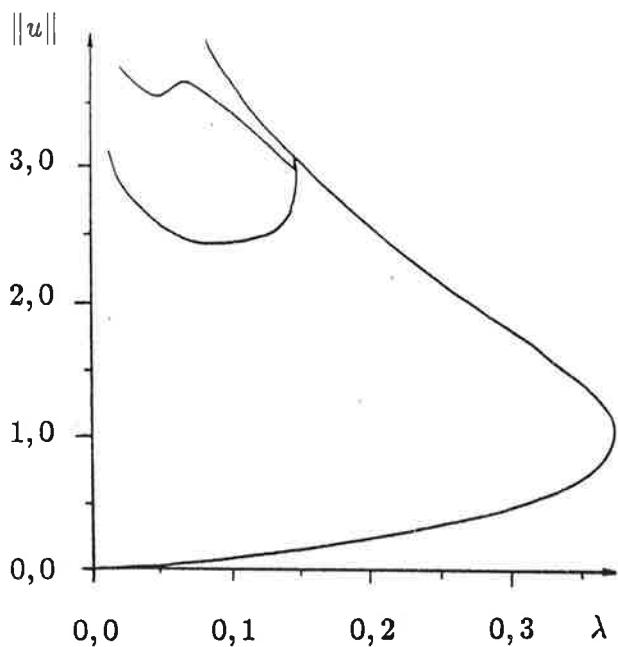
missä u kuuluu sopivaan funktioavaruuteen, λ on reaalinen skalaariparametri ja G jatkuvasti differentioituva operaattori.

On ainakin kolme tilannetta, missä eksplisiittisestä parametristä riippuvuus on tärkeä. Ensinnäkin yhtälö (14) voi kuvata fysikaalista probleemaa, missä u esittää joiain kenttämääntajuja. Jos u edustaa esimerkiksi virtauskenttää tai rakennearalyytisessä probleemassa siirtymiä, parametri λ voi esittää Reynoldsin lukua tai rakenteeseen kohdistuvaa kuormitusta. Tutkija on varmasti kiinnostunut riippuvuudesta $u = u(\lambda)$, sillä tehtävän ratkaiseminen eri λ :n arvoilla yhden kiinteän λ :n arvon asemesta antaa usein hyvin arvokasta tietoa. Toinen tilanne, missä λ esiintyy eksplisiittisesti, ovat lineaariset tai epälineaariset ominaisarvotehtävät. Kolmanneksi voi olla kyse vaikean epälineaarisen ongelman ratkaisemisesta. Tämä onnistuu yleensä vain iteratiivisesti ja silloinkin käytettävissä on tavallisesti oltava riittävä hyvä lähtöapproksimaatio. Hankalissa tilanteissa voidaan käyttää jatkamismenetelyä: Tehtävä ratkaistaan ensin jollain sellaisella λ :n arvolla, jota vastaava ratkaisu on helpompi löytää. (Jos tehtävässä ei ole sopivaa parametria λ , voidaan siihen sellainen tarvittaessa lisätä.) Saatua ratkaisua pidetään lähtöapproksimaationa tehtävälle, jossa λ :aa on hieman muutettu haluttuun suuntaan. Nämä tavallisesti saadaan uutta λ :n arvoa vastaava ratkaisu, jota taas voidaan pitää lähtöapproksimaation seuraavalle tehtävälle. Pienin askelin eteneminen on usein myös tapa löytää epälineaarisen probleeman mahdollisesti useista ratkaisuista se, joka kuvailee fysikaalista todellisuutta; muu menettely saattaisi tuottaa jonkin epäfysikaalisen ratkaisun.

Probleeman (14) ratkaisujen lukumäärä voi muuttua, kun parametrin λ arvoa muutetaan. Ratkaisuja voidaan karakterisoida käyttämällä $(\lambda, F(u))$ -tason käyriä, missä $F(u)$ on jokin u :n funktionaali. Käyrät voivat sisältää kääntymispisteitä, joissa λ :n muuttuessa käyrä kääntyy takaisin tulosuuntaansa, ja haarautumis- eli bifurkaatiopisteitä. Näillä erikoispisteillä voi ratkaisujen olemassaolon ja niiden lukumäärän selvittämisen ohessa olla muukin tärkeä merkitys, esimerkiksi yhteys jonkin yhtälöillä kuvattavan systeemin stabiiliuteen. Bifurkaatiopisteistä tunnetuimpia ja tavallisesti helpoimmin käsitteltäviä ovat lineaarisin ominaisarvotehtäviin liittyvät. Niissä triviaaliratkaisusta haarautuu ominaisarvojen kohdalla ominaisfunkcioita vastaavat haarat.

PLTMG-ohjelmisto sisältää apuneuvoja kuvatunlaisten käyrien seuraamiseksi ja erityisesti käyrien kääntymis- ja haarautumispisteiden määrittämiseksi. Funktionaliksi $F(u)$ on PLTMG:ssä valittu u :n L^2 -normi

$$\|u\| = \left\{ \int_{\Omega} u^2 dx dy \right\}^{1/2}. \quad (15)$$



Viereisessä kuvassa on $(\lambda, \|u\|)$ -diagrammi funktioille u , jotka yksikköneliössä $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ toteuttavat parametrista λ riippuvan yhtälön

$$-\Delta u + 10(u - \lambda e^u) = 0 \quad (16)$$

ja $\partial\Omega$:lla homogeenisen Neumann-reunaehdon $\partial u / \partial n = 0$. Kuvassa on rajoitettu arvoihin $\lambda \geq 0$, ja se on piirretty Bankin ja Chanin [3] tulosten mukaan. Arvon $\lambda = 0,14$ ympäristössä näyttää olevan ainakin 5 erilaista ratkaisua. Yksi ratkaisun haaroista vastaa funktiota u , joka on x :n ja y :n suhteeseen vakio, mutta riippuu λ :sta. Tämä vakiofunktio saadaan yhtälöstä $u = \lambda e^u$ eli $\lambda = u/e^u$. λ :n maksimiarvo tällä haaralla $1/e \approx 0,3679$ saavutetaan, kun $u = 1$. Tätä maksimiarvoa suuremmilla λ :n arvoilla ei probleemalla ole yhtään ratkaisua.

Ratkaisun u esittäminen parametrin λ funktiona ei ole aina mahdollista, ja usein onkin mukavampaa esittää sekä u että λ jonkin uuden parametrin s funktioina: $u = u(s)$, $\lambda = \lambda(s)$. Jos s merkitsee kaarenpituitta pitkin jotain ratkaisukäyrää, saadaan pisteessä $s = s_0$ käyrän yksikkötangentti $(\dot{u}_0, \dot{\lambda}_0)$ ryhmästä

$$G_u(u_0, \lambda_0)\dot{u}_0 + G_\lambda(u_0, \lambda_0)\dot{\lambda}_0 = 0, \quad (17)$$

$$\|\dot{u}_0\|^2 + |\dot{\lambda}_0|^2 = 1, \quad (18)$$

missä G_u on G :n Jacobin matriisi u :n suhteeseen, G_λ on G :n derivaatta λ :n suhteeseen, piste merkitsee derivointia s :n suhteeseen, $u_0 = u(s_0)$, $\dot{u}_0 = \dot{u}(s_0)$, $\lambda_0 = \lambda(s_0)$ ja $\dot{\lambda}_0 = \dot{\lambda}(s_0)$. Tangentin suunnan hakemiseksi voidaan ensin ratkaista lineaarinen yhtälö $G_u(u_0, \lambda_0)z = -G_\lambda(u_0, \lambda_0)z$:n suhteeseen, siten määrittää $\dot{\lambda}_0$ yhtälöstä $\dot{\lambda}_0^2 = 1/(\|z\|^2 + 1)$ ja lopuksi asettaa $\dot{u}_0 = \dot{\lambda}_0 z$. Koska $\dot{\lambda}_0$ määräytyy edellisestä vain merkkiä vaille, on tangentin suuntaan kuljetaessa valittava toinen kahdesta toisilleen vastakkaisesta suunnasta. Vaikka merkinnöillä ei asiaa tässä korosteta, laskeminen tapahtuu tietysti diskreettejä yhtälöitä käyttäen.

Ne käyrän pisteet, joissa G_u on singulaarinen, ovat erikoispisteitä, joko käänymis- tai haaraumispisteitä. PLTMG on suunniteltu käsittelemään vain yksinkertaisia erikoispisteitä, joissa G_u :n ytinen eli nollalle kuvaavien alkioiden joukon dimensio on 1. Jos $\text{Range}(G_u)$ tarkoittaa G_u :n kuva-aluetta, niin käänymispisteessä $G_\lambda \notin \text{Range}(G_u)$ ja haaraumispisteessä $G_\lambda \in \text{Range}(G_u)$. Yksinkertaisissa erikoispisteissä G_u :n determinantti vaihtaa merkkiä. Jos kyseessä on yksinkertainen (tai ylipäättäään parittoman kertaluvun) käänymispiste, vaihtaa myös λ merkkiä.

Jatkamismenetelmät ovat yleensä ennustaja-korjaaja-tyyppisiä. Pienillä askelilla pysytään ilmeisesti lähellä käyrää, jos ennustajalla liikutaan tangentin suuntaan. Korjausvaihe suoritetaan tavallisesti Newtonin iteraatiolla tai jollakin sen tapaisella menetelmällä.

Kun halutaan ratkaisua $(u(s), \lambda(s))$ arvosta s_0 poikkeavalla arvolla s , käytetään kirjallisessa esityyssä menetelmissä usein apuyhtälöä, esimerkiksi seuraavanlaista:

$$N \equiv \theta \dot{u}_0(u - u_0) + (2 - \theta) \dot{\lambda}_0(\lambda - \lambda_0) - (s - s_0) = 0. \quad (19)$$

Arvolla $\theta = 1$ tämä pakottaa uuden ratkaisun olemaan hypertasolla, joka on kohtisuorassa pisteeseen (u_0, λ_0) asetettua tangenttia vastaan ja etäisyydellä $s - s_0$ tähän pisteestä. Toisaalta uuden pisteen on toteutettava yhtälö $G(u(s), \lambda(s)) = 0$. Ehdoista muodostuva yhtälöryhmä ratkaistaan iteraatiolla. Arvosta 1. poikkeavan θ :n valitseminen voidaan tulkittaa tangentin kierrokksi. Apuyhtälön käytöllä pyritään helpottamaan etenkin singulaaristen pisteen käsittelyä. Koska G_u on näissä pisteissä singulaarinen matriisi, on pisteen haku iteratiivisesti hankalaa. Funktio N pyritään valitsemaan siten, että apuyhtälöllä laajennetun ryhmän Jacobin matriisi olisi ei-singulaarinen.

PLTMG:ssä valitaan (19):n asemesta

$$N \equiv \theta \dot{r}_0(r - r_0) + (2 - \theta) \dot{\lambda}_0(\lambda - \lambda_0) - (s - s_0) = 0, \quad (20)$$

missä $r = \|u\|$, $r_0 = r(u_0)$, $\dot{r}_0 = (dr(u)/ds)_{s=s_0}$ ja parametri θ on välillä $0 \leq \theta \leq 2$. PLTMG:n käyttäjä antaa tavoitearvon r :lle tai λ :lle ja ohjelma määrittää θ :n ja $(s - s_0)$:n käyttäjän puuttumatta asiaan. Jos sekä r :lle että λ :lle annetaan tavoitearvot, ohjelmisto tutkii heuristikesti, kumpi on helpompi saavuttaa ja pyrkii siihen. Jos ohjelma löytää singulaarisen pisteen lähtöarvon ja tavoitearvon väliltä, se määrittääkin sen tavoitearvon asemesta. Haarautumispisteessä käyttäjä voi halutessaan vaihtaa haaraa.

PLTMG:ssä edellä selostettu jatkamismenettely tapahtuu käyttäjän antamaan alkukolmioon tiin nojautuen eli harvimmassa verkossa. Kolmioinnin on syytä olla sen verran tiheä, että se näyttää käyrien kulun ainakin kvalitatiivisesti. Valituissa pisteissä ohjelmistolta voidaan pyytää ratkaisuja tiheämmissä verkoissa. Eri pisteissä tihennetyt verkot voivat olla erilaisia (ellei toisin määräätä), sillä ne muodostetaan adaptiivisella, numeerisen ratkaisun käyttäytymiseen mukautuvalla menetelmällä. Tavoitteeksi voidaan nytkin ottaa jokin r :n arvo tai jokin λ :n arvo. Lisäksi on mahdollista hakea ratkaisua pisteen (λ_0, r_0) kautta kulkevalta, harvimman verkon ratkaisukäyrää vastaan kohtisuoralta hypertasolta. Epälineaarisen systeemin ratkaiseminen tapahtuu Newtonin iteraatiota muistuttavalla menetelmällä.

Sopivissa kohdissa – esimerkiksi käyrän haaraudessa – ratkaisu voidaan tallettaa, ja siihen voidaan palata myöhempin, esimerkiksi ensiksi käsiteltäväksi otetun haaran tutkimisen jälkeen. Mahdollisuus palata aiemmin saatuun ratkaisuun on myös hyödyksi, jos jossain myöhemmässä vaiheessa joudutaan umpikujaan, esimerkiksi katkaisemaan ajo.

5 LISÄHUOMAUTUKSIA OHJELMISTON KÄYTÖSTÄ

PLTMG on suunniteltu käytettäväksi graafiselta pääteeltä interaktiivisesti, joskin töiden suorittaminen eräjoina on myös mahdollista. Interaktiivisessa työskentelyssä käyttäjä voi saada tulokset heti havainnollisessa muodossa tarkasteltavakseen ja voi niiden perusteella päätättää jatkotoimista. Teknillisen korkeakoulun laskentakeskuksessa PLTMG-ohjelmisto on muutettu käyttämään DISSPLAN (tunnettu graafinen aliohjelmakirjasto) aliohjelmia. Näin kuvat voidaan saada hyvin suurelle määärälle erilaisia päätteitä ja piirtureita. Kun näyttöpääteelle saatu kuva miellyttää, voidaan se lähetä laatupiirturille tai laserkirjoittimelle. Tällä hetkellä graafisen liitännän toteutus on tosin sellainen, että kuvat voidaan saada vain sille laitteelle, joka valitaan ajon alussa. Jos kuvia halutaan muille laitteille, on syytä tallettaa ratkaisu ja valita seuraavassa ajossa uusi laite.

Numeerista ratkaisua u^h tai jotakin sen lauseketta vastaava pinta voidaan piirtää korkeus- eli tasa-arvokäyrästönä tai halutusta suunnasta muodostettuna yhdensuuntaisperspektiivikuvana. Laskenta-alue, alkukolmiointi ja siitä muodostetut tiheämät verkot voidaan haluttaessa piirtää. Kuvia voidaan myös zoomata yksityiskohtien selville saamiseksi. Piiloona jäävät viivat voidaan piirtää tai jättää piirtämättä – aivan käyttäjän maun mukaan.

Alfanumeerista tulostusta voidaan pyytää ratkaisun eri vaiheissa ja sen laajuuteen on helppo vaikuttaa. Luettelo kulloinkin voimassa olevista parametriasetuksista lienee tulostuksista useimmin käytettyjä. Alkukolmioinnista saadaan kolmioiden muodon perusteella laskettuja hyvyyslukuja sekä kolmioiden suurimmat ja pienimmät kulmat. Tihennetyistä verkoista on mahdollista saada selville kunkin kolmion asema verkkohierarkiassa, kärkien koordinaatit ja ratkaisemisen jälkeen numeerisen ratkaisun arvo kärjissä. Lisäksi on mahdollista saada ratkaisemiseen liittyvää statistiikkaa, kuten tietoja iteraatiokierrosten määristä, laskuajoista ja muistin käytöstä. Käyttäjän antamien Ω :n osa-alueiden yli voidaan laskea ratkaisuun liittyviä integraaleja

$$\int_R p_1 dx dy \quad \text{ja} \quad \int_{\partial R} \{p_2 + p_3 n_x + p_4 n_y\} ds,$$

joissa $p_i = p_i(x, y, u, \nabla u, \lambda)$, $i = 1, 2, 3, 4$, ja (n_x, n_y) on ∂R :n yksikköulkonormaali. Alueen R on muodostuttava unionina alkuperäisen Ω :n kolmioinnin elementeistä.

PLTMG on itse asiassa vain yksi PLTMG-ohjelmiston aliohjelmista, vaikka koko ohjelmisto on saanut sen mukaan nimensä. Aliohjelmien joustavaksi kutsumiseksi on olemassa pääohjelma ATEST. Ratkaistavana oleva probleema määritellään erillisillä aliohjelmilla, joita ATEST kutsuu. ATEST-ohjelman sisältyy myös erityinen U-komento (aliohjelman USRCMD kutsu), johon voidaan liittää sellaisia toimintoja, joita ATESTistä ei valmiina löydy. Ohjelmiston mukana saadut esimerkkiohjelmat helpottavat uusien probleemojen määrittelyä.

Ohjelmistossa on oma sisäinen opastusjärjestelmänsä. Se ei ole ohjelmiston käyttöohje, mutta kokenut käyttäjä voi sen avulla nopeasti palauttaa mieleensä joitakinasioita, mm. komentojen syntaksin ja virhekoodien merkityksen.

KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Bakhvalov, N. S., On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator. U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. **6**, No. 5, 101-135 (1966).
- [2] Bank, R. E., PLTMG Users' Guide, Edition 4.0. Technical Report, Department of Mathematics, University of California at San Diego, La Jolla, California, 1985.
- [3] Bank, R. E., and Chan, T. F., PLTMGC: a multi-grid continuation program for parameterized nonlinear elliptic systems. SIAM J. Sci. Stat. Comput. **7**, 540-559 (1986).
- [4] Bank, R. E., and Rose, D. J., Analysis of a multilevel iterative method for nonlinear finite element equations. Math. Comp. **39**, 453-465 (1982).
- [5] Brandt, A., Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. Math. Comp. **31**, 333-390, 1977.
- [6] Fedorenko, R. P., The speed of convergence of an iterative process. U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. **4**, No. 3, 227-235 (1964).
- [7] Hackbusch, W., and Trottenberg, U. (editors), Multigrid Methods. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 960, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [8] Hackbusch, W., and Trottenberg, U. (editors), Multigrid Methods II. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1228, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [9] McCormick, S. F. (editor), Multigrid Methods. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1987.

ULOKESAUMAN KITKA JA SEN TEORIA

A.Miettinen

Tampereen teknillinen korkeakoulu

1 JOHDANTO

Rakenteissa olevien saumojen, liitosten ja halkeamien johdosta rakenteen siirtymät ja jännitykset saattavat erota merkittävästi vastaavasta ehjästä rakenteesta. Näiden häiriökohtien sauvarakenteisiin aiheuttamat jännityshuiput vaimenevat kuitenkin melko nopeasti etääännyttääessä häiriökohdasta kun taas siirtymien epäjatkuvuuksien vaikutus ulottuu koko sauvalle. Tämän vuoksi rakennusalan kosketusprobleemoissa ei kosketusjännitysten yksityiskohtainen tuntemus ole usein niinkään tärkeää kuin saumojen vaikutus koko rakenteen toimintaan; sen jäykyyteen ja siirtymiin.

Kirjoituksessa käsitellään sauvan ja jäykän alustan välisen sauman käyttäytymistä kahdessa ääritapauksessa:

- a) Saumapinnat ovat täysin sileät ja niiden välillä vaikuttaa pelkkä dissipatiivinen kitka.
- b) Sauman leikkausjännitykset johtuvat pelkästään kitkattomien pintojen epätasaisuuksien aiheuttamasta geometrisesta kitkasta, jolloin kitkakulma yhtyy epätasaisuuksien suurimpaan kaltevuuskulmaan.

Yleisessä tapauksessa kitkakulmaan vaikuttavat nämä molemmat [1].

2 TEORIA

Tarkastellaan lieriömäistä sauvaa, jonka painopisteakseli on x-akselilla. Sauva tukeutuu vетоakeстämättомällä kitkallisella saumalla

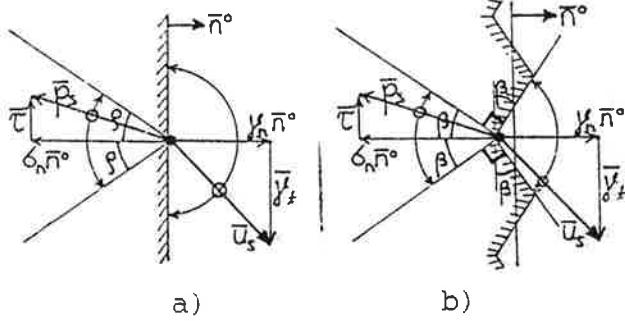
jäykkään alustaan, jota vasten sitä painetaan vinolla puristusvoimalla \bar{F} . Tällöin saumakohdassa vaikuttaa sekä epäkeskeinen puristus- että leikkauusvoima. Mikäli puristusvoiman vaikutussuora kulkee saumakohdassa sauvan poikkileikkauksen sydänalueen ulkopuolelta, sauna alkaa aueta ja vastakkaisen saumapintojen välillä tapahtuu yleensä liukumista.

Alkutilaksi otetaan alkujännityksetön ($\bar{F} = \bar{0}$) ja -välyksetön tila ja vastakkaisen saumapintojen edellytetään olevan yhteneväät. Tällöin kuormituksen \bar{F} kasvaessa on kyseessä ns. suhteellinen kuormitus, jossa on voimassa [2]: Jos kuormitusta \bar{F} vastaa ratkaisu $\{\bar{p}, \bar{\epsilon}, \bar{u}, \bar{\epsilon}\}$, vastaa kuormitusta $\lambda \bar{F}$ ratkaisu $\{\lambda \bar{p}, \lambda \bar{\epsilon}, \lambda \bar{u}, \lambda \bar{\epsilon}\}$. Alustaan kohdistuvien kosketusjännitysten $\bar{p}_s = \delta_n \bar{n}^\circ + \bar{T}$ ja sauvan saumapinnan siirtymien $\bar{u}_s = \gamma_n \bar{n}^\circ + \bar{f}_t$ pitää toteuttaa ehdot [2]:

$$1) \text{ sauman voimansiirtoehdot: } \delta_n \leq 0 ; |\bar{T}| \leq |\delta_n| \tan \psi \quad (1)$$

missä $\psi = \varphi + \beta$; φ = sileiden pintojen välinen kitkakulma ja β = saumapintojen epätasaisuuksien suurin kaltevuuskulma.

$$2) \text{ läpitunkemattomuusehdo: } \gamma_n \geq 0 ; \gamma_n \geq |\bar{f}_t| \tan \beta \quad (2)$$



Kuva 1. Saumapinnan luvallinen siirtymä u ja jännitys p .
 a) dissipatiivinen kitka
 b) geometrinen kitka

- Näistä saadaan ääritapaukset :
- a) puhdas dissipatiivinen kitka, kun $\beta = 0$ (kuva 1a). Tällöin $\psi = \varphi$ ja eo. ehdot saadaan muotoon
 - 1) $\delta_n \leq 0 ; |\bar{T}| \leq |\delta_n| \tan \varphi$
 - 2) $\gamma_n \geq 0$
 - b) puhdas geometrinen kitka, kun $\varphi = 0$ (kuva 1b). Tällöin $\psi = \beta$ ja eo. ehdot saadaan muotoon
 - 1) $\delta_n \leq 0 ; |\bar{T}| \leq |\delta_n| \tan \beta$
 - 2) $\gamma_n \geq 0 ; \gamma_n \geq |\bar{f}_t| \tan \beta$

On huomattava, että kitkatapauksen a) ratkaisut eivät yleensä ole yksikäsitteisiä, kun taas tapauksen b) ovat [2]. Toisaalta kitkata-

pauksen b) sauman siirtymiä koskevat ehdot eivät vastaa fysikaalista todellisuutta vaan pätevät vain infinitesimaalisilla siirtymillä.

Sauvan poikkileikkaukseen $\Gamma(x)$ vaikuttaa kuormitus $R(x) = \{N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z\}^T$, joka aiheuttaa poikkileikkaukseen jännityskentän $\bar{p}(x) = \{\sigma_x, T_{xy}, T_{xz}\}^T$. Riittävän kaukana saumasta jännitysvektori $\bar{p}(x)$ jakautuu kuten äärettömän pitkässä sauvassa ja se voidaan esittää muodossa

$$\bar{p}(x) = \sum_{i=1}^6 \bar{g}^i R_i(x) \quad (3)$$

missä $\bar{g}^i = \{\sigma_x^i, T_{xy}^i, T_{xz}^i\}^T$ on kuormituksen $R_i = 1$ poikkileikkaukseen aiheuttama jännitysjakautuma. Poikkileikkauksen saadessa siirtymäkentän $\bar{u} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ on poikkileikkaukseen vaikuttavien jännitysten \bar{p} tekemä ulkoinen työ

$$w = \int_{\Gamma} \bar{p} \cdot \bar{u} \, d\Gamma = \sum_{i=1}^6 R_i \int_{\Gamma} \bar{g}^i \cdot \bar{u} \, d\Gamma = \sum_{i=1}^6 R_i U^i; \quad U^i = \int_{\Gamma} \bar{g}^i \cdot \bar{u} \, d\Gamma \quad (4)$$

missä kuormituskomponenttia R_i vastaava yleistetty siirtymä U^i on poikkileikkauksen siirtymäjakautuman painotettu keskiarvo. Toisaalta ulkoinen työ kuormituksen \bar{F} avulla lausuttuna on

$$w = |\bar{F}| U_F = \sum_{i=1}^6 R_i U^i \quad \Rightarrow \quad U_F = \frac{\sum_{i=1}^6 R_i U^i}{|\bar{F}|} \quad (5)$$

missä yleistetty siirtymä U_F kuvaa \bar{F} :n vaikutuspisteen siirtymää \bar{F} :n suunnassa. Rakenteen jäykkyys D määritellään lausekkeella (2)

$$D = \frac{|\bar{F}|}{U_F} \quad (6)$$

Jännitys- ja siirtymätila $\{\bar{p}, \sigma, \bar{u}, \varepsilon\}$ voidaan jakaa kahteen komponenttiin - kuormituksella \bar{F} rasitetun vastaavan monoliittisen rakenteen tilaan $\{\bar{p}_e, \sigma_e, \bar{u}_e, \varepsilon_e\}$ ja sauman aiheuttamaan häiriötilaan $\{\bar{p}_h, \sigma_h, \bar{u}_h, \varepsilon_h\}$, jota vastaava kuormitus $\bar{F} = \bar{0}$. Myös yleistetyt siirtymät voidaan jakaa komponentteihin

$$U^i = U_e^i + U_h^i ; \quad U_e^i = \int_{\Gamma} \bar{g}^i \cdot \bar{u}_e \, d\Gamma ; \quad U_h^i = \int_{\Gamma} \bar{g}^i \cdot \bar{u}_h \, d\Gamma \quad (7)$$

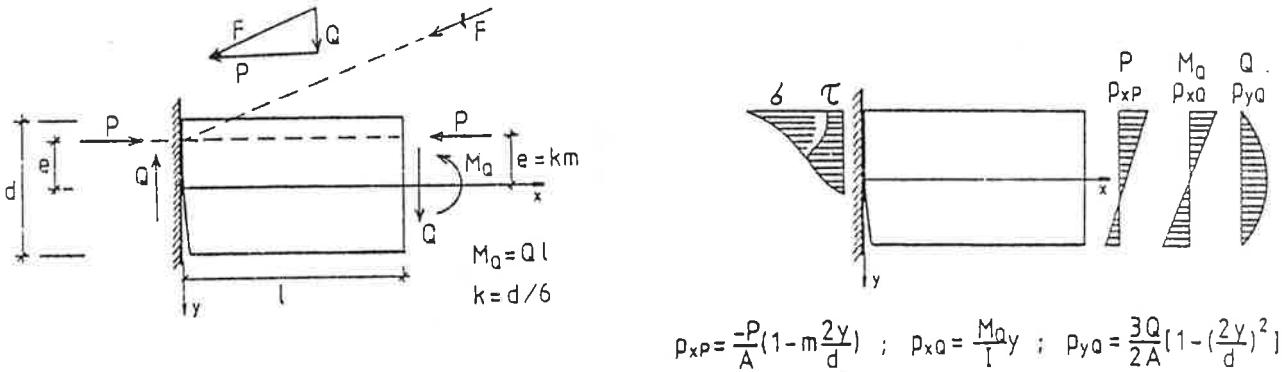
Häiriötilasta aiheutuvat siirtymät $\bar{U}_h = \{v_{xh}, v_{yh}, v_{zh}, \omega_{xh}, \omega_{yh}, \omega_{zh}\}^T$ voidaan ajatella saumakohdassa tapahtuviksi siirtymien pistemäisiksi hyppäyksiksi, sauvan muodonmuutosten ollessa muualla vastaavan monoliittisen rakenteen mukaiset eli lähinnä teknisen taivutusteen mukaiset.

3 NUMERINEN ESI MERKKI

3.1 Tarkasteltava rakenne ja sen mallintaminen

Tarkastellaan edelläkuvattua ongelmaa tasotapauksena. Otetaan riittävän pitkä (pituus $l=2d$ [3]) levymäinen sauva, jonka päässä vaikeuttaa teknisen taivutusteen mukaisesti jakaantunut kuormitus $R(l) = \{N, Q_y, M_z\} = \{-P, Q, (Pe+Ql)\}^T$ (kuva 2). Jännitysjakautuma voidaan esittää muodossa (3)

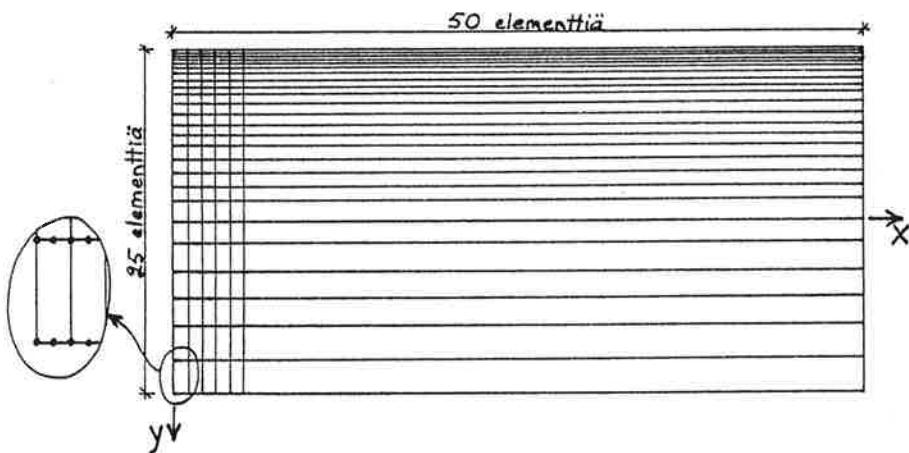
$$\bar{P} = \sum_{i=1}^3 \bar{g}^i R_i ; \quad \bar{g}^1 = \begin{Bmatrix} 1/A \\ 0 \end{Bmatrix} , \quad \bar{g}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2A}(1 - (\frac{2y}{d})^2) \end{Bmatrix} , \quad \bar{g}^3 = \begin{Bmatrix} y/I \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$



Kuva 2. Tarkasteltava rakenne ja kuormitukset.

Rakennetta analysoitiin FEM-ohjelmalla SAP6 kuvan 3 mukaisella elementtiverkolla. Elementteinä käytettiin valintasolmuisia tasojännitystila-elementtejä. Poissonin vakioksi valittiin $\nu=0,20$ ja sauman kitkakulmaksi $\tan \varphi = 1$. Tulosten haluttiin olevan luvalliseen siir-

tymätilaan perustuvia, joten elementtiverkko pidettiin konformisena ja elementtejä käytettiin 6-solmuisina kuvan 3 mukaisesti, jolloin sauman läpitunkemattomuusehtoa ei tarvitse solmujen välillä erikseen tarkistaa. Koska elementit ovat suorakaiteen muotoisia, on jäykkyysmatriisin integrointiin käytetty Gauss-Legendren 3x3-pisteiden numeerinen integrointi tarkka [3]. Kuormitusta \bar{P} vastaavat ekvivalentiset solmukuormitukset integroitiin tarkasti (käsin).



Kuva 3. Käytetty elementtiverkko.

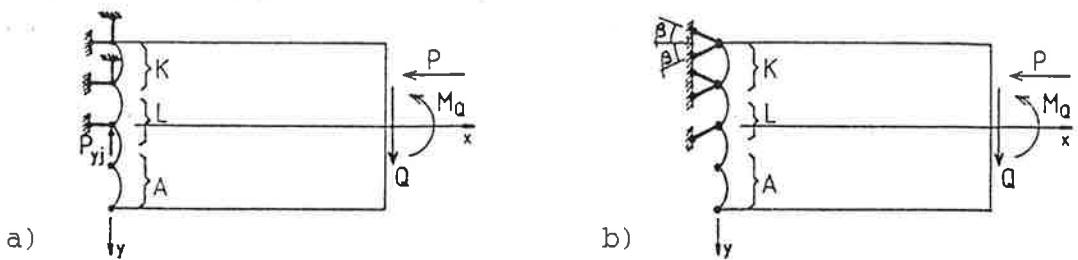
Sauman kitka- ja läpitunkemattomuusehtojen toteuttamiseksi sauvan saumapinnalle kuuluvat solmut tuettiin seuraavasti:

a) dissipatiivinen kitka (kuva 4a)

Täysin kiinni pysyväällä alueella solmu tuettiin sekä saumapinnan normaalilla suuntaisella vетоакестämättömällä "puristus"sauvalla, että sauman suuntaisella "leikkaus"sauvalla, joiden jäykkyys annettiin niin suureksi, että solmun siirtymä voitiin katsoa merkityksettömäksi. Liukuvalla alueella leikkaussauva poistettiin ja solmuun annettiin kuormitukseksi puristussauvan voimasta laskettu kitkavoima. Aukeavalla alueella sekä puristus- että leikkaussauva poistettiin. Kitkaehdon toteutuminen tarkastettiin diskreetisti solmuvoimien perusteella (es. tuentasauvojen voimista sekä solmuihin annetuista kitkavoimista).

b) geometrinen kitka (kuva 4b)

Saumapinnan solmut tuettiin kahdella kitkakulman verran vinolla vетоакестämättömällä sauvalla, joiden jäykkyys annettiin suureksi. Näin tuettuna sen siirtymät toteuttavat läpitunkemattomuusehdon ja solmun tukireaktio toteuttaa kitkaehdon automaattisesti.



Kuva 4. Saumapinnan tuenta eri alueilla; K=täysin kiinni pysyvä alue, L=liukuva alue, A=aukeava alue.
a) dissipatiivinen kitka. b) geometrinen kitka.

3.2 Ongelman ratkaisu

Kosketuspinta ja liukuva alue iteroidtiin SAP6:lle lähtötiedoston kirjoittavalla, rakenteen reunaehdoja muuttavalla ohjelmalla seuraavien algoritmien mukaisesti:

a) Dissipatiivinen kitka

- 1) - Alkuarvaus, sauma täysin kiinni; $IB(i)=0$, $i=1,2N$
 $FF(i)=0$, $i=1,N$
- 2) - Mennään kohtaan 6)
- 3) - Luetaan SAP6:lla ratkaistut saumapinnan solmujen siirtymät $DY(i), i=1,N$ sekä puristus- ja leikkaussauvojen voimat $PF(i)$, $QF(i), i=1,N$.
- Nollataan $IB(i)=0, i=1,2N$, $FF(i)=0, i=1,N$.
- 4) - "Poistetaan" puristussauvat, joissa vетоа;
 - jos $PF(i) > 0 \Rightarrow IB(i)=1, i=1,N$
 - "Poistetaan" leikkaussauvat, joissa sauma pyrkii liukumaan tai on liukunut jo edellisellä iterointikierroksella;
 - jos $|QF(i)| > \tan\phi |PF(i)| \Rightarrow IB(i+N)=2, i=1,N$
 - jos $IVB(i+N)=2 \Rightarrow IB(i+N)=2, i=1,N$
 - Jos liukuvaksi oletetun solmun liukuma luvaton (samaan suuntaan kuin kitkavoima), estetään liukuma asettamalla leikkaussauva takaisin:
 - jos $IVB(i+N)=2$ ja $SIGN(VFF(i))=SIGN(DY(i)) \Rightarrow IB(i+N)=0, i=1,N$
 - "Poistetaan" leikkaussauva, jos saumapinta aukeaa;
 - jos $PF(i) > 0 \Rightarrow IB(i+N)=1, i=1:N$

- Lasketaan liukuvien solmujen kitkavoimat

$$\text{jos } IB(i+N)=2 \Rightarrow FF(i) = -\text{SIGN}(QF(i)) \cdot \tan\varphi \cdot |PF(i)|, i=1, N$$
- 5) - Tutkitaan, onko iterointi konvergoinut:
 onko kaikilla i $IB(i) = IVB(i)$, $i=1, 2N$
 ovatko liukuvien solmujen kitkavoimien muutokset pieniä

$$\sum_{i=1}^N (VFF(i) - FF(i))^2 < \epsilon \sum_{i=1}^N (FF(i))^2; \quad \epsilon = \text{annettu toleranssi}$$
 - Jos on, mennään kohtaan 9)
- 6) - Kopioidaan tämän iter.kierr. perusteella "poistetut" sauvat ja liukuvien solmujen kitkavoimat vektoreihin IVB ja VFF

$$IVB(i) = IB(i), i=1, 2N; \quad VFF(i) = FF(i), i=1, N$$
- 7) - Kirjoitetaan lähtötiedosto SAP6:lle. Sauvat "poistetaan" muuttamalla niiden kimmomoduli hyvin pieneksi;

$$\text{jos } IB(i) \neq 0 \Rightarrow Es \approx 0, \text{ muuten } Es \text{ suuri}$$
 - Liukuval alueen solmuihin kuormitukseksi puristussauvan voimasta laskettu kitkavoima;

$$\text{jos } IB(i+N)=2 \Rightarrow \text{solmuun kuormitus } FF(i), i=1, N$$
- 8) - Ratkaistaan rakenne SAP6:lla ja mennään kohtaan 3)
- 9) - Ratkaisu löytynyt

b) Geometrinen kitka

- 1) - Alkuarvaus, esim. sauma täysin kiinni $\Rightarrow IB(i)=0, i=1, 2N$
- 2) - Mennään kohtaan 6)
- 3) - Luetaan SAP6:lla ratkaistut sauvavovoimat $PF(i), i=1, 2N$
 - Nollataan $IB(i)=0, i=1, 2N$
- 4) - "Poistetaan" kaikki sauvat, joissa vетоа;

$$\text{jos } PF(i) > 0 \Rightarrow IB(i)=1, i=1, 2N$$
- 5) - Tarkistetaan, onko iterointi konvergoinut
 onko kaikilla i $IB(i) = IVB(i), i=1, 2N$
 - Jos on, mennään kohtaan 9)
- 6) - Kopioidaan tämän iter.kierr. perusteella "poistetut" sauvat vektoriin IVB; $IVB(i) = IB(i), i=1, 2N$
- 7) - Kirjoitetaan lähtötiedosto SAP6:lle. Sauvat "poistetaan" muuttamalla niiden kimmomoduli hyvin pieneksi;

$$\text{jos } IB(i) = 1 \Rightarrow Es \approx 0, \text{ muuten } Es \text{ suuri}$$
- 8) - Ratkaistaan rakenne SAP6:lla ja mennään kohtaan 3)
- 9) - Ratkaisu löytynyt

Koska tapauksessa a) on ratkaisussa otettava huomioon sauman siir-

tymiä ja vетоakestämättömyyttä koskevien ehtojen lisäksi saumapinan normaali- ja leikkausjännitysten välinen kitkaehdot, on ratkaisun löytäminen huomattavasti hankalampaa kuin tapauksessa b), jossa esiintyy vain siirtymä ja vетоakestämättömyyttä koskevat ehdot. Tapauksen b) algoritmi on sama kuin lähteessä [4] esitetty lineaarisken kosketuksen algoritmi.

3.3 Siirtymäparametrit

Ratkaisun löydyttyä, saadaan sauvan kuormituspäädyn yleistetyt siirtymät kaavan (4) mukaisesti päädyn siirtymistä $\bar{u} = \{u_x, u_y\}^T$

$$\begin{aligned} U^1 &= v_x = \int_A \bar{g}^1 \cdot \bar{u} \, dA = \frac{1}{A} \int_A u_x \, dA \\ U^2 &= v_y = \int_A \bar{g}^2 \cdot \bar{u} \, dA = \frac{3}{2A} \int_A \left(1 - \left(\frac{q_y}{d}\right)^2\right) u_y \, dA \\ U^3 &= \omega_z = \int_A \bar{g}^3 \cdot \bar{u} \, dA = \frac{1}{I} \int_A y u_x \, dA \end{aligned} \quad (9)$$

Kun vastaavan monoliittisen rakenteen yleistetyt siirtymät tunnetaan, saadaan häiriötilan yleistetyt siirtymät erotuksina

$$U_h^i = U^i - U_e^i \quad (10)$$

Tässä on haluttu selvittää pelkät sauman aukeamisesta ja siinä tapahtuvista liukumista aiheutuvat ilmiöt, joten monoliittisena rakenteena on käytetty päästään jäykästi alustaan kiinnitettyä sauvalaa (saumapään laajeneminen estetty) ja myös sen siirtymät on määritelty elementtimenetelmällä.

Esitetään häiriötilan yleistetyt siirtymät muodossa

$$\begin{aligned} U_h^1 &= v_{xh} = \frac{Pd}{EA} \beta_h \\ U_h^2 &= v_{yh} = \frac{Pd}{EA} \varepsilon_h - l \omega_{zh} \\ U_h^3 &= \omega_{zh} = \frac{Pd}{EAk} \alpha_h \end{aligned} \quad (11)$$

$$U_{Fh} = \frac{Pd}{EA} \delta_h$$

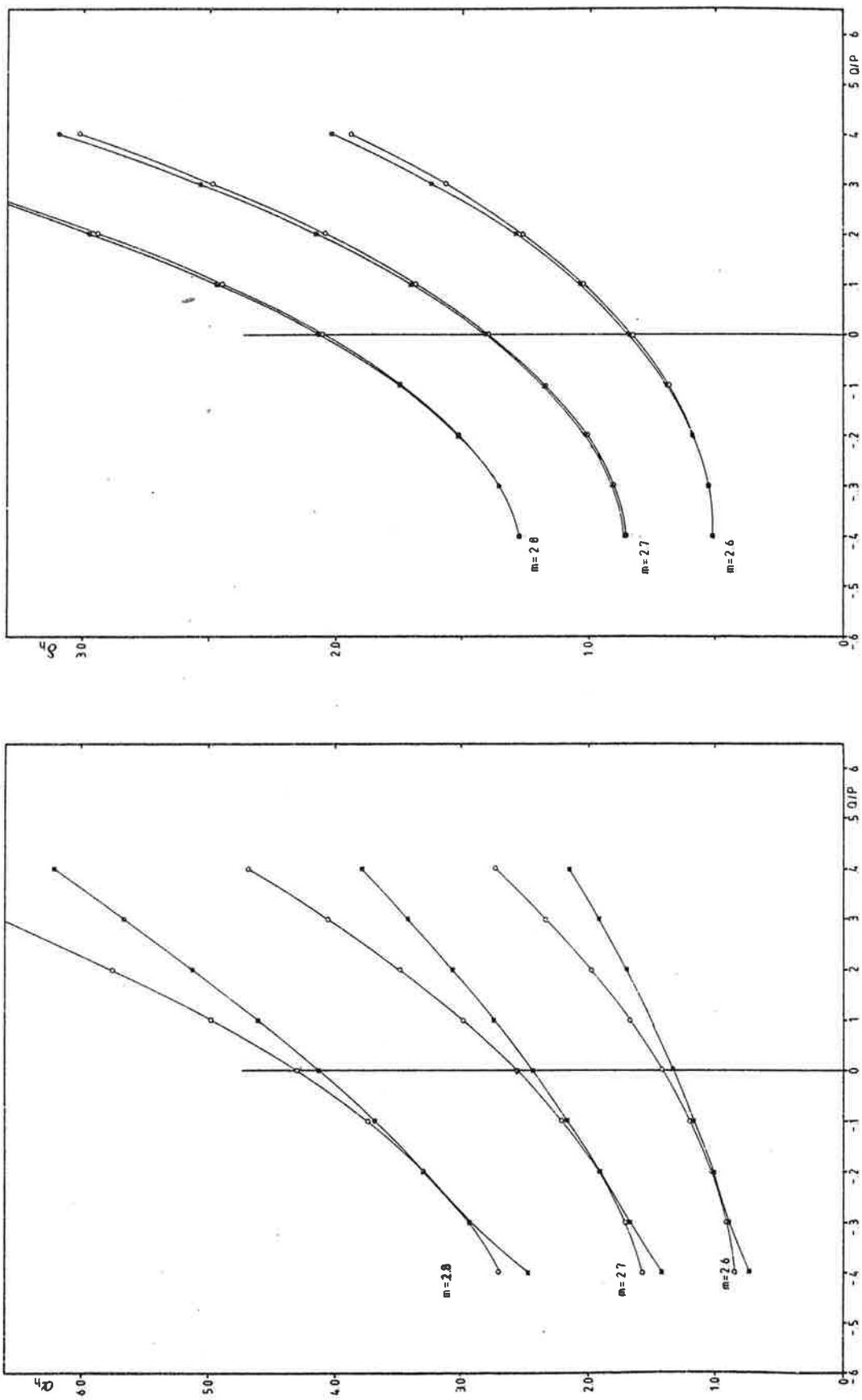
missä $k=d/6$ on sydänpisteen etäisyys poikkileikkausen painopisteestä ja termejä β_h , ε_h , α_h ja δ_h sanotaan häiriötilan siirtymäparametreiksi.

3.4 Tulokset

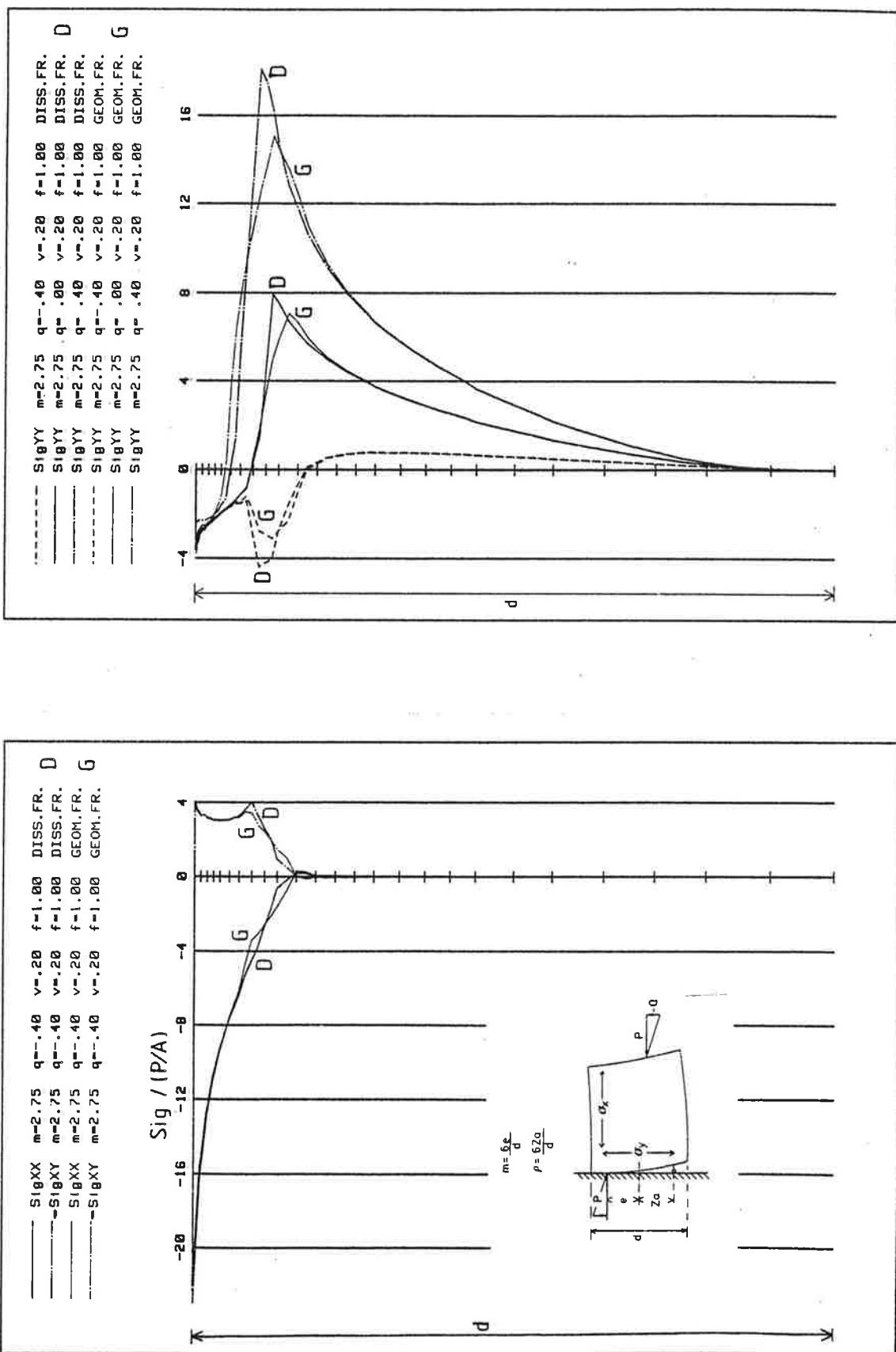
Sauman aukeamisen ja siinä tapahtuvien liukumien johdosta sauvan häiriötilan siirtymät kasvavat nopeasti puristusvoiman epäkeskisyden ja leikkausvoiman ja puristusvoiman suhteen kasvaessa (kuva 5). Tällöin saumaan muodostuu terävä kosketusjännityshuippu (σ_x), mutta lisäksi saumakohtaan syntyy huomattavia saumapinnan suuntaisia vettöjännityksiä (σ_y), joita leikkausvoima vaikutussuunnasta riippuen nopeasti suurentaa tai pienentää (kuva 6). Myös käytetty kitkalaki vaikuttaa jonkin verran jännityshuippuihin ja yksittäisiin siirtymiin (esim $\alpha_h \Delta \omega_h$). Rakenteen jäykkyyteen (δ_h) sillä ei sensijaan ole juurikaan vaikutusta tavallisilla leikkausvoiman ja puristusvoiman suhteilla. Täten helpommin ratkaistava geometrinen kitka antaa käyttökelpoisia arvioita rakenteen toiminnalle ainakin tässä tutkitulla rakenteella.

KIRJALLISUUTTA

- [1] H. Parland. Friction Law, Stiffness and Stability of Non-monolithic Structures. III Suomen mekaniikkapäivät. Helsinki 1988.
- [2] H. Parland. On the Stiffness of Non-monolithic Structures. State Institute for Technical Research, Finland. Publ. No 123, helsinki 1968.
- [3] A. Miettinen. Palapalkin saumakohdan jännitys- ja muodonmuutostila. Tampereen teknillinen korkeakoulu. diplomityö, Tampere 1984.
- [4] M. Heinisuo, M. Lepistö. Ratkaisualgoritmien vertailuja lineaarisien komplementaarisen tehtävän ratkaisussa. III Suomen mekaniikkapäivät, Helsinki 1988.



Kuva 5. Häiriötilan siirtymäparametrit $\alpha_h (\Delta \omega_{zH})$ ja $\delta_h (\Delta U_{FH})$ puristusvoiman P epäkeskisywyden $m=e/k$ eri arvoilla suhteen $q=Q/P$ funktiona. \times = dissipatiivinen kitka
 \circ = geometrinen kitka



Kuva 6. Saumapinnan jännitykset puristusvoiman P epäkeskisyiden $m=e/k$ ja suhteen $q=Q/P$ eri arvoilla.

ON THE MIXED AND STRESS FORMULATIONS OF THE FEM

Martti Mikkola †, Reijo Kouhia ‡

† Helsinki University of Technology

‡ The Academy of Finland

1 INTRODUCTION

The existence and uniqueness of saddle point problems are guaranteed by the Babuška-Brezzi condition *Babuška* [1], *Brezzi* [2], *Fortin* [3]. The interpretation of this abstract condition in the discrete problems of structural analysis has been considered by *Hartmann* [4, 5].

The purpose of this paper is to study the meaning of the Babuška-Brezzi condition in the mixed and force approaches of the finite element method. The problem of elasticity and its solution by the variational schemes are used as a model. The meaning of the Babuška-Brezzi condition is illustrated by simple examples.

2 PROBLEM OF ELASTICITY AND VARIATIONAL PRINCIPLES

2.1 Problem of elasticity

Consider an elastic body occupying the region V in a Cartesian reference frame x_i . In the part S_u of the surface of the body the displacements are prescribed and in the remaining part S_t the tractions are prescribed. The governing equations are [6], using familiar notation,

$$\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } S_t \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } V \quad (3)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{or} \quad \varepsilon_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl} \quad \text{in } V. \quad (5)$$

The comma denotes the partial derivative $(\)_{,j} = \partial(\)/\partial x_j$. The strain energy and the stress energy of an elastic body are defined by the integrals

$$\frac{1}{2}A(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{2} \int_V a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}dV, \quad \frac{1}{2}B(\sigma, \sigma) = \frac{1}{2} \int_V b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}dV. \quad (6)$$

2.2 Principle of potential energy

To begin with, the space of kinematically admissible displacements is defined

$$U = \{u \mid u \text{ regular, } u = \bar{u} \text{ on } S_u\}. \quad (7)$$

The regularity of u means that the condition $u = \bar{u}$ has sense and that the necessary integrations can be carried out. Actually $U = H^1(V)$ is a Hilbert-space.

The potential energy of the elasticity problem is

$$\Pi_P(u) = \frac{1}{2}A(u, u) - L(u), \quad (8)$$

where $A(u, v)$ is the symmetrical bilinear form obtained from expression (6)₁, elliptic in U ,

$$A(u, v) = \frac{1}{4} \int_V a_{ijkl} u_{i,j} v_{k,l} dV, \quad A(u, u) \geq c \|u\|^2, \quad c > 0, \quad \forall u \in U, \quad (9)$$

and $L(u)$ is the linear functional, bounded in U

$$L(u) = \int_V \bar{f}_i u_i dV + \int_{S_t} \bar{t}_i u_i dS, \quad |L(u)| \leq C \|u\|, \quad C < +\infty, \quad \forall u \in U. \quad (9')$$

The function u , which minimizes the potential energy in the space U , is the solution of the elasticity problem, a so-called weak solution. An equivalent problem for the minimizing problem is also the following: find $u \in U$ such that

$$A(u, v) - L(v) = 0 \quad \forall v \in U_0, \quad (10)$$

U_0 is a displacement space with the property $u = 0$ on S_u . The equation (10) expresses the principle of virtual displacements, i.e. the equation of equilibrium.

2.3 Principle of complementary energy

First the space of stresses

$$\Sigma = \{\sigma \mid \sigma_{ij} \in L^2(V), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}\} \quad (11)$$

and the space of strains

$$\Sigma' = \{\varepsilon \mid \varepsilon_{ij} \in L^2(V), \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}\} \quad (12)$$

are introduced. Σ and Σ' are dual spaces connected by the bilinear form

$$(\sigma, \varepsilon) = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (13)$$

Next, the subspace of statically admissible stresses is defined as follows

$$\Sigma_a = \{\sigma \in \Sigma \mid (\sigma, \varepsilon(v)) = L(v) \quad \forall v \in U_0\}, \quad (14)$$

where $\varepsilon(\mathbf{v})$ denotes the strain computed according to equation (3). The elements of Σ_a satisfy equations (1) and (2), assuming that the derivatives required in equation (1) exist.

The complementary energy functional of the elasticity problem is

$$\Pi_C(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}B(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS. \quad (15)$$

The principle of complementary energy is: the solution of the elasticity problem is the solution of the minimum problem

$$\inf_{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_a} \Pi_C(\boldsymbol{\sigma}) \quad (16)$$

An equivalent problem with (16) is: find $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_a$ such that

$$B(\boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) - \int_{S_u} \hat{\sigma}_{ij} n_j \bar{u}_i dS = 0 \quad \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \Sigma_{a0}, \quad (17)$$

in which the space Σ_{a0} consist of stresses satisfying homogeneous equilibrium equations

$$\Sigma_{a0} = \{\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \Sigma \mid (\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \varepsilon(\mathbf{v})) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in U_0\}. \quad (18)$$

It has to be observed that in complementary energy method, two spaces are involved, Σ and U , the latter serving to the definition of equilibrium.

2.4 Hellinger-Reissner principle

The Hellinger-Reissner functional is arrived at by adding to the complementary energy (15) the conditions of equilibrium (1) and (2) through Lagrange multipliers, which turn out to be the displacements. Usually, the negative of the expression (15) is taken, and the functional is obtained in the form

$$\Pi_R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = -\frac{1}{2}B(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u})) - L(\mathbf{u}). \quad (19)$$

The solution of the elasticity problem is found as the solution of the saddle point problem

$$\inf_{\mathbf{u} \in U} \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_a} \Pi_R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_a} \inf_{\mathbf{u} \in U} \Pi_R(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}). \quad (20)$$

An equivalent problem to (20) is to find $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$ and $\mathbf{u} \in U$ such that

$$\begin{aligned} -B(\boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + (\varepsilon(\mathbf{u}), \hat{\boldsymbol{\sigma}}) &= 0 \quad \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \Sigma_{a0} \\ (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\hat{\mathbf{u}})) - L(\hat{\mathbf{u}}) &= 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in U_0. \end{aligned} \quad (21)$$

2.5 Babuška-Brezzi condition

The continuous bilinear forms $B(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ and $(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{u}))$ define mappings between the respective spaces involved. The spaces of stresses Σ and of strains Σ' are dual spaces connected by the

bilinear form (13). For a fixed $\tilde{\sigma} \in \Sigma$ the bilinear form $B(\sigma, \tilde{\sigma})$ defines a linear functional in Σ , and by Riesz's representation theorem there exists a linear operator $B : \Sigma \mapsto \Sigma'$ such that

$$(\sigma, B\tilde{\sigma}) = B(\sigma, \tilde{\sigma}) \quad \forall \sigma, \tilde{\sigma} \in \Sigma. \quad (22)$$

By the same token, $(\sigma, \epsilon(u))$ is a continuous bilinear form in $\Sigma \times U$, and there exists a linear operator $G : \Sigma \mapsto U'$ such that

$$\langle G\sigma, u \rangle = (\sigma, \epsilon(u)) \quad \forall u \in U, \sigma \in \Sigma, \quad (23)$$

U' is the dual of U and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the corresponding bilinear form. Similarly, the adjoint operator $G' : U \mapsto \Sigma'$ is defined

$$(\sigma, G'u) = (\sigma, \epsilon(u)) \quad \forall \sigma \in \Sigma, u \in U. \quad (24)$$

Using these operators the equations (21) can also be written in the form

$$\begin{aligned} -B\sigma + G'u &= 0 \\ G\sigma &= \bar{f}, \end{aligned} \quad (25)$$

where \bar{f} is an element in U' . Figure 1 illustrates the mappings between spaces Σ, Σ', U and U' .

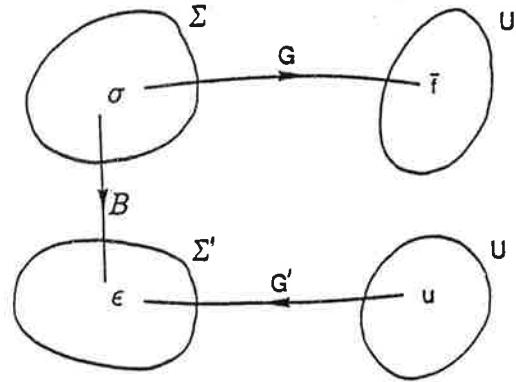


Fig. 1. Function spaces in elasticity problem.

The mapping B is unique due to the coerciveness of the form $B(\sigma, \tilde{\sigma})$

$$B(\sigma, \sigma) \geq c\|\sigma\|^2, \quad c > 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (26)$$

The mapping G' is unique if

$$\sup_{\sigma \in \Sigma - \{0\}} \frac{(\sigma, \epsilon(u))}{\|\sigma\|} = \sup_{\sigma \in \Sigma - \{0\}} \frac{(\sigma, G'u)}{\|\sigma\|} = \|G'u\| \geq k\|u\|, \quad k > 0, \quad \forall u \in U. \quad (27)$$

The condition (27) is the abstract Babuška-Brezzi condition [1, 2, 3], which is often expressed in the form

$$\inf_{u \in U - \{0\}} \sup_{\sigma \in \Sigma - \{0\}} \frac{(\sigma, \epsilon(u))}{\|\sigma\|\|u\|} \geq k > 0. \quad (28)$$

For the problem of elasticity, the Babuška-Brezzi condition means that there are no mechanisms, i.e. displacement fields with zero strains, or, as it is also stated, there are no zero energy modes.

3 DISCRETIZED VARIATIONAL PRINCIPLES

Let Σ_m and U_n be closed subspaces of Σ and U . With a point of view to the finite element method, this means that the approximations of displacement components u_i are continuous over element boundaries (at least C^0 -continuity) and those of stress components at least piecewise continuous (e.g. constant inside each element but not continuous over element boundaries). The basis functions of Σ_m and U_n are $\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x})$, and $\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_n(\mathbf{x})$, respectively. The variational formulation of the minimum potential energy (10) results in the form

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad (29)$$

where \mathbf{K} is the symmetrical stiffness matrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A(\psi_1, \psi_1) & \dots & A(\psi_1, \psi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A(\psi_n, \psi_1) & \dots & A(\psi_n, \psi_n) \end{bmatrix} \quad (30)$$

and \mathbf{q} and \mathbf{Q} the nodal displacement and load vectors, respectively.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T &= [q_1, \dots, q_n] \\ \mathbf{Q}^T &= [L(\psi_1), \dots, L(\psi_n)] \end{aligned} \quad (31)$$

The principle of minimum complementary energy is more complicated since the solution has to be found in the space of admissible stresses Σ_a defined by Eq. (18). For discrete problem it is defined by

$$\Sigma_{ma} = \{\boldsymbol{\sigma} = \sum_k r_k \varphi_k \in \Sigma_m \mid \mathbf{Gr} = \mathbf{Q}\}, \quad (32)$$

where

$$\mathbf{r}^T = [r_1, \dots, r_m] \quad (33)$$

is the vector of stress coefficients and \mathbf{G} is the $n \times m$ matrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (\varphi_1, \epsilon(\psi_1)) & \dots & (\varphi_m, \epsilon(\psi_1)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_1, \epsilon(\psi_n)) & \dots & (\varphi_m, \epsilon(\psi_n)) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

The approximative solution can now be searched through the minimizing problem, in accordance with Eq. (16),

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{r}^T \mathbf{M} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{R} \mid \mathbf{Gr} = \mathbf{Q}\right\}, \quad (35)$$

\mathbf{R} is the strain vector due to prescribed displacements

$$\mathbf{R}^T = [R_1, \dots, R_m], \quad R_k = \int_{S_u} \varphi_k n_j \bar{u}_j dS. \quad (36)$$

There is a certain correspondence between the subscripts k and i, j . The variational formulation (17) leads to the discrete problem

$$\hat{\mathbf{r}}^T (\mathbf{M}\mathbf{r} - \mathbf{R}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{r}} \in \ker(\mathbf{G}) = \{\hat{\mathbf{r}} \mid \mathbf{G}\hat{\mathbf{r}} = 0\}. \quad (37)$$

In terms of structural mechanics, the subspace $\ker(\mathbf{G})$ is the set of statically indeterminate quantities. In structural mechanics the stress space Σ_a is divided into two subspaces: the set of redundants Σ_{a0} and the set of statically determinate stresses Σ_{a1} . The basis of Σ_{a0} consists of functions $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_k$, e.g. the stresses due to redundants $\hat{r}_i = 1, i = 1, \dots, k$. The condition (17) results in compatibility equations

$$\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{R}} = 0, \quad (38)$$

where $\hat{\mathbf{M}}$ is the flexibility matrix

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} B(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) & \dots & B(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\hat{\varphi}_k, \hat{\varphi}_1) & \dots & B(\hat{\varphi}_k, \hat{\varphi}_k) \end{bmatrix} \quad (39)$$

$\hat{\mathbf{P}}$ the vector of (generalized) strains due to external loads

$$\hat{\mathbf{P}}^T = [B(\sigma_1, \hat{\varphi}_1), \dots, B(\sigma_1, \hat{\varphi}_k)] \quad (40)$$

and $\hat{\mathbf{R}}$ the vector of strains due to prescribed displacements

$$\hat{\mathbf{R}}^T = [\hat{R}_1, \dots, \hat{R}_k], \quad \hat{R}_l = \int_{S_u} \hat{\varphi}_l n_j \bar{u}_i dS. \quad (41)$$

Above σ_1 is the statically determinate stress field due to external loads. Comparison between (37) and (38) shows that the dimension of $\ker(\mathbf{G})$ equals the degree of redundancy k . The normal case is that $k = m - n$, n being the dimension of U_n . Otherwise there would exist mechanisms or zero energy modes. The equation $k = m - n$ means that the space of displacements involved in the force method has dimension equal to $m - k$, i.e. $m - k$ degrees of freedom. In order to arrive to (38) starting from (37) one has to eliminate n unknowns from equation $\mathbf{G}\mathbf{r} = \mathbf{Q}$,

$$\mathbf{G}_k \mathbf{r}_k + \mathbf{G}_n \mathbf{r}_n = \mathbf{Q}, \quad (42)$$

which yields

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{G}_n^{-1} (\mathbf{Q} - \mathbf{G}_k \mathbf{r}_k). \quad (43)$$

The matrix \mathbf{M} is correspondingly partitioned

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{kk} & \mathbf{M}_{kn} \\ \mathbf{M}_{nk} & \mathbf{M}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k \\ \mathbf{R}_n \end{bmatrix}. \quad (44)$$

In equation (37) the vector $\hat{\mathbf{r}} \in \ker \mathbf{G}$ is

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_k \\ \hat{\mathbf{r}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_k \\ -\mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{G}_k \hat{\mathbf{r}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k \\ -\mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{G}_k \end{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_k. \quad (45)$$

Equation (39) leads now to the form

$$\hat{\mathbf{r}}_k^T [(\mathbf{M}_{kk} - \mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_n^{-T} \mathbf{M}_{nk} - \mathbf{M}_{kn} \mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{G}_k + \mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_n^{-T} \mathbf{M}_{nn} \mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{G}_k) \mathbf{r}_k - \mathbf{R}_k + \mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_n^{-T} \mathbf{R}_n + \mathbf{M}_{kn} \mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{G}_k^T \mathbf{G}_n^{-T} \mathbf{M}_{nn} \mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{Q}] = 0. \quad (46)$$

It is claimed that the coefficient matrix of \mathbf{r}_k is the matrix $\hat{\mathbf{M}}$ in Eq. (38) and the three last terms on the right hand side form the term $\hat{\mathbf{P}}$. What is often disregarded in connection of the force method of structural mechanics, is that there is also a displacement space involved in specifying the equilibrium conditions. For solvability of the problem the dimension of U_n has to be less than (hyperstatic) or equal (isostatic) to the dimension m of stress space. The case $n > m$ indicates that the system is a mechanism.

The discretized mixed principle is basically like the force method the only difference being the simultaneous solution of the systems of equations. The discrete functional is

$$\Pi_{Rnm}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{M} \mathbf{r} + \mathbf{q}^T \mathbf{G} \mathbf{r} - \mathbf{q}^T \mathbf{Q} \quad (47)$$

and the system of equations

$$\begin{aligned} -\mathbf{M} \mathbf{r} + \mathbf{G}^T \mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G} \mathbf{r} &= \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (48)$$

One strategy to solve the equations (48) is to solve first $\mathbf{r} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{q}$ and then use the equilibrium equation $\mathbf{G} \mathbf{r} = \mathbf{Q}$

$$\mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{q} = \mathbf{Q}. \quad (49)$$

This is kind of displacement method and one would expect that $\mathbf{G} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}^T$ is the same stiffness matrix as in the ordinary displacement approach employing shape functions $\psi_i(\mathbf{x})$. However, this is the case only if the functions φ_i and ψ_j are compatible in such a way that the mappings $\mathbf{M} : \Sigma_m \mapsto \Sigma'_m$ and $\mathbf{G}^T : U_n \mapsto \Sigma'_m$ overlap i.e. the mapping \mathbf{G}^T from U_m is onto $\Sigma'_m \quad \forall \mathbf{r} \in \Sigma'_m \exists \mathbf{u} \in U_m$ (see [7]).

The Babuška-Brezzi condition for the discrete case is in accordance with (27)

$$\sup_{\mathbf{r} \neq 0} \frac{|\mathbf{r}^T \mathbf{G}^T \mathbf{q}|}{\|\mathbf{r}\|} = \|\mathbf{G}^T \mathbf{q}\| \geq k \|\mathbf{q}\|, \quad k > 0, \quad \forall \mathbf{q}. \quad (50)$$

This is true if $\ker(\mathbf{G}^T)$ equals $\{0\}$ i.e. the dimension $\dim \ker(\mathbf{G}^T)$ is zero. The meaning of this is that there are no mechanisms or rigid body displacements, or, as it is also expressed, no zero energy modes included in U_n . In general this indicates that the rank of \mathbf{G} equals n , the dimension of U_n . The dimension m of Σ_m has to be more than or equal to n .

4 EXAMPLES

The Hellinger-Reissner functional for an axially loaded bar is

$$\Pi_R(N, u) = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx + \int_0^L u' N dx - \int_0^L p u dx. \quad (51)$$

Using C^0 -continuous FE approximation for both axial displacement u and axial force N

$$\begin{aligned} u^e &= \sum_i \psi_i u_i = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2 + 4\xi(1 - \xi)\Delta u_3 \\ N^e &= \sum_k \varphi_k N_k = (1 - \xi)N_1 + \xi N_2, \end{aligned} \quad (52)$$

then the element matrices corresponding to equation system (48) are

$$\mathbf{M}^e = \frac{h^e}{6EA} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{eT} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

where h^e is the length of an element e .

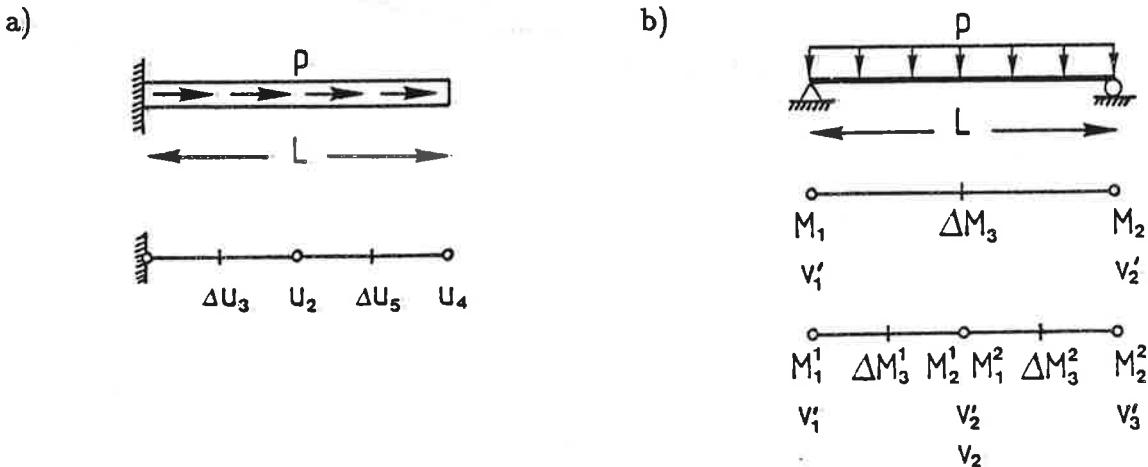


Fig. 2. Example structures.

A cantilever beam with uniform axial load is considered (Fig. 2a). When two elements are used to discretize the functional (51), the matrix \mathbf{G}^T is

$$\mathbf{G}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

The Babuška-Brezzi condition (27) is now violated. There exists a vector $\mathbf{q} \neq 0$ for which

$$\mathbf{G}^T \mathbf{q} = 0 \quad (55)$$

e.g. $\mathbf{q}^T = [u_2 \quad \Delta u_3 \quad u_4 \quad \Delta u_5] = [-\frac{4}{3} \quad 1 \quad \frac{7}{3} \quad 1]$. If the approximation (52)₂ to axial force N is not continuous over element boundaries, then system (48) is well behaving and the Babuška-Brezzi condition is satisfied. The matrix $\mathbf{K} = \mathbf{GM}^{-1}\mathbf{G}^T$ in Eq. (49) is

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

and it is the same stiffness matrix as in pure displacement method when approximation (52)₁ is used for axial displacement.

Second example is a transversely loaded beam (Fig. 2b). The Hellinger-Reissner functional is

$$\Pi_R(M, v) = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx - \int_0^L v'' M dx - \int_0^L p v dx. \quad (57)$$

The approximations used for deflection v and bending moment M are

$$\begin{aligned} M^e &= \sum_k \varphi_k M_k = (1 - \xi) M_1 + \xi M_2 + 4\xi(1 - \xi) \Delta M_3 \\ v^e &= \psi_1(\xi)v_1 + \psi_2(\xi)v'_1 + \psi_3(\xi)v_2 + \psi_4(\xi)v'_2, \end{aligned} \quad (58)$$

where ψ_1, \dots, ψ_4 are the cubic Hermitian polynomials

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \psi_2(\xi) &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)h^e \\ \psi_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \psi_4(\xi) &= (-\xi^2 + \xi^3)h^e. \end{aligned} \quad (59)$$

The element matrices are

$$\mathbf{M}^e = \frac{h^e}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \frac{16}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{eT} = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & h^e & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -h^e \\ 0 & \frac{2}{3}h^e & 0 & -\frac{2}{3}h^e \end{bmatrix}, \quad (60)$$

and corresponding nodal moment and displacement vectors

$$\mathbf{r}^{eT} = [M_1 \quad M_2 \quad \Delta M_3], \quad \mathbf{q}^{eT} = [v_1 \quad v'_1 \quad v_2 \quad v'_2]. \quad (61)$$

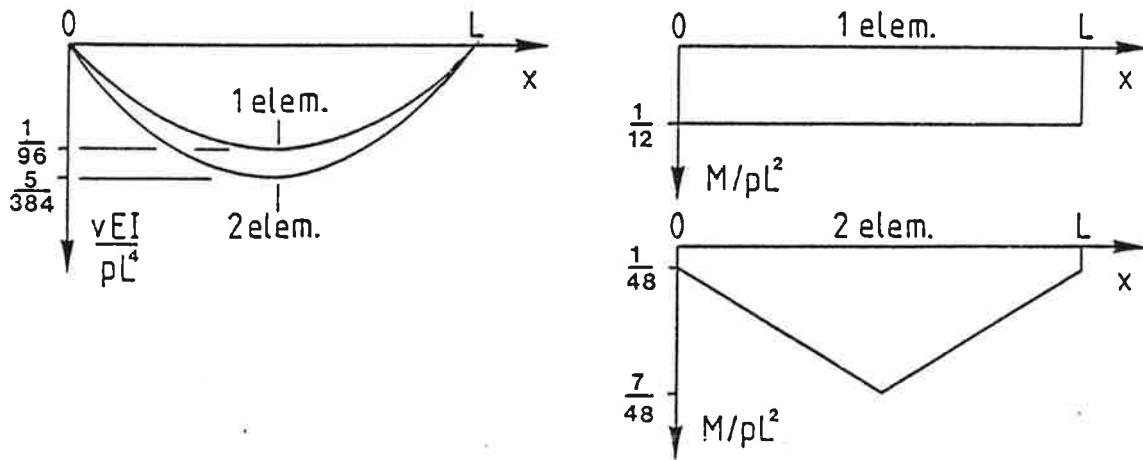


Fig. 3. Deflection and bending moment approximations.

Using one element to discretize the functional (57) yields the solution $M_1 = \frac{1}{12}pL^2 = M_2$, $\Delta M_3 = 0$, $v'_1 = \frac{1}{24}pL^3/EI = -v'_2$ (exact values). The bending moment distribution is poor approximation to the exact one. The compatibility equation (48)₁ forces the bending moment distribution to be constant, because the deflection is parabola and resulting in constant curvature. When two elements is used, the solution is $M_1^1 = M_2^2 = \frac{1}{48}pL^2$, $M_2^1 = M_1^2 = \frac{7}{48}pL^2$, $\Delta M_3^1 = \Delta M_3^2 = 0$, $v_2 = \frac{5}{384}pL^4/EI$, $v'_1 = \frac{1}{24}pL^3/EI = -v'_3$, $v'_2 = 0$. Again the compatibility equation forces the bending moment distribution to be linear.

REFERENCES

- [1] BABUŠKA, I., *The finite element method with Lagrange multipliers*, Numer. Math., **20** (1973), p. 179-192.
- [2] BREZZI, F., *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*, RAIRO. Anal. Numer. **8** (1974), p. 129-151.
- [3] FORTIN, M., *An analysis of the convergence of mixed finite element methods*, RAIRO. Anal. Numer. **11** (1977), p. 341-354.
- [4] HARTMANN, F., *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics*, Springer, 1985.
- [5] HARTMANN, F., *The discrete Babuška-Brezzi condition*, Ingenieur-Archiv, **56** (1986), p. 221-228.
- [6] WASHIZU, K., *Variational Methods in Elasticity & Plasticity*, Pergamon Press, 1982.
- [7] FRÉMOND, M., *Méthodes Variationnelles en Calcul des Structures*, ENPC, ES 16 D, 1982.

SEMI-ANALYTICAL MODELS FOR THE STATIC BEHAVIOUR
OF T AND DT TUBULAR JOINTS

Pentti K. MÄKELÄINEN
Helsinki University of Technology

1 INTRODUCTION

Tubular lattice girders and frames are popular in offshore structures. This is due to the fact that cylindrical tubulars in steel have a high strength to weight ratio, low drag coefficient, reduced wave and wind loading, and a high stiffness in all directions. Advantages of joints using these tubulars are the favourable jointing possibilities to smooth corners and changeover between members, and lower surface area for painting and protection. Fabrication of these joints causes usually high costs because of the need to shape the ends of bracings for saddling requirements and the complex welding procedures required.

Design and dimensioning of these joints is also a demanding task. This is due to the fact that the structural behaviour of such tubular joints is very complex, with each type of joint, its parametric variations of geometry and type of loading having considerable influence on the strength and stiffness characteristics. Also, with the trend towards lighter and cheaper structures, as well as new developments for deeper seas, the existing design criteria are becoming restricted.

A limited number of formulae are available for calculating strength and stiffness of tubular joints, which are all empirically established from test data. Comparison with a large international data bank of experimental test results have shown them to be of limited value. This paper aims at presenting research work [1] carried out to establish formulae for some basic tubular joints based upon simple analytical models, which need not be restricted by extrapolation limits that have to be set for empirical formulae.

This paper is limited to T and DT (Double Tee) joints with loaded braces under single and combined (proportional) loading and as a

special case, multibraced (multi-planar) joints with loaded and unloaded braces (Fig. 1). Simple formulae have been established for the joint stiffness, strength and non-linear behaviour of these joints. Semi-analytical models are used as a basis, and a large experimental data bank used to assess the values from existing and proposed formulae.

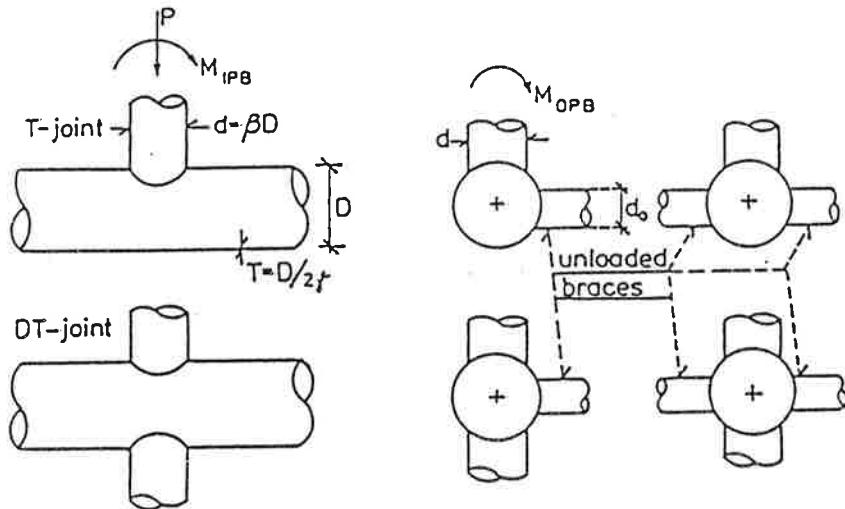


Figure 1. Joint types investigated.

2 MODELS FOR INITIAL JOINT STIFFNESS OF UNI-PLANAR T AND DT JOINTS

2.1 Axial loading case

Analytical models resulting in initial joint stiffness formulae, which give good agreement with test results and also cover a wide range of parameters (β, γ) do not exist at this moment. This is because of the difficulty in representing the real complex behaviour of the joint. The real complex behaviour of T and DT joints under axial brace loads can, however, be approximated by using a simplified model where the three dimensional behaviour of the joint is represented by assuming a two dimensional ring, and the brace is then assumed to act in this ring model over an effective length B_e of the chord at theoretical saddle points (Fig. 2).

By using the ring model, the following derivation is made for the initial axial stiffness $K_o (=P/\delta)$ of T joints:

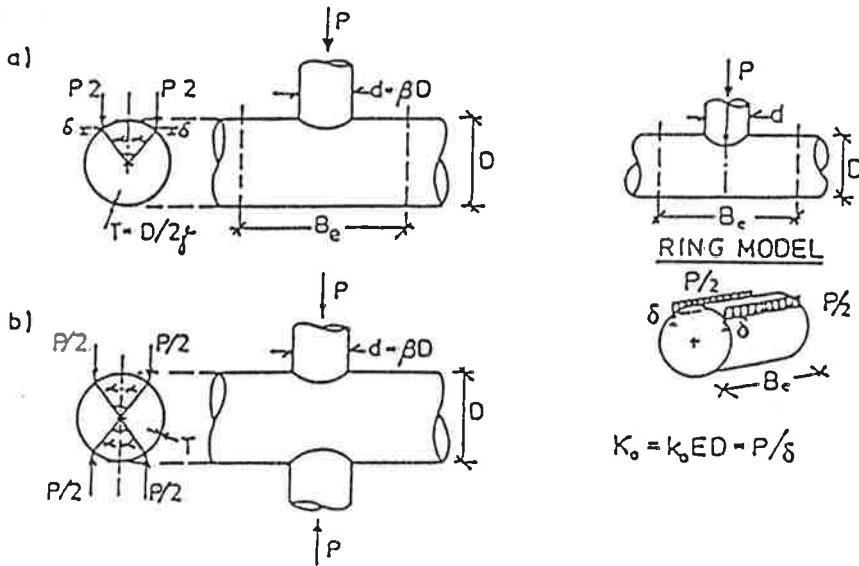


Figure 2. Ring model for a) T joint and b) DT joint under axial loading.

$$K_o = \frac{(B_e/D)}{\gamma^3 f_o(\beta)} ED = k_o ED \quad (1)$$

where $f_o(\beta) = 6\alpha\beta^2(1-\alpha/\pi) - 12\frac{\alpha}{\pi}(\beta+c/2\alpha)(1+c) + 3\beta c(1+\alpha/\pi) - 3\frac{\beta^2}{\pi}(2+\beta^2)$

$$+ 6\beta\alpha/\pi + \frac{3}{2}\pi(1-\alpha/\pi)^2 \quad (1a)$$

with $\alpha = \text{arc sin } \beta$ and $c = \cos \alpha = (1-\beta^2)^{1/2}$

In the derivation of Eq.(1) and (1a), it is assumed that the shear flow in the chord wall over the ring cross-section, being in equilibrium with the external loads, has a roughly circular distribution over the ring cross-section.

In the case of DT joint, the denominator function $f_o(\beta)$ of Eq. (1) has the following form:

$$f_o(\beta) = 6\alpha\beta^2 + \frac{12}{\pi}\alpha^2(2-\beta)(2-3\beta) + \frac{3}{2}(\pi-2\alpha) + 3\beta c(1-8\alpha/\pi) - \frac{12}{\pi}c^2 \quad (1b)$$

Function $f_o(\beta)$ of Eq. (1a) for T joints can be closely approximated by the function $(1-\beta)^s$ where the exponent "s" has an average value of 1.13. By assuming a power law dependence upon for B_e/D and then fitting all the available experimental data to Eq.

(1), a formula (Eq. (2) presented in Fig. 3) can be found for K_0 of T joints. In Fig. 3, equation (2) is expressed with lines of constant values of 8, 15 and 24, showing reasonable agreement with the data points. Fig. 3 also shows the data points from the tests on plastic (epoxy) tubes carried out by Fessler et al. [4]. These points, which are all above the data points of steel tubular joints, have not been used for calibration purposes in developing Eq. (2).

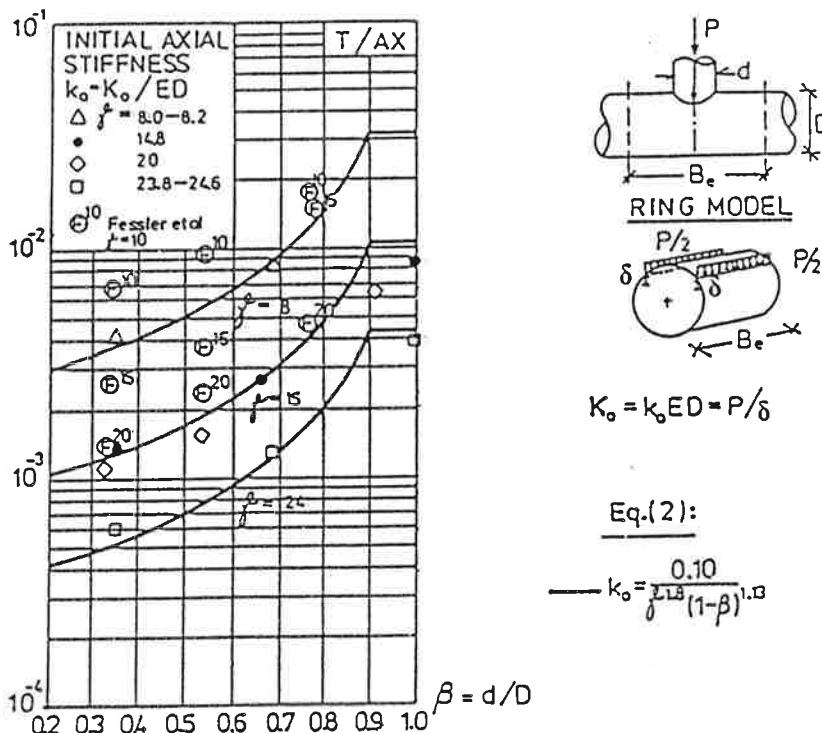


Figure 3. Initial axial stiffness of T joints vs. β .

2.2 Out-of-plane bending (OPB) moment loading case

Fig. 4 shows T and DT joints under OPB moment loading. By applying the ring model for these joints, the following expression can be obtained for the initial OPB (rotational) stiffness C_O^{OPB} ($= M_{OPB} / \psi$):

$$C_O^{OPB} = \frac{(B_e/D)}{\gamma^3 p_O(\beta)} ED^3 = c_O^{OPB} ED^3 \quad (3)$$

where, for T-joints, the function $p_O(\beta)$ has the form

$$p_O(\beta) = 12 \frac{\alpha}{\pi} (1/\beta - 1) (2\pi - \alpha) + 8 (\pi - \frac{6}{\pi}) - \frac{48}{\pi} (1/\beta - 1) (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \quad (3a)$$

and in case of DT joint the form

$$p_0(\beta) = 24 \left[\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \sqrt{1-\beta^2} \right) + \frac{1}{\beta} \left(1 - \sqrt{1-\beta^2} \right) \right] \quad (3b)$$

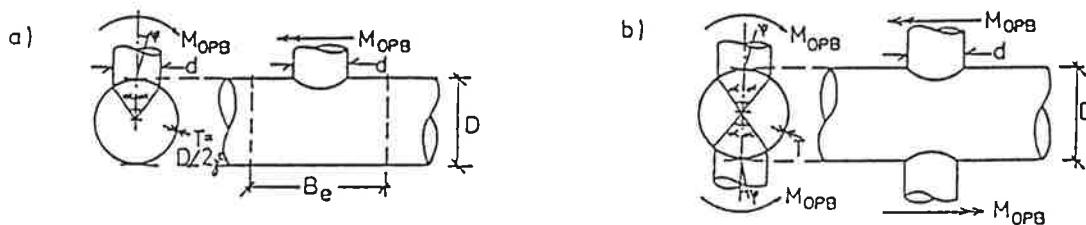


Figure 4. Ring model for a) T joint and b) DT joint under OPB moment loading.

The shear flow distribution in this case is assumed to be almost uniform over the cross-section. By proceeding in the same way as for the axial stiffness, the function $p(\beta)$ of Eq. (3a) for T joints can first be well approximated by an exponential expression of the form $A \exp(-a\beta)$, for which the average values of the constants are $A = 0.028$ and $a = 3.3$. By then assuming a power law dependence upon β for B_e/D and fitting all the available experimental data to Eq. (3), a formula (4) presented in Fig. 5 can be found for C_{OPB} on T joints. In Fig. 5 formula (4) is again expressed with lines of constant γ values (from 8 to 25) together with experimental data points. Fig. 5 also shows the data points from the tests on plastic (epoxy) tubes carried out by Fessler et al. [4].

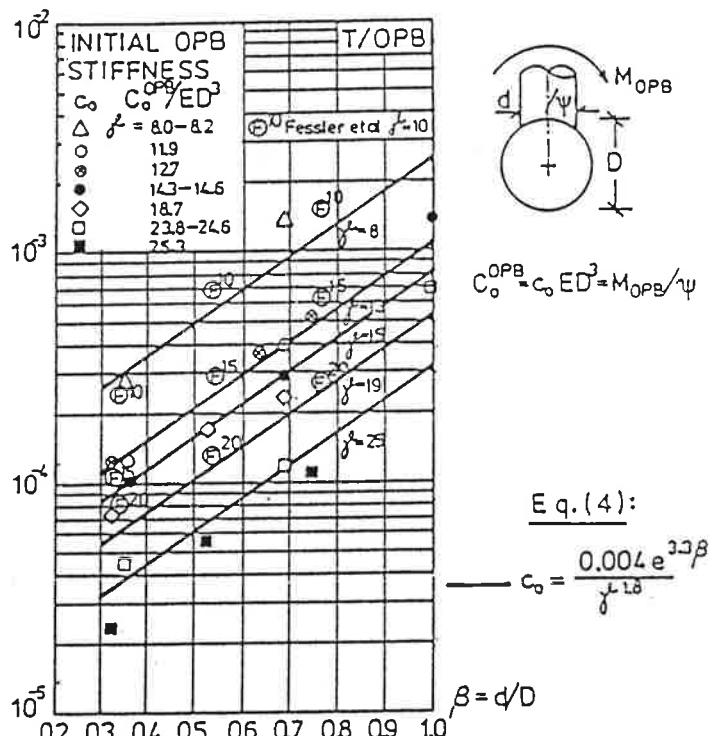


Figure 5. Initial OPB stiffness of T joints vs. β .

2.3 In-plane bending (IPB) moment loading case

The analogy of a beam on elastic foundations (BEF) is applied for the initial IPB stiffness of T and DT joints. Fig. 6 a) shows the

basic principle of the analogy when applied to a T joint: the section of the chord between brace saddle points is assumed as a beam over the entire chord length, supported by the remaining sector as a BEF along at the two longitudinal edges of the beam. On the basis of the expressions derived for the foundation stiffness (k_f) and bending stiffness of the beam (EI_b), a formula (Eq. (5) shown in Fig. 7) is developed for the initial IPB stiffness of T joints. Fig. 7 shows all the relevant experimental data for the IPB stiffness of T joints with equation (5) plotted as lines of constant γ (10, 15, 25). Data points are also shown from the tests on plastic tubes [4].

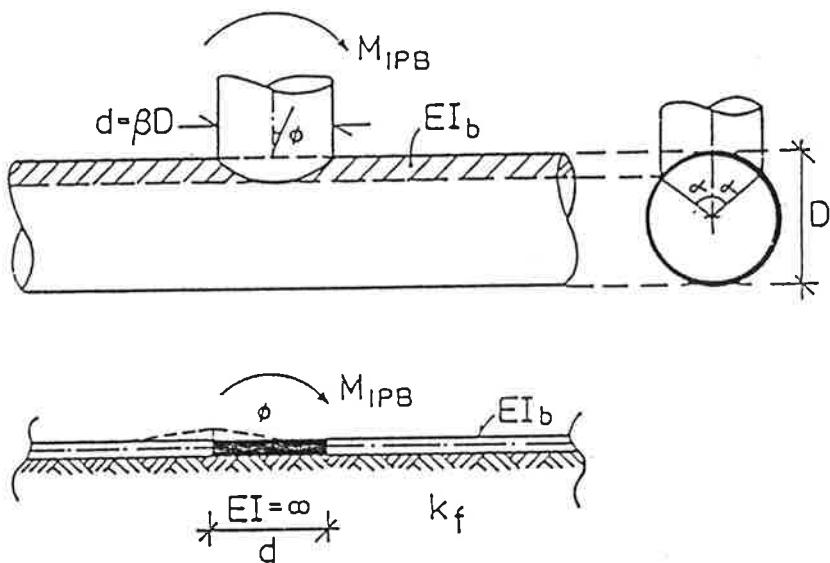


Figure 6. BEF analogy applied to T joint.

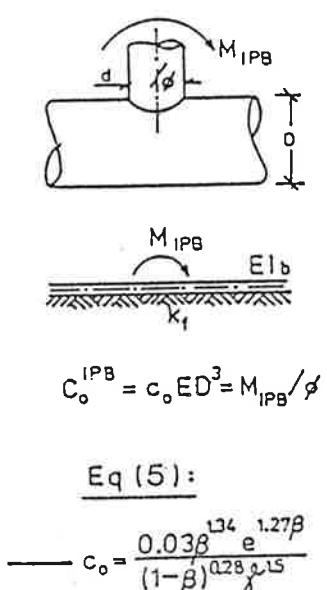
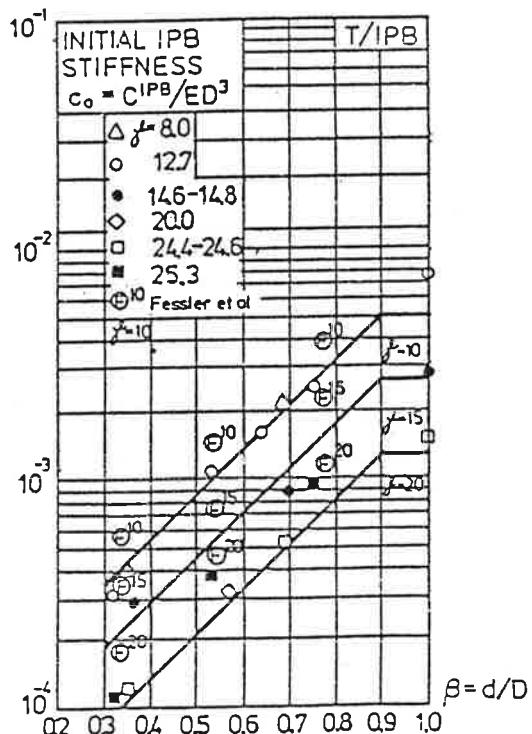


Figure 7. Initial IPB stiffness of T joints vs. β .

3 MODELS FOR INITIAL JOINT STIFFNESS OF MULTI-PLANAR DT AND T JOINTS

3.1 Multi-braced DT joint with unloaded braces

Fig. 8 shows a DT joint combined with two unloaded braces in a perpendicular plane to two loaded braces. The ring model is applied

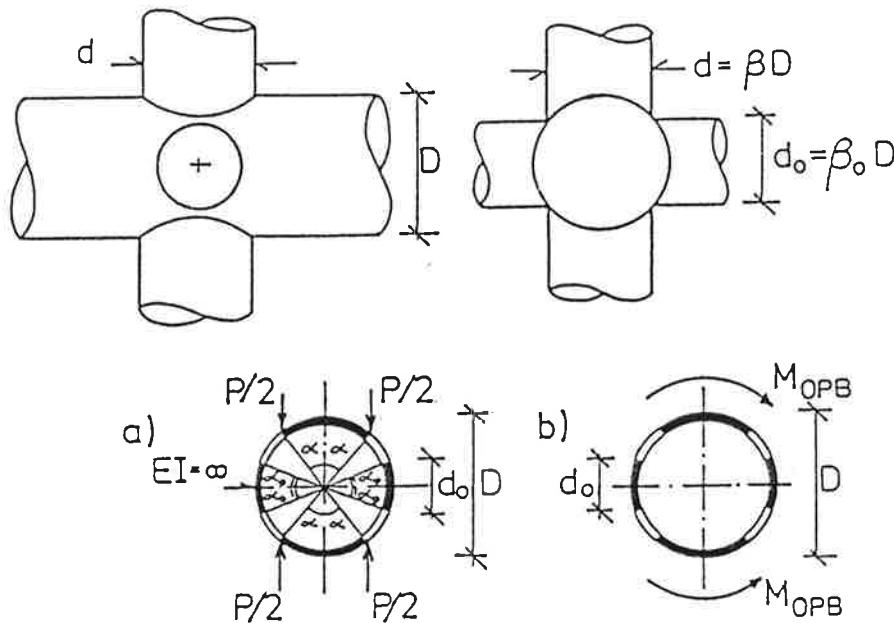


Figure 8. Ring model for multi-braced DT joint with unloaded braces: a) axial and b) OPB moment loading case.

to this joint by assuming a rigid cap between the brace saddle points along the intersection area. In the case of axial brace loading (Fig. 8a), the following expression can be derived for the initial axial stiffness K_0^∞ :

$$K_0^\infty = \frac{(Be/D)}{\gamma^3 f_\infty(\beta_0, \beta)} ED \quad (6)$$

where

with $\beta_0 = \sin \alpha_0$, $\beta = \sin \alpha$; $c_0 = \sin \beta_0$, $c = \sin \beta$.

In case of OPB moment loading (Fig. 8b), a similar derivation as before gives the following expression for the initial OPB stiffness C_0^{OPB} :

$$C_0^{OPB} = \frac{(Be/D)}{\gamma^3 p_\infty(\beta_0, \beta)} ED^3 \quad (7)$$

where

$$p_\infty(\beta_o, \beta) = 12[\pi - 2(\alpha_o + \alpha) - \frac{8(c_o - c)^2}{\pi - 2(\alpha_o + \alpha) + 2\beta_o c_o - 2\beta c}].$$

3.2 Multi-braced T joint with unloaded braces

Fig. 9 shows a T joint combined with two unloaded braces in a

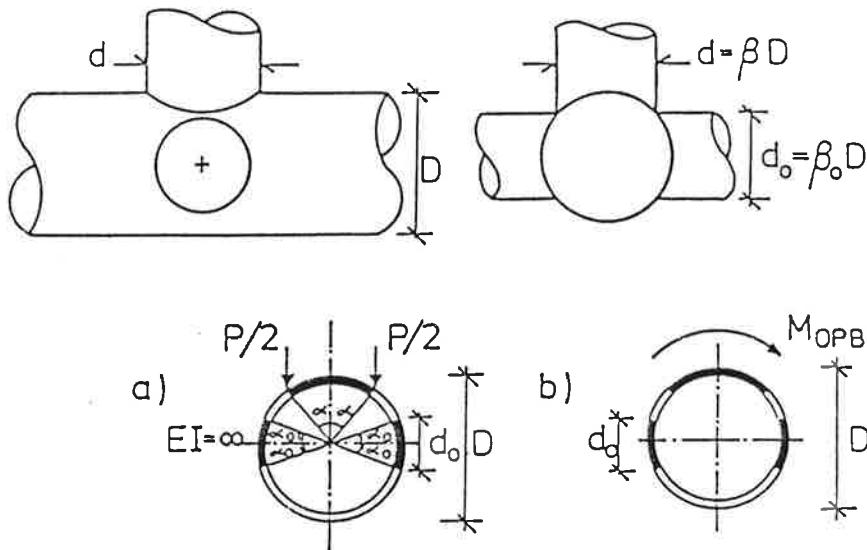


Figure 9. Ring model for multi-braced T joint with unloaded braces:
a) axial and b) OPB moment loading case.

perpendicular plane to the loaded brace. In the case of axial brace load (Fig. 9a), the following expression can be derived for the initial axial stiffness K_o^∞ of this joint:

$$K_o^\infty = \frac{(Be/D)}{\gamma^3 f_\infty(\beta_o, \beta)} ED \quad (8)$$

where

$$f_\infty(\beta_o, \beta) = \frac{3}{2} [\pi - \alpha - 2(\alpha_o + \beta_o c_o + \beta c) - \frac{2(1 - 2\beta_o + c)^2}{\pi - 2\alpha_o - \alpha}]$$

In the derivation of Eq. (8), a roughly circular shear flow distribution over the joint cross-section is assumed for axial load only as in the case of uni-planar T joints [1]. The calibration of the formulae cannot yet be carried out because of lack of data. However, some initial work has been carried out at Delft for DT joints with unloaded braces only [13].

4 JOINT STRENGTH UNDER SINGLE BRACE LOADS

4.1 Strength of uni-planar T and DT joints

A number of basic failure modes or their combinations are identified for DT and T joints under single brace loads [2] depending upon the joint parameters and loading conditions. Semi-analytical models such as ring models with plastic hinges [2,9] and the punching shear model [2] have been used. The work presented in [1] extends this theory for axial and OPB moment. For IPB moment a BEF analogy has also been used together with plastic hinges formed in the beam. Because of the complexity of the derived formula and scatter (or lack) of experimental data, the calibration of the formulae have not been performed. This work has taken lower precedence because of recent international agreement through the International Institute of Welding [7] on comprehensive, simple design rules.

4.2 Strength of multi-braced DT and T joints

The ultimate strength of simple DT and T joints with unloaded braces is studied by using the ring model (Fig. 8 and Fig. 9) and applying the plastic hinge theory to this ring. In the case of DT joints combined with two unloaded braces in a perpendicular plane to two loaded braces, the following formula has been derived for the ultimate axial strength P_u of the joint (Fig. 8a):

$$P_u = \frac{2(Be/D)}{c_o - \beta} f_y T^2 \quad (9)$$

where $c_o = \cos \alpha_o = \sqrt{1 - \beta_o^2}$; $\beta_o = \sin \alpha_o$; $\beta = \sin \alpha$, and T wall thickness and yield stress of the chord.

For the ultimate OPB moment M_u^{OPB} (Fig. 8b) of this joint the following formula can be derived using the ring model combined with plastic hinges:

$$M_u^{OPB} = \frac{(c_o + \beta)(Be/D)}{2\beta(c_o - \beta)} f_y T^2 d \quad (10)$$

In the case of T joints combined with two unloaded braces in a perpendicular plane to the loaded brace, the following formula has been derived for the ultimate axial strength P_u of the joint (Fig. 9a):

$$P_u = \frac{(c_o + \beta)(B_e/D)}{\beta_o(c_o - \beta)} f_y T^2 \quad (11)$$

The above formulae for ultimate strength of multi-braced DT and T joints based upon the ring model include the effective length B_e of the chord which is dependent on the parameters c_o and β . For finding their dependence and then calibrating the models, experimental or numerical data are needed. Unfortunately, no experimental data are available yet for this calibration. However, some initial work has been carried out at Delft University [13] based upon finite element analyses of DT joints with unloaded braces. At TNO-IBBC, tests on multibraced DT and T joints with unloaded braces are planned to be carried out in the near future.

5 JOINT STRENGTH UNDER COMBINED BRACE LOADS

In service the joints, especially in three dimensional tubular structures, are subjected to the combined action of axial and bending moment (IPB and OPB) loads in the brace. Only T and DT joints are considered. Ultimate brace loads due to interaction effects are further complicated due to the dependence upon the load vector and whether the loading is incremented proportionally or non-proportionally. Therefore, only empirical approaches have been used. Such a formula is [8]:

$$\frac{P}{P_u} + \left(\frac{M}{M_u}\right)^{2.1}_{IPB} + \left(\frac{M}{M_u}\right)^{1.2}_{OPB} = 1 \quad (12)$$

The above formula does not fit the experimental results [10]. A semi-analytical interaction equation is suggested for T and DT joints, based upon a modification to the theoretical plastic strength of tubular section:

$$\frac{P}{P_u} + \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\left(\frac{M}{M_u}\right)^2_{IPB} + \left(\frac{M}{M_u}\right)^2_{OPB}} = 1 \quad (13)$$

The API rules [6] use the unmodified formula. Both the API rules [6] and equation (13) take the IPB-OPB coupling effect into account, which equation (12) does not.

An inspection of the 2 D interaction plots of all the available experimental data in Fig. 10 shows that the collapse mechanisms

are different, with the API rules [6] unable to give safe lower bounds to the interaction data. A check is also carried out against 3D interaction ($P-M - M$) by substituting test results [10] into equation (13). The results confirm that the generated yield surface is a reasonable lower bound also for 3D behaviour. This is also valid for 3D interaction tests on DT joints [11].

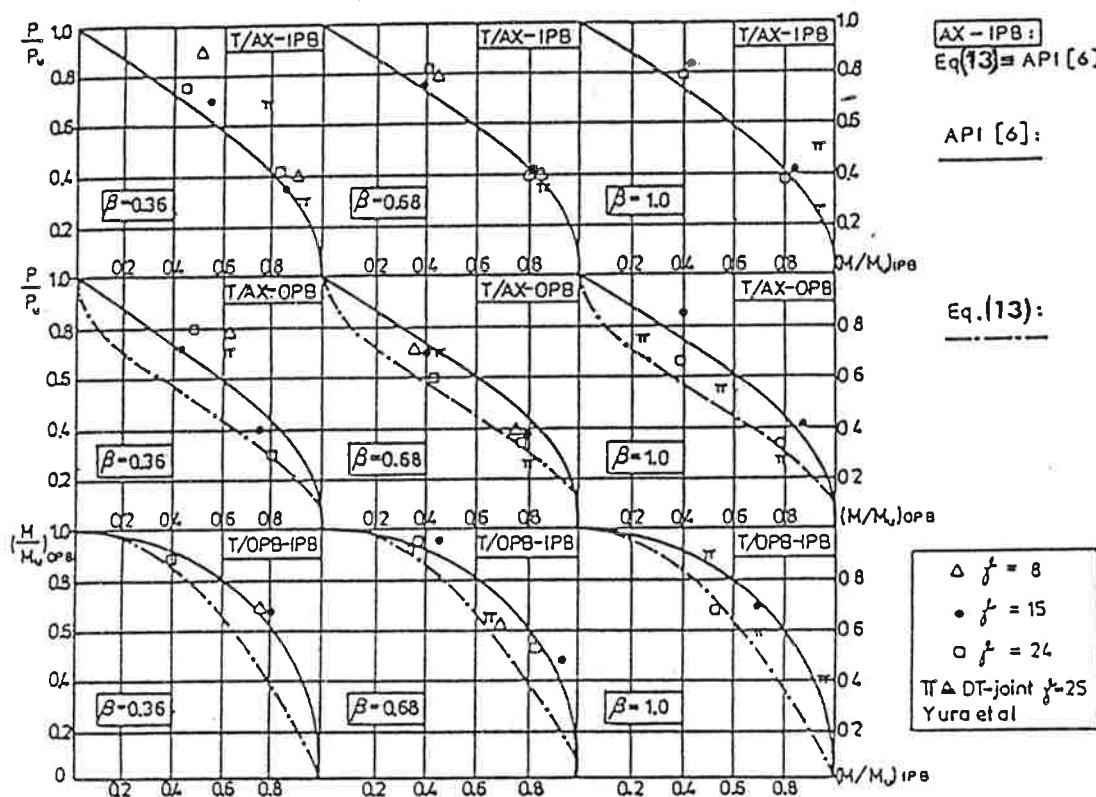


Figure 10. Results of 2D interaction tests (AX-IPB, AX-OPB, IPB-OPB) for $\beta = 0.36, 0.68, 1.0$.

6 NON-LINEAR JOINT BEHAVIOUR UNDER SINGLE BRACE LOADING

Normalized secant stiffness values at various normalized load levels (as a percentage of ultimate load) have been recorded from the experimentally obtained non-linear load-deflection plots in the data bank, as shown for T joints in Fig. 11. DT joints have also been treated similarly [1]. Lower bound equations such as shown in Fig. 11 have been deduced, based upon the lowest experimentally obtained secant stiffness. Once the initial stiffness (K_0, C_0) and the ultimate load (P_u, M_u) are known or calculated from formulae, the secant stiffness at various load levels can be determined from these equations to retrace the complete non-linear behaviour. If necessary, the tangent stiffness can also be determined from the equation or the non-linear plot using two close load levels. In

this way, correct joint stiffnesses may be derived for any design criteria under working load levels.

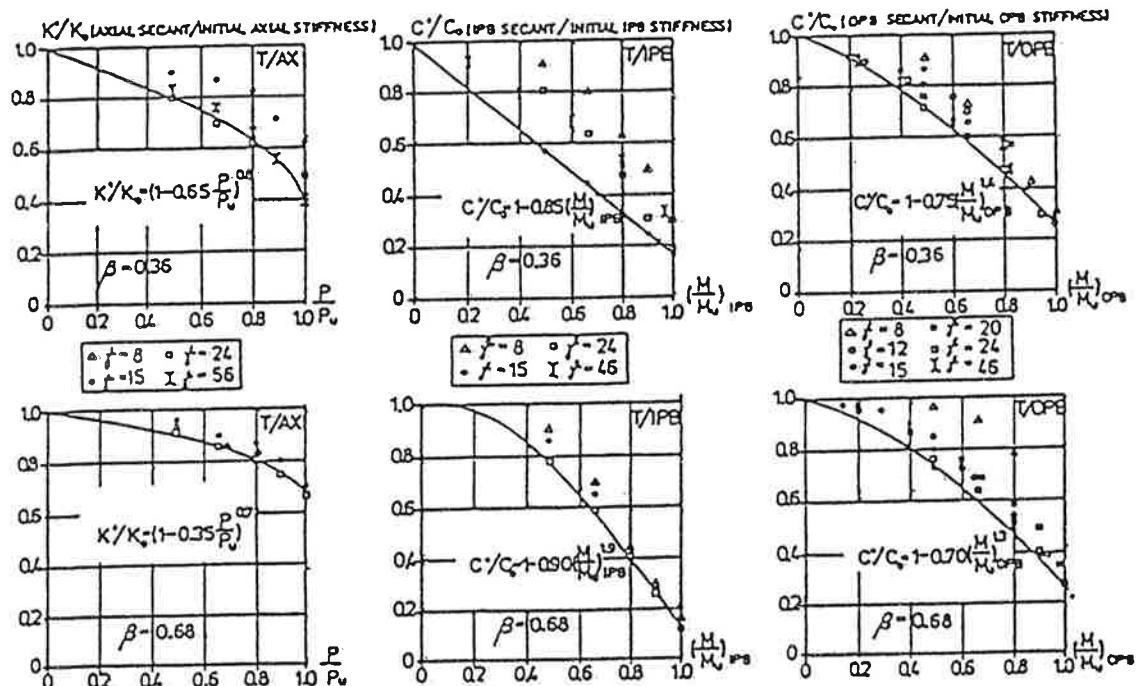


Figure 11. Normalized axial, IPB and OPB secant stiffnesses of T joints for $\beta = 0.36$ and 0.68 .

7 CONCLUSIONS

Initial stiffness and strength formulae have been established or confirmed for T and DT joints under single brace loading. This will be done for simple multibraced joints when planned experimental work is completed. A lower bound interaction formula is also established for joint strength under combined loading for T and DT joints, which satisfies all experimental data. Finally, lower bound stiffness formulae for tracing the non-linear behaviour of T and DT joints up to ultimate load have been established. This can be useful in calculating the tangent or secant stiffness at any (working) load level in accordance with design criteria.

8 ACKNOWLEDGEMENTS

The research work presented in this paper was carried out during the author's sabbatical year 1986-1987 from Helsinki University of Technology at the Institute TNO for Building Materials and Structures (TNO-IBBC). The author gratefully acknowledges the opportunity provided by the Council for Technological Research of the Academy of

Finland. Further, the author is also grateful for the Grants provided by Suomen Kulttuurirahasto and Tekniikan Edistämissäätiö for this research project.

The author wishes to record his special appreciation to Dr. R.S.Puthli from TNO-IBBC for his generous assistance and long hours of useful discussions on the subject. Thanks are also due to Ir. F.S.K. Bijlaard, Head of the Department of Steel Structures of TNO-IBBC and to Professor J. Wardenier of Delft University of Technology for their time and close cooperation throughout the research programme.

9 REFERENCES

- [1] MÄKELÄINEN, P.K., Strength, Stiffness and Non-Linear behaviour of Simple (Multi Braced) Welded Tubular Joints. TNO-IBBC Report No. BI-87-72, Delft, The Netherlands, June 1987.
- [2] WARDENIER, J., Hollow Section Joints. Delft University Press, Delft 1982.
- [3] Det norske Veritas (DnV): Rules for the Design, Construction and Inspection of Offshore Structures. Appendix C: Steel Structures. Oslo 1977.
- [4] FESSLER, H., et.al., Parametric Equations for the Flexibility Matrices of Single Brace Tubular Joints in Offshore Structures. Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, Vol. 81, Dec. 1986.
- [5] EFTHYMIOU, M., Local Rotational Stiffness of Unstiffened Tubular Joints. Koninklijke/Shell Exploratie en Produktion Laboratorium, Rijswijk, Rep. No. RKER. 85.199, 1985.
- [6] American Petroleum Institute (API): Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms. RP2A, 15th Edition, Oct. 1984.
- [7] International Institute of Welding (IIW): Design Recommendations for Hollow Section Joints. IIW-XV-E, Doc. XV-491-81/XIII-1003-81 (revised version to be published in 1988).

- [8] Underwater Engineering Group (UEG) Offshore Research Document: Design of Tubular Joints for Offshore Structures. Vol. 1,2 and 3. UEG/CIRIA 1985.
- [9] TOGO, T., Experimental Study on Mechanical Behaviour of Tubular Joints. Doct. Diss. (in Japanese). Osaka University, Osaka 1967.
- [10] STOL, H.G.A., PUTHLI, R.S. and BIJLAARD, F.S.K., Static Strength and Stiffness of As-Welded Tubular T-Joints under Proportionally Applied Combined Static Loading. TNO-IBBC Report No. B-84-561, Parts I, II and III. Delft, The Netherlands. April 1985.
- [11] YURA, J.A. and SWENSSON, K.D., Strength of Double-Tee Tubular Joints: Interaction Effects. Phase 3 Final Report, Vol. 3 of 3, The University of Texas at Austin, July 1986.
- [12] WARDENIER, J., IIW-recommendations-present and future. Safety Criteria in Design of Tubular Structures, Proc. of the Int. Meeting held in Tokyo, Japan on 11-12 July 1986. Ed. by. Y. Kurobane and V. Makino, Febr. 1987.
- [13] PAUL, J.C., The static strength of multi-planar tubular DTDT-joints. M.Sc. Dissertation, Delft University of Technology, Dept. of Civil Engineering, Dec. 1987.
- [14] GIBSTEIN, M.B., The static strength of T joints subjected to in-plane bending. Det norske Veritas (DnV) No. 76-137, 1976.

VARIATIONAL INEQUALITIES: APPLICATIONS AND NUMERICAL SOLUTION TECHNIQUES

Raino Mäkinen, Kimmo Salmenjoki
 University of Jyväskylä, Department of Mathematics
 Seminaarinmaa 15, SF-40100 Jyväskylä, Finland

1. INTRODUCTION

In this work we consider the numerical solution of steady state variational inequalities with the finite element method (FEM). We consider applications in non-smooth mechanics and fluid mechanics.

The theory of variational inequalities has been studied widely in the literature [1,3,4,11]. The approximation theory and numerical methods of solution have been considered in [5,6]. Optimal shape design problems with the state problem governed by variational inequalities have also been studied in the University of Jyväskylä, see [7,8,10] for example.

In the next chapter we shall give the mathematical formulation for a class of variational inequalities. In Chapter 3 we consider some examples of mechanical problems which can be modelled as elliptic variational inequalities. In Chapter 4 numerical methods of solution are considered and in Chapter 5 numerical results for the application examples are presented.

2. MATHEMATICAL STATEMENT OF THE PROBLEM

We consider the steady state variational inequalities arising e.g. in non-smooth mechanics. An elliptic variational inequality (EVI) can be formulated as

$$\begin{cases} \text{Find } u \in V \text{ such that} \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (2.1)$$

where V is real Hilbert space and $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ is a symmetric, bilinear, continuous and V -elliptic ($a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V, \alpha > 0$). The mapping $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous linear functional and $j : V \rightarrow]-\infty, +\infty]$, $j \not\equiv +\infty$ is a lower semicontinuous functional.

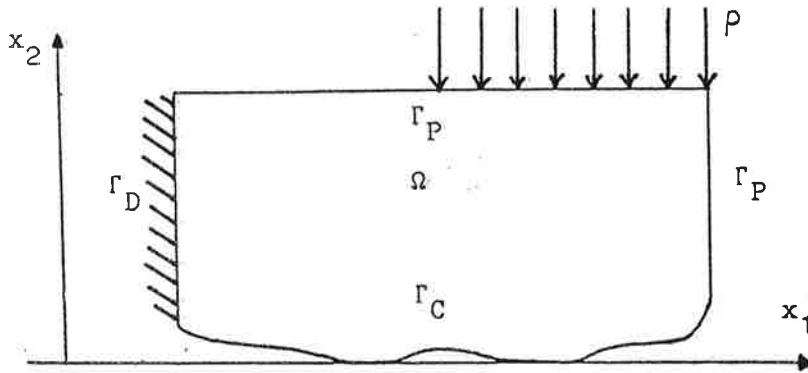


Figure 3.1. Elastic body on a rigid foundation

We note that (2.1) can be stated equally as a nonlinear minimization problem

$$\underset{v \in V}{\text{Minimize}} \{ J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) + j(v) \}. \quad (2.2)$$

It can be shown (see [4,p.41]) that problem (2.1) has a unique solution.

Remark. If j is the indicator function of a closed, convex set $K \subset V$ i.e.

$$j(v) = I_K(v) := \begin{cases} +\infty, & \text{if } v \notin K \\ 0, & \text{if } v \in K, \end{cases} \quad (2.3)$$

then problem (2.2) reduces to the minimization of quadratic functional with constraints,

$$\underset{v \in K}{\text{Minimize}} \{ J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \}, \quad (2.4)$$

which again is equivalent to the variational problem

$$\begin{cases} \text{Find } u \in K \text{ such that} \\ a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.5)$$

3. APPLICATIONS OF ELLIPTIC VARIATIONAL INEQUALITIES

3.1. Contact problems in plane elasticity

Assume a structure composed of a plane elastic body and a rigid foundation. Let the body be represented in its non-deformable state by a bounded domain Ω . The aim is to determine the behaviour of the structure under loading. The problem is non-classical in the sense that the contact zone is not known *a-priori*.

Let us split the boundary of the body as follows: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_P \cup \Gamma_C$ (see Figure 3.1), where Γ_D is the part of the boundary $\partial\Omega$ with homogeneous Dirichlet boundary condition, Γ_P is the part with an external force P and Γ_C is the part possibly in contact with the foundation. In order to give a variational formulation for this contact problem we introduce the following notations:

$$\begin{aligned} V &= \{v = (v_1, v_2) \in (H^1(\Omega))^2 \mid v_i = 0 \text{ on } \Gamma_D, i = 1, 2\}, \\ K &= \{v \in V \mid v_2(x_1, x_2) \geq -\alpha(x_1) \text{ on } \Gamma_C\}, \quad j(v) = I_K(v) \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} F_i v_i dx - \int_{\Gamma_P} P_i v_i ds, \end{aligned} \tag{3.1}$$

where $H^1(\Omega)$ is the space of functions which are square integrable together with their first derivatives. The usual summation convention $a_i b_i = \sum_i a_i b_i$ is used. Here F and P are the internal and external forces. $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^2$ is the (symmetric) stress tensor which is related to the strain tensor $\{\epsilon_{ij}\}_{i,j=1}^2$, $\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$, by the linear Hooke's law $\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}$, where c_{ijkl} are constants. The set K is a closed, convex subset of V containing displacements satisfying the contact condition on Γ_C and α is a real valued function describing the gap between the body and the foundation before deformation. With (3.1) the displacement field $u = (u_1, u_2)$ is obtained as the solution of the variational inequality (2.5). For further details, see [8,12].

3.2 Elasto-plastic torsion

Consider a long cylindrical bar of cross section Ω , where Ω is simply connected (no holes). Assume that the bar is made up of an isotropic, elastic-perfectly plastic material whose plasticity yield is given by the von Mises criterion.

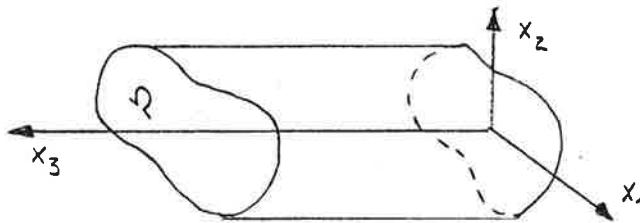


Figure 3.2. Torsion of a cylindrical bar

Starting from zero stress state, an increasing torsion moment is applied to the bar. The torsion is characterized by a constant C , which is defined to be the torsion angle per unit length. Now the stress field $\{\sigma_{ij}\}$ satis-

fies:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = 0 & \text{except for } \sigma_{13} \text{ and } \sigma_{23} \\ \sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2), \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3.2)$$

Now $\sigma_{13} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\sigma_{23} = -\frac{\partial u}{\partial x_1}$, where u is the stress potential which can be obtained as the solution of the variational inequality (2.5) with

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega), \quad K = \{v \in V \mid |\nabla v| \leq 1\}, \\ a(v, v) &= \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx, \quad L(v) = C \int_{\Omega} v dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

For more details see [3].

Remark. The set K can be replaced by the set $\hat{K} = \{v \in V \mid |v(x)| \leq d(x, \Gamma) \text{ a.e. in } \Omega\}$, where $d(x, \Gamma)$ denotes the distance of the point x from the boundary Γ (see [5], [6,p.119]). This modification makes the implementation of numerical solution easier.

3.3 Flow through a porous dam

As last example we consider the free-boundary problem which arises in the study of the motion of an incompressible fluid across a porous material. Consider two water basins, with different levels, separated by a rectangular earth dam. Water will filter by gravity from the higher level to the lower level, and the problem is to determine some physical quantities (distributions of velocity and pressure) as well as some geometrical unknowns (the wet portion of the dam) associated with the motion of the fluid.

If we suppose that the flow obeys Darcy's law, i.e. the velocity field \vec{v} is given by

$$\vec{v}(x, y) = -k \nabla(p(x, y) + \gamma y) \quad (k, \gamma > 0 \text{ constants}), \quad (3.4)$$

then the pressure p is obtained as the solution of the following free-boundary problem ([1,p.185]):

Find a curve $y = \phi(x)$ and a pressure $p(x, y)$ such that

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ is defined and 'regular' on } [0, c] \\ \phi \text{ is non-increasing, } \phi(0) = y_1, \quad \phi(c) > y_2 \\ \Delta p(x, y) = 0 \text{ in } \Omega \\ p(0, y) = y_1 - y \quad \text{for } 0 \leq y \leq y_1 \\ p(c, y) = y_2 - y \quad \text{for } 0 \leq y \leq y_2 \\ p(c, y) = 0 \quad \text{for } y_2 \leq y \leq \phi(c) \\ p(x, \phi(x)) = 0 \quad \text{for } 0 \leq x \leq c \\ \left(\frac{\partial(p+y)}{\partial n} \right)(x, \phi(x)) = 0 \quad \text{for } 0 < x < c \\ \left(\frac{\partial(p+y)}{\partial y} \right)(x, 0) = 0 \quad \text{for } 0 < x < c, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

where $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < c \text{ and } 0 < y < \phi(x)\}$.

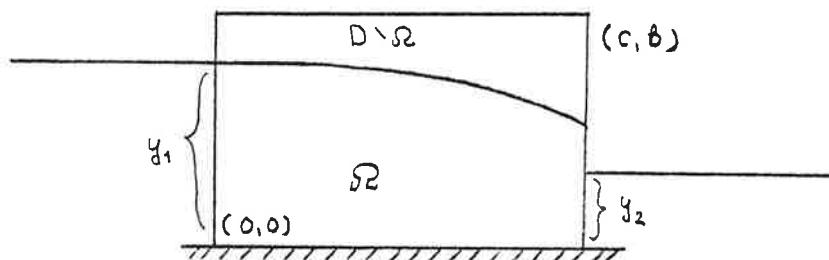


Figure 3.3. Geometry of the dam

Extending p as zero outside Ω , it is possible to pose the problem in a fixed domain $D = \{(x, y) : 0 < x < c \text{ and } 0 < y < b\}$. We introduce the following change of variable:

$$w(x, y) = \int_y^b p(x, s) ds. \quad (3.6)$$

It is shown in [1,p.189] that w can be obtained as the solution of the variational inequality (2.5) with

$$\begin{aligned} K &= \{v \in H^1(D) \mid v \geq 0 \text{ a.e. in } \Omega \text{ and } v(x, y)|_{\partial D} = \int_y^b p(x, s) ds\}, \\ a(u, v) &= \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad L(v) = - \int_D v dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

4. APPROXIMATION OF EVIS AND METHODS OF SOLUTION

We consider the solution of EVIs by FEM ([2]). For simplicity we restrict ourselves to the scalar case of the problem (2.5). Furthermore we use the case of so called Lagrangian finite elements. For the approximation of the general problem (2.1), see [5].

In FEM the domain Ω is divided into elements by a division T_h and the EVI (2.5) is approximated by

$$u_h \in K_h : \quad a_h(u_h, v_h - u_h) \geq L_h(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h, \quad K_h \subset V_h, \quad (4.1)$$

where V_h is the finite dimensional subspace of V and $u_h \in V_h$ is given by

$$u_h(x) = \sum_{q_i \in T_h} u_h(q_i) \varphi_i(x), \quad (4.2)$$

where q_i is a node of the triangulation T_h and the set $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ is a basis of V_h consisting of low order piecewise polynomials. The set K_h is the discrete analogue of K , $a_h(\cdot, \cdot)$ and $L_h(\cdot)$ are obtained from their continuous analogues by replacing exact integration with numerical integration.

Using the energy formulation of (4.1) we are led to the quadratic programming problem with constraints

$$\underset{u \in K_h}{\text{Minimize}} \frac{1}{2} u^T A u - f^T u, \quad (4.3)$$

where $u = (u_h(q_1), \dots, u_h(q_N))$ is the vector of nodal values of the approximate solution u_h and A and f are the stiffness matrix and force vector which are formed in the usual way of FEM.

We consider the solution of (4.3) by iterative methods. The (preconditioned) conjugate gradient method and successive overrelaxation methods (SOR) for linear system of equations can be modified for solving problem (4.3). The constraint $u \in K_h$ is handled using a projection technique as shown below for SOR:

SOR with projection for (4.3): Let $K_h = \prod_{i=1}^N K_{hi}$, $K_{hi} = [a_i, b_i] \subset R \cup \{\pm\infty\}$.

The following algorithm converges for all $0 < \omega < 2$ ([5,p.156]):

0. Choose any $u^{(0)} \in K$; $n := 0$; set tolerance $\epsilon > 0$

1. For $i := 1$ to N do

$$u_i^{(n+\frac{1}{2})} := \frac{1}{a_{ii}} (f_i - \sum_{j < i} a_{ij} u_j^{(n+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} u_j^{(n)}) \quad (4.4)$$

$$u_i^{(n+1)} := \text{Pr}_{K_{hi}}((1-\omega)u_i^{(n)} + \omega u_i^{(n+\frac{1}{2})})$$

2. If $\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\| < \epsilon$ then stop

else $n = n + 1$ and goto step 1

Here $\text{Pr}_{K_{hi}}$ denotes projection onto the set K_{hi} , $\text{Pr}_{K_{hi}}(x_i) = \operatorname{argmin}_{\xi \in K_{hi}} |\xi - x_i|$.

5. NUMERICAL SOLUTION OF THE APPLICATIONS

5.1. Contact problem in plane elasticity

Let us consider the situation of Figure 3.1. We take the dimensions and the elastic properties of the body to be $\Omega =]0, 4[\times]0.05, 1[$, Young's modulus $E = 2.15 \times 10^4$ and Poisson's ratio $\nu = 0.29$. The foundation is given by $\{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 \leq 0\}$ and the forces F and P to be $F = (0, 0)$ and $P = (0, -57.5)$, respectively. Now the discrete problem (4.1) is solved using the projected SOR-procedure given in Chapter 4. We discretize the domain with 64 first order triangular elements. In Figure 5.1(a) we see the triangulation of the deformed domain.

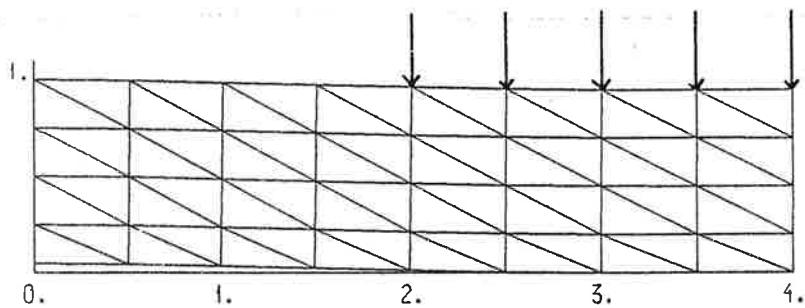


Figure 5.1(a) Deformed domain with regular grid

The locations of the nodes can be optimized (grid optimization, see [12]) to improve the approximation, especially in the contact zone. In Figure 5.1(b) we see the optimized grid with displacements and in Figure 5.1(c) the contact stress on Γ_C when grids of Figure 5.1(a) and Figure 5.1(b) where used.

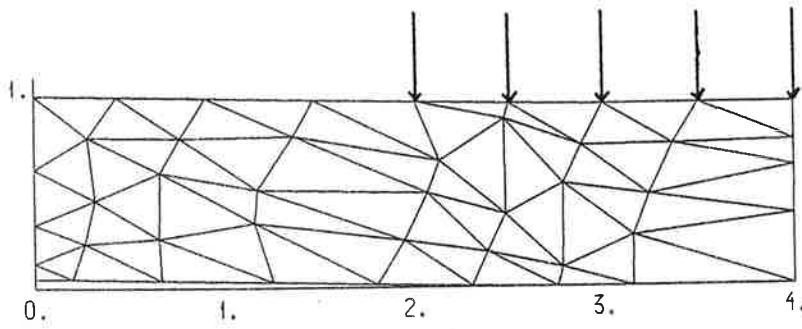


Figure 5.1(b) Deformed domain with optimized grid

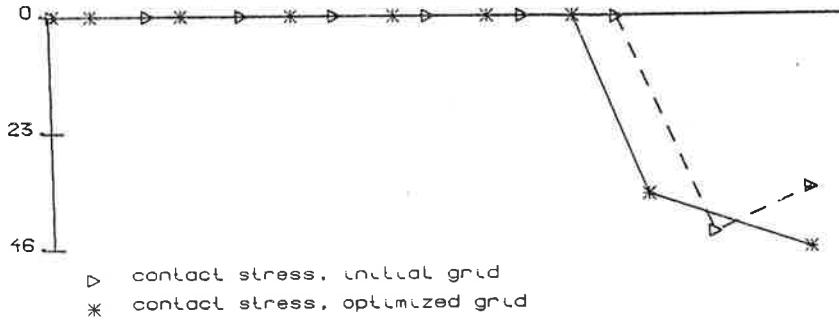


Figure 5.1(c) Contact stresses

5.2. The elasto-plastic torsion problem

Consider a bar with cross-sectional shape given in Figure 5.2(a). Due to symmetry only one half of the cross-section is analysed. The domain is discretized using 768 first order rectangular elements. The stress potential is now obtained solving the quadratic programming problem (2.4) with (3.3) using projected conjugate gradient method. In Figures 5.2(b)-5.2(c) we see the 'triangulation' of the domain and the distribution of the plastic ($|\nabla u| \equiv 1$) zones.

5.3. The dam problem

Consider the dam problem (2.5) with (3.7) where $b = 1.0$, $c = 0.5$, $y_1 = 0.75$ and $y_2 = 0.25$. The domain D is discretized using 800 first order rectangular elements. The resulting quadratic programming problem is solved using projected conjugate gradient method. The dry portion of the dam (i.e. $w \equiv 0$) is now obtained. To get the pressure distribution, we use the relation $p = -\frac{\partial w}{\partial y}$. In Figure 5.3 we see the pressure distribution and the free boundary. The finite dimensional approximate problem does not, of course, give a 'smooth' approximation for the free boundary $(x, \phi(x))$.

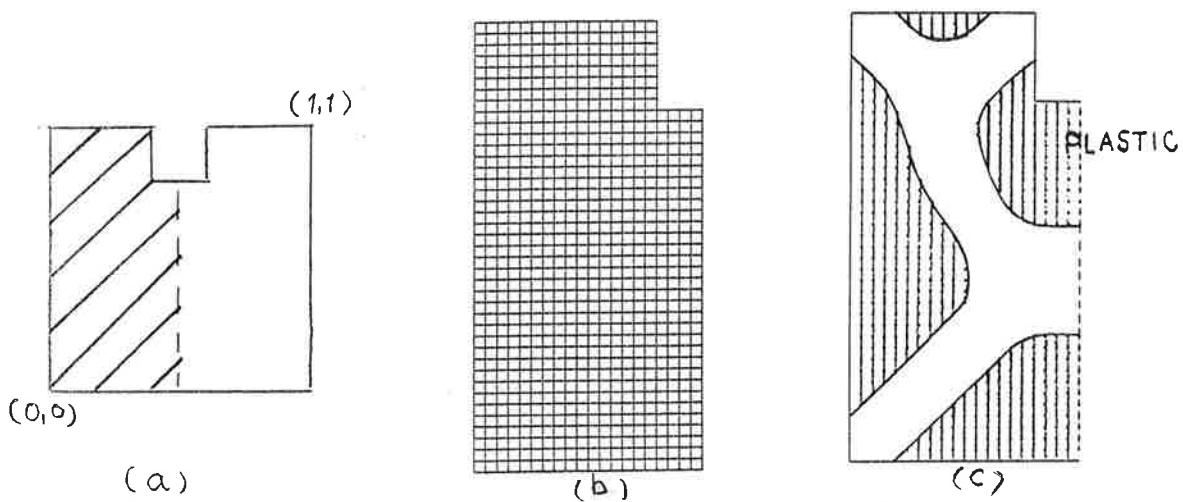


Figure 5.2. The geometry and the solution of the torsion problem

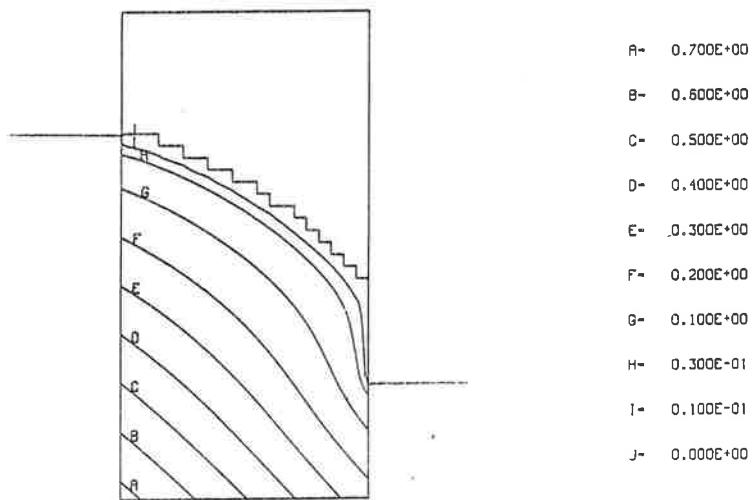


Figure 5.3. The pressure distribution in the dam example

Remark. General FEM codes for linear elliptic problems can be easily modified for EVIs by adding the system solver of type (4.4). This shows that a large class of different physical problems can be solved using general software.

6. CONCLUSIONS

In this work we have considered some applications of EVIs. Other examples of applications of EVIs like contact problems with friction, Bingham fluid flow problems and more general steady state inequality problems can be found

in the references. Many dynamical systems can also be modelled as inequality problems. With basically the same techniques as presented here the cooling of steel in continuous casting process has been analyzed at the University of Jyväskylä, [9].

ACKNOWLEDGEMENTS

This research was supported by the Academy of Finland.

REFERENCES

- [1] C. Baiocchi, A. Capelo, "Variational and Quasivariational Inequalities," John Wiley and Sons, Chichester New York Brisbane Toronto Singapore, 1984
- [2] P. Ciarlet, "The Finite Element Method", North-Holland, Amsterdam, 1978
- [3] G. Duvaut, J.L. Lions, "Inequalities in Mechanics and Physics," Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976
- [4] I. Ekeland, R. Temam, "Convex Analysis and Variational Problems," North-Holland, Amsterdam, 1976
- [5] R. Glowinski, "Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems," Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1984
- [6] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Tremolieres, "Numerical Analysis of Variational Inequalities," North-Holland, Amsterdam New York Oxford, 1981
- [7] J. Haslinger, P. Neittaanmäki, A. Kaarna, T. Tiihonen, "Optimal Shape Control of the Domain in Unilateral Boundary Value Problems, Part I: Abstract setting and Dirichlet-Signorini problem," Lappeenranta University of Technology Research Report 5/1986, 1986
- [8] J. Haslinger, P. Neittaanmäki, A. Kaarna, T. Tiihonen, "Optimal Shape Control of the Domain in Unilateral Boundary Value Problems, Part II: Design of an Elastic Body in Contact with Rigid Support," Lappeenranta University of Technology Research Report 6/1986, 1986
- [9] P. Neittaanmäki, E. Laitinen, "Optimization of Cooling Conditions in Continuous Casting," Proceedings of the Summer School in Numerical Analysis at Jyväskylä (P. Neittaanmäki ed.), University of Jyväskylä, Report 31, 1985, pp.249-257
- [10] P. Neittaanmäki, D. Tiba, R. Mäkinen, "A Variational Inequality Approach to the Problem of the Design of the Optimal Covering of an Obstacle", University of Jyväskylä, Preprint 78, 1987
- [11] P.D. Panagiotopoulos, "Inequality Problems in Mechanics and Applications," Birkhäuser, Boston Basel Stuttgart, 1985
- [12] K. Salmenjoki, "On Optimal Mesh Design for FEM in Contact Problems," Proceedings of Nordic Summer School in Numerical Analysis in Helsinki, 1987, to appear

LISÄTYN MASSAN KERTOIMIEN LASKENTA ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Jarmo Niemi

Tampereen teknillinen korkeakoulu

Teknillisen mekaniikan laitos

1 JOHDANTO

Tarkasteltaessa nesteeseen upotetun rakenteen väärähtelyjä on väärähtelevän rakenteen mukana liikkuvalla nesteellä merkittävä vaikutus rakenteen dynamiikkaan. Yleisesti ottaen pitäisi hydrodynaamiset voimat laskea kolmiulotteisen Navier - Stokesin yhtälön perusteella. Tämä on kuitenkin hyvin vaikeaa jopa yksinkertaisissa tapauksissa. Monissa käytännön tilanteissa voidaan nesteen kokoonpuristuvuuden ja viskositeetin vaikutus jättää huomioon ottamatta. Näissä tilanteissa voidaan käyttää potentiaalivirtauksen teoriaa hydrodynaamisten voimien laskentaan. Jos lisäksi tarkastellaan ohuita kappaleita voidaan nesteen virtausta tarkastella kaksiulotteisena.

Tässä työssä käytetään elementtimenetelmää hydrodynaamisten voimien laskentaan, jotka yllä mainitussa tapauksessa voidaan tulkitta lisätystä massasta johtuviksi hydrodynaamisiksi hitausvoimiksi. Erityisesti vertaillaan erilaisia elementtiverkkoja, joissa käytetään neljä- ja yhdeksänsolmuisia sekä ääreettömiä elementtejä.

Elementtimenetelmää on käytetty lisätyn massan laskennassa 1970-luvun alusta lähtien (ks. [1], [2], [3], [4]). Myös eri elementtiverkkojen vaikutusta on tutkittu [1]. Tässä työssä näitä mallitusvirheitä tarkastellaan perustellsemmin. Myös tehtyjen oletusten pätevyyttä tarkastellaan.

2 ONGELMAN FORMULointi ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Tehdään seuraavat oletukset:

- 1° tarkastellaan ohuita sylinterimäisiä kappaleita siten, että paine ei muutu kappaleen pituussuunnassa (nk. slender body assumption);
- 2° kun kappale ei värähtele neste on levossa;
- 3° neste on kokoonpuristumatonta;
- 4° neste on kitkatonta ja
- 5° värähtelyt ovat pieniä.

Näiden oletusten perusteella saadaan dynaamista painetta p ja kappaleen reuna-pinnan kiilthyvyyskomponentteja a_i , $i = 1, 2$, hallitsevat yhtälöt:

$$\nabla^2 p(x_1, x_2) = 0 \quad , \quad (1)$$

reunalla Γ_0 jolla paine on annettu p_0

$$p = p_0 \quad (2)$$

(erityisesti $p = 0$ vapaalla pinnalla ja äärettömyydessä), muilla reunoilla Γ_1

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n \quad , \quad (3)$$

jossa $\partial p / \partial n$ on paineen gradientti ykkösnormaalivektorin n suuntaan, ρ on nesteen tiheys ja a_n on rakenteen kiilthyvyyden normaalivektorin suuntainen komponentti. Rakenteen kiilthyvyyskomponentit rajapinnalla

$$a_i = a_{Ai} + \alpha e_{ij} (x_j - x_{Aj}) \quad , \quad i, j = 1, 2 \quad (4)$$

jossa a_{Ai} on annetun poikkileikkauden pisteen A kiilthyvyys, α on poikkileikkauden kulmakiilthyvyys ja permutaationsymboli

$$e_{ij} = \begin{cases} -1 & i < j \\ 0 & i = j \\ +1 & i > j \end{cases} \quad (5)$$

Koko tekstissä käytetään summausääntöä, jonka mukaan summaus tehdään toistuvien indeksien yli.

Käyttämällä dynaamiselle paineelle elementtimenetelmää approksimaatiota

$$p = \tilde{N}_i p_i \quad (6)$$

ja rajaviivalle approksimaatiota

$$x_i = N_j \hat{x}_{ji} \quad (7)$$

päästään Galerkinin menetelmää soveltaen diskretisoituihin yhtälöihin (ks. [9])

$$F_i = -I_{ij} a_{Aj} \quad (8)$$

jossa on merkitty $F_3 = M_A$ ja $a_{A3} = \alpha$. Poikkileikkausen lisätyn massan matriisi

$$[I] = \rho \begin{bmatrix} -P_{1j} & H_{jk}^{-1} & -P_{1j} & H_{jk}^{-1} & P_{2k} & P_{1j} & H_{jk}^{-1} & L_k \\ -P_{2j} & H_{jk}^{-1} & -P_{2j} & H_{jk}^{-1} & P_{2k} & P_{2j} & H_{jk}^{-1} & L_k \\ L_j & H_{jk}^{-1} & L_j & H_{jk}^{-1} & P_{2k} & -L_j & H_{jk}^{-1} & L_k \end{bmatrix} \quad (9)$$

jossa

$$P_{ij} = \int_{\Gamma_1} \tilde{N}_j n_i d\Gamma_1 \quad i = 1, 2 \quad , \quad (10)$$

$$L_j = \int_{\Gamma_1} e_{lk} (N_i \hat{x}_{il} - x_{Al}) n_k \tilde{N}_j d\Gamma_1 \quad l, k = 1, 2 \quad (11)$$

ja

$$H_{ij} = \int_A \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{N}_j}{\partial x_k} dA \quad k = 1, 2 \quad (12)$$

Koska symmetrisen matriisin H_{ij} käänteismatriisi on myöskin symmetrinen on matriisi I_{ij} symmetrinen. On selvää, että I_{ij} ($i,j = 1,2$) on toisen asteen symmetrinen tensori joten poikkileikkaukselle voidaan määrittää pääsuunnat s.e. I_{ij} on lävistäjämatriisi. Jos poikkileikkauksella on symmetria-akseli, yhtyy toinen pääsuunta siihen ja toinen on sitä vastaan kohtisuora [5]. Kytkentätermit I_{13} ja I_{23} riippuvat pisteen A valinnasta. Voidaan valita pisteen A' s.e. I_{13} ja I_{23} häviävät. Tällaista pistettä kutsutaan poikkileikkauksen keskeispisteeksi (central point) [6]. Täten pääkoordinaatistossa, pisteen A ollessa keskeispiste, matriisi I_{ij} on lävistäjämatriisi.

Usean sylinterimäisen kappaleen tapauksessa saadaan kappaleen k poikkileikkaukseen kohdistuviksi hydrodynaamisiksi voimiksi

$$F_{ki} = -I_{krij} a_r A r_3 \quad , \quad r = 1 \dots n \quad j = 1 \dots 3 \quad (13)$$

jossa kappaleiden lukumäärä on n ja

$$[I_{kr}] = \begin{bmatrix} -P_{k1i} & H_{ij}^{-1} & P_{r1j} & -P_{k2i} & H_{ij}^{-1} & P_{r2j} & P_{k1i} & H_{ij}^{-1} & L_{rj} \\ -P_{k2i} & H_{ij}^{-1} & P_{r1j} & -P_{k2i} & H_{ij}^{-1} & P_{r2j} & P_{k2i} & H_{ij}^{-1} & L_{rj} \\ L_{ki} & H_{ij}^{-1} & P_{r1j} & L_{ki} & H_{ij}^{-1} & P_{r2j} & -L_{ki} & H_{ij}^{-1} & L_{rj} \end{bmatrix} \quad (14)$$

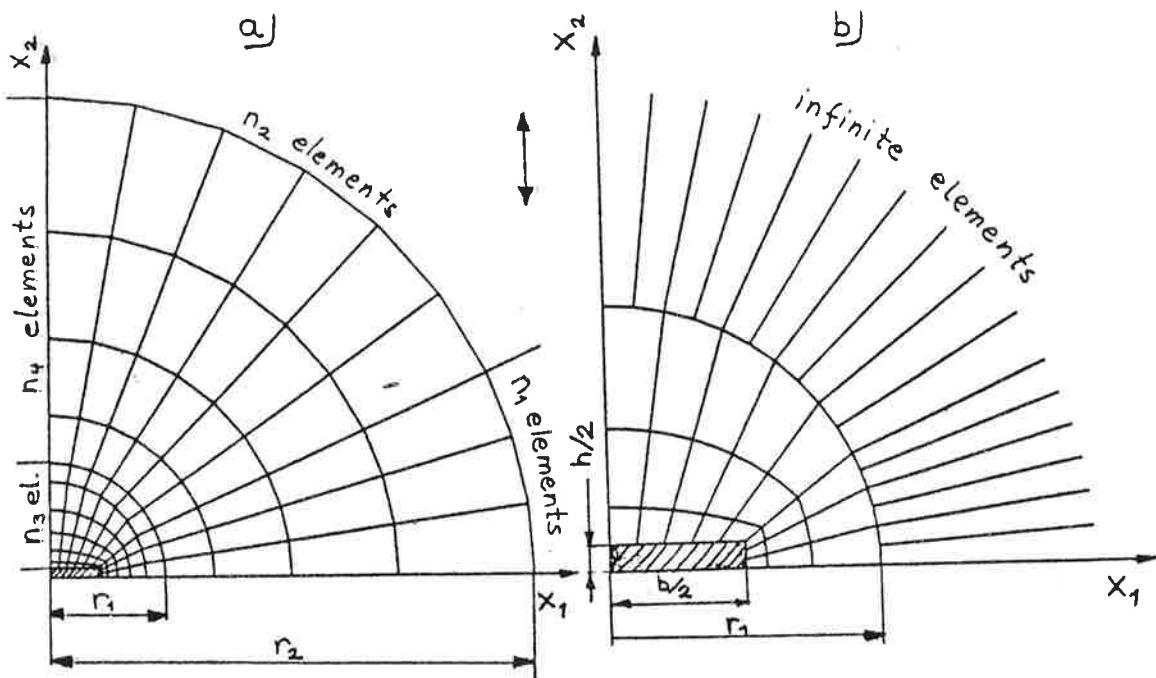
$$L_{rj} = \int_{\Gamma_{r1}} e_{lk} (N_l \hat{x}_{i1} - x_{Ar_1}) n_k \tilde{N}_j d\Gamma_{r1} \quad (15)$$

$$P_{r1j} = \int_{\Gamma_{r1}} N_j n_i d\Gamma_{r1} \quad (16)$$

Edellä olevan teorian pohjalta on tehty tietokoneohjelma, jonka yksityiskohdita kuten reuna- ja äärettömiä elementtejä on käsitelty lähteessä [9] (ks. myös [7]).

3 SUPPENEVUUSTARKASTELUJA ERILAISILLA ELEMENTTIVERKOILLA

Testitehtävänä numeerisessa suppenevuustarkastelussa käytetään suorakulmiota. Elementtiverkot ja parametrit on esitetty kuvassa 1. Kaksoissymmetrian vuoksi vain neljännes nestealueesta on mallitettava. Verkko, jossa ei ole äärettömiä elementtejä, on jaettu etäisyyteen r_1 ulottuvaan tiheään ja katkaisurajalle

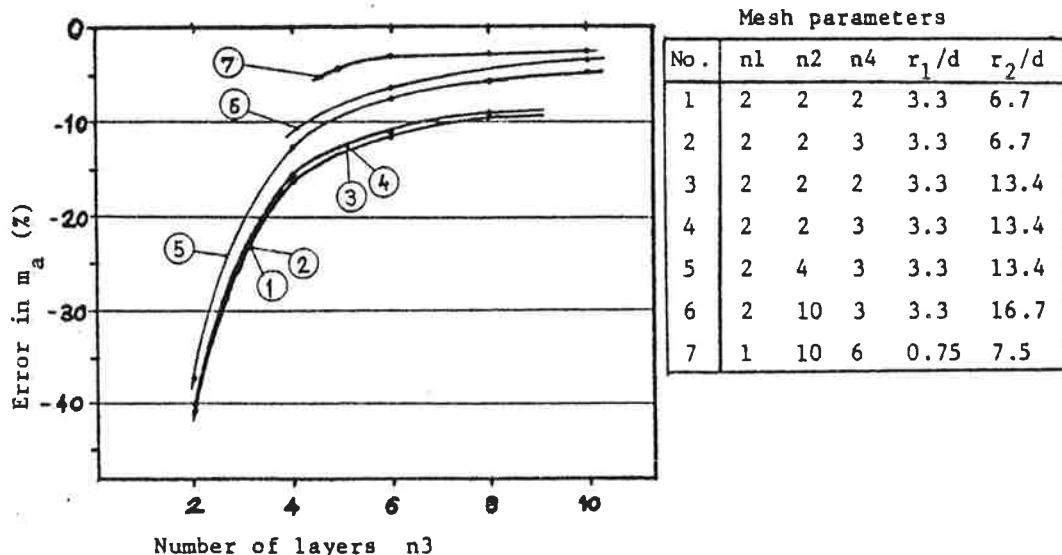


Kuva 1. Suorakulmion neljännes. Elementtiverkot, joissa on käytetty lineaarisia äärellisiä (a) ja kvadraattisia äärellisiä ja äärettömiä elementtejä (b). Liikkeen suunta on merkitty $\leftarrow \rightarrow$.

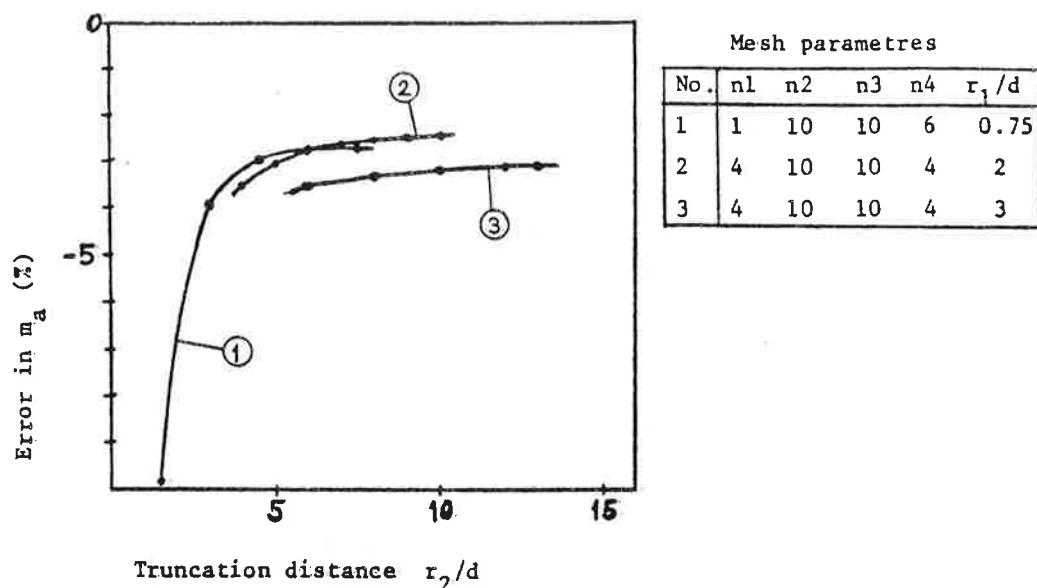
r_2 , jossa paine p on asetettu nollaksi, ulottuvaan harvaan verkkoon. Suorakulmion karakteristinen lävistäjä lasketaan lausekkeesta $d = \frac{1}{(h^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}$. Lisätyyn massan teoreettinen arvo

$$m_a = \alpha \rho \pi \frac{b^2}{4} \quad (17)$$

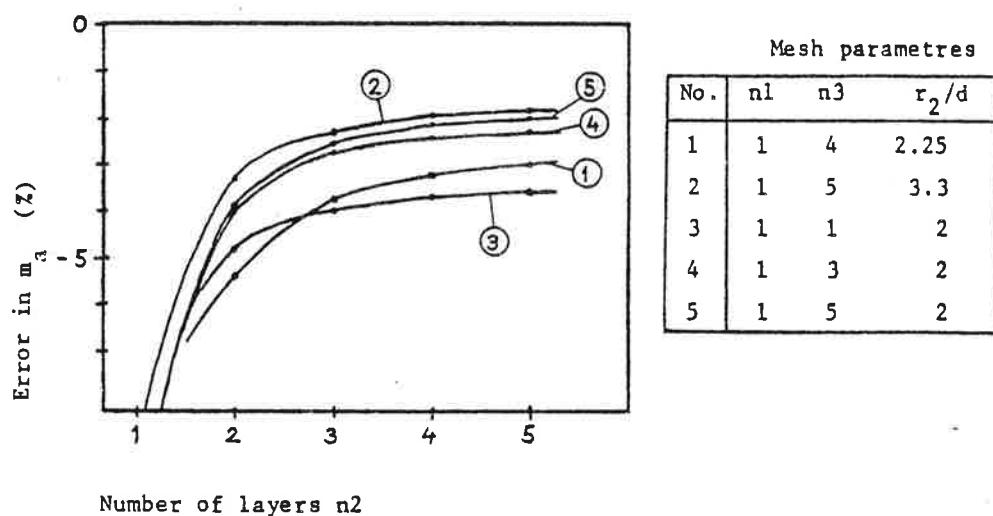
jossa $\alpha = b/n$ ja kertoimen α arvo löytyy lähteistä [4] ja [5]. Elementtimenetelmällä syntyvät virheet eri elementtiverkkoja käyttäen on esitetty kuvissa 2...4. Nähdään, että katkaisuetäisyyden r_2 tulisi olla suurempi kuin $6d$.



Kuva 2. Virhe lisätyssä massassa erilaisilla lineaaristen elementtien verkolla n_3 suuntaisten elementtikerrosten lukumäärän funktiona.



Kuva 3. Virhe lisätyssä massassa erilaisilla lineaaristen elementtien verkoilla katkaisuetäisyyden r_2 funktioina.



Kuva 4. Virhe lisätyssä massassa erilaisilla kvadraattisten äärellisten ja äärettömien elementtien verkoilla n₂ suuntaisten elementtikerrosten funktioina.

Elementtiverkot, joilla päästäään alle 5 % virheisiin on esitetty taulukossa 1.

Äärettömien elementtien käyttö on taulukon 1 mukaisesti huomattavasti tehokkaampaa äärettömän reunaehdon kohdalla kuin katkaisureunan käyttö.

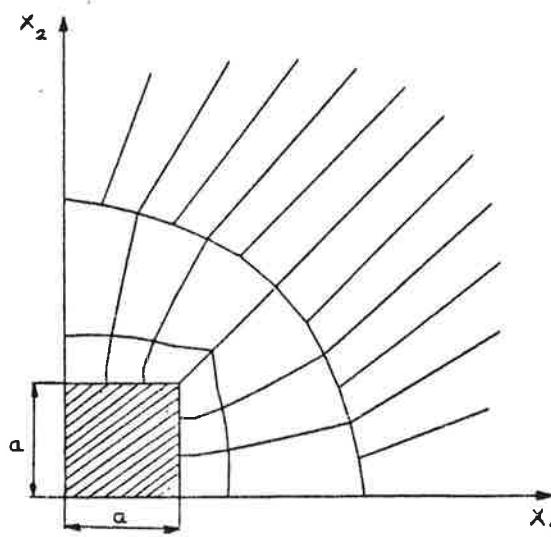
Taulukko 1. Verkkoparametrit, joilla virhe lisätyssä massassa kuvan 1 suora-kulmiolle jää alle 5 %.

Elementti-tyyppi	n_1	n_2	n_3	n_4	r_1/d	r_2/d	vapausasteiden lukumäärä
4 solmuinen lineaarinen	2	8	8	3	2	6	150
9 solmuinen kvadraattinen	1	4	4	1-2	2	6	150
9 solmuinen & ääretön	1	4	4	-	1	-	100

4 ESIMERKKI

Lasketaan neliölle lisätyn massan matriisia kuvan 5 elementtiverkkoa käyttäen. Teoreettinen lisätyn massan matriisi pääkoordinaatistossa, pisteen A ollessa origossa [4]

$$[I_t] = \rho \pi a \begin{bmatrix} 1.51 & 0 & 0 \\ 0 & 1.51 & 0 \\ 0 & 0 & 0.234 \end{bmatrix} \quad (18)$$



Kuva 5. Elementtiverkko esimerkin neliön laskentaan. Verkossa on käytetty kvadraattisia ärellisiä ja äärettömiä elementtejä.

Elementtimenetelmällä saadaan

$$[I_{FE}] = \rho \pi a \begin{bmatrix} 1.49 & 0 & 0 \\ 0 & 1.49 & 0 \\ 0 & 0 & 0.215 \end{bmatrix} . \quad (19)$$

Prosentuaalinen virhe I_{ii} :ssä, $i = 1, 2$, on 1,6 % ja I_{33} :ssa 8,3 %.

5 TEHTYJEN OLETUSTEN PÄTEVYYS

Jos lisätyn massan laskenta on fysikaalisesti mahdollista suorittaa tehtyjen oletusten pohjalta on elementtimenetelmän käyttö hyvin tehokasta. Elementtimallit eivät ole suuria - korkeintaan muutamia satoja vapausasteita - ja laskenta on mahdollista suorittaa mikrotietokoneella. Lisäksi säänöttömän muotoisten ja useiden kappaleiden systemin laskenta on suoraviivaista. Oletusten voidaan katsoa pätevän jos taajuudella f väärähtelevälle kappaleelle pätee:

1° väärähtelyjen solmupisteiden etäisyys $l > 3d$ [5], [8],

2° virtauksen nopeus $U \ll fd$ [11],

3° äänen nopeus nesteessä $c \gg fd^2$ [10], [11],

4° nesteen kinemaattinen viskositeetti $\nu \ll fd^2$ [11] ja

5° väärähtelyjen amplitudi $A \ll d$.

Nämä kriteerit ovat luonnollisesti suuntaa antavia, eivätkä päde kaikissa tapauksissa.

LÄHTEET

- [1] Armand J.-L., Orsero P., A method for evaluating the hydrodynamic added mass in ship hull vibrations. SNAME Transactions 87 (1979), pp. 99-120.

- [2] Yang C.-I., Moran T.J., Finite-element solution of added mass and damping of oscillation rods in viscous fluids. *J. of Appl. Mech.* 46 (1979), pp. 519-523.
- [3] Newton R.E., Finite element analysis of two-dimensional added mass and damping in Finite Element in Fluids, Gallagher R.M., Oden J.T., Taylor C., Zienkiewicz O.C. (eds.), Wiley, New York, 1975.
- [4] Chung H., Chen S.S., Hydrodynamic mass. in Topics in fluid structure interaction, Chung H., Bernskin M.D. (eds.), ASME, San Antonio, Texas, 1984.
- [5] Blevins R.D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Van Nostrand, New York, 1979.
- [7] Zienkiewicz O.C., Emson C., Bettess P., A novel boundary infinite element. *IJNME* 19 (1983), pp. 393-404.
- [8] Niemi J., Pramila A., FEM-analysis of transverse vibrations of an axially moving membrane immersed into ideal fluid. *IJNME* 24 (1987), pp. 2301-2313.
- [9] Niemi J., FEM computation of added mass coefficients for slender bodies. Tampere University of Technology, Applied Mechanics, Report 32. Tampere 1986.
- [10] Landau L., Lifshitz E., Fluid Mechanics. Pergamon Press. Bristol, 1966.
- [11] Chen S.-S., Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures. Hemisphere, 1987.

YKSIASKELMENETELMÄT RAKENTEIDEN TRANSIENTTIANALYYSISSA

Jarmo Niemi

Tampereen teknillinen korkeakoulu

Teknillinen mekaniikka

1 JOHDANTO

Numeerinen aikaintegrointi muodostaa perustan rakenteiden transienttianalyysille, joka on eräs rakenteiden mekaniikan perustehtävistä. Ratkaistavana on yleensä elementtimenetelmällä (paikan suhteen) semidiskretisoitu rakenteen liikeyhtälö, joka on tällöin toisen asteen tavallinen differentiaaliyhtälöryhmä. Sen mukaan tarkastellaanko askeltavassa integroointialgoritmissa yhtä tai useampaa aika-askelta kerrallaan puhutaan yksi- ja moniaskelmenetelmistä. Useimmat rakenteiden dynamiikassa käytetyistä integroointimenetelmistä voidaan esittää sekä moni- että yksiaskelmenetelminä. Yksiaskelmenetelmät ovat suosittavampia koska ne eivät tarvitse erillistä aloitusalgoritmia ja soveltuват paremmin epälinaarisiin systeemeihin ja muuttuviihin aika-askeliin (ja täten automaattiseen integroointiin). Yleiskuvan menetelmien tutkimuksesta saa esim. kirjasta [11].

Tämä työ on suoraa jatkoa artikkeleille [1] ja [10]. Artikkelissa [1] esitettiin painotettujen jäännösten menetelmään ja ns. Newmarkin approksimaatioon perustuva SS5 yksiaskelmenetelmäperhe rakenteiden transienttianalyysiin. Esitetty menetelmä yhdistää artikkelisarjassa [2, 3, 4, 5] esitetyt SSpj ja beta-m menetelmät, joista ensimmäinen on painotettujen jäännösten menetelmän yleistys aikaintegroinnissa sovellettuna yksiaskelproseduuriksi ja jälkimmäinen Newmarkin menetelmän yleistys. Artikkelissa [10] tutkittiin SSS menetelmäperheen parametrien vaikutusta menetelmän tarkkuuteen, stabiiliuteen ja ylimpumiseen (engl. overshoot) systeemin pisimmän ominaisväähdyksen merkittävästi ylittävillä aika-askeleilla. Tarkastelu rajoittui lineaarisiin symmetrisiin systeemeihin ja se seurasi lähteissä [6] ja [7] käytettyä metodia.

Tässä työssä esitetään lisäksi menetelmien vertailu vaimennetuille systeemeille ja ns. katkaistun aloituksen vaikutus tarkkuuteen.

2 SS5-MENETELMÄPERHE

Rakenteen lineaariseen liikeyhtälöön

$$\ddot{\bar{M}} \ddot{\bar{q}} + \ddot{\bar{C}} \dot{\bar{q}} + \ddot{\bar{K}} \bar{q} = \ddot{\bar{f}}(t) \quad (1)$$

sovellettuna SS5 menetelmäperhe johdettiin lähteessä [1]:

Algoritmi

Parametrit α_i , $i = 1\dots 5$, β , γ ,

$$\ddot{\bar{D}} (\ddot{\bar{a}}_1 - \ddot{\bar{a}}_0) = (\ddot{\bar{M}} + \alpha_1 \Delta t \ddot{\bar{C}} + \frac{1}{2} \alpha_2 \Delta t^2 \ddot{\bar{K}}) \ddot{\bar{a}}_0 + (\ddot{\bar{C}} + \alpha_1 \Delta t \ddot{\bar{K}}) \ddot{\bar{v}}_0 + \ddot{\bar{K}} \ddot{\bar{u}}_0 - \ddot{\bar{p}}, \quad (2a)$$

$$\ddot{\bar{D}} = \alpha_3 \ddot{\bar{M}} + \alpha_4 \Delta t \ddot{\bar{C}} + \alpha_5 \Delta t^2 \ddot{\bar{K}}, \quad (2b)$$

$$\ddot{\bar{v}}_1 = \ddot{\bar{v}}_0 + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{\bar{a}}_0 + \gamma \ddot{\bar{a}}_1], \quad (2c)$$

$$\ddot{\bar{u}}_1 = \ddot{\bar{u}}_0 + \Delta t \ddot{\bar{v}}_0 + \Delta t^2 [(\frac{1}{2} - \beta) \ddot{\bar{a}}_0 + \beta \ddot{\bar{a}}_1] \quad (2d)$$

$$\ddot{\bar{p}} = (1 - \alpha_1) \ddot{\bar{f}}_0 + \alpha_1 \ddot{\bar{f}}_1, \quad (2e)$$

jossa $\ddot{\bar{a}} \equiv \ddot{\bar{q}}$, $\ddot{\bar{v}} \equiv \dot{\bar{q}}$, $\ddot{\bar{u}} \equiv \bar{q}$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ja liiketilavektoreiden alaindeksi 0, 1 viittaa vastaavasti integrointiaskeleen alku- ja loppupäähän. Kuormitus on interpoloitu aika-askeleen alueessa lineaarisesti reuna-arvoistaan. Tau-lukossa 1 on esitetty muutamia tunnettuja menetelmiä, jotka sisältyvät SS5 menetelmäperheeseen.

Esitettty SS5-menetelmä (single step, 5. asteen interpolointi - tästä syntyy menetelmän nimitys) perustuu seuraaviin perusoletuksiin:

- 1°. Siirtymien ja nopeuksien arvot aika-askeleen loppupäässä lausutaan samoin kuin Newmarkin menetelmässä [7].
- 2°. Siirtymää approksimoidaan aika-askeleen alueella viidennen asteen polynomilla, jonka reuna-arvoina ovat approksimaatiot $\ddot{\bar{u}}_i$, $\ddot{\bar{v}}_i$ ja $\ddot{\bar{a}}_i$, $i = 0, 1$.
- 3°. Nopeuksien ja kiihtyvyyskien approksimaatiot saadaan derivoimalla siirtymien approksimaatioista.

4º. Liikeyhtälö (1) esitetään aika-askeleen alueessa painotettujen jäännösten muodossa, so. dynaanisen tasapainoyhtälön liiketilan approksimoinnista johtuva virhe ortogonalisoidaan valitun painofunktion w kanssa aikavälillä (t_i, t_{i+1}) :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\bar{M}\ddot{w} + \bar{C}\dot{w} + \bar{K}w - \bar{f})W dt = 0 \quad (3)$$

Taulukko 1. SS5 perheen vastaavuudet muihin menetelmiin.

Menetelmä ja parametrit	Vastaavan SS5 menetelmän parametrien arvot
SS32 [2] $\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3$	$\beta = \frac{1}{6} \quad \gamma = \frac{1}{2}$ $\alpha_1 = \theta_1 \quad \alpha_2 = \theta_2 \quad \alpha_3 = -\theta_1 \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2}\theta_2$ $\alpha_5 = -\frac{1}{6}\theta_3$
Kollokaatio-menetelmät [6] $\beta_k \quad \gamma_k \quad \theta_k$ Wilsonin θ menetelmä $\beta_k = \frac{1}{6} \quad \gamma_k = \frac{1}{2} \quad \theta_k = \theta_w$ Trapetsisääntö $\beta_k = \frac{1}{4} \quad \gamma_k = \frac{1}{2} \quad \theta_k = 1$	$\beta = \beta_k \quad \gamma = \gamma_k \quad \alpha_1 = \theta_k \quad \alpha_2 = \theta_k^2 \quad \alpha_3 = -\theta_k$ $\alpha_4 = -\gamma\theta_k^2 \quad \alpha_5 = -\beta\theta_k^3$ $\beta = \frac{1}{6} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \alpha_1 = \theta_w \quad \alpha_2 = \theta_w^2 \quad \alpha_3 = -\theta_w$ $\alpha_4 = -\gamma\theta_w^2 \quad \alpha_5 = -\beta\theta_w^3$ $\beta = \frac{1}{4} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = -1$ $\alpha_4 = -\frac{1}{2} \quad \alpha_5 = -\frac{1}{4}$
(beta-2 menetelmä [3] Newmarkin menetelmä $\beta_k = \beta_N \quad \gamma_k = \gamma_N \quad \theta_k = 1$	$\beta = \beta_N \quad \gamma = \gamma_N \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = -1$ $\alpha_4 = -\gamma_N \quad \alpha_5 = -\beta_N$
α -menetelmät [6] $\beta_m \quad \gamma_m \quad \alpha_m$	$\beta = \beta_m \quad \gamma = \gamma_m \quad \alpha_1 = 1 + \alpha_m \quad \alpha_2 = \alpha_1$ $\alpha_3 = -1 \quad \alpha_4 = -(1 + \alpha_m)\gamma_m \quad \alpha_5 = -(1 + \alpha_m)\beta_m$

3 MENETELMÄPERHEEN OMINAISUUDET VAIMENTAMATTOMALLE SYSTEEMILLE

Lähempi tarkastelu osoittaa, että symmetrisen vaimennuksen tapauksessa yhtälön (1) ominaismuotoihin jako ja aikadiskretisointi kommuutoivat. Täten integrointimenetelmän analyysi voidaan keskittää yhden vapausasteen yhtälöön

$$\ddot{\phi} + 2\xi\omega\dot{\phi} + \omega^2\phi = \Psi(t) \quad , \quad (4)$$

Esitetään yhtälön (4) aikadiskretisointi tavanomaisessa muodossa

$$\ddot{x}_{i+1} = \bar{A}\ddot{x}_i + \bar{L}_i , \quad (5)$$

jossa $x_i = (u_i \ \Delta t v_i \ \Delta t^2 a_i)^T$, jossa $u \approx \dot{\phi}$ ja $a \approx \ddot{\phi}$ ja vektori \bar{L}_i on riippuvainen ulkoisesta kuormituksesta $\Psi(t) = 0$; $\bar{L}_i = \bar{0}$. Eri yksiaskelmenetelmä voidaan nyt tutkia tarkastelemalla niiden vahvistusmatriisia \bar{A} . SS5 menetelmille matriisi \bar{A} on

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 + \beta \frac{\Omega^2}{D} & 1 + \beta \frac{\psi_2}{D} & \frac{1}{2} + \beta \frac{\psi_1}{D} \\ \gamma \frac{\Omega^2}{D} & 1 + \gamma \frac{\psi_2}{D} & 1 + \gamma \frac{\psi_1}{D} \\ \frac{\Omega^2}{D} & \frac{\psi_2}{D} & 1 + \frac{\psi_1}{D} \end{bmatrix} , \quad (6)$$

jossa on käytetty merkintöjä

$$\Omega = \Delta t \omega ,$$

$$D = \alpha_3 + 2\alpha_4 \xi \Omega + \alpha_5 \Omega^2 ,$$

$$\psi_1 = 1 + 2\alpha_1 \xi \Omega + \frac{1}{2} \alpha_2 \Omega^2 ,$$

$$\psi_2 = 2\xi \Omega + \alpha_1 \Omega^2 .$$

Nopeudet ja kiihtyvydet voidaan eliminoida yhtälöstä (5) soveltamalla sitä toistuvasti peräkkäisille aika-askelille. Tällöin saadaan ekvivalentti moni-askelmanetelmä (homogeeniselle yhtälölle, $\bar{L} = \bar{0}$)

$$u_{i+1} - A_1 u_i + A_2 u_{i-1} - A_3 u_{i-2} = 0 , \quad (7)$$

jossa kertoimet A_1 , A_2 ja A_3 ovat matriisin \bar{A} invariantit

$$A_1 = \text{trace } (\bar{A}) ,$$

$$A_2 = \text{matriisin } \bar{A} \text{ pääalideterminantien summa}$$

$$A_3 = \det (\bar{A}) .$$

Määritelmän mukaisesti (ks. [7]) menetelmän lokaali diskretointivirhe

$$\sigma = [\phi(t+\Delta t) - A_1 \phi(t) + A_2 \phi(t-\Delta t) - A_3 \phi(t-2\Delta t)] / \Delta t^2 . \quad (8)$$

Menetelmä (7) on konsistentti astetta k jos $\sigma \rightarrow 0(\Delta t^k)$ kun $\Delta t \rightarrow 0$ ja $k > 0$. Menetelmän konsistenssi takaa siis diskretisoinnin lokaalisen, asymptoottisen lähestymisen kohti oikeaa ratkaisua kun aika-askelta rajatta pienennetään. Dahlquist on osoittanut lähteessä [9], että lineaarinen moniaskelmenetelmä, kuten (6) joka on ehdoitta stabiili ei voi asteeltaan ylittää kahta. Artikkeliissa [10] esitettiin ehto, joka parametriien on toteutettava, jotta menetelmä olisi toista astetta:

$$\gamma + \alpha_1 + \alpha_3 = \frac{1}{2} \quad . \quad (9)$$

Menetelmä (5) on ehdoitta stabiili jos ratkaisu \hat{x} ei kasva rajatta kun $t \rightarrow \infty$ ja $\Omega \in (0, \infty)$. Tunnetusti tämä ehto toteutuu vain jos matriisin \tilde{A} spektraali-säde

$$\rho = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \leq 1 \quad (10)$$

ja yhtäsuuruuden tapauksessa maksimi on yksikäsitteinen.

Edellä λ_1 , λ_2 ja λ_3 ovat matriisin \tilde{A} ominaisarvot, jotka saadaan karakteristisen yhtälön

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0 \quad (11)$$

ratkaisuina. Jos yhtälössä (10) yhtäsuuruutta ei sallita, on menetelmä asymptoottisesti stabiili ja ratkaisu $\hat{x} \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$. Jos ehto (10) on voimassa vain kun $\Omega < \Omega_c$, jossa Ω_c on stabiiliusraja, on menetelmä ehdollisesti stabili.

Menetelmän globaali diskretointivirhe.

$$\delta(t) = \phi(t) - u(t) \quad . \quad (12)$$

Menetelmän sanotaan olevan suppeneva astetta k , jos kiinteälle ajan hetkelle t $\delta \rightarrow 0(\Delta t^k)$, kun $\Delta t \rightarrow 0$ ja $k > 0$. Suppenevuus on siis olennaisen tärkeä aikadiskretisoinnin ominaisuus; se takaa diskreetin ratkaisun globaalinen, asymptoottisen lähestymisen kohti tarkkaa ratkaisua aika-askelta rajatta pidennettäessä. Edellisessä kohdassa määritelty konsistenssi takasi lähestymisen ainoastaan lokaalisesti. Lähteissä [8] ja [11] on osoitettu, että menetelmän konsistenssista ja stabiiliudesta seuraa suppenevuus. Suppenevuden asteluku on tällöin sama kuin konsistenssin asteluku.

Yhtälöiden (7) ja (11) perusteella diskreetti ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$u_n = \sum_{i=1}^3 c_i \lambda_i^n , \quad (13)$$

jos ominaisarvot ovat erilliset. Kertoimien c_i , $i = 1 \dots 3$, arvo määrittyy alkuarvojen perusteella. Yhtälön (13) perusteella voidaan päätellä, että menetelmän asymptoottinen käyttäytyminen kun $t \rightarrow \infty$, riippuu spektraalisäteestä ρ ; mitä pienempi ρ sitä nopeammin ratkaisu lähestyy nollaa. Aikaintegroinnissa pyritään integroimaan mahdollisimman tarkasti vain alimpien ominaismuotojen osuus vasteesta ja ylimpien, virheellisten ominaismuotojen osuus vasteesta pyritään numeerisesti vaimentamaan mahdollisimman tehokkaasti. Spektraalisäde kuvailee tämän numeerisen vaimennuksen tehokkuutta.

Suppeneville menetelmille on olemassa positiivinen vakio $\hat{\Omega}$ siten, että kun $\Omega \in (0, \hat{\Omega})$ niin matriisilla \bar{A} on kompleksikonjugaatti ominaisarvopari $\lambda_{1,2}$ ja reaalinen ominaisarvo λ_3 , jotka toteuttavat epäyhtälön $\lambda_3 < \lambda_{1,2} \leq 1$ [7]. Ratkaisu (13) voidaan tällöin kirjoittaa muotoon

$$u_n = e^{-\xi \bar{\omega} t_n} (c_1 \cos \bar{\omega} t_n + c_2 \sin \bar{\omega} t_n) + c_3 \lambda_3^n , \quad (14)$$

missä

$$\lambda_{1,2} = A \pm Bi ,$$

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega}/\Delta t ,$$

$$\xi = -\ln(A^2+B^2)/(2\bar{\Omega}) ,$$

$$\bar{\Omega} = \arctan(B/A) .$$

Pienillä aika-askelen arvoilla diskreetin ratkaisun voidaan katsoa vastaavan tarkkaa ratkaisua systeemille, jolla on hieman suurempi vaimennus ja jäykkyys kuin alkuperäisellä systeemillä. Vaimentamattomalle systeemille numeerinen vaimennussuhde ξ ja suhteellinen jakson ajan virhe $(\bar{T}-T)/T$, jossa $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$ ja $T = 2\pi/\omega$, ovat yleisimmin käytetyt suureet menetelmän tarkkuuden kuvaamiseen pienillä aika-askelen arvoilla ($\Omega < \bar{\Omega}$), jolloin tarkkuus on oleellinen.

Kun suhde $\Delta t/T \gg 1$ on kollokaatiomenetelmissä havaittu ensimmäisten aika-askelten aikana huomattavaa yliampumista eli väärähtelyn amplitudi on monisata-kertainen tarkkaan arvoon verrattuna (kts. [7] ja [10]).

Merkitään $n = t_n/\Delta t$, jossa t_n on kiinteä ajanhetki. Kun $\alpha_3 < -\frac{1}{2}$ saadaan $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} ||\bar{A}^n|| = Cn = C t_n \Delta t^{-1}$. Jos käytetään ns. katkaistua alkuehtoa, jossa

kiertyvyys asetetaan nollaksi, saadaan $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} ||\tilde{x}_0|| = C_1 \Delta t^2$. Globaali virhe $\delta(t_n)$ koostuu alkuarvojen virheen etenemisestä ja lokaalin diskretointivirheen kasautumisesta. Katkaistulla alkuarvolla saadaan täten menetelmän virheksi $\delta(t_n) = O(\Delta t)$, vaikka menetelmä muuten olisi toista astetta. Tämä tulos on aikaisemmin johdettu perheen joillekin menetelmille ja numeerisesti verifioitu lähteessä [12].

Artikkelissa [10] on esitetty edellä olevan perusteella vaimentamattomassa systeemissä ehdot SS5-menetelmäperheen parametreille jotta seuraavat ehdot olisivat voimassa:

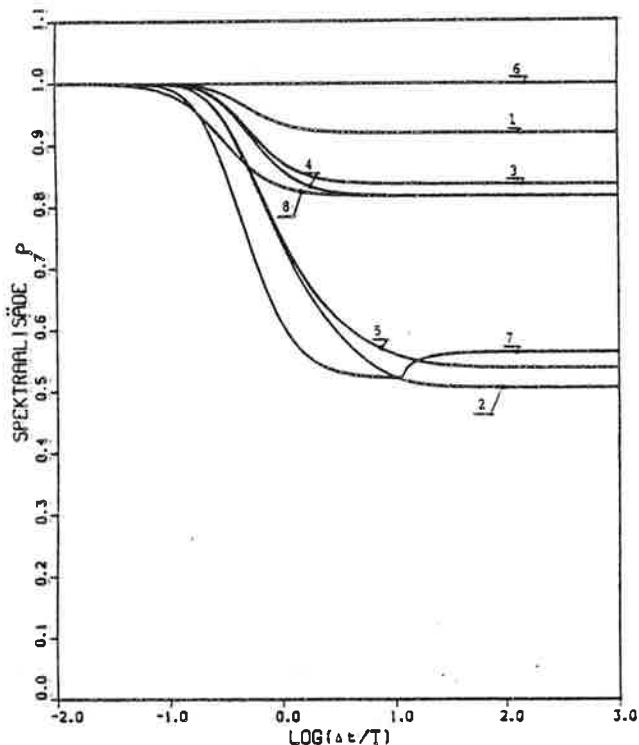
1. Menetelmä on toista astetta.
2. Menetelmä on ehdoitta stabili.
3. Menetelmä vaimentaa tehokkaasti ylimpien ominaismuotojen osuuden vastesta.
4. Menetelmällä on pienillä aika-askeleilla mahdollisimman pieni numeerinen vaimennussuhde ξ ja jaksonajan suhteellinen virhe $(\bar{T} - T)/T$.
5. Menetelmä ei ole neliöllisesti yliampuva.

Näiden perusteella on esitetty kolme uutta SS5-menetelmää, joita on vertailtu ennestään tunnettuihin. Vertailtavien menetelmien parametrit on esitetty taulukossa 2.

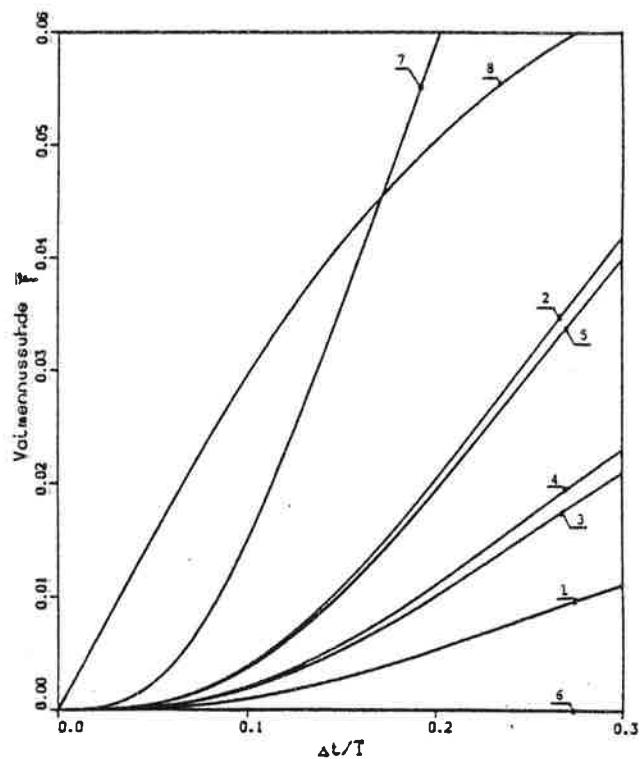
Taulukko 2. Vertailtavien SS5-menetelmien parametrit.

nro	α_1	α_2	α_3	α_5	β	γ
1	0,541822	0,542697	-1,000000	-0,260000	0,479089	0,958178
2	0,836052	0,903685	-1,000000	-0,300000	0,331974	0,663948
3	0,588532	0,592451	-1,000000	-0,270000	0,455734	0,911469
4	0,900000	0,900000	-1,000000	-0,272250	0,302500	0,600000
	(α -menetelmä $\alpha = -0,1$)					
5	0,700000	0,700000	-1,000000	-0,295750	0,422500	0,800000
	(α -menetelmä $\alpha = -0,3$)					
6	1,000000	1,000000	-1,000000	-0,250000	0,250000	0,500000
	(trapetsisääntö)					
7	1,420000	2,016400	-1,420000	-0,477215	0,166667	0,500000
	(Wilsonin θ menetelmä $\theta = 1,42$)					
8	1,000000	1,000000	-1,000000	-0,302500	0,302500	0,600000
	(Newmarkin menetelmä $\beta = 0,3025$, $\gamma = 0,6$)					

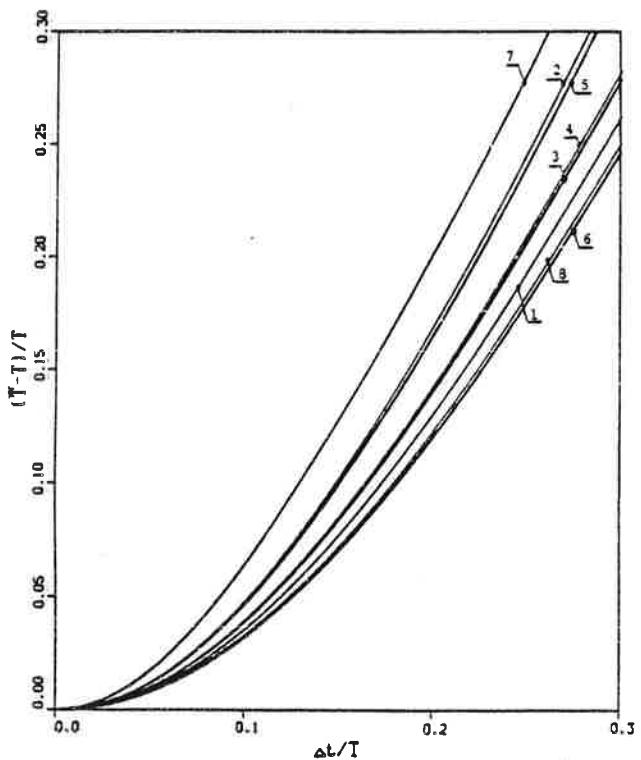
Kuvissa 1...3 on esitetty vertailtavien menetelmien ominaisuudet valmentamattomalle systeemille.



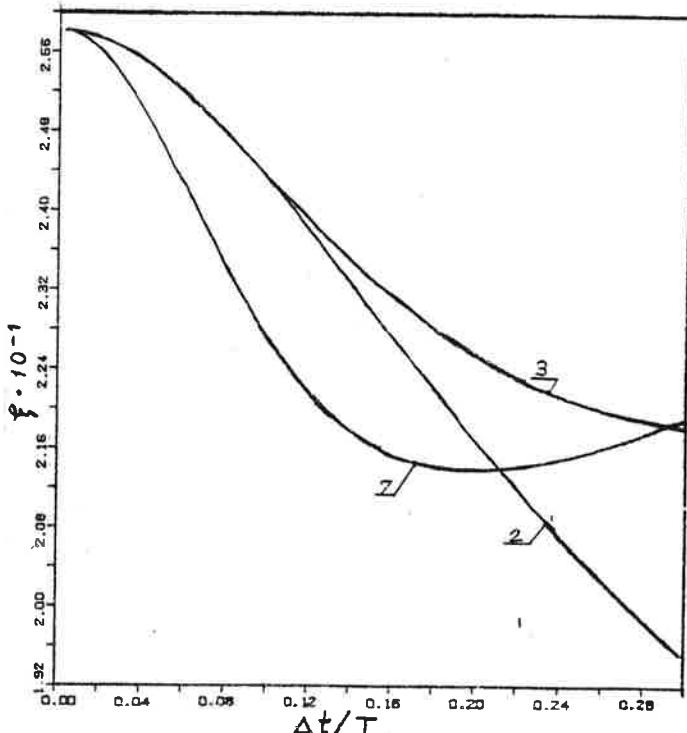
Kuva 1. Spektraalisäde [10].



Kuva 2. Numeerinen vaimennussuhde $\xi = 0$ [10].



Kuva 3. Suhteellinen jaksonajan virhe [10].



Kuva 4. Numeerinen vaimennussuhde $\xi = 0,25$. $\alpha_4 = 0,5$.

4 VAIMENNETTU SYSTEEMI

Tarkastellaan vaimennuksen vaikutusta menetelmiin 2 ja 3 (menetelmiä 4...8 on tarkasteltu lähteessä [6]). Menetelmille joille $\alpha_3 = -1$ ja jotka ovat toista astetta saadaan vaimennetussa tapauksessa stabiiliusehto:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} - \frac{1}{4\xi}(3 - 8\alpha_5 - 4\beta - 4\alpha_1\gamma - 2\alpha_2)^{1/2} &< \alpha_4 < \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4\xi}(3 - 8\alpha_5 - 4\beta - 4\alpha_1\gamma - 2\alpha_2)^{1/2} \quad . \end{aligned} \quad (15)$$

Parametri α_4 ei vaikuta vaimentamattoman systeemin ominaisuuksien. Menetelmälle 2 saadaan ehdosta (15): $-0,5 - \frac{1}{\xi} \cdot 0,05 < \alpha_4 < -0,5 + \frac{1}{\xi} \cdot 0,05$; ja menetelmälle 3: $-0,5 - \frac{1}{\xi} \cdot 0,02 < \alpha_4 < -0,5 + \frac{1}{\xi} \cdot 0,02$. Kuvassa 4 on esitetty numeerinen vaimennussuhde menetelmille 2 ja 3 optimaalisella α_4 :n arvolla. Kuvassa on vertailuna käytetty menetelmää 7 (Wilsonin θ menetelmä).

LÄHDELUETTELO

- [1] Niemi, J., Painotettujen jäännösten näkökulma yksiaskelmenetelmiin. SS5 menetelmäperhe. Rakenteiden Mekaniikka, 18(1985)3, s. 51...60.
- [2] Zienkiewicz, O.C., Wood, W.L., Hines, N.W., A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 1: General Formulation and Applications. IJNME, 20(1984), s. 1529...1552.
- [3] Wood, W.L., A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 2: Theory. IJNME, 20(1984), s. 2303...2309.
- [4] Katona, M.G., Zienkiewicz, O.C., A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 3: The Beta-m Method, A Generalization of The Newmark Scheme. IJNME, 21(1985), s. 1345...1359.
- [5] Wood, W.L., A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 4: Backward Error Analysis Applied to the Dynamic Vibration Equation. IJNME, 23(1986), s. 929...944.

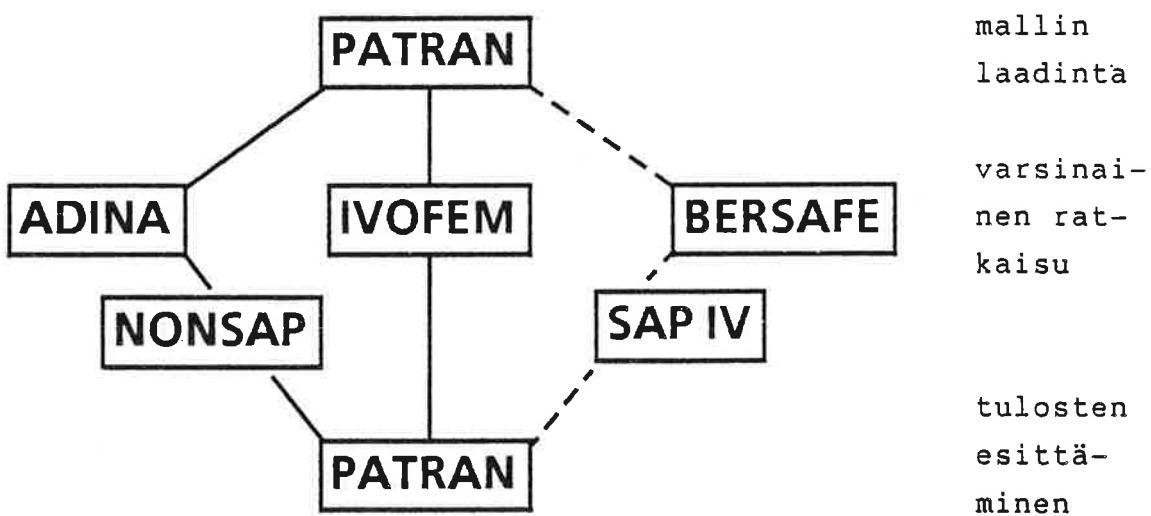
- [6] Heppler, G.R., Hansen, J.S., Time Intergration of the Equations of Motion of a Structural System Including Damping. AIAA Journal, 21(1983)9, s. 1301...1309.
- [7] Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., Collocation, Dissipation and "Overshoot" for Time Intergration Schemes in Structural Dynamics. Earthq. Eng. and Struct. Dyn., 6(1978), s. 99...117.
- [8] Stetter, H.J., Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1977.
- [9] Dahlquist, G., On Accuracy and Unconditional Stability of Linear Multi-step Methods for Second Order Differential Equations. BIT, 18(1978), s. 133...136.
- [10] Niemi, J., Yksiaskelmenetelmien tarkkuus ja stabiilius rakenteiden transienttianalyysissä. Rakenteiden Mekaniikka, 20(1987)2, s. 23...46.
- [11] Belytschko T., Hughes T., (eds.), Computational Methods for Transient Ananlysis. North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford. 1983.
- [12] Hulbert G., Hughes T., An Error Anlaysis of Truncated Starting Conditions in step-by-step Time Integration: Consequences for Structural Dynamics. Earthquake eng. struct. dyn. 15(1987), 901...910.

IVOFEM-OHJELMAN YLLÄPIDOSTA

Seppo Orivuori
Imatran Voima Oy, Rakennusosasto

1 JOHDANTO

Imatran Voima Oy:ssä (IVO) on käytetty elementtimenetelmään perustuvia laskentasysteemejä vuodesta 1969 lähtien. Alussa laskelmat olivat pienimuotoisia nykyisiin tehtäviin verrattuina tyydyttääen kuitenkin silloiset tarpeet. Tätä kirjoitettaessa, lähes 20 vuoden muotoutumisen jälkeen, on IVOn FEM-järjestelmä pelkistettynä kuvan 1 mukainen. Se on käytössä yhtiön VAX-clusterissa, joka koostuu kolmesta VAX-tietokoneesta (1 kpl VAX-11/785 ja 2 kpl VAX 8650).



Kuva 1. IVOn FEM-järjestelmän komponentit ohjelmistotasolla esittynä. — tarkoittaa IVOssa olemassaolevaa yhteyttä; - - - tarkoittaa yhteyden hankkimismahdollisuutta, mutta ei ole vielä IVOssa käytössä.

Kuvan 1 ohjelmistot lyhyesti kuvattuna ovat:

- **ADINA** on Adina Engineering-yhtiön ohjelmisto lineaaristen tai epälineaaristen niin staattisten kuin dynaanmisten rakenneidenmekaanisten probleemoiden ratkaisemiseksi. Systeemiin kuuluu myös ohjelma stationaaristen tai transienttien lämpötilajakaumien laskemiseksi,
- **BERSAFE** on englantilaisen voimayhtiön Central Electricity Generating Board (CEGB) tekemä laaja yleisohjelmisto niin rakenteiden mekaniikkaan kuin kenttäprobleemoihin. IVOn versiosta puuttuu dynamiikkaoisuus sekä epälineaarisesta ohjelmaosasta mahdollisuus geometriiseen epälineaarisuuteen sekä suuriin venymiin,
- **IVOFEM** on IVOn omaa tuotantoa oleva useasta eri ohjelmasta koostuva kokonaisuus. Tarkempi esittely on jäljempänä,
- **NONSAP** on Berkeleyn yliopistossa Kaliforniassa aikoinaan valmistettu soveltuvuusalueeltaan ADINAA muistuttava ohjelma; mahdollisuudet lämpötilakentien ratkaisuun kuitenkin puuttuvat,
- **PATRAN** on PDA Engineering-yhtiön FEM-ohjelmien esi- ja jälkikäsittelysysteemi,
- **SAP IV** on 70-luvun alussa Berkeleyn yliopistossa Kaliforniassa laadittu laajalti tunnettu yleisohjelma lineaariseen statiikkaan ja dynamiikkaan.

Kukin edellä mainituista ohjelmistoista koostuu useasta erillisestä ohjelmasta, joilla on kullakin omia erilaisia esi- ja jälkikäsittelyohjelmia. Osa BERSAFEn ohjelmista on esitetty kuvassa 2.

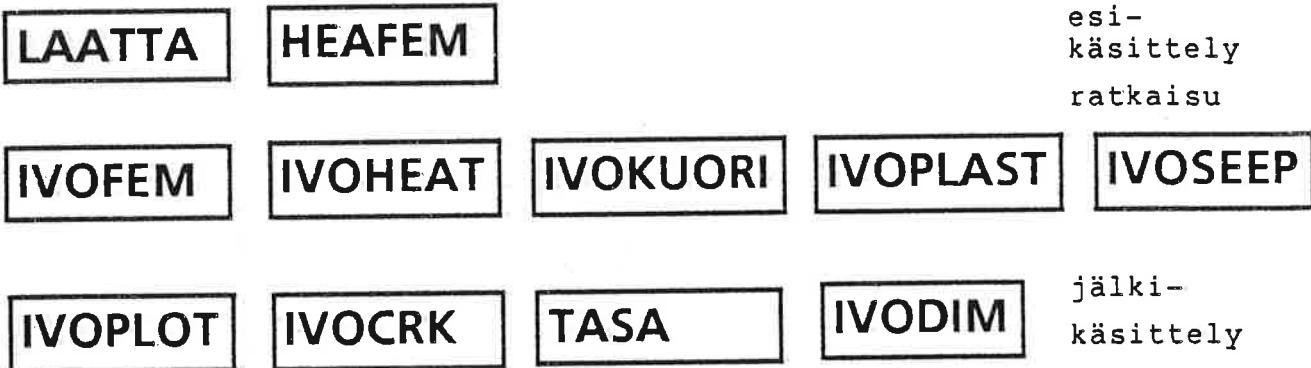
BERCYL	BERMAGIC	BERQUAL	esi- käsittely
BERSAFE	FLHE		ratkaisu
BERPLOT	ELOPPER	PLOPPER	jälki- käsittely

Kuva 2. BERSAFE-ohjelmiston komponentteja ovat mm. BERCYL: yhdemallien täydellisen FEM-datan muodostaminen, BERMAGIC: interaktiivinen laskentamallin luonti, BERQUAL: isoparametrisista elementeistä koostuvan mallin laadun testaus, BERSAFE: lineaarinen/epälinearinen yleisohjelma rakenteidenmekaanisiin ongelmianiin, FLHE: lämpötilajakaumien laskenta, BERPLOT: laskentamallin ja tulosten graafinen esittäminen, ELOPPER: valikoiva tulostus, J- ja J^* -integraalien laskenta, PLOPPER: vastaava ohjelma epälineaarisiin analyyseihin, mahdollistaa myös C^* -integraalin laskennan, PREPLOP: C^* -integraalin laskentaan liittyvän tiedon keräily BERSAFE-ajosta.

IVOFEM-systeemi koostuu mm. seuraavan sivun kuvassa 3 esitetyistä osista.

2 OHJELMIEN KÄYTÖSTÄ IVOSSA

Kullekin ohjelmalle on muodostunut oma käyttäjäkuntansa. PATRAN-ohjelma, vasta vajaan vuoden käytössä olleena, valtaa jatkuvasti uusia käyttäjiä. Varsinkin FEM-ohjelmien tulosten graafinen esittäminen on koettu hyödylliseksi. ADINA-ohjelmaa on käytetty enimmäkseen paineastioiden ja putkiyhteiden epälineaariseen analysointiin VIRTUAL-jälkikäsittelijän kera. Tällöin on voitu laskea säröjen jännitysintensiteettikertoimien K-arvoja. BERSAFE-ohjelmaa on



Kuva 3. IVOFEM-ohjelmistoon kuuluvista ohjelmista mainittakoon mm.

LAATTA: erittäin käyttäjäystävällinen vuorovaikuttainen ohjelma laatta- ja tasomaisten kuorimallien IVOFEM-lähtöarvojen laatimiseksi sekä tarvittavien ajoketjujen suorittamien kontrolloimiseksi, HEAFEM: IVOHEATillä laskettujen lämpötilajakaumien muokkaus jännityslaskentaa varten IVOFEMillä, IVOFEM[1]: varsinainen analyysiohjelma (levyt, laatat, kuoret, pyörähdykskappaleet, yleiset 3D-kappaleet, ristikot, arinat, tasokehät, 3D-kehät), IVOHEAT: transientit lämpötilajakaumat levyssä, pyörähdyks- ja 3D-kappaleessa, IVOKUORI: näppärä erikoisohjelma pyörähdyssymmetristen ohuiden kuorien siirtymä- ja jännitystilojen selvittämiseksi, IVOPLAST: Trescan, von Misesin, Mohr-Coulombin tai Drucker-Pragerin myötöehtoa käyttävä IVOFEMin vastike matemaattisesti 2D-rakenteiden epälineaariseksi analysoimiseksi, IVOSEEP: IVOHEAT-ohjelman suotovirtaustehtäviin erikoistunut muunnos, IVOPLOT: tulosten graafinen esittäminen (mallin kuvat, sama-arvokäyrät, voimasuurejakauamat ilmoitetuissa leikkauksissa, pääjännitysvektorit), IVOCRK: energian vapautumisasteen laskeminen IVOFEMillä ratkaistusta särömallista, TASA: elementtien keskipistetulosten tasoitus solmupisteearvoiksi, IVODIM: teräsbetonikuorien mitoitus.

käytetty vastaanlaisiin laskelmiin. Se on osoittautunut erityisen soveliaaksi lämpötransienteilla kuormitettujen paineasticoiden analysoinnissa. Sen vahvoja puolia ovat mm. särön jännitysintensiiteettikertoimien laskemismahdollisuudet. SAP IV-ohjelma on palvelut lähinnä ominaisvärähtelymuotojen sekä lineaarisen dynamiikan laskemistarpeissa. NONSAP on ollut enää harvemmin käytössä. IVOFEM-ohjelmaa käytetään varsinkin päivittäiseen rutiinilaskentaan, kuten voimalaitosrakennusten tasojen laskemiseen taivutetuina laattoina tai kuorina, seinien tutkimiseen tasonsa suuntaisten kuormien kuormittamana. Betonisten kuorirakenteiden laskennas-

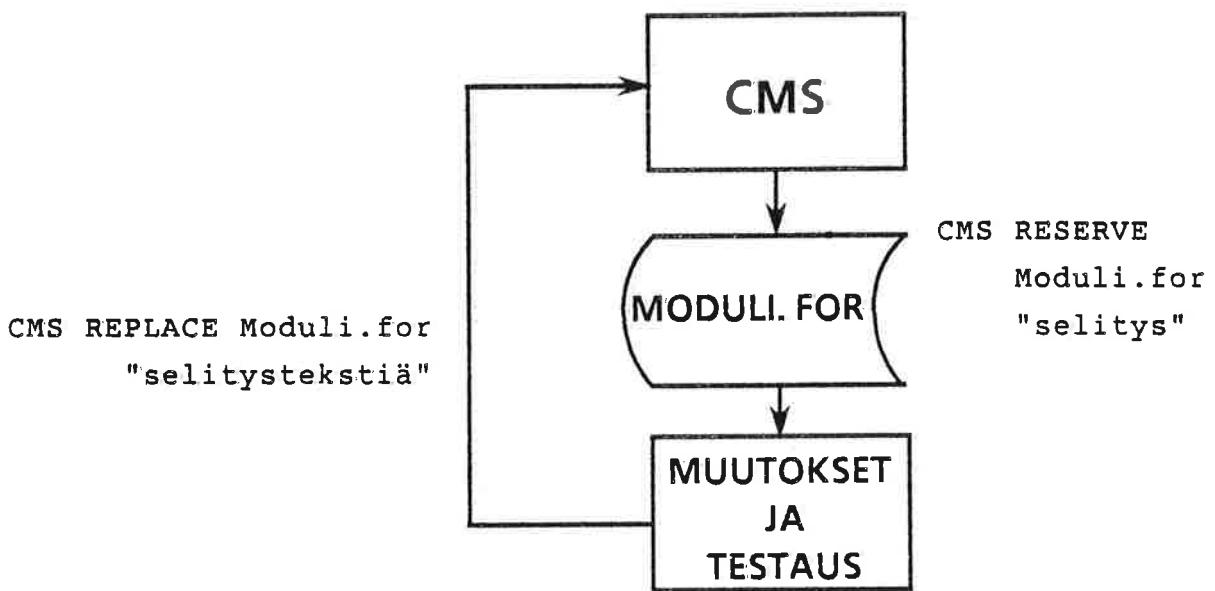
sa saatuja tuloksia voidaan jalostaa IVODIM-ohjelmalla tarvittaavaan raudoitusehdotukseen saakka. IVOSEEP on ahkerasti käytössä suotovirtaustehtävien yhteydessä ennen kaikkea sen kätevän märkäviivan automaattisen paikantamisproseduurin johdosta. IVOHEAT-ohjelmalla taasen lasketaan mitä moninaisimpien rakenteiden lämpötilajakaumia, niin stationaarisia kuin transientteja, jotka usein syötetään sitten HEAFEM-ohjelman välityksellä jännityslaskentaan IVOFEMille. Silloin tällöin esiintyy myös 2D- ja 3D-sähköpotentiaalijakaumien laskentatarpeita.

3 OHJELMISTON YLLÄPIDOSTA

IVOFEM-ohjelmiston paisuttua vuosien varrella sen ylläpito alkoi tuottaa vaikeuksia jo yhden hengen 'kehitysryhmällekin' puhumatta kaan useamman henkilön 'sotkeutumisesta' asiaan. Erilaisten ylläpitomenetelmien ja -työkalujen käyttöönotto oli välttämätöntä. Menetelmistä mainittakoon tiedyt ohjelointistandardit. Nämä edellyttävät, että jokaisessa modulissa on otsikkoruutu, joka sisältää ainakin tiedot syöttö/tulostussuureista, tiedostoista, kutsutuista moduleista, päivityshistoriasta. Modulia muokattaessa merkitään poistettavat rivit kommenteiksi, uudet rivit ympäröidään päiväyksellä varustetuin kommenttein. Otsikkotiedosta tulee selvitä kuka on mitkäkin muutokset tehnyt.

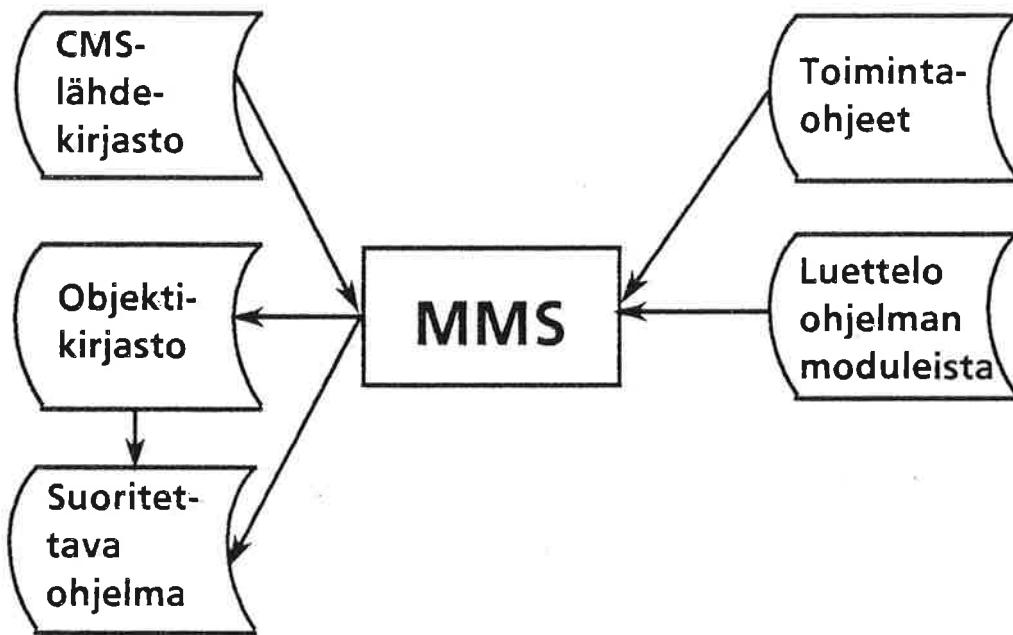
Lähdekielisten moduleiden säilytyksessä käytetään Digital Equipment Corporation'in (DEC) Code Management Systemiä (CMS) [2], joka on juuri tarkoitettu ohjelmistojen kehityksen ja ylläpidon apuvälineeksi. Se taltioi tiedostot omaksi kirjastokseen sekä pitää kirjaa tehdystä muutoksista. Sen avulla voi mm. poimia tietyn modulin muokattavaksi ja sitten palauttaa moduli muokattuna ja testattuna takaisin systeemiin. CMS säilyttää tiedot jokaisen modulin jokaisesta muutoksesta (sukupolvet). Näin on mahdollisuus helposti pitää yllä eri ohjelmaversioita: tuotanto- ja kehitysversion, jolloin tuotantoversio on 'jäädytetty' käyttämään moduleistaan tiettyjä sukupolia. Tämä saadaan aikaiseksi CMS:n luokka-

käsitteellä. Kuvassa 4 on esitetty kaavakuvaan avulla CMS:n käyttöä.



Kuva 4. Kaavakuva CMS-järjestelmän peruskäytöstä, jossa käyttäjä poimii haluamansa modulin muokattavakseen ja palauttaa muokatun modulin sitten testauksen jälkeen takaisin.

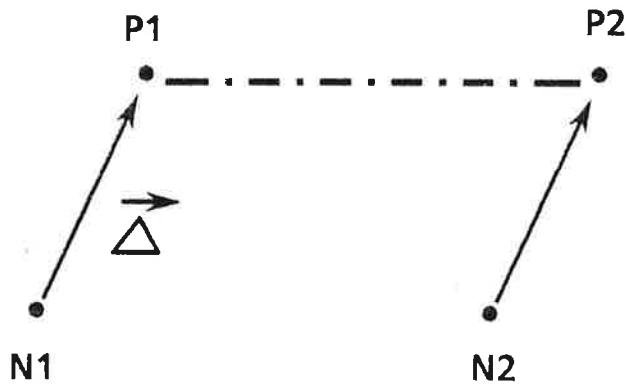
Lähdekielisistä moduleista käänämällä saaduista ns. objektimoduleista muodostettuja objektikirjastoja ja edelleen niistä ns. linkkaamalla aikaansaataavia suorituskelpoisia ohjelmaversioita ylläpidetään DECin Module Management System-nimisellä (MMS) [3] tuotteella. Tähän työvälilineeseen tukeutuvien komentotiedostojen avulla voidaan saada aikaan automatiikka objektikirjastojen sekä varsinaisten suoritettavien ohjelmatiedostojen ylläpitämiseksi. MMS-järjestelmän kaavakuvanomainen käyttö on esitetty kuvassa 5. Kuvan 5 kaaviossa tiedostosta luetuista toimintaohjeista selviää mm. ohjelman muodostavien moduleiden luettelo. Tämän pohjalta tutkitaan kunkin modulin osalta onko CMS-järjestelmän alaisuudessa oleva lähdekielinen alkio tuorempi kuin objektikirjastossa vastaavasta modulista oleva alkio. Näin ollessa suoritetaan objektikirjaston päivitys. Objektikirjaston mahdollisen päivityksen jälkeen suoritetaan vielä tutkimus onko kirjastossa yksikään ohjelman muodostavista objektimoduleista tuorempi kuin varsinainen suoritettava ohjelmatiedosto. Mikäli näin on, suoritetaan uudemman ohjelmaversion linkkaus.



Kuva 5. Kaavakuva MMS-järjestelmän käytöstä. Kuvan esityksessä luetaan MMS-järjestelmää ohjaavat käskyt tiedostosta.

4 ESIMERKKI YLLÄPIDOSTA

Palkin neutraaliakselin pisteet saadaan kuvan 6 perusteella kaavalla



Kuva 6. 3D-palkki ilmoitetaan solmujen N1 ja N2 välille. Sen neutraaliakselin pisteet ovat kuitenkin P1 ja P2.

jossa $\{\Delta\} = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^T = \text{epäkeskeisyys.}$

Tällöin solmujen Ni ja Pi vapausasteilla on yhteys

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_{p_i} = \begin{bmatrix} u + \Delta z \theta_y - \Delta y \theta_z \\ v - \Delta z \theta_x + \Delta x \theta_z \\ w + \Delta y \theta_x - \Delta x \theta_y \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_{N_i} \text{ eli } \{d\}_{p_i} = [L] \{d\}_{N_i}$$

Palkin neutraaliakselin suhteen lausuttu elementin jäykkyys- ja jännitysmatriisi sekä kuormitusvektori on muunnettava solmujen N1 ja N2 vapausasteita käyttäväksi muunnoksilla

$$[k]_N^e = [T]^T [k]_p^e [T],$$

$$[S]_N^e = [S]_p^e [T] \quad \text{ja}$$

$$\{F\}_N^e = [T]^T \{F\}_p^e,$$

jossa $[T] = [[L] [L]]$.

Lähtökohtana oli siis 3D-palkin olemassaolo jo IVOFEMissä. Tuli vain tehdä epäkeskeisyyden vaativat muutokset seuraaviin moduleihin:

MODULI	TEHTÄVÄ	TARVITTAVA MUUTOS
IVOFEM	Pääohjelma	Varautuminen epäkeskeisyyden taltioimiseen poikkileikkaustaulukkoon sekä sen kirjoittamiseen geometriatiedostoon 3,
OTSIKOT	Tulostettavat otsikot	Poikkileikkaustaulukon otsikon muutos
PALK01	Palkkielementin käsittely	Epäkeskeisyyden vaativat muunnokset 3D-palkin matriiseihin ja vektoriin
POIKKI	Poikkileikkaus-tietojen lukeminen	Varautuminen epäkeskeisyystietojen lukemiseen
SUMMARY	Yhteenveto-tietojen tulostus	Poikkileikkaustiedon tietenumero tiedostossa 3
TLST1	Lähtötietojen tulostaminen	Poikkileikkaustietojen tulostusmuodon muutos
TLST3	Jännitys-tulostus	Epäkeskeisen palkin neutraaliakselin solmujen koordinaattien laskeminen
WRITE3	Tiedoston 3 kirjoittaminen	Poikkileikkaustiedot tiedostoon 3

Kukin moduli käsiteltiin kuvan 4 esittämällä tavalla: CMS-järjestelmän RESERVE-käskyllä otettiin käyttäjän hakemistoon kopio lähdekielisestä modulista, tehtiin kopioon tarvittavat muokkaukset sovittuja ohjelmostandardeja noudattaen, testattiin moduli sekä palautettiin muokattu lähdekielinen moduli takaisin CMS-järjestelmään REPLACE-käskyllä. Edellämainittuihin CMS-käskyihin kuuluu aina merkkijono, joka taltioidaan järjestelmän historiatietueihin. Näillä teksteillä selostetaan tehtyjä toimenpiteitä. Alla on esimerkki PALK01:n osalta:

\$ CMS SET LIBRARY LEVY:<PAAHAK.CMSHAK>	! Hakemisto, jossa
	! CMS-kirjasto sijaitsee
\$ CMS RESERVE PALK01.FOR "Selitysteksti"	! Poimitaan moduli
	! CMS-järjestelmästä
- tehdään muutokset	
- testaus	
\$ CMS REPLACE PALK01.FOR "Selitysteksti"	! Palautetaan moduli
	! CMS-järjestelmään

Käynnistämällä sitten joskus myöhemmin MMS-järjestelmää hyväksikäyttävä komentoproseduuri tulivat seuraavat toimenpiteet tehdynksi automaattisesti:

- muokatut lähdekieliset modulit käännettiin ja syntyneet objektimodulit päivitettiin asianomaiseen objektikirjastoon,
- ne ohjelmat, jotka sisältävät yhdenkin näistä muokatuista moduleista, linkattiin uudelleen eli niistä tehtiin uusi versio.

5 YHTEENVETO

Kuvattu ylläpitojärjestelmä on osoittautunut käytännössä toimivaksi ja on vapauttanut paljon henkisiä voimavarajoja varsinaiseen ohjelmien kehitystyöhön.

KIRJALLISUUTTA

- [1] S.Orivuori, IVOFEM-ohjelman nykytilan esittely, Rakenteiden mekaniikka, Vol.17,1984,s1-19.
- [2] VAX DEC/CMS Reference Manual, Digital Equipment Corporation, 1984.
- [3] VAX DEC/MMS User's Guide, Digital Equipment Corporation,1984.

OHUEN ISOTROOPPINEN PALLOKUOREN TARKKA RATKAISU

Hannu Outinen

Tampereen teknillinen korkeakoulu

Konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Tämä esitys liittyy laajempaan työhön [1], ..., [4], jonka tavoitteena on näyttää, miten ohuen pyörähdykskuoren statiikan ongelma voidaan ratkaista klassisen kuoriteorian puitteissa **tarkasti**, kun kuormituskin on pyörähdysymmetrinen. Jotta ratkaisu ei rajoittuisi yksinkertaisiin peruskuoriin, on se sovitettu siirtymäperustaiseen elementtimenetelmään puitteisiin, jota voitanee tällöin kutsua **tarkaksi elementtimenetelmäksi**.

Pallokuori, jolla tässä yhteydessä tarkoitetaan pallon kalottia tai vyöhykettä, on eräs näitä tärkeitä peruskuoria, jonka tarkan ratkaisun mukainen FEM-elementti tulee usein käyttöön. Kalottielementti, jonka navalla on aksiaalinen pistekuormitus, muodostaa mielenkiintoisen rajatapauksen.

2 PYÖRÄHDYSYMMETRIESTI KÄYTTÄYTYVÄN OHUEN PALLOKUOREN KLASSINEN KUORITEORIA

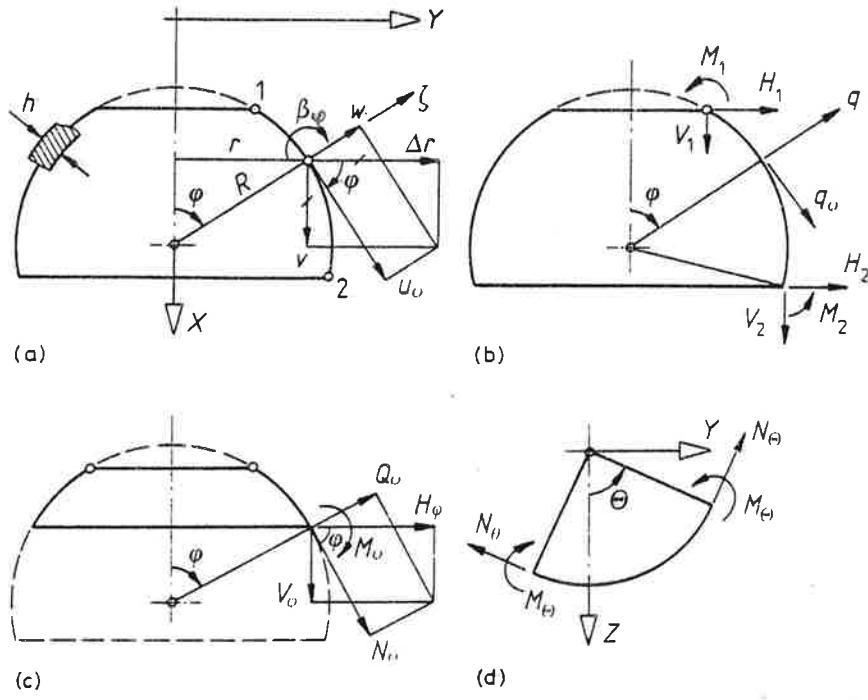
2.1 Perusoletukset

Tässä työssä käytetään ohuen kuoren klassista kuoriteoriaa, minkä takia oletetaan että $R/h > 5$ missä R on pallon seinämän keskipinnan säde ja h seinämän vakio paksuus. Materiaalin on oltava homogenista, lineaarisesti kimmistoista ja isotrooppista. Lisäksi oletetaan, että muodonmuutokset ja rotaatiot ovat niin pieniä, että lineaarisoidun kinematiikan tarkkuus riittää.

2.2 Kuoren differentiaaliyhtälöpari

Käytetään kuvien 1(a) ja (d) mukaista oikeakätistä karteesista XYZ-koordinaatistoa sekä käyräviivaisia φ , θ , ζ -koordinaatteja. Leveysympyrän säde on r .

Kinemaattisien muuttujien β_φ ja u_φ & w sekä v & Δr positiiviset suunnat on esitetty kuvassa 1(a). Vastaava esitys jännitysresultanteista M_φ ja N_φ & Q_φ sekä V_φ & H_φ on kuvassa 1(c). Kehän suuntaiset jännitysresultantit M_θ ja N_θ nähdään kuvassa 1(d).



Kuva 1. Pallokuoren (a) geometriset ja kinemaattiset muuttujat, (b) kuormitukset ja (c) & (d) jännitysresultantit.

Kuoren kineettisiä kuormituksia ovat pintakuormitustiheydet q_φ ja q sekä reunakuormitukset, jotka on jaettu XYZ-koordinaatiston mukaisiin komponentteihin H_i , V_i , M_i ($i = 1, 2$). Lämpötilakuormituksen $T(\varphi, \zeta)$ vaikutus otetaan huomioon paksuuskeskiarvon ja paksuusgradientin avulla, joiden määritelmät ovat

$$T_0(\varphi) = \frac{1}{h} \int_h T d\zeta \quad T_1(\varphi) = \frac{12}{h^3} \int_h T \zeta d\zeta \quad . \quad (1)$$

Lineaarisen, homogenisen ja isotrooppisen materiaalin yhtälöistä, "hiusharjamallin" mukaisen linearisoidun kinematiikan yhtälöistä ja tasapainoyhtälöistä saadaan H. REISSNERin ja E. MEISSNERin esittämällä tavalla [6] perusdifferenciaaliyhtälöpari, joka voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} L(Eh\beta_\varphi) - 2\nu(Eh\beta_\varphi) &= (\kappa^2 + \nu^2)Q_\varphi + \hat{H}(\varphi) \\ L(Q_\varphi) &= -(Eh\beta_\varphi) + \hat{G}(\varphi) \end{aligned}, \quad (2)$$

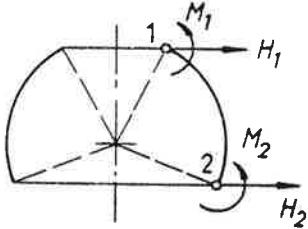
missä E ja ν ovat materiaalin kimmomoduuli ja POISSONin kerroin. Dimensioton pallovakio κ , lineaarinen differentiaalioperaattori L sekä kuormitustermi $\hat{H}(\varphi)$ ja $\hat{G}(\varphi)$ on määritelty yhtälöillä (3), jolloin α_t on pituuden lämpötila-kerroin.

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= 12(1-\nu^2)(R/h)^2 - \nu^2 \\ L(\cdot) &= (\cdot)_{,\varphi\varphi} + \cot\varphi \cdot (\cdot)_{,\varphi} - (\cot^2\varphi - \nu)(\cdot) \\ \hat{H}(\varphi) &= (1+\nu)Eh R \alpha_t T_{1,\varphi} \\ \hat{G}(\varphi) &= -R[q_{,\varphi} + (1+\nu)q_\varphi] - Eh \alpha_t T_{0,\varphi} \end{aligned}. \quad (3)$$

Kun perustuntemattomat $Eh\beta_\varphi$ ja Q_φ on ratkaistu, saadaan [4] muut kuorisuureet eksplisiittisistä lausekkeista, jotka sisältävät myös derivaatat $Eh\beta_{\varphi,\varphi}$ ja $Q_{\varphi,\varphi}$.

3 RATKAISUMENETELMÄ

3.1 Homogenisen differentiaaliyhtälöparin ratkaisu



Kuva 2. Homogeninen kuormitustapaus.

Jos perusparin (2) kuormitustermi $\hat{H}(\varphi)$ ja $\hat{G}(\varphi)$ ovat nollia, on kyseessä homogeninen differentiaaliyhtälöpari. Sitä vastaa ns. homogeninen kuormitus (kuva 2), johon sisältyvät vain säteettäiset reunavoimat H_1 & H_2 ja reunamomentit M_1 & M_2 .

Kuten raportissa [4] on osoitettu, voidaan homogenisesta differentiaaliyhtälöparista johtaa sen ratkaisuille Q_φ^c ja $Eh\beta_\varphi^c$ muuttujien vaihdolla

$$Q_\varphi^c = Zs \quad \xi = 1-c \quad s = \sin\varphi \quad c = \cos\varphi \quad (4)$$

kompleksinen ($i^2 = -1$) differentiaaliyhtälö

$$(2-\xi)\xi Z_{,\xi\xi} + 4(1-\xi)Z_{,\xi} - (1+i\kappa)Z = 0 \quad (5)$$

Sillä on kaksi säännöllistä erikoispistettä $\xi = 0$ (pohjoisnapa) ja $\xi = 2$ (etelänapa), joten sillä löytyy potenssisarjan

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n = Z_1^R + i Z_1^I \quad (6)$$

mukainen yksityisratkaisu. Tämä pohjoisnaparatkaisu suppenee etelänalle saakka ja sen reaali- ja imaginaariosien sarjojen

$$Z_1^R = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^R \xi^n \quad Z_1^I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^I \xi^n \quad (7)$$

kertoimille saadaan palauskaava

$$\begin{bmatrix} a_n^R \\ a_n^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & -B_n \\ B_n & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1}^R \\ a_{n-1}^I \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} a_0^R &= 1 \\ a_0^I &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_n &= [(n-1)(n+2) + 1]A \\ B_n &= \kappa A \end{aligned} \quad A = \frac{1}{2n(n+1)}$$

Differentiaaliyhälölle (5) saadaan toinen yksityisratkaisu Z_2 potenssisarjana vaihtamalla ratkaisun Z_1 muuttujan ξ paikalle $2-\xi$, jolloin kulma φ korvautuu kulmalla $\pi-\varphi$. Tämä merkitsee sitä, että sarjan kehityspisteeksi on valittu pallon etelänapa, joka oli differentiaaliyhälön (5) toinen erikoispiste. Tämä etelänparatkaisu suppenee pohjoisnavalle saakka.

Homogenisen ongelman ratkaisu voidaan [4] nyt esittää funktion

$$Z = [Z_1^R \ Z_1^I \ Z_2^R \ Z_2^I](A) \quad (9)$$

avulla muodossa

$$Q_\varphi^C = Z s \quad Eh\beta_\varphi^C = \underline{Z} s \quad (10)$$

Vektori $\{A\} = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4)$ sisältää neljä reunaehdoista riippuvaa integroimisvakiota. Muunnetun ratkaisufunktion \underline{Z} lausekkeen

$$\underline{Z} = [\underline{Z}](A) \quad (11)$$

kantafunktioit määritetään kaavasta

$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_3 \\ Z_2 & Z_4 \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} Z_1 & Z_3 \\ Z_2 & Z_4 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -\nu & \kappa \\ -\kappa & -\nu \end{bmatrix} \quad . \quad (12)$$

Kalottikuoren ratkaisuksi riittää pohjoisnapafunktion reaalit- ja imaginaariosat Z_1^R ja Z_1^I , mikäli kuorella ei ole pistemäistä kuormitusta tai tukea pohjoisnavalla eikä kuoren reuna liian lähelle etelänapaa.

Neljän kantafunktion ratkaisu (9 & 10) hoitelee vyöhykekuoren, mikäli sen reurat eivät ole liian lähellä napoa, sillä kantafunktioiden sarjat suppenevat sitä huonommin mitä lähemmäksi vierasta napaa tullaan, jolloin argumentti ξ tai $2-\xi$ lähestyy arvoa 2.

Puuttuvien tapausten hoitamiseksi etsitään differentiaaliyhtälölle (5) toinen yksityisratkaisu Z_2 muodossa

$$Z_2 = a Z_1 \ln \xi + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^{n-1} = Z_2^R + i Z_2^I \quad , \quad (13)$$

jolloin raportin [4] mukaan

$$\begin{bmatrix} Z_2^R \\ Z_2^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\xi \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\ln \xi}{2} \begin{bmatrix} -1 & -\kappa \\ \kappa & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1^R \\ Z_1^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Z}_2^R \\ \bar{Z}_2^I \end{bmatrix} \quad . \quad (14)$$

Pohjoisnavalla säennöllisten funktioiden \bar{Z}_2^R ja \bar{Z}_2^I sarjakehitelmien

$$\bar{Z}_2^R = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}^R \xi^n \quad \bar{Z}_2^I = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1}^I \xi^n \quad (15)$$

kertoimet saadaan palauskaavastosta

$$\begin{bmatrix} c_{n+1}^R \\ c_{n+1}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & -B_n \\ B_n & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n^R \\ c_n^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_n & -\bar{B}_n \\ \bar{B}_n & \bar{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a_n^R - a_{n-1}^R \\ 2a_n^I - a_{n-1}^I \end{bmatrix}$$

$$c_2^R = \frac{3}{16} (\kappa^2 - 1) \quad c_2^I = \frac{6}{16} \kappa$$

$$\bar{A}_n = \frac{2n+1}{2} A \quad \bar{B}_n = -\kappa \bar{A}_n$$

$$(16)$$

Pohjoisnavalla singulaaristen funktioiden $1/\xi$ ja $\ln \xi$ ansiosta yleinen ratkaisu (9 & 10) pystyy hoitelemaan pohjoisnavalla olevan pistemäisen kuormituksen tai hyvin pienien reiän. Toisaalta numeerinen kokeilu on osoittanut, että tämän

yhden navan ratkaisun antama tarkkuus huononee jo, kun elementin reuna lähestyy ekvaattoria ($\xi \rightarrow 1$), joten kaikkien tapauksien tehokas laskenta edellyttää sekä kahden navan että yhden navan ratkaisujen käyttöä tilanteesta riippuen.

3.2 Täydellisen differentiaaliyhtälöparin ratkaisu

Täydellisen differentiaaliyhtälöparin (2) ratkaisu

$$Q_\varphi = Q_\varphi^C + Q_\varphi^P \quad Eh\beta_\varphi = Eh\beta_\varphi^C + Eh\beta_\varphi^P \quad (17)$$

sisältää homogenisen tapauksen yleisen ratkaisun (10) lisäksi täydellisen parin minkä tahansa yksityisratkaisun Q_φ^P ja $Eh\beta_\varphi^P$. Nämä löytyvät [2] alkeisfunktioiden joukosta seuraavissa kuormitustapauksissa

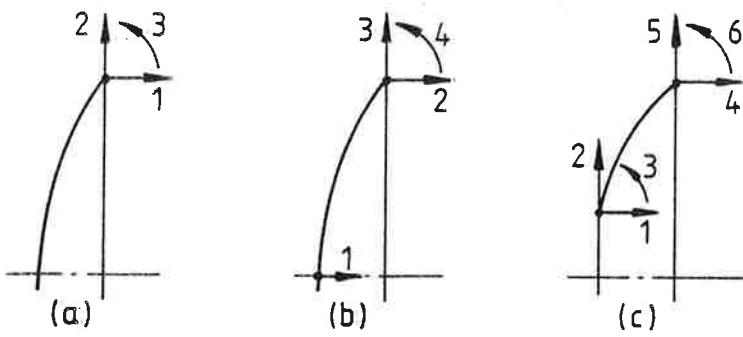
1. Meridiaanin suuntainen reunakuormitus
2. Hydrostaattinen painekuormitus
3. Lumikuormitus
4. Aksiaalinen kiihtyvyyskuormitus (oma painovoima)
5. Keskipakovoima
6. Lämpötilakuormitus, jonka T_0 ja T_1 ovat aksiaalikoordinaatin X lineaarisia funktioita.

3.3 Ratkaisun sovitus elementtimenetelmän muotoon

Kuten julkaisussa [1] on esitetty, edellä esitetty tarkka ratkaisu kannattaa muuntaa elementtimenetelmäksi numeerista käsittelyä varten. Tällöin pallokuoren kalotti tai vyöhyke muodostaa elementin, jolla on yksi tai kaksi solmua kuvan 3 esittämällä tavalla.

C^1 -jatkuvuuden takia kullakin solmulla käytetään kolmea siirtymäkomponenttia paitsi kalottielementin navalla, jossa on enintään aksiaalinen translaatiomitta (Kuva 3 a ja b). Vyöhykeen solmusiirtymävektori on siis

$$\{u\} = \{v_1 \Delta r_1 -\beta_{\varphi 1} \quad v_2 \Delta r_2 -\beta_{\varphi 2}\} \quad (18)$$



Kuva 3. Pallokuoren (a) yhden solmun kalotti-, (b) kahden solmun vyöhyke-elementti.

Vastaava solmuvoimavektori

$$\{F\} = \{-r_1 V_{\varphi_1} -r_1 H_{\varphi_1} r_1 M_{\varphi_1} \quad r_2 V_{\varphi_2} \quad r_2 H_{\varphi_2} \quad -r_2 M_{\varphi_2}\} \quad (19)$$

sisältää radiaanin kaarelta "kerätyt" vastaavat voimasuureet. Elementin jääkyysmatriisi $[k]$, joka määritellään yhtälöllä $\{F\} = [k]\{u\}$, saadaan tarkasti [4] homogenisen ratkaisun ja meridiaanikuormitusta vastaavan yksityisratkaisun avulla.

Luvun 3.2 elementtikuormituksien tarkat ekvivalenttiset solmukuormitukset $\{r\}$ määritetään niitä vastaavista yksityisratkaisuista kaavalla

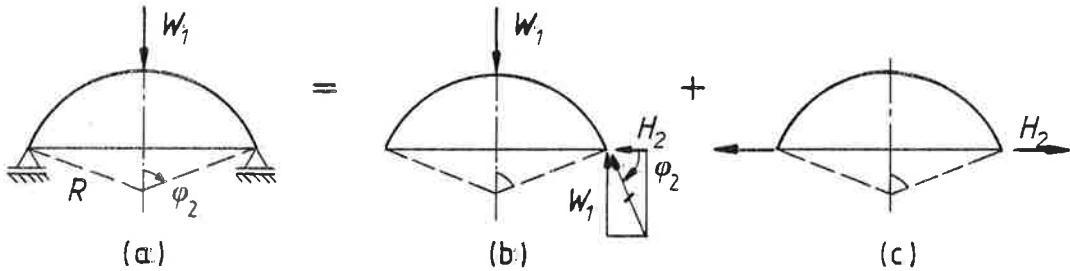
$$\{r\} = [k]\{u^P\} - \{F^P\}, \quad (20)$$

missä $\{u^P\}$ ja $\{F^P\}$ ovat yksityisratkaisujen mukaiset solmusiirtymä- ja solmuvoimavektorit.

Kun laskentamallin solmusiirtymät $\{U\}$ on laskettu FEM-perusyhtälöstä $[K]\{U\} = \{R\}$, määritetään kunkin elementin kenttäsuureet yhteenlaskuperiaatteen avulla homogenisesta ratkaisusta ja elementtikuormitusten yksityisratkaisuista. Menetelmä on sikäli tarkka, ettei missään vaiheessa tyydytä interpolointiin ja että käytetään tarkkoja yksityisratkaisuja eikä niitä korvata kalvoratkaisuilla.

3.4 Aksiaalinen napakuormitus

Kahden solmun kalottielementti (kuva 3b) vaatii erityiskäsittelyn pisteviimasta aiheutuvan singulariteetin takia. Sitä varten on kuvassa 4 esitetty aksiaalisen napakuormituksen W alainen nivalkantainen kalottikuori, jolloin $W_1 = W/2\pi$ on yhdelle radiaanille tuleva kuormitusosuuus. Tuenta ei vaikuta navalle syntyvään singulariteettiin. Kalotin statiikka ratkaistaan kuvissa 4b ja 4c esitettyjen meridiaanikuormituksen ja homogeenisen kuormituksen summana.



Kuva 4. Aksiaalikuormituksen (a) jako meridiaanikuormitukseen (b) ja homogeeniseen kuormitukseen (c).

Kun navalla sovelletaan ehtoja

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} rQ_\varphi = W_1 \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \beta_\varphi = 0 \quad , \quad (21)$$

saadaan homogeenisen ratkaisun navalla singulaarisien kantafunktioiden Z_2^R ja Z_2^I kertoimille arvot

$$A_3 = W_1/2R \quad A_4 = -\frac{\nu}{\kappa} A_3 \quad . \quad (22)$$

Näistä seuraa raja-arvot

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} N_\varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} N_\theta = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[\frac{1+\nu}{2} \frac{W_1}{R} (-\ln \varphi) \right] = +\infty \quad (23)$$

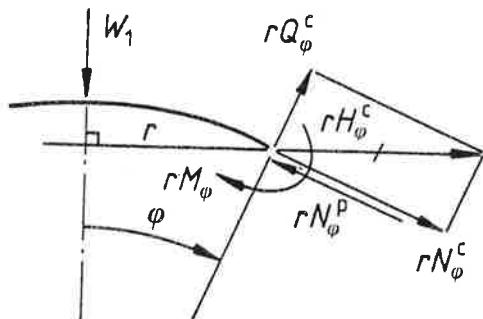
$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} M_\varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} M_\theta = -R \cdot \lim_{\varphi \rightarrow 0} N_\varphi = -\infty \quad . \quad (24)$$

Raja-arvot (21) ja (24) ovat samat kuin keskipisteestään pisteviimalla kuormitettun ympyräläatan vastinarvot. Raja-arvoa (23) ei laatalla ole, mutta jos $R \rightarrow \infty$, tulee myös kaavasta (23) nolla.

Yllättäväältä tuntuu, että N_φ tulee positiiviseksi pistevuoimaa lähestyttääessä. Tämä johtuu siitä, että homogenisen ratkaisun rN_φ^C voittaa tällöin meridiaaniratkaisun kalvovoiman rN_φ^P , kuten kuvassa 5 on esitetty. Tosin numeerinen koekilu osoittaa, että tämä vето-alue on tavattoman pieni. Luvun 5 esimerkin ta-

pauksessa vетоalueen reunakulma on vain $n \cdot 1.8 \cdot 10^{-4}$ rad. Jos verrataan kalvovoiman N_φ ja meridiaanimomentin M_φ aiheuttamia jännityksiä toisiinsa navan läheisyydessä, voidaan kaavojen (23) ja (24) perusteella todeta, että

$$\frac{\sigma_N}{\sigma_M} = \frac{N_\varphi/h}{-6M_\varphi/h^2} = \frac{h}{6R} . \quad (25)$$



Kuva 5. Kalotin radiaanilta kerättyt voimasuureet.

Tämä on ohuella kuorella välillä $1/30 \dots 1/3000$, joten kalvovoimilla ei navan läheisyydessä ole mitoitusvaikuttaa.

4. ATK-OHJELMA ESAS

Edellä selostetun tarkan elementtimenetelmän pohjalta on laadittu ATK-ohjelma ESAS ohuen, pyörähdyssymmetrisesti kuormitettun pyörähdykskuoren statiikan ratkaisemista varten [5]. Ohjelman nimi ESAS muodostuu otsikon "Exact Solution of Axisymmetric Shells" alkukirjaimista. Sen nykyversio sisältää seuraavat elementit.

1. Ohut vahvistusrengas.
2. Ortotrooppinen ympyräläatta ja ympyrärengaslaatta.
3. Ortotrooppinen sylinteri.
4. Täyskartio ja katkaistu kartio.
5. Pallon kalotti ja segmentti.
6. Ortotrooppinen ympyrätoroidin segmentti
7. Paksuudeltaan lineaarisesti muuttuva ortotrooppinen sylinteri.
8. Paksuudeltaan lineaarisesti muuttuva kartio.
9. Paksuudeltaan lineaarisesti muuttuva rengaslaatta.
10. Kimmoisella alustalla oleva ympyrä- ja ympyrärengaslaatta.

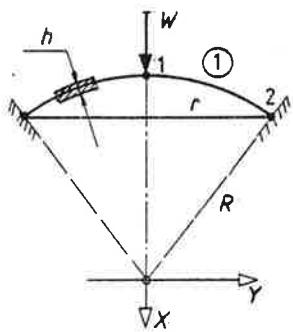
Kuormituksina voidaan antaa rakennekohtaisesti solmuvoimien ja solmusiirtymien lisäksi aksiaalinen kiihtyvyys ja painovoima, tasainen paine, hydrostaattinen

paine, vakio lämpötila, vakio lämpötilaero sisä- ja ulkopinnan välillä sekä keskipakovoima. Paine- ja lämpötilakuormitus voidaan antaa myös yksittäisille elementeille, mutta lumikuormitus on aina elementtikohtainen.

5 SOVELLUSESIMERKKI

Kuvan 6 mukaisen jäykkäkantaisen kalotin $R = 5 \text{ m}$, $r = 3 \text{ m}$, $h = 0,1 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $W = 0,2 \text{ MN/rad}$. Sen ESAS-ratkaisuun on käytetty yhtä kahden solmun kalottielementtiä (kuva 3b), jolloin navan siirtymäksi on saatu

$$U_x = 1,279\ 102\ 987 \text{ mm}.$$



Kuva 6. Pallon kalotti.

Meridiaanivoiman pienin arvo (suurin puristus) $N_x = -2,537 \text{ MN/m}$ esiintyy noin 0,4 asteen keskuskulmalla. Kun tästä lähestytään napaa puristus muuttuu vedoksi hyvin pienellä keskuskulman arvolla $1,0 \cdot 10^{-43}$ astetta.

Sama tehtävä on ratkaistu myös ANSYS-ohjelmalla käyttäen 400 katkaistun kartion elementtiä STIF 61. Navan siirtymäksi saatiin $U_x = 1,27916 \text{ mm}$, joka yhtyy 5 merkitseväällä numerolla vastaavaan ESAS-tulokseen. Suurimmaksi meridiaanipuristukseksi ANSYS antaa $2,4873 \text{ MN/m}$, joka vaikuttaa noin 0,7 asteen keskuskulmalla. Tästä arvosta puristus pienenee navalle tultaessa vain hieman ($2,36260 \text{ MP/m}$), mutta mitään vetoalueita tämä laskentamalli ei tunne. Jos elementtejä lisätään, tulokset hieman tarkentuvat. 10 000 elementin mallin $U_x = 1,27911 \text{ mm}$ ja $N_x = -2,19580 \text{ MN/m}$, mutta tällöin laskennan numerokato on esim. tukireaktiosta päättellen melkoinen.

Kuvan 6 kalotti on ratkaistu vertailun vuoksi myös niissä tapauksissa, joissa kuormitus $W = 0,2 \text{ MN/rad}$ on b) levitetty a-säteisen ($a = h = 0,1 \text{ m}$) kalotin pinnalle tasaisena lumikuormituksena $P_L = 40 \text{ MPa}$ tai c) tuotu jäykän a-säteisen napakappaleen avulla (2 MN/m) tai d) se vaikuttaa a-säteisen putken ($h = 0,04 \text{ m}$) kautta, jolloin pallon kalotissa on vastaava reikä. ESAS-tuloksista on esitetty taulukossa 2 navalla ($r = 0$) ja a-säteisen leveysympyrän kohdalla saadut aksiaalinen siirtymä U_x sekä TRESCA-vertailujännityksen maksimiarvo σ_{Tr} . Taulukosta päättellen pistekuormitus on kohtalainen likiratkaisu muille, jos pysytään muiden "keräilyalueen" $r = 0,1 \text{ m}$ ulkopuolella.

Taulukko 2. Kuvan 6 kalotin ESAS-ratkaisun tuloksia eri kuormituksilla, joilla on sama resultantti.

Kuormitus-tapaus	U_x/mm		σ_{Tr}/MPa	
	$r = 0$	$r = a$	$r = 0$	$r = a$
a Pistek.	1,27910	1,21123	∞	160,779
b Lumik.	1,24177	1,19079	179,479	150,426
c Jäykä napa	-	1,29090	-	203,311
d Putkik.	1,03319	1,03319	-	214,869

LÄHDELUETTELO

- [1] Outinen, Hannu: Pyörähdyssymmetrisesti käyttäytyvän ohuen pyörähdykskuoren statiikka. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 27. Tampere, 1985. 97 s.
- [2] Outinen, Hannu: Isotrooppisen pallokuoren rotaatiosymmetrinen statiikka. Osa 1. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 10. Tampere, 1983. Tarkistettu 1985. 63 s.
- [3] Outinen, Hannu: Isotrooppisen pallokuoren rotaatiosymmetrinen statiikka. Osa 2. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 26. Tampere, 1985. 113 s.
- [4] Outinen, Hannu: Isotrooppisen pallokuoren rotaatiosymmetrinen statiikka. Osa 3. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 41. Tampere 1987. 50 s.
- [5] Outinen, Hannu: ESAS-manuaali. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 43, Tampere 1988. 70 s.
- [6] Kraus, Harry: Thin Elastic Shells. Wiley, N.Y. 1967. 476 s.
- [7] Bathe, Klaus-Jürgen: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982. 735 s.

HEAT TRANSFER IN FIRE-PROTECTED STEEL COLUMNS

Juha Paavola, Rolf Stenberg
 Helsinki University of Technology

1. INTRODUCTION

The structural problems in the field of fire technology often consist of the tasks, how to protect load-bearing structures against fire during a certain time, which is determined in accordance with the purpose of the use of the structure. Various structures are classified according to their fire resistance times. Usually the object protected has a high specific heat and insulation materials, on the contrary, a low conductivity and low specific heat. In this paper the heat transfer problem of steel columns with mineral wool insulations is handled by combined analytical and numerical techniques. The subject of this paper originates on the development of new testing and calculation methods for dimensioning the insulation of steel structures. The calculation method needed for the practice has to be simple and easy to manage. A lot of fundamental analytical methods for different heat transfer problems are presented by *Carslaw and Jaeger* [1]. *Wickström* [2, 3, 4] has developed some approximative numerical methods. *Melinek and Thomas* [5] have compared the methods and estimated their quality. This paper includes the ideas presented in Refs. [6, 7] where also ample experimental results are shown.

The temperature distribution is estimated by using a one-dimensional heat equation neglecting the effect of the corners of the insulation, the so-called corner effect, which has proved to be one of the most critical factor to be taken into consideration in the design of insulated structures. The thermal material properties applied are assumed to be temperature independent and the heat exchange between the outermost surface of the insulation and the fire room is linearized.

2. THE HEAT TRANSFER MODEL

Neglecting the temperature dependence in material properties and internal heat sources, the mathematical formulation of the problem reduces to Fourier differential equation

$$k \Delta u = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

in which k , ρ and c are the conductivity, density and specific heat, respectively, u denotes temperature and t time. The problem is examined as one-dimensional, with unit cross sectional area, in the region $-L \leq x \leq \delta$ in two parts, in the insulation and steel, separately,

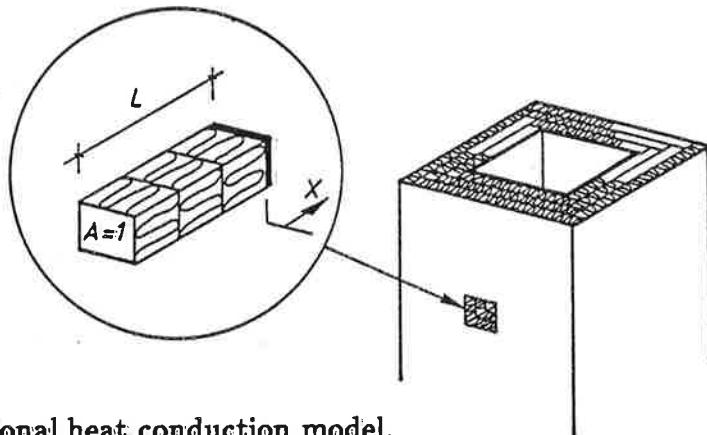


Fig. 1. One-dimensional heat conduction model.

see Fig. 1. The total thickness of insulation layers is L , and the wall thickness of the steel column is δ . The initial temperature u_o is the temperature of the environment and it can be assumed to have a constant value. The temperature in the fire room is $g(t)$. The heat is transferred to the surface of the insulation by convection and radiation and it flows through the insulation layers to the steel column which is assumed to be in perfect thermal contact with the insulation and insulated at the opposite surface. The problem is thus

$$\begin{aligned} k^{(i)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \rho^{(i)} c^{(i)} \frac{\partial u}{\partial t}, & -L \leq x \leq 0, \quad t > 0 \\ k^{(s)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \rho^{(s)} c^{(s)} \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \delta \end{aligned} \quad (2)$$

with the initial condition

$$u(x, 0) = u_o, \quad (3)$$

with the boundary conditions

$$\begin{aligned} -k^{(i)} \frac{\partial u(-L, t)}{\partial x} &= H (g(t) - u(-L, t)), & t > 0 \\ k^{(s)} \frac{\partial u(\delta, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

and with the continuity conditions at the interface between the insulation and the steel tube

$$\begin{aligned} u(0^-, t) &= u(0^+, t), & t > 0 \\ k^{(i)} \frac{\partial u(0^-, t)}{\partial x} &= k^{(s)} \frac{\partial u(0^+, t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

In the boundary conditions H is the heat transfer coefficient at the outer surface of the structure. The superscripts (i) and (s) correspond to the insulation and steel, respectively.

Owing to the low specific heat of insulation materials the difference between the temperatures of the outermost surface of the insulation and the fire room is very small after some first minutes of the test, so the heat flux boundary condition in Eqs. (4) could be replaced by the condition of equality of the temperatures of the surface and the fire room, i.e.

$$u(-L, t) = g(t), \quad t > 0. \quad (6)$$

When the diffusivity of the material in the structure to be protected is high enough compared with that of the insulation so the whole column can be assumed to be at uniform temperature, the structure can be replaced in the model, according to *Carslaw and Jaeger* [1], by a mass point with equal heat capacity. Then the region examined is $-L \leq x \leq 0$ and the latter one of the boundary conditions (4) can be replaced by the integral type condition

$$\int_0^t k^{(i)} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} dt = -\rho^{(s)} c^{(s)} \delta u(0, t), \quad t > 0, \quad (7)$$

which states that all the amount of heat penetrating through the insulation is stored in the column. This equation is usually used when derived once with respect to time.

3. THE EIGENFUNCTION METHOD

The initial temperature u_0 can be assumed to vanish without loss of generality. The solution to the problem is searched using the eigenfunction method. The orthogonal eigenfunctions are determined in both parts separately by solving the homogenized problem

$$\begin{aligned} -k^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \lambda \rho^{(i)} c^{(i)} \varphi, & -L \leq x \leq 0 \\ -k^{(s)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \lambda \rho^{(s)} c^{(s)} \varphi, & 0 \leq x \leq \delta \end{aligned} \quad (8)$$

with homogeneous boundary and continuity conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(-L)}{\partial x} &= h \varphi(-L) \\ \frac{\partial \varphi(\delta)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \varphi(0^-) &= \varphi(0^+) \\ k^{(i)} \frac{\partial \varphi(0^-)}{\partial x} &= k^{(s)} \frac{\partial \varphi(0^+)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (10)$$

where the notation $h = H/k^{(i)}$ is used.

The eigenfunctions are piecewise trigonometric and they consist of the general solution of the problem (8)-(10)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \alpha_n \cos \alpha_n (x + L) + h \sin \alpha_n (x + L) & -L \leq x \leq 0; \\ (\alpha_n \cos \alpha_n L + h \sin \alpha_n L) \cos \beta_n (x - \delta) / \cos \beta_n \delta & 0 \leq x \leq \delta, \end{cases} \quad (11)$$

with notations

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \sqrt{\lambda_n \rho^{(i)} c^{(i)} / k^{(i)}} = \sqrt{\lambda_n / \kappa^{(i)}} \\ \beta_n &= \sqrt{\lambda_n \rho^{(s)} c^{(s)} / k^{(s)}} = \sqrt{\lambda_n / \kappa^{(s)}},\end{aligned}\quad (12)$$

where κ is the material diffusivity. The following transcendental equation for the positive eigenvalues λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) is obtained from the continuity conditions (10)

$$k^{(s)} \beta (\alpha \cos \alpha L + h \sin \alpha L) \sin \beta \delta + k^{(i)} \alpha (\alpha \sin \alpha L - h \cos \alpha L) \cos \beta \delta = 0. \quad (13)$$

The temperature u is written as an eigenfunction expansion

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n(t) \varphi_n(x) \quad (14)$$

with

$$\mathcal{U}_n(t) = \frac{(u(\cdot, t), \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{1}{(\varphi_n, \varphi_n)} \int_{-L}^{\delta} u(x, t) \varphi_n(x) dx, \quad (15)$$

in which the inner product is defined as

$$(\varphi_n, \varphi_n) = \int_{-L}^{\delta} \rho(x) \varphi_n(x) \varphi_n(x) dx \quad (16)$$

with

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho^{(i)} c^{(i)} & -L \leq x \leq 0; \\ \rho^{(s)} c^{(s)} & 0 < x \leq \delta. \end{cases} \quad (17)$$

Substituting (14) into the original partial differential equation (2) an ordinary differential equation for $\mathcal{U}_n(t)$ is obtained

$$\frac{d\mathcal{U}_n(t)}{dt} + \lambda_n \mathcal{U}_n(t) = \frac{H \sqrt{\lambda_n / \kappa^{(i)}} g(t)}{(\varphi_n, \varphi_n)}. \quad (18)$$

Zero initial condition implies that the solution of this problem, which is sometimes called Duhamel's principle, is

$$\mathcal{U}_n(t) = \frac{H \sqrt{\lambda_n / \kappa^{(i)}}}{(\varphi_n, \varphi_n)} e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n \tau} g(\tau) d\tau. \quad (19)$$

The final solution of the original problem (2) with nonzero constant initial value u_0 is then

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x) + u_0 \\ &= \frac{H}{\sqrt{\kappa^{(i)}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\lambda_n} \varphi_n(x)}{(\varphi_n, \varphi_n)} e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n \tau} g(\tau) d\tau \right) + u_0 \end{aligned} \quad (20)$$

with eigenfunctions $\varphi_n(x)$ given in Eq. (11).

When the exponential approximation of "the standard fire curve", cf. [2] is used

$$g(t) = \sum_{j=0}^3 B_j e^{-\omega_j t}, \quad (21)$$

with the coefficients

$$\begin{array}{lllll} B_j \text{ [} ^\circ C \text{]} & 1325. & -430. & -270. & -625. \\ \omega_j \text{ [} h^{-1} \text{]} & 0. & 0.2 & 1.7 & 19., \end{array}$$

the solution is

$$u(x, t) = \frac{H}{\sqrt{\kappa^{(i)}}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^3 \left(\frac{\varphi_n(x)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \frac{\sqrt{\lambda_n} B_j}{\lambda_n - \omega_j} (e^{-\omega_j t} - e^{-\lambda_n t}) \right) + u_0. \quad (22)$$

When the boundary condition (6) is used instead of boundary radiation equation in equations (4) the general solution of the problem is similar to the solution (20) except that the heat transfer coefficient H is replaced by the conductivity of the insulation. Hence

$$u(x, t) = \frac{k^{(i)}}{\sqrt{\kappa^{(i)}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\lambda_n} \varphi_n(x)}{(\varphi_n, \varphi_n)} e^{-\lambda_n t} \int_0^t e^{\lambda_n \tau} g(\tau) d\tau \right) + u_0, \quad (23)$$

where the eigenfunctions now are

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sin \alpha_n (x + L) & -L \leq x \leq 0; \\ \sin \alpha_n L \cos \beta_n (x - \delta) / \cos \beta_n \delta & 0 \leq x \leq \delta. \end{cases} \quad (24)$$

The equation for determining the positive eigenvalues λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) is in this case

$$k^{(i)} \alpha \cos \alpha L \cos \beta \delta - k^{(s)} \beta \sin \alpha L \sin \beta \delta = 0. \quad (25)$$

In this case the solution will not converge uniformly at the whole interval $[-L, \delta]$ but only pointwise and it will, for example, satisfy the boundary condition at the point $x = -L$ only asymptotically. The solution (22) is also valid with the same alterations.

When the steel tube is assumed to be a perfect thermal conductor in contact with the insulation, the boundary condition (7) derived once with respect to time can be applied according to [1]. In order to make it possible to use the eigenfunction method the gradients of the temperature distribution at both faces of the region considered are chosen to be a separate

additional unknown functions. The continuity is guaranteed by two additional compatibility equations. The region is changed for the sake of convenience to $[0, L]$. The problem examined can then be reformulated

$$\begin{aligned} k^{(i)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \rho^{(i)} c^{(i)} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \\ -k^{(i)} v(t) &= H (g(t) - u(0, t)), \quad t > 0 \\ k^{(i)} w(t) &= -\rho^{(s)} c^{(s)} \delta \frac{\partial u(L, t)}{\partial t}, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (26)$$

with boundary conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= v(t), \quad t > 0 \\ \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} &= w(t) \end{aligned} \quad (27)$$

and initial conditions

$$u(x, 0) = u_0 \quad v(0) = 0 \quad w(0) = 0. \quad (28)$$

The eigenfunctions of the problem are

$$\varphi_n(x) = \cos(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \sqrt{\lambda_n / \kappa^{(i)}} = n\pi/L, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

By using the eigenfunction expansions, taking into account that

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{U}_n(t)}{\partial t} \varphi_n(x) \quad (30)$$

and that the inner product is $(\varphi_n, \varphi_n) = 2/L$, the following linear system of ordinary differential equations with constant coefficients is achieved

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{U}_n(t)}{dt} &= -\lambda_n \mathcal{U}_n(t) + \frac{2\kappa^{(i)}}{L} ((-1)^n w(t) - v(t)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ w(t) &= -\beta \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{d\mathcal{U}_m(t)}{dt} \\ v(t) &= h \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}_m(t) - hg(t). \end{aligned} \quad (31)$$

The notations $\beta = \rho^{(s)} c^{(s)} \delta / k^{(i)}$, $\kappa^{(i)} = k^{(i)} / \rho^{(i)} c^{(i)}$ and $h = H / k^{(i)}$ are introduced. The unknown functions $w(t)$ and $v(t)$ can be eliminated from the system of equations and hence

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{U}_n(t)}{dt} &= -\lambda_n \mathcal{U}_n(t) - \frac{2\kappa^{(i)}}{L} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (\beta(-1)^{m+n} \frac{d\mathcal{U}_m(t)}{dt} + h\mathcal{U}_m(t)) - hg(t) \right], \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (32)$$

A similar procedure can be applied to the problem in which the heat radiation boundary condition is replaced by equating the temperatures of the fire room and the surface of the insulation. In this case the eigenfunctions are given by

$$\varphi_n(x) = \sin(\alpha_n x), \quad \alpha_n = \sqrt{\lambda_n/\kappa^{(i)}} = (n + \frac{1}{2})\pi/L, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

The use of the function $v(t)$ is now unnecessary and the system of equations reduces to

$$\begin{aligned} \frac{dU_n(t)}{dt} &= -\lambda_n U_n(t) + \frac{2\kappa^{(i)}}{L} ((-1)^n w(t) + \alpha_n g(t)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ w(t) &= -\beta \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{dU_m(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (34)$$

An elimination of the function $w(t)$ leads, corresponding to Eq. (32), to the system

$$\frac{dU_n(t)}{dt} = -\lambda_n U_n(t) - \frac{2\kappa^{(i)}}{L} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \beta(-1)^{m+n} \frac{dU_m(t)}{dt} + \alpha_n g(t) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

In the systems of equations (32) and (35) only the N first terms are retained and hence a N -dimensional system of ordinary differential equations are obtained in the form

$$\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (36)$$

in which the prime denotes the derivation with respect to time. The vector \mathbf{U} includes the unknown functions U_n , $n = 0, 1, \dots, N - 1$ and the matrix \mathbf{A} and the vector \mathbf{F} are calculated using the matrix inversion $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}$ and $\mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$. The matrix notations used, corresponding now the equations (32), are

$$\begin{aligned} B_{nm} &= \delta_{nm} + 2(-1)^{n+m} \kappa^{(i)} \beta / L \\ C_{nm} &= -\lambda_n \delta_{nm} - 2\kappa^{(i)} h / L \\ D_n &= 2\kappa^{(i)} h g(t) / L \quad n, m = 0, 1, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (37)$$

where $\delta_{nm} = 1$, when $n = m$ and $\delta_{nm} = 0$, when $n \neq m$. The system (36) can be formally integrated yielding

$$\mathbf{U}(t) = e^{t\mathbf{A}} \left(\mathbf{U}(0) + \int_0^t e^{-\tau\mathbf{A}} \mathbf{F}(\tau) d\tau \right). \quad (38)$$

In practice, however, it is not advisable to obtain the solution on the basis of this formulation, since it is relatively laborious to calculate the exponential of a matrix. So it is easier to apply some numerical time integration procedure.

4. A SIMPLE TIME INTEGRATION PROCEDURE

In the numerical time integration procedure it is most advantageous to preserve the additional unknown functions $w(t)$ and $v(t)$ in the solution, in other words to use the formulations (31) and (34), to save the convenient structure of the coefficient matrices. The matrices are diagonal except having one, in system (34), or two, in system (31), last nonzero columns and

rows. The first N eigenvalues and eigenfunctions are adopted in the solution. In this study the implicit trapezoidal rule (A-stable) is employed. Hence, the equation (36) is approximated as

$$\frac{\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k}{\Delta t} = \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{U}^{k+1} + \mathbf{U}^k}{2} \right) + \mathbf{F}^k \quad (39)$$

with

$$\mathbf{U}^k \approx \mathbf{U}(k\Delta t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

\mathbf{F}^k is evaluated at times $t = 0.5 * (t_{k+1} + t_k)$. For simplicity the constant time step is assumed.

The initial conditions in Eq. (28) are used as the starting values for the calculations. From Eq. (39) the vector \mathbf{U}^{k+1} can be solved

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{U}^{k+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{U}^k + \Delta t \mathbf{F}^k, \quad (41)$$

in which \mathbf{I} is the identity matrix. This equation is adapted, for example, to the system of equations (34). The coefficient matrix is symmetrized. The matrix is diagonal with the exception of last column and row. The nonzero terms are presented in the following form

$$\begin{bmatrix} A_0 & & 0 & & B_0 \\ & A_1 & 0 & & B_1 \\ & & A_2 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ B_0 & B_1 & B_2 & \dots & B_{N-1} & B_{N-1} \\ & & & & C & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{U}_{N-1} \\ w \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ G \end{bmatrix}. \quad (42)$$

The terms in the coefficient matrix and the vector on the right-hand side are

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + \frac{1}{2} \lambda_n \Delta t \\ B_n &= -\kappa^{(i)} L^{-1} (-1)^n \alpha_n \Delta t \\ F_n &= 2\kappa^{(i)} L^{-1} \alpha_n g^* \Delta t + \kappa^{(i)} L^{-1} (-1)^n \alpha_n \Delta t w^k + (1 - \frac{1}{2} \lambda_n \Delta t) \mathcal{U}_n^k \\ C &= \frac{1}{2} \kappa^{(i)} \beta^{-1} L^{-1} (\Delta t)^2 \\ G &= \frac{1}{2} \kappa^{(i)} \beta^{-1} L^{-1} (\Delta t)^2 w^k - \kappa^{(i)} L^{-1} \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \mathcal{U}_m^k. \end{aligned} \quad (43)$$

The term g^* is calculated at the midpoints of the consecutive time levels. The matrix can easily be eliminated to the upper triangular form and the unknown functions are solved at the time stage $k + 1$

$$w^{k+1} = \left(C - \sum_{n=0}^{N-1} A_n^{-1} B_n^2 \right)^{-1} \left(G - \sum_{n=0}^{N-1} A_n^{-1} B_n F_n \right) \quad (44)$$

$$u(x, (k+1)\Delta t)) = \sum_{n=0}^{N-1} U_n^{k+1} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n^{-1} (F_n - B_n w^{k+1}) \varphi_n(x). \quad (45)$$

The calculation process is still simplified through the fact that the coefficient matrix is constant at various time levels. The similar procedure can be formulated corresponding to the system of equations (31).

5. COMPARISON OF CALCULATED AND EXPERIMENTAL RESULTS

The analytical calculation models are compared with the experimental results and with each other. The temperature in the fire room is approximated by an exponential series (22). In the calculations constant average values for material properties are used. The conductivity of steel is assumed to be $k^{(s)} = 50 \text{ W/mK}$ and of mineral wool $k^{(i)} = 0.26 \text{ W/mK}$. The specific heats are $c^{(s)} = 559 \text{ J/kgK}$ and $c^{(i)} = 1125 \text{ J/kgK}$, respectively. The density of steel is $\rho^{(s)} = 7850 \text{ kg/m}^3$ and for mineral wool an average value of total insulation is used. The values of specific heat are determined in accordance with [7] corresponding to average temperatures of the insulation and steel. The heat transfer coefficient on the surface of the structure is assumed to be $H = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$. The wall thickness of the steel tube is 10 mm. The initial temperature or the temperature of the environment is assumed to be $u_0 = 20^\circ\text{C}$.

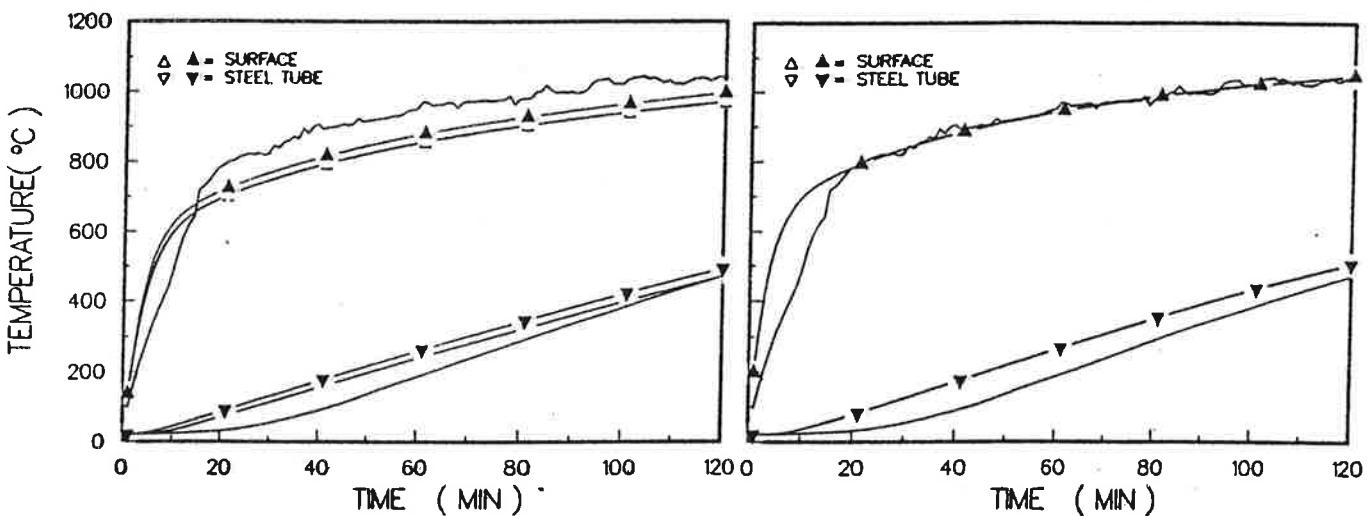


Fig. 2. The temperature development in the steel tube insulated by one layer of mineral wool with density of 140 kg/m^3 and thickness of 50 mm.

Figs. 2 and 3 show the calculated and measured temperatures on the outermost surface of the insulation and in the steel tube. In Fig. 3 the temperature development between two separate insulation layers, one fourth of the total thickness from the steel tube, is also presented. The blanked markers correspond to the results calculated in both parts, in the insulation and steel, separately Eq. 22 and the shaded ones to the results of the model in which the boundary condition (7) according [1] is adopted. The curves without markers present the experimentally measured temperature curves. The figures on the left hand side depict the solution when the radiation boundary equation between the fire room and the insulation is applied and on the right hand side when the temperatures of the outermost surface of insulation and the fire room are assumed to be equal. Fifty first eigenvalues and ei-

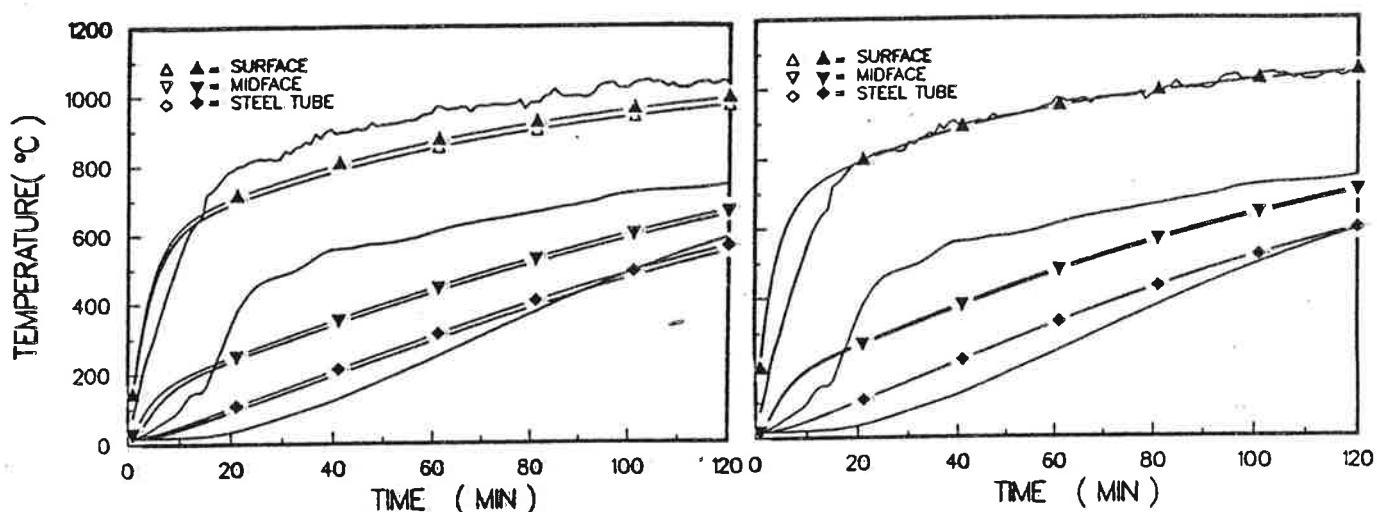


Fig. 3. The temperature development in the steel tube insulated by two layers of mineral wool with average density of 120 kg/m^3 and total thickness of 40 mm .

genfunctions are included in the solution and the timestep used is 20 s .

As a conclusion of the results it can be noticed that with this kind of model the temperature distribution inside the insulated structure can not be determined very accurately. Instead, the temperature of the steel tube can, for example, be predicted by using proper average material properties and by linearizing the heat exchange. Similarly, there is no difference between the results calculated by any of the methods presented. The small divergence in some figures disappear when more eigenfunctions are used.

REFERENCES

1. Carslaw, H. & Jaeger, J. C., Conduction of heat in solids, 2nd ed. Oxford 1969, Oxford University Press, 510 p.
2. Andersen, N. & Wickström, U., Brandbeskyttende isolation af stålkonstruktioner, (Fire protection of steel structures.) Copenhagen 1984, NORDTEST projektrapport 275-81.
3. Wickström, U., Temperature analysis of heavily-insulated steel structures exposed to fire, Fire Safety Journal, 9(1985), pp 281-285.
4. Wickström, U., Temperature calculation of insulated steel columns exposed to natural fire, Fire Safety Journal, 4(1981/82), pp 219-225.
5. Melinek, S. J. & Thomas, P. H., Heat flow to insulated steel, Fire Safety Journal, 12(1987), pp 1-8.
6. Jumppanen, U-M. & Paavola, J., Sheet steel - mineral wool fire protection of steel columns, Thin-walled Metal Structures in Buildings, IABSE Colloquium, Stockholm, 9 - 12 June 1986, Zürich 1986, IABSE, pp. 459 - 464.
7. Jumppanen, U-M. & Paavola, J., Thermal behaviour of steel columns with steel sheet - mineral wool fire protection, Technical Research Centre of Finland, Research report 504, Espoo 1987, 49 p.

FRICTION LAW, STIFFNESS AND STABILITY OF NON-MONOLITHIC STRUCTURES

H. Parland

Tampere University of Technology, Tampere, Finland

1. INTRODUCTION

In structures, such as traditional stone structures, the friction angle φ of the joints obeys at low stress the linear law:

$$\varphi = \vartheta + \beta \quad 1)$$

verified for rock joints [1]. ϑ represents the dissipative friction, whereas β represents the geometric friction, due to resistance to frictionless sliding along the steepest slope of the asperities.

The analysis (DFA) of structures with dissipative friction $\vartheta \neq 0$ has been thoroughly investigated for $\varphi = \vartheta$. It is hampered by the absence of unique solutions and the great amount of computational work required. On the other hand, work concerning the analysis (GFA) with purely geometric friction, $\vartheta = 0$, is rather scarce [2], [3], [4], [5]. The present study surveys the possibility to connect (GFA) and (DFA) within a common framework by using the unique characteristics of (GFA) which provide bounds to structurally significant quantities in (DFA).

2. GENERAL CONDITIONS

We consider a structure resting on a rigid foundation with volume Ω and regular external surface Γ_e , support surface Γ_r and separating surfaces, $\Gamma_{\mu v}$ at joints which on parts Γ_c do not transfer tensile stresses. Assuming Γ_c being Lipschitzian with complying periodical indentations defined on a piecewise smooth middle surface Γ_c^0 the mechanics of contact [2] is governed by (Fig 1).

I Dynamic condition: Stressvector $\beta_{\mu v} = \sigma_n^0 + \tau_t^0$ acting on part μ from part v on Γ_c satisfies:

a) Absence of tensile stress $\sigma \leq 0$ b) Friction law: $|\tau| \leq |\sigma| \tan \varphi \quad 2)$

II. Impenetrability condition: The gap vector $[r] + [\hat{g}] = [r] + \hat{\gamma}$, where the initial gap $[r] = r(x + \Delta x) - r(x)$ and the gap deformation $\hat{\gamma} = \gamma_n^0 + \gamma_t^0 = u_v(x) - u_\mu(x); x \in \Gamma_c$, satisfies:

$$a) [r]_n + \gamma_n \geq |[r]_t + \gamma_t| t_g \beta; \quad b) [r]_n + \gamma_n \geq 0 \quad 3)$$

Conditions I and II imply that stressvector p lies within friction cone Y and gapvector $[r] + \hat{\gamma}$ lies within cone X . Assuming Γ_e having a partly rigid cover Γ_s and linear elasticity we introduce on Ω , Γ_c and Γ_s :

1) Hilbert spaces and their dual spaces:

$H = (L_2(\Omega))^3$ space of int. load $f(\Omega)$	H' space of displacements $u(\Omega)$
$\partial H = (L_2(\Gamma_e))^3$ space of ext.load $p(\Gamma_e)$	$\partial H'$ space of displacements $u(\Gamma_e)$
$G = (L_2(\Omega))^6$ space of stress $\sigma(\Omega)$	G' space of strains $\varepsilon(\Omega)$
$\partial G = (L_2(\Gamma_c))^3$ space of joint stresses $p(\Gamma_c)$	$\partial G'$ space of gap deformations $\gamma(\Gamma_c)$
$V = H \times \partial H$ space of force loads $P = \{f(\Omega), p(\Gamma_e)\}$	$V' = H' \times \partial H'$ space of displacements u
$Q = G \times \partial G$ space of int.forces $\bar{\sigma} = \{\sigma(\Omega), p(\Gamma_c)\}$	$Q' = G' \times \partial G'$ space of deformation $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon(\Omega), \gamma(\Gamma_c)\}$

2) Linear operators:

$T: G \rightarrow H; T\sigma = -\sigma_{ij}, i, j = 1 \dots 3$	$T': H' \rightarrow G'; T'u = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$
$\partial T: G \rightarrow \partial H; \partial T\sigma = n_i \sigma_{ij}; n \in \Gamma_e$	$\partial T': H' \rightarrow \partial G'; \partial T'u =$
$\delta: G \rightarrow \partial G; \delta\sigma = n_i^0 \sigma_{ij}; n^0 \in \Gamma_c^0$	$= u_v(x) - u_\mu(x) \quad x \in \Gamma_c$
$A: Q \rightarrow V; A = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & \partial T \end{bmatrix}; A\bar{\sigma} = P$	$A': V' \rightarrow Q'; A' = \begin{bmatrix} T' & 0 \\ 0 & \partial T' \end{bmatrix}$
	$A'u = \bar{\varepsilon}$

3) Equilibrium- and compatibility conditions:

a'') Dynamic	a') Kinematic
i'') $A\bar{\sigma} = P \Rightarrow T\sigma = f; \partial T\sigma = p(\Gamma_e)$ $n_i \sigma_{ij}$ continuous for any n	i') $A'_u = \bar{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = T'u; \gamma = \partial T'u$
ii') $\delta\sigma = p(\Gamma_c)$ satisfies friction law I	ii') γ satisfies condition II
iii') $p = 0$ on $\Gamma^0 = \Gamma_e - \Gamma_r - \Gamma^*$	iii') On $\Gamma_r: u = 0$ on $\Gamma_s: u = u(\Gamma^*) + \gamma$

Forces and stresses $\{P'', \bar{\sigma}''\}$ satisfying a''), and displacements $\{u', \bar{\varepsilon}\}$ satisfying a'), are called admissible. They form convex sets $C_\sigma \subset V$ and $C_u \subset V'$ respectively. The work equation for admissible states may be expressed by dual pairing acc. to a'') on a')

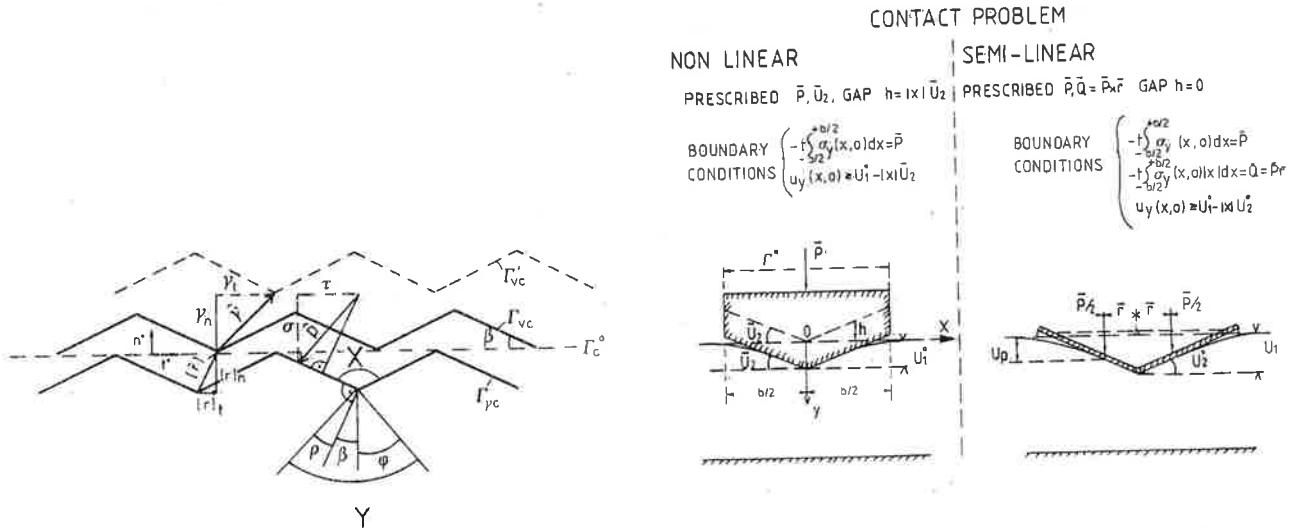


Fig 1. Contact surfaces with Cones X and Y.

Fig 2. Strip indented by wedge with complementary boundary conditions.

$$\text{Internal work: } \langle \bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}' \rangle_Q = \langle \sigma'', \varepsilon' \rangle_G + \langle p'', \gamma' \rangle_{\partial G} = \langle \bar{\sigma}, A'u \rangle_Q$$

$$\text{External work: } \langle P'', u' \rangle_V = \langle f'', u' \rangle_H + \langle p'', u' \rangle_{\partial H} = \langle A\bar{\sigma}, \dot{u} \rangle_V = \langle \bar{\sigma}, \dot{\varepsilon}' \rangle_Q$$

Hence the equality (which holds also if cond. I & II excluded):

$$\langle \sigma'', \varepsilon' \rangle_G + \langle p'', \gamma' \rangle_{\partial G} = \langle f'', u' \rangle_H + \langle p'', u' \rangle_{\partial H} \quad 4)$$

or

$$\int_{\Omega} \sigma''_{ij} \varepsilon'_{ij} d\Omega + \int_{\Gamma_c} p'' \gamma' d\Gamma = \int_{\Omega} \bar{\sigma} \cdot \dot{u}' d\Omega + \int_{\Gamma_e} \bar{p}'' \cdot \dot{u}' d\Gamma \quad 4')$$

- a) Admissible states $\{u, \bar{\varepsilon}\}$ and $\{P, \bar{G}\}$ are corresponding states if:
- i) On Ω : $\sigma_{ij} = E_{ijrs} \bar{\varepsilon}_{rs} + \sigma_{ij}^0$; $\bar{\varepsilon}_{rs} = E^{-1} \delta_{rs} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)$; (σ_{ij}^0 initial stress)
- ii) On Γ_c : $[r]_n + \gamma_n > |[r]_t + \gamma_t| \operatorname{tg} \beta$ then $p = 0$ (no contact)
 $[r]_n + \gamma_n = 0 \quad "|\tau| \leq |\sigma| \operatorname{tg} \varphi \text{ complete contact}$
 $[r]_n + \gamma_n = |[r]_t + \gamma_t| \operatorname{tg} \beta \quad "|\tau| = |\sigma| \operatorname{tg} \varphi \text{ partial contact}$

If p'' and γ' are admissible on Γ_c there applies

$$\bar{p}'' \cdot ([r] + \gamma') \leq |\bar{\sigma}| \cdot ([r] + \gamma)_t (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \beta) \quad 5)$$

and equality holds only if p and γ are corresponding

$$\hat{p} \cdot ([\hat{r}] + \hat{\gamma}) = |\zeta| |([\hat{r}] + \hat{\gamma})_t| \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\beta) \quad 5)$$

If $d \neq$ associated to corresponding $\{p, \gamma\}$ then from II follows

$$\hat{p} \cdot d \hat{\gamma} \leq |\zeta| |d \hat{\gamma}_t| (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\beta); \quad \hat{p} \cdot d \hat{\gamma} = |\zeta| |d \hat{\gamma}_t| (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\beta) \quad 6)$$

In contact problems the surfaces where loads p and displacements u are given can't generally be separated. Let Γ^* be that part of Γ_e where p and/or u are subjected to non-homogenous conditions (Fig 2).

$$Bp = R^*; B : \partial H_l \hookrightarrow Z_B : \quad H_l = (L_2(\Gamma^*))^3 \quad 7)$$

$$C'u = U^*; C' : \partial H'_l \hookrightarrow Z'_C : \quad H'_l = (L_2(\Gamma^*))^3 \quad 7')$$

Z_i are Hilbert or pre-Hilbert spaces of generalized loads R and load displacement U . B and C are bounded linear operators. p and u on Γ^* may be decomposed into orthogonal components

$$p = p^* + p^o; (p^* | p^o)_{\partial H_l} = 0; B p^o = 0; p^o \in \partial H^o; \quad p^* \in \partial H^* \quad 8)$$

$$u = u^* + u^o; (u^* | u^o)_{\partial H_l} = 0; C'u^o = 0; u^o \in \partial H^{o*}; \quad u^* \in \partial H^{*o} \quad 8')$$

The set $\{p^o\}$ constitutes the null-space of B , $N(B) = \partial H^o$. The set $\{p^*\}$ is ∂H^o 's orthogonal complement ∂H^* . Hence: $\partial H_l = \partial H^* \oplus \partial H^o$. Conditions 7, 8) represent for fixed R^* , U^* linear varieties M^* and M^{*o} in ∂H_l and $\partial H'_l$ respectively, generated by the translated subspaces ∂H^o and ∂H^{o*} . Because ∂H_B^o and ∂H_C^{o*} are closed and $p^* \perp \partial H_B^o$, $u^o \perp \partial H_C^{o*}$, p^* and u^* represent the perpendiculars from the origin to the translated planes. Hence

$$M^* = p^* + \partial H^o; \quad \|p^*\| = \min \|p\|; \quad M^{*o} = u^* + \partial H^{o*}; \quad \|u^*\| = \min \|u\| \\ Bp = R^* \quad C'u = U^* \quad 9)$$

A state $\{\bar{\sigma}, \bar{u}\}$, which satisfies conditions a'', a', a) and conditions 7, 7') on Γ^* is said to be a solution of the boundary value problem.

In the general case the load is defined by $P^* = \{f^*(\Omega), p^*(\Gamma^*)\}$ in space $V^* = H \times \partial H_l$ with norm $\|P^*\|_{V^*} = \|f\|_H + \|p^*\|_{\partial H_l}$ and the displacement load by $u^* \in \partial H_l$ with $\|u^*\| = \|u^*\|_{\partial H_l}$. If admissible $\{p'', \zeta''\}$ corresponds to load P^* and admissible $\{u', \varepsilon'\}$ corresponds to U^* then the work equation $\langle P^*, u' \rangle_{V^*} = \langle \bar{\sigma}, \bar{\varepsilon} \rangle_Q$ gives

$$\langle \sigma'', \varepsilon' \rangle_G + \langle p'', \gamma' \rangle_{\partial H'} = \langle f^* u' \rangle_H + \langle p^*, u^* \rangle_{\partial H} + \langle p^{*0}, u^* \rangle_{\partial H} + \langle p^{*0}, u^{*0} \rangle_{\partial H}$$

41)

Definition: The boundary conditions are said to be complementary if

$$\langle p^{*0}, u^0 \rangle_{\partial H} = 0; \quad \langle p^*, u^* \rangle_{\partial H} = 0 \quad 11)$$

Lemma 1. If the boundary condition on Γ^* are complementary then

$$p^* = B^+ R^*; \quad u^* = C^+ U^*; \quad p^0 = C R^0; \quad \text{or} \quad u^0 = B^+ U^0 \quad 12)$$

The external work on Γ^* is

$$\langle P u \rangle_{\partial H} = \langle p^* u^0 \rangle_{\partial H} + \langle p^0 u^* \rangle_{\partial H} = \langle R^* U^0 \rangle_Z + \langle R^0 U^* \rangle_Z \quad 12')$$

Proof: Since $B: \partial H^* \rightarrow Z_B$ and $C: \partial H^* \rightarrow Z_C$ are one to one and onto, there is a one to one correspondence between p^* and R^* and u^* and U^* respectively. Therefore corresponding pseudoinverse operators $B^+: Z_B \rightarrow \partial H^*$; $C^+: Z_C \rightarrow \partial H^*$ exist.

$$\begin{aligned} \langle p^0 u^0 \rangle &= 0 \text{ and } \\ \langle p^*, u^* \rangle &= 0 \text{ implies } \left\{ \begin{array}{l} \partial H^0 \ni p^0 \subset (N(C))^{\perp} = R(C); \quad \partial H^* = (N(B))^{\perp} = R(B) \\ u^0 \in (\partial H^0)^{\perp} = (N(B))^{\perp} = R(B^*); \quad \partial H^* = (N(C))^{\perp} = R(C) \\ \text{alternatively: } \end{array} \right. \\ \partial H^* &\subset (\partial H^*)^{\perp} = N(C^*); \quad \partial H^* \subset (\partial H^*)^{\perp} = N(B^*) \end{aligned}$$

Since in Hilbert space we may put $\partial H' = \partial H$ then $\partial H^* \subset \partial H^0$; $\partial H^* = \partial H^0$ from which follows 12), alternatively: $u^0 = B^+ U^0$; $p^0 = C R^0$ (Fig. 2).

3. CHARACTERISTICS OF SOLUTION ACCORDING TO GEOMETRIC FRICTION (GFA)

A) Uniqueness and existence of solution

Theorem I:a) If the boundary conditions are complementary there can at given load P^* , u^* not be more than one solution.

b) A solution exists, if at fixed u^* , the load P^* remains within the cone $E(u^*)$ of stability.

Proof: a) If at load $\{P^*, u^*\}$ we had two solutions $\{\sigma^1, u^1\}$ and $\{\sigma^2, u^2\}$ then their difference $\{\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^1, u^2 - u^1\}$ if complementary prevails acc. to 4) would satisfy:

$$\langle \sigma^2 - \sigma^1, \varepsilon^2 - \varepsilon^1 \rangle_G + \langle p^2 - p^1, \gamma^2 - \gamma^1 \rangle_{\partial G} = \langle p^0_2 - p^0_1, u^0_2 - u^0_1 \rangle_{\partial H_1} = 0 \quad (13)$$

since $\langle f^2 - f^1, p^2 - p^1, u^2 - u^1 \rangle = 0$. The first term on left equals $W(\Delta \varepsilon)$, the strain energy for $\Delta \varepsilon = \varepsilon^2 - \varepsilon^1$, $W(\Delta \varepsilon)$ is positive definite. The second term is non-negative observing $\hat{\gamma}^2 - \hat{\gamma}^1 = ([\hat{\gamma}] + \hat{\gamma}^2) - ([\hat{\gamma}] + \hat{\gamma}^1)$ since acc. to 5), 5')

$$(\langle p^2, [r] + \gamma^2 \rangle_{\partial G} + \langle p^1, [r] + \gamma^1 \rangle) - (\langle p^1, [r] + \gamma^2 \rangle_{\partial G} + \langle p^2, [r] + \gamma^1 \rangle) \geq 0$$

Hence the left hand side of 13) is non negative and it vanishes only if all differences $\{ \delta^2 - \delta^1, u^2 - u^1 \}$ vanish.

If on the contrary \exists solution $\{ u_1, \bar{\delta}_1 \}$ at non-complementarity with $\langle p^0_1, u^0_1 \rangle \neq 0$ and $\langle p^*_1, u^*_1 \rangle = 0$ spaces $N(B)$ and $N(C')$ are not orthogonal complements and $\partial H^* \cap \partial H^{*'} = \emptyset$. It

would then be possible to sharpen the constraint conditions retaining those of $\{ u_1, \bar{\delta}_1 \}$. That corresponds to an extension of ∂H^*_1 and $\partial H^{*'}_1$ to ∂H^* and $\partial H^{*'}_1$ respectively with $H^*_1 \subset H^*$, $\partial H^{*'}_1 \subset H^{*'}_1$. The product could be extended until complementarity is achieved in which case we would have a unique solution $\{ u, \delta \}$. Thus non-complementarity implies the existence of several solutions. Hence the necessary and sufficient condition for uniqueness is complementarity.

b) If the constraints are extended beyond complementarity then $\langle p^0, u^0 \rangle = 0$ and $\langle p^*, u^* \rangle \neq 0$ since $H^0 \cap H^{0'} = 0$; $H^* \cap H^{*'} \neq 0$. But if $\langle p^*, u^* \rangle \neq 0$ there is because of physical reasons no solution.

If at load f^*, p^*, u^* there occur incremental displacement du' equilibrium requires

$$\langle \delta, d\varepsilon' \rangle_G + \langle p, d\gamma' \rangle_{\partial G} = \langle f^*, du' \rangle_H + \langle p^*, du' \rangle_{\partial H_1}; \quad du' \in C_u \quad (13')$$

where for (GFA) $\hat{p} \cdot d\hat{\gamma}' \leq 0$ and equality holds only if $d\hat{p}$ corresponds to p . If the increments are rigid body displacements $d\hat{w}_V = d\hat{v}_V + d\hat{w}_V \times \hat{r} \in H'_W \subset H'$ comprising admissible displacements $dw' \in H'_W \cap C_u \neq \emptyset$ acc. to 6) then

$$\langle P^*, dw' \rangle_V = \langle f^*, dw' \rangle_H + \langle p^*, dw' \rangle_{\partial H_1} \leq 0; \quad \forall dw' \in H'_W \cap C_u \quad (13'')$$

$H'_W \cap C_u \neq \emptyset$ requires that the joints separate the structure into detachable parts. In this case $H_W \cap C_u$ forms a convex cone $\Xi(u^*) \subset H'_W$. From 6), 13'') follows:

if $\exists \ dw'_i$ s.t. $\langle P^*, dw'_i \rangle > 0$ no equilibrium for P^* , no solution

if $\exists \ dw_C$ " $\langle P^*, dw_C \rangle = 0$, but $\forall \ dw' \neq dw_C ; \langle P^*, dw' \rangle < 0$ the equilibrium is neutral and several solutions are possible

if $\forall \ dw' , \langle P^*, dw' \rangle < 0$ the equilibrium is stable for P^* .

This shows that a unique solution exists only if $P^* \in E^0(u^*)$, the interior of the stability cone, which is the negative polar cone of $\bar{\Sigma}(u^*)$. ■

If at initial state no stress, no gaps $\sigma^0, [r] = 0$, then from conditions a) a'') follows:

B) If load P^*, u^* has solution $\{\bar{\sigma}, u\}$ then load $\lambda P^*, \lambda u^*$ where $\lambda > 0$ has solution $\{\lambda \bar{\sigma}, \lambda u\}$. Problems of this kind are called semilinear (Fig 2).

C) Since $\langle p'', \gamma' \rangle_{\partial G} \leq 0$ and $\langle p, \gamma' \rangle_{\partial G} = 0$ then, if $u^* = 0$

$$\langle P^*, u \rangle_Y = \langle \sigma, \varepsilon \rangle_G = 2W(R) \quad (14)$$

$W(R)$ being, because of B), a homogeneous 2-degree function in R . Hence if Z finite dimensional $W = \frac{1}{2} R_i \cdot \frac{\partial W}{\partial R_i}$, and from 12) follows

$$\frac{\partial W}{\partial R_i} = U^i \quad ; \quad \frac{\partial U^i}{\partial R_j} = \frac{\partial U^j}{\partial R_i} \quad (14)$$

These equations are generalizations of Castigliano's and Maxwell's rules

D) At given P^* and $\beta = \varphi$ with solution $\{\sigma, u\}$, the strain energy $W_\sigma(o, \varphi) = \frac{1}{2} \langle \sigma, E^{-1} \sigma \rangle_G$ represents the minimum of the strain energy $W''_\sigma(\varphi) = \frac{1}{2} \langle \sigma'', E^{-1} \sigma'' \rangle$ corresponding to any admissible equilibrium $\{p'', u''\}$ with same P^* and φ

$$W_\sigma(o, \varphi) \leq W''_\sigma(\varphi) \quad (15)$$

Indeed, work equations for stresses $\{p, \sigma\}$ and $\{p'', \sigma''\}$ with $\{u, \varepsilon\}$ give $\langle \sigma'', \varepsilon \rangle_G + \langle p'', \gamma' \rangle_{\partial G} = \langle P^*, u \rangle_Y ; \langle \sigma, \varepsilon \rangle_G = \langle P^*, u \rangle_Y$

Hence $\langle \sigma'', \varepsilon \rangle_G - \langle \sigma, \varepsilon \rangle_G = -\langle p'', \gamma' \rangle_{\partial G} \geq 0 \Rightarrow \langle \sigma'', E^{-1} \sigma \rangle_G \geq \langle \sigma, E^{-1} \sigma \rangle_G = 2W(\sigma)$

Since $W(\sigma)$ is coercive and $\langle \sigma'', \varepsilon \rangle$ can be considered as a scalar product $\langle \sigma'', \varepsilon \rangle_G = (\sigma'' | \sigma)_G$ with norm $\|\sigma''\| = \sqrt{\langle \sigma'', E^{-1} \sigma'' \rangle}$, from Schwarz inequality follows: $\langle \sigma'', \varepsilon \rangle_G^2 \leq \langle \sigma, \varepsilon \rangle_G \cdot \langle \sigma'', \varepsilon'' \rangle_G \Rightarrow W_\sigma(o, \varphi) \leq W''_\sigma(\varphi)$ ■

If $[r], \sigma^0, u^* = 0$ the stiffness functional D at a given load P^* is defined by

$$D = \frac{\|P^*\|}{\|u_{P^*}\|} = \frac{\|P^*\|^2}{\langle P^*, u \rangle_Y} \quad (16)$$

For some solution $\{p, \bar{\sigma}, u, \bar{\varepsilon}\}$ with $\langle P^*, u \rangle_Y = \langle \bar{\sigma}, \bar{\varepsilon} \rangle_Q$ and $\|P^*\| = \langle \bar{\sigma}, \bar{\varepsilon} \rangle / \langle m^* u \rangle$, we get

$$D_\sigma = \frac{\|P\|^2}{\langle \bar{\sigma}, \bar{\varepsilon} \rangle_Q} \text{ or } D_\varepsilon = \frac{\langle \bar{\sigma}, \bar{\varepsilon} \rangle_Q}{\langle m^*, u' \rangle_{V^*}^2} \quad 17)$$

If $\varphi = \beta$, D may be expressed either only by $\{p, \sigma\}$ or only by $\{u, \varepsilon\}$

$$D''_\sigma(o, \varphi) = \frac{P^*}{2W''_\sigma(o, \varphi)}; \quad D'_\varepsilon(o, \varphi) = \frac{2W'_\varepsilon(o, \varphi)}{\langle m^*, u' \rangle_{V^*}^2}; \quad m^* = P^*/\|P^*\| \quad 17')$$

E) Theorem II: (Extremum principle of stiffness) If $\varphi = 0$ the stiffness D''_σ defined by admissible stress $\{p'', \sigma''\}$ provides a lower bound and D'_ε defined by admissible $\{u', \varepsilon'\}$ provides an upper bound to the actual stiffness D at given load P^* and given $\beta = \varphi$

$$D''_\sigma(o, \varphi) \leq D(o, \varphi) \leq D'_\varepsilon(o, \varphi) \quad 18)$$

Proof. The lower bound follows immediately from 15). The upper bound statement follows from work equalities for solution $\{u, \bar{\sigma}\}$ and admissible $\{u', \bar{\varepsilon}'\}$. With $2W(\varepsilon) = \|P^*\| \cdot \langle m^*, u' \rangle_{V^*}$; $\langle E\varepsilon, \varepsilon' \rangle_G = \|P^*\| \langle m^*, u' \rangle_{V^*} - \langle p, \varepsilon' \rangle_G \geq \|P^*\| \langle m^*, u' \rangle_{V^*}$ since $\langle p, \varepsilon' \rangle_G \leq 0$. Hence by Schwarz inequality with $\langle E\varepsilon, \varepsilon' \rangle_G = (\varepsilon | \varepsilon') : 2\sqrt{W(\varepsilon) \cdot W(\varepsilon')} \geq \langle E\varepsilon, \varepsilon' \rangle_G$

$$\frac{4W(\varepsilon)W(\varepsilon')}{4W(\varepsilon)^2} \geq \frac{\langle E\varepsilon, \varepsilon' \rangle_G}{2W(\varepsilon)} \cdot 2 \geq \frac{\langle m^*, u' \rangle_{V^*}^2}{\langle m^*, u' \rangle_{V^*}^2};$$

$$D(o, \varphi) = \frac{2W(\varepsilon)}{\langle m^*, u' \rangle_{V^*}^2} < \frac{2W(\varepsilon)}{\langle m^*, u' \rangle_{V^*}} = D'_\varepsilon(o, \varphi)$$

F) The stiffness vector $\{\Delta\} \subset V_1$ is defined by

$$\Delta(\varphi, \beta) = \sqrt{D(\varphi, \beta)} P^* / \|P^*\|; \quad \|\Delta\|_V = \sqrt{D} \quad 19)$$

It has the direction of the load perpendicular P^* in V_1 and contains Θ . The vector $\{\Delta\}$ defines a surface $\Delta(m^*, \varphi, \beta)$, the stiffness surface in V or Z . If Z finite dimensional then, where $P^* \in K(\varphi)$ the kern (see H) below) coincides with the stiffness ellipsoid \bar{A} of the monolithic structure. Indeed, if $\{R^*, U\} \in R^n$ then with elastic matrix A within $K(\varphi)$: $\{U\} = [A] \{R\}$; $D = \|R^*\|^2 / \langle R^*, U \rangle_Z = \|R^*\|^2 / \langle R^*, A R^* \rangle$; $\Delta_i / \|\Delta\| = R_i^* / \|R^*\|$, Hence with:

$$\frac{1}{D} = \left\langle \frac{R^*}{\|R^*\|}, A \frac{R^*}{\|R^*\|} \right\rangle_Z = \left\langle \frac{\Delta}{\|\Delta\|}, A \frac{\Delta}{\|\Delta\|} \right\rangle \Rightarrow \sum \sum_i \Delta_i A^{ir} \Delta_r = 1 \quad 19')$$

The last equation represents an ellipsoid in R^n because A is coercive

G) The load displacement U is orthogonal to the Δ -surface everywhere (Fig 4b) because

$$\langle d\Delta, U \rangle = \langle d(\frac{\|P^*\|}{\sqrt{\langle P^*, u \rangle_V}}), u \rangle = \sqrt{\frac{1}{\langle P^*, u \rangle_V}} \langle dP^* - \frac{P^* \langle dP^*, u \rangle}{\langle P^*, u \rangle_V}, u \rangle = 0; 20)$$

3. THE GENERAL CASE. INTERDEPENDENCE OF (GFA) AND (DFA) SOLUTIONS.

Although the (GFA) hypothesis materializes only if u incremental, it provides a useful tool for the assessment of (DFA)-solutions. In (DFA) statements A, C, D, E, G doesn't hold. Instead B and F together with the following statements hold for $\varphi \neq 0$ if $\sigma^0, [r] = 0$.

D) From D) follows: At given P^* and $\varphi = \sigma + \beta$ the strain energy $W_\sigma(\sigma, \beta)$ of (DFA) solutions $\{u, \sigma(\sigma, \beta)\}$ attains its smallest value $W_\sigma(0, \sigma + \beta)$ in the (GFA) solution

$$W_\sigma(0, \sigma + \beta) = \min W_\sigma(\sigma, \beta); \quad \sigma + \beta = \varphi \quad 21)$$

H) The set $K(\varphi)$ of loads P_k^* satisfying $|r| < |\sigma| \tan \varphi$ on $\forall x \in \Gamma_C$ is convex, called the monolithic kern of the structure. If struct. parts detachable, $K(\varphi)$ is a cone $E_k(\varphi)$, which contains the origin (Fig 4).

I) If parts of the structure are detachable the stable load P^* span the interior of the stability cone $E(\sigma, \beta)$, which is convex and contains the origin. The following inclusions [6] hold:

$$E(0,0) \subset E(\varphi,0) \subset E(0,\varphi) \subset E(0,\frac{\pi}{2}) \quad 22)$$

The set of admissible rigid body displacements constitutes a convex cone $\Xi(\beta)$. Its negative polar cone $\Xi^*(\beta) \subset E(\sigma, \beta)$ with equality only if $\sigma = 0$.

J) For any (DFA)-solution on $\{\sigma, u\}$ the stiffness $D(\sigma, \beta)$ is a function of $\{u, \sigma\}$ with $u(\sigma, \beta) \subset C_u(\beta)$ whereas $\sigma = \sigma(\varphi) \subset C_\sigma(\varphi)$. The internal work is $\langle \sigma, \varepsilon \rangle = 2W + \langle p, \gamma \rangle_{\partial G}$ where $\langle p, \gamma \rangle_{\partial G} = S(\sigma, \beta) (\tan \varphi - \tan \beta)$ with $S(\sigma, \beta) = \int_{\Gamma_C} |\sigma| |\gamma| d\Gamma$ acc. to 5). The stiffness at load P^* is acc. to 17)

$$D''_\sigma(\sigma, \beta) = \frac{\|P\|^2}{2W''_\sigma(\sigma, \beta) + S(\tan \varphi - \tan \beta)};$$

$$D'_\varepsilon(\sigma, \beta) = \frac{2W'_\varepsilon(\sigma, \beta) + S(\tan \varphi - \tan \beta)}{\langle m^*, u' \rangle_{V^*}^2} \quad 23)$$

Proposition 2. The following sequence for the stiffness holds for $0 < \sigma < \varphi$

$$D(0,0) \leq \inf D(\sigma,0) \leq \inf D(\varphi,0) \leq D(\sigma, \varphi - \sigma) \leq D(0,\varphi) \leq D(0,\frac{\pi}{2}) \quad 22)$$

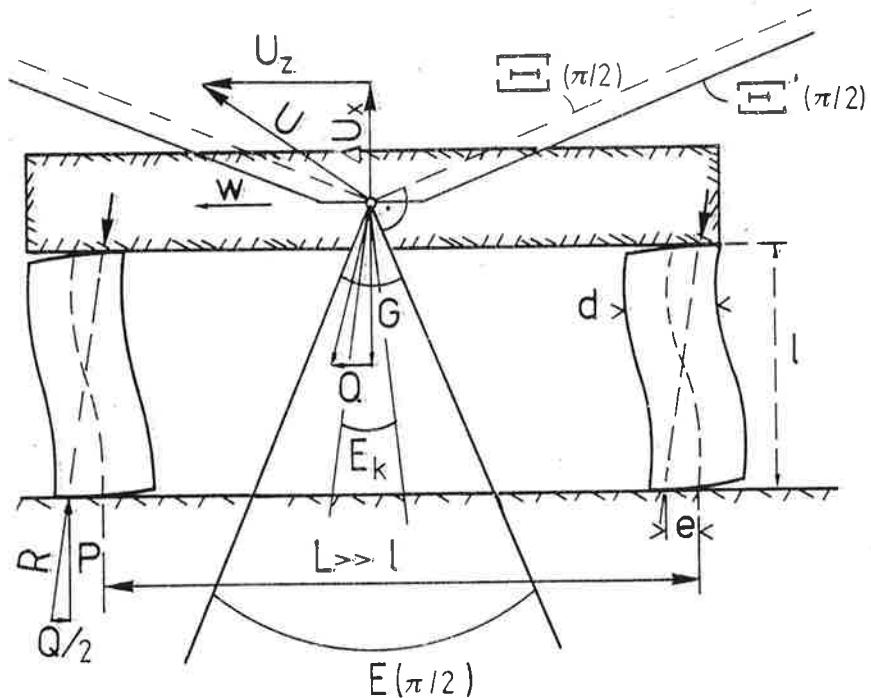


Fig 3. Cones of monolithic kern E_k and stability $E(\frac{\pi}{2})$, and cones $\Xi(\frac{\pi}{2})$, $\Xi'(\frac{\pi}{2})$ of load displacements U , of portal frame with rigid beam.

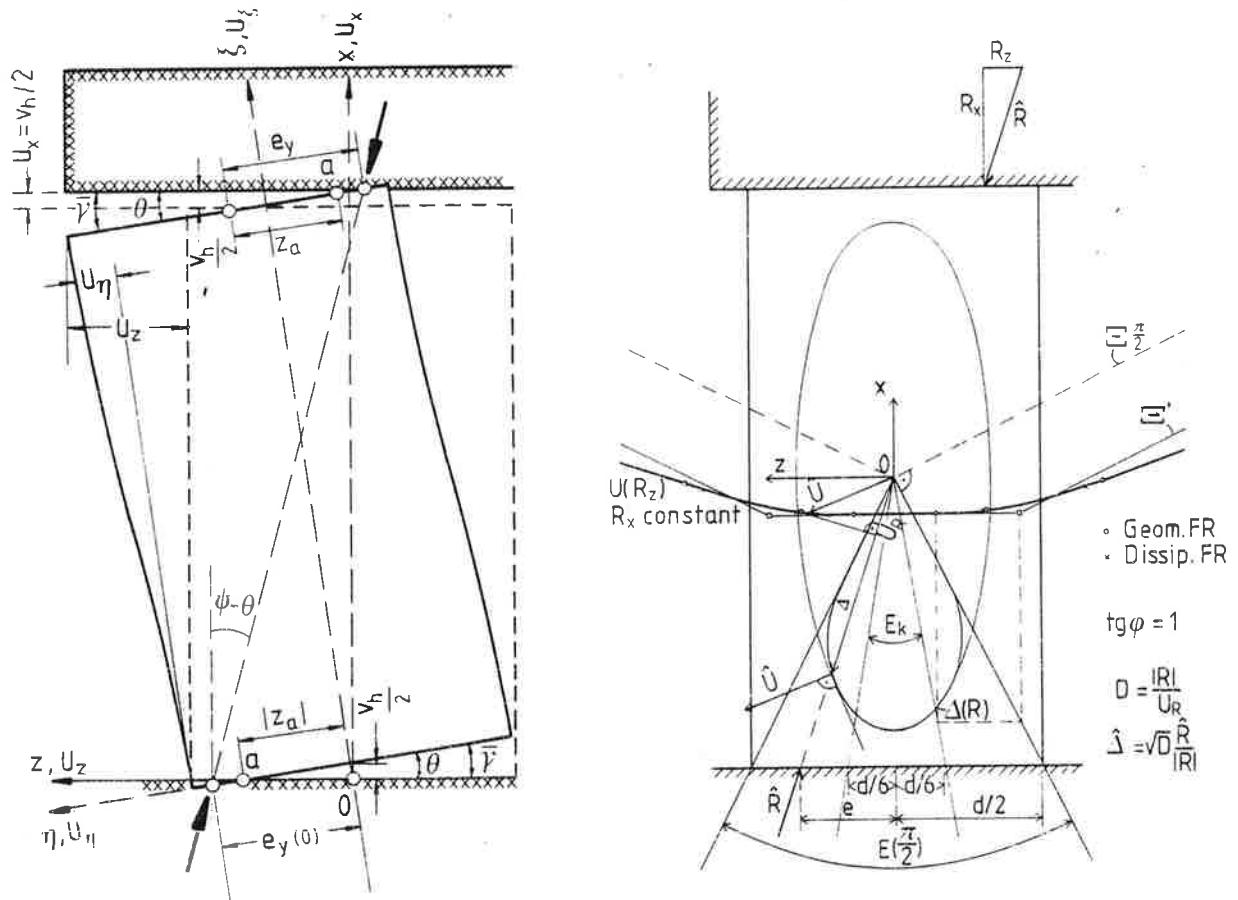


Fig 4. a) Linearized deformation of column. b) Stiffness curve Δ , cones E_k , $E(\frac{\pi}{2})$, $\Xi(\frac{\pi}{2})$ and displacement curve U of upper face of column.

Proof. Because of $C_u(o) \supset C_\varphi(\beta) \supset C_u(\varphi + \beta)$ and $C_\sigma(o) \subset C_\sigma(\varphi) \subset C_\sigma(\varphi + \beta)$, the stiffness $D(\varphi, \beta)$ decreases with narrowing set C_u and increases with growing C_σ . Using this and the inequalities of theorem II in turn we get the sequence

$$\begin{aligned} D(o, o) &= \inf_{\substack{\langle m^*, u \rangle \geq 2 \\ u(o, o)}} \frac{2W(\varepsilon')}{\sqrt{\langle m^*, u \rangle}} < \inf_{\substack{\langle m^*, u \rangle \geq 2 \\ u'(\varphi, o)}} \frac{2W(\varepsilon')}{\sqrt{\langle m^*, u \rangle}} \leq \frac{(2W(\varepsilon') + S(\varphi, o) \operatorname{tg} \varphi)}{\langle m^*, u \rangle \sqrt{\langle m^*, u \rangle}} = \inf_{u(\varphi, o)} D(\varphi, o) \leq \\ &\inf_{\substack{\langle m^*, u \rangle \geq 2 \\ u(\varphi, o)}} \left(\frac{2W(\varepsilon') + S(\varphi, o) \operatorname{tg} \varphi}{\langle m^*, u \rangle} \right) = \inf_{u(\varphi, o)} D(\varphi + \beta, 0) \leq \frac{2W(\varepsilon') + S(\varphi + \beta) (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \beta)}{\langle m^*, u \rangle \sqrt{\langle m^*, u \rangle}} \\ &= D(\varphi, \beta) = \frac{\|P^*\|^2}{2W(\sigma'') + S(\varphi, \beta) (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \beta)} \leq \max_{\sigma''} \frac{\|P^*\|^2}{2W(\sigma'')} = D(o, \varphi + \beta) \leq D(o, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

K) The stiffness surface $\Delta(m^*, \varphi, \beta)$ coincides with the stiffness ellipsoide \bar{A} when $P^* \subset K(\varphi)$. Outside $K(\varphi)$, $\Delta(m^*, \varphi, \beta)$ is inside $\Delta(m^*, o, \varphi + \beta)$ and lies within the stability cone $E(\varphi, \beta)$, or $E(o, \pi/2)$, the cone of hinge mechanisms (Fig 3).

If the solution $\{\sigma_e, u_e\}$ of the monolithic structure is known it is expedient to seek the solution $\{\sigma_h = \sigma - \sigma_e, u_h = u - u_e\}$, which represents the edge effect of the joint, because it is often easier achieved than $\{\sigma, u\}$. The main advantage of this separation into a linear part $\{\sigma_e, u_e\}$ and non-linear part $\{\sigma_h, u_h\}$ lies in the asymptotic characteristics of $\{\sigma_h, u_h\}$. If the load $R \in E_K(\varphi)$ in principal direction (1) is kept constant, U will generate a plane $U_e^1 = \text{constant}$. At increasing $R_i (i \neq 1)$ outside $E_K(\varphi)$, U_h increases unboundedly, when the load P^* approaches the lateral surface of the stability cone $E(\varphi, \beta)$. U_h approaches then asymptotically generatrices of the lateral surface of the displacement cone $\bar{E}(\beta)$ of the structure composed of rigid bodies (Fig 3). Computations and experiments carried out for a column resting on a rigid foundation and carrying a heavy rigid plate kept parallel to the foundation plane revealed no noticeable difference between the (GFA) and (DFA) solutions, the Δ curves coincided completely. Computations [7] confirm that the geometric friction hypothesis (GFA) provides a paradigm for the analysis, more transparent than that of (DFA) and renders satisfactory approximations.

References

- [1] H.J. Schneider. The Friction and Deformation Behaviour of Rock joints. Rock Mechanics, 8. (1976).
- [2] H. Parland. On the Stiffness of Non-monolithic Structures. State Institute of Technical Research Finland Publ. No 123. Helsinki 1968

- [3] A.V. Vovkushevski O' priblizennom ytshete shtrabelnyh shvov. Stroitelnaja Mehanika N 9 6 1984.
- [4] R. Michalowski, R. Mroz. Associated and non associated sliding rules in contact friction problem. Ark. Mechanics 30(1978).
- [4] E. Sanchez-Palencia, P. Suquet. Friction and homogenization of a boundary. Free boundary problems: Theory and applications Vol II. Pitman Adv Pr. 1982
- [6] H. Parland. The Friction Law and the stability of stone structures Bulletin of the International Association for Shell Structures N 75. 1980
- [7] A. Miettinen. Ulokesauman kitka ja sen teoria III. Suomen Mekaniikkapäivät 1988.

COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN BY FEM

Antti Pramila *, Jan P. Michalski **, Simo Virtanen *

* Tampere University of Technology

** Gdansk University of Technology

1. INTRODUCTION

The mathematical representation of the form of engineering objects (ships, aeroplanes etc.) has been a subject of extensive research work since the 18th century, when Chapman delineated waterlines of ships using low degree polynomials [1]. At the beginning it was closely fitted with engineering: mathematical representations were used to improve the functional characteristics of the product under consideration. For example, in some attempts towards mathematical description of the outer surface of the ship, the purpose has been to obtain shapes of minimum resistance.

The argumentation has mainly been rational. However, during the first half of 19th century there appeared to be a magic belief among some researchers in the superior performance of ship hull forms containing some particular geometric elements [2]: for example, Froude himself suggested - after Gerstner had presented his trochoidal wave theory - vessels with trochoidal lines. Since then - especially during the computer era - the approaches have been more rational: the argumentation is based purely on geometry, which is well defined. The disadvantage is, that close connection between product design and geometric design has been lost. In this paper we, however, try to consider geometric design again as a part of product design procedure.

In the mathematical definition of the form of engineering objects we can identify different levels: representation (interpolation, approximation, curve fitting), improvement (fairing) or creation of a totally new form being fair and meeting various kinds of technical specifications.

Obviously the above order is from simplest to the most difficult. Similarly, one could argue, that the methodology applicable to the last type of mathematical definition would also be applicable to the easier ones, because they are in a certain sense its special cases.

In principle, our task is to find vector valued function(s)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (1)$$

which defines the outer surface of the product. It must fulfill certain geometric and technical requirements.

From a mathematical point of view a curve or surface consists always of an infinite number of points. Hence the problem to find the function \mathbf{r} has an infinite number of degrees of freedom. However, the number of requirements imposed thus far on the surface is finite: the problem is mathematically under-determined.

In what follows connections between geometric design and product design are discussed and finally results obtained using curve and surface creation algorithms developed by the authors since 1978, [3], are presented. These algorithms are based on the minimisation of the unfairness or area of the surface to be created or resistance of the body defined by the surface to be created.

2. PRODUCT DESIGN AND GEOMETRIC DESIGN

From engineering point of view there exists no such separate problem as curve or surface design. Always the curve or surface to be designed is by some way or other connected to the product design or to the design of a part of a product. The steps which are usually carried out to produce a satisfactory design are: requirement, specification, generation of alternative solutions, evaluation and selection.

The division of the design into steps has been arisen because the product design problem is - like curve or surface design - an open ended problem. It also is underdetermined: the number of quantitative conditions and constraints is far less than the number of degrees of freedom. According to the above argumentation it seems reasonable to try to systematise their design by adapting suitable steps used in product design.

Usually the requirement for curve or surface design arises from earlier design considerations and is many times loosely defined. For example, in aeroplane design one could conceive requirement for the form of the cross-section of the fuselage to be: a curve circumscribing the seats and aisles providing standing height, space for cargo and having a form which can sustain the pressure load without too big shell thickness.

The specification might contain only information which can be described numerically. In curve and surface design this involves in addition to points and boundary curves to be fitted:

- volumes, moments of volumes, centers of volumes
- areas, centers of areas, moments of areas
- clearances: i.e. certain distances must be greater than a prescribed value or vice versa
- restrictions imposed on slope, i.e. minimum and/or maximum values
- restrictions imposed on curvature, i.e. minimum and/or maximum values
- restriction of being a developable surface.

Generation of a set of alternative solutions fulfilling all the essential requirements stated by the specification requires a flexible enough curve and surface algorithm, which can represent almost all possible forms. The use of Ferguson's or Bezier's parametric curve segments and surface patches without fixed control points is perhaps sufficient in usual applications. Ferguson's surface patch is in fact equivalent to an isoparametric 16 d.o.f element with derivative degrees of freedom.

In the evaluation the final aim is to find the alternative which has the best 'measure of merit(s)' or the least value for chosen 'cost function(s)', i.e. by optimisation.

The criterion used in selection can be written generally as a functional. If the specification yields only equality constraints, we obtain a constrained variational problem. If, however, there are also inequality constraints, we are led to a constrained optimisation problem.

3. CONSTRAINED VARIATIONAL PROBLEMS

A plane curve can be expressed in the form

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u) = (x(u) \ y(u))^T \quad (2)$$

where T denotes transposition. A typical constraint in addition to points to be passed could be that the area enclosed by the curve and x -axis in the interval $[a,b]$ is prescribed to be equal to A , i.e.

$$\int_a^b y \ dx = A \ . \quad (3)$$

The criterion used to find the "best" curve is the weighted sum of the length of the curve and the curvature squared integrated along the curve. We have to find minimum of the functional

$$\Pi = \int_S (\alpha_1 + \alpha_2 \kappa^2) \ ds \quad (4)$$

where α_1 and α_2 are weighting factors, κ is the curvature of the curve to be created and ds is its differential element.

We thus obtain an isoperimetric problem with modified functional

$$\Pi^* = \Pi + \lambda \left(\int_a^b y \ dx - A \right) \quad (5)$$

where λ is the Lagrangian multiplier.

For clarity the corresponding three-dimensional problem is first formulated in the familiar, explicit, form and only at the final stage is the parametric form taken into use. Without loss of generality, we take the x,y -plane as our reference plane. We try to find the surface

$$z = z(x,y) \quad (6)$$

whose domain is A and for which we have set a constraint that the volume enclosed by the surface and the reference plane is prescribed, i.e.

$$\int_A z \, dA = V \quad (7)$$

Depending on the application in question the functional under minimisation can be the measure of unfairness

$$\Pi = \int_A (z_{xx}^2 + 2 z_{xy}^2 + z_{yy}^2) \, dA \quad (8)$$

or the surface area

$$S = \int_A \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dA \quad (9)$$

When the surface of a ship or a boat is considered, expression (9) is as a first approximation proportional to the frictional resistance, if the domain of integration, A, is the central plane of symmetry below the waterline, see fig. 1.

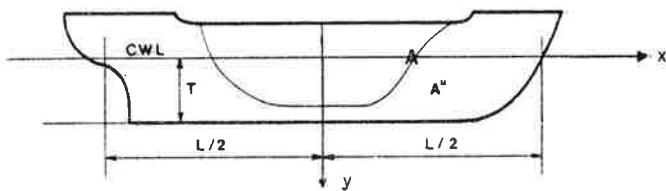


Fig. 1. Central plane of symmetry.

Moreover, to get a more physical criterion, we take the simplest approximation to wave resistance, the Michell integral

$$R_w = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_0^{2\pi} (H_S^2 + H_C^2) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (10)$$

where

$$\left. \begin{array}{l} H_S \\ H_C \end{array} \right\} = \int_A \frac{\partial z}{\partial x} \exp\left(-\frac{g \cdot y}{v^2 \cdot \cos \theta}\right) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin \left(\frac{g \cdot x}{v^2 \cdot \cos \theta}\right) \\ \cos \left(\frac{g \cdot x}{v^2 \cdot \cos \theta}\right) \end{array} \right\} dA \quad (11)$$

and ρ denotes density of water, g is gravitational constant, v is the velocity of the ship and θ is the direction of wave propagation.

The functional to be minimized can now be either of form

$$\Pi^* = \alpha \Pi + S + \lambda (\int z \, dA - V) \quad (12)$$

or

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \rho v^2 C_F S + R_W + \lambda (\int z dA - V) \quad . \quad (13)$$

In the above cases it is obvious that to find an analytical solution with general boundary conditions is a tedious task, if not impossible.

4. FEM DISCRETISATION

For generality and for avoiding problems with infinite slopes, the curve or surface is described parametrically. Hence for a curve in x,y-plane we take the FEM trial

$$x = N x = \sum N_j x_j , \quad y = N y = \sum N_j y_j \quad (14)$$

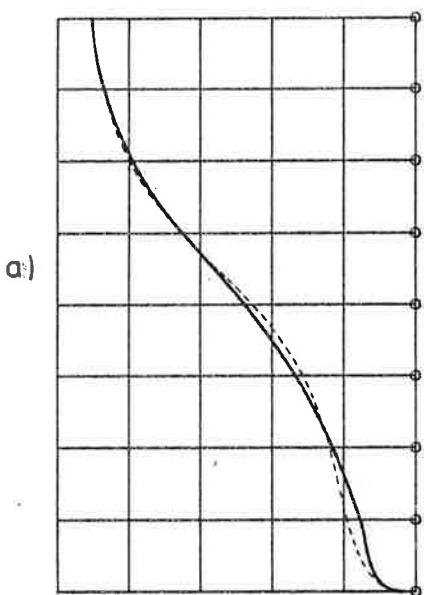
where N is the shape function matrix and x and y are lists of nodal parameters. The shape functions are functions of the parameter u . When cubic Hermitian polynomials are used as shape functions, the nodal parameters at node i are x_i , $(x,u)_i$, y_i and $(y,u)_i$. For surface, we take a similar expression as above also for z . Now, the shape functions are functions of parameters u and v . The nodal parameters are now the values of x , y and z , their first derivatives and cross derivatives with respect to u and v . More details can be found from references [4], [5], [6] and [7].

Substitution of trial (14) to isoperimetric variational problems (5), (12) and (13) yield a nonlinear equation system for the solution of the unknown nodal parameters. Solution is obtained iteratively. Because of the shape functions used C^1 continuity is ensured.

5. EXAMPLES

In ship design the so called sectional area curve is first determined. Thereafter sections fulfilling some pointwise information (half breath at bottom, CWL and deck level) and the prescribed sectional area are created. For figure 2 these four numerical values were taken from reference [8]. The solid line is obtained using functional (5) with $\alpha_1=0$. Dashed line represents

AFT SECTION NONDIM AREA 0.3125 ITER



AFT SECTION NONDIM AREA 0.3125 ITER

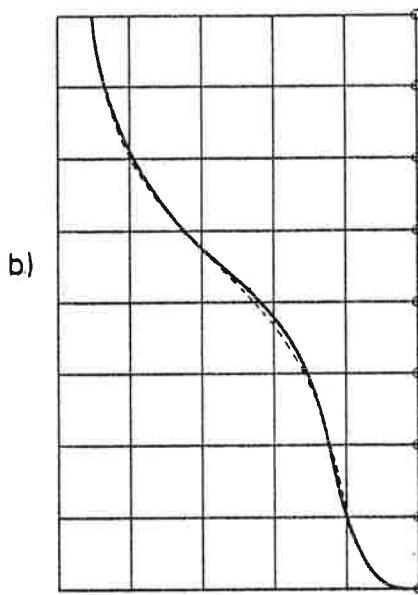


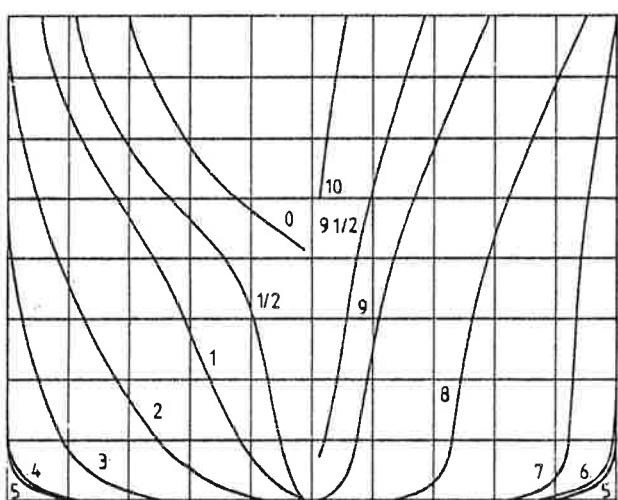
Fig. 2. Afterbody section of a ship, dashed line from [8].

Guldhammer's original afterbody section. In figure 2b there is additional constraint, the half breath is prescribed to be equal to the one of the reference section.

Figure 3 shows sections of a ship hull obtained using functional (8) with explicit shape functions. Figure 4 shows the result obtained using (12) with

$\alpha = 0$. It can be seen that the algorithm gives the classical analytical result.

CB 0.65 LCB -0.02L
WEIGHTS W1 1.25E-03 W2 .5E+00 W3 2.E-02/+00



Finally figures 5 and 6 show the results obtained using (13). The only difference in the input data is that in the latter the nodal parameter z_v was free in the lowest node at the bow. As can be seen, the algorithm creates a bulb, which is also in practise used to reduce wave resistance.

Fig. 3. Hull surface using fumctional (8)
and constraint on displacement and
center of displacement.

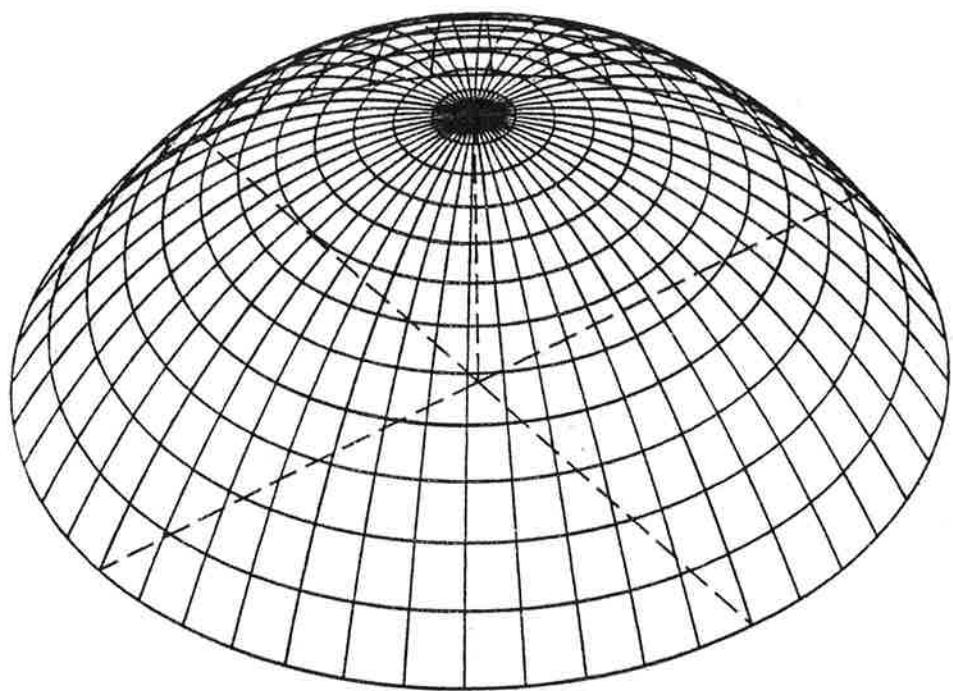


Fig. 4. A spherical cap.

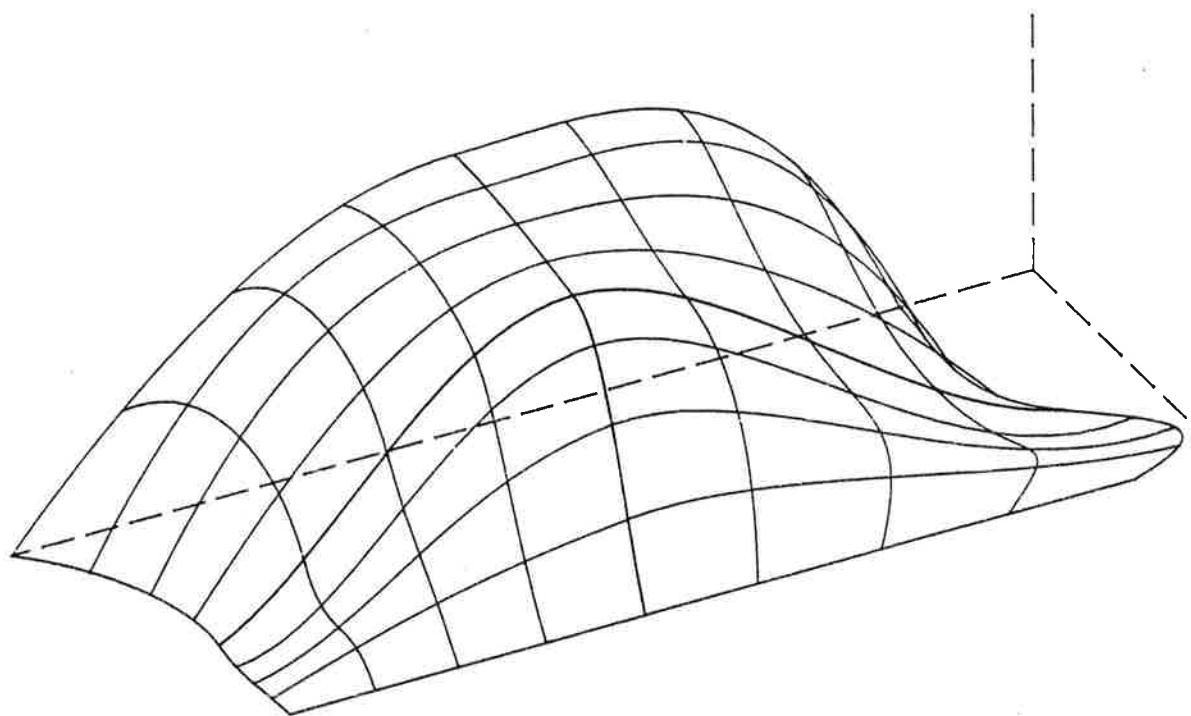


Fig. 5. Hull surface using functional (13).

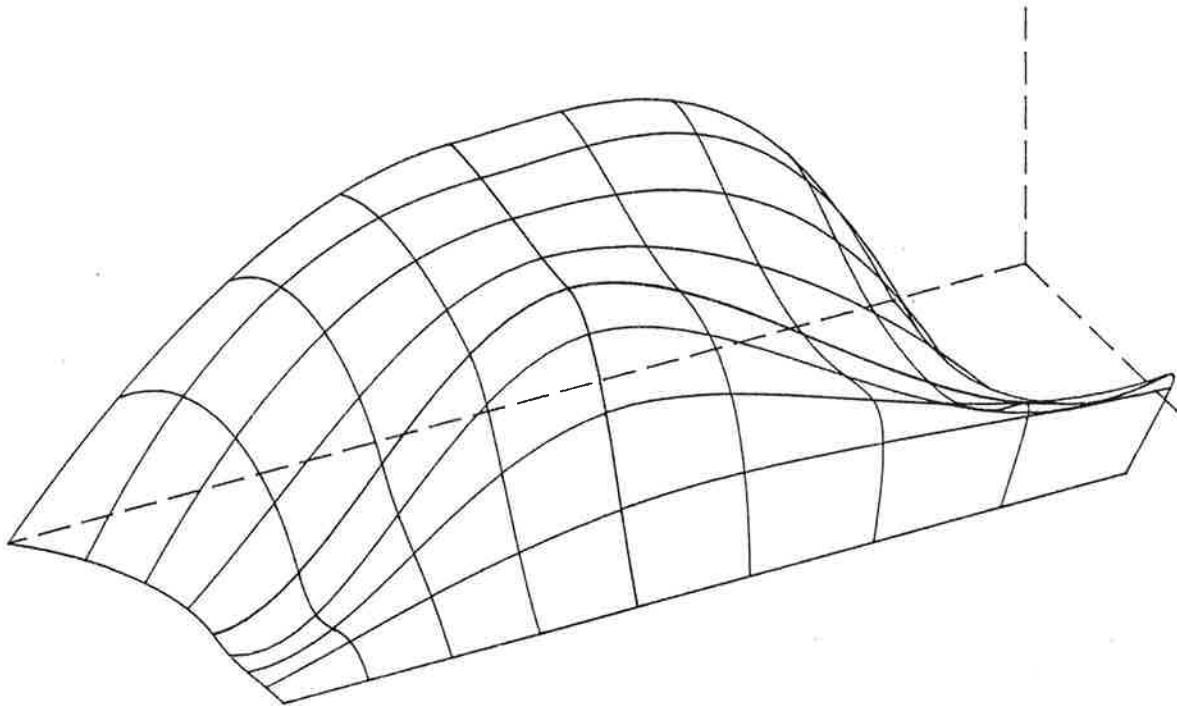


Fig. 6. As in fig. 5, but z, v free.

6. REFERENCES

- [1] F.H. Chapman, *A Treatise on Ship-Building*, 1760. In English, Cambridge and London, 1820
- [2] H.E. Saunders, *Hydrodynamics in Ship Design*, Vol II, SNAME, 1957.
- [3] A. Pramila, Ship hull surface using finite elements, *International Shipbuilding Progress*, vol.25, no 4, 97-107, 1978.
- [4] A. Pramila, A novel finite element method for preliminary design of ship hull form and for calculating hydrostatic particulars, *International Shipbuilding Progress*, vol.26, no 6 and no 7, 116-158, 1979.
- [5] A. Pramila, A new curve and surface design method employing Hermitian isoparametric finite elements, *Proceedings of the 2nd Int. Conf. Engn. Softw.*, 735-746, London, 1981.
- [6] A. Pramila, S. Virtanen, Surfaces of minimum area by FEM, *Int. J. Num. Meth. Engn.*, vol.23, 1669-1677, 1986.
- [7] J.P. Michalski, A. Pramila, S. Virtanen, Creation of ship body form with minimum theoretical resistance, *Proceedings of NUMETA 87*, University College, Swansea, 1987.
- [8] H.E. Guldhammer, *Formdata II*, Danish Technical Press, Copenhagen, 1963

AKSIAALISESTI LIIKKUVAN MATERIAALIN VÄRÄHTELYT JA STABILITEETTI

Antti Pramila, Jarmo Niemi, Jari Laukkanen, Sauli Liukkonen
 Tampereen teknillinen korkeakoulu

1 JOHDANTO

Käsitteellä 'aksiaalisesti liikkuvan materiaalin väärähtely' tarkoitetaan väärähtelyä sellaisissa mekaanisissa systeemeissä, joissa materiaali on jatkuvassa liikkeessä merkittäväintä väärähtelysuuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Esimerkkinä tallaisista systeemeistä mainittakoon virtaavaa nestettä sisältävät putket, hihna- ja ketjuvälinekset, paperiraina paperi- ja painokoneissa, köysiradat ja nauhasahat. Aihepiirin tutkimuksen aloittajana voidaan pitää Skutschia, joka julkaisi aksiaalisesti liikkuvan langan väärähtelyä koskevan artikkelin jo 1897, [1]. Aihepiiriä koskevia merkittäviä yhteenvetoartikkeleita ovat kirjoittaneet Mote Jr., [2], [3], [4] ja [5], ja Paidoussis, [6], [7] ja [8].

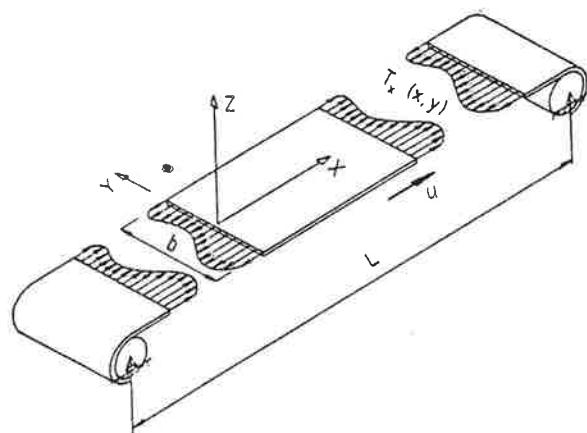
Tässä artikkelissa tarkastellaan aksiaalisesti liikkuvan materiaalin dynamiikan teoreettista perustaa, liikeyhtälöiden analyyttista ja numeerista ratkaisemista sekä teknillisistä sovellutuksista.

2. LIIKEYHTÄLÖT

2.1 Kinematiikka

Ohut kalvo (tai laatta) liikkuu kuvan 1 mukaisesti omassa tasossaan vakionopeudella u x-akselin suuntaan. Tiettyllä ajan hetkellä t tietyn x,y-tason pisteen normaalilla olevan kalvon keskipinnan partikkelin z-suuntainen siirtymä

$$w = w(x, y, t) . \quad (1)$$



Kuva 1. Merkintöjä

Tarkasteltaessa asiaa koko ajan tietyssä pisteessä (x_0, y_0) kaavasta (1) saatava ajan funktio $w(x_0, y_0, t)$ antaa aina eri ajan hetkillä eri partikkelin siirtymän, mikäli nopeus $u \neq 0$. Jos toisaalta aika ajatellaan 'jäädytetyksi', $t = t_0$, kaavasta (1) saatava painkan funktio $w(w, y, t_0)$ antaa kalvon muodon ko. hetkellä. Funktion w kokonaisdifferentiaali

$$dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (2)$$

Ajan hetkellä t pisteessä (x, y, w) olevan partikkelin x -koordinaatin muutos aikavälissä dt kuluessa on

$$dx = u dt \quad , \quad (3)$$

joten kaavasta (2) saadaan sen z -koordinaatin muutokseksi

$$dw = \frac{\partial w}{\partial t} dt + \frac{\partial w}{\partial x} u dt \quad , \quad (4)$$

Tarkastelun kohteena olevan partikkelin z -suuntainen nopeus on siis

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \quad . \quad (5)$$

Toistamalla sama tarkastelu \dot{w} :lle saadaan partikkelin kiihtyvyytyelle lauseke

$$\ddot{w} = \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6)$$

Kaavassa (6) toinen termi vastaa Coriolis-kiihtyvyyttä (vrt. $2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$) ja kolmas vastaa keskihakuiskihtyvyyttä (vrt. $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$).

2.2 Kinetiikka

Jos kalvon differentiaalipalaan kohdistuvia voimia pituusyksikköä kohti (= jännitys \times paksuus) merkitään tunnuksilla T_{ij} ($i, j = x, y$), on sen statista tasapainoasemaa koskeva osittaisdifferentiaaliyhälö tunnetusti

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = q , \quad (7)$$

missä q on poikittaiskuormitus pinta-alayksikköä kohti. Koska kalvon paksuus on vakio, toteuttavat myös T_{ij} :t jännityskomponenttien tasapainoyhtälöt. Tämän perusteella nähdään helposti, että vaikka T_{ij} :t eivät ole vakioita kalvon alueella, sievenee (7) muotoon

$$-T_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q . \quad (8)$$

Hitausvoimaperiaatteen mukaan saadaan kaavoista (6) ja (8) aksiaalisesti liikkuvalle kalvolle liikeyhtälö

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 m u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - (T_{xx} - m u^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - T_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q , \quad (9)$$

missä m on kalvon massa pinta-alayksikköä kohti.

Kun kalvo on hyvin kapea, $b \ll a$, ovat T_{yy} ja T_{xy} hyvin pieniä T_{xx} :n rinnalla. Liikeyhtälöstä (9) saadaan nämä pienet termit poisjättämällä aksiaalisesti liikkuvan langan liikeyhtälö

$$m' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 m' u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - (T - m' u^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q , \quad (10)$$

missä m' on massa pituusyksikköä kohti ($m' = mb$) ja T on kiristysvoima ($T = bT_{xx}$).

Mikäli kalvo liikkuu väliaineessa (esim. ilma, vesi), jota voidaan pitää tarkastelunalaisissa olosuhteissa kitkattomana ja kokonpuristumattomana, on dynaamista painetta $p(x, y, z, t)$ koskeva kenttäyhtälö

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

sekä reunaehdot kalvon ylä- ja alapinnalla (väliaineen tiheys ρ)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} . \quad (12)$$

Kapean kalvon tapauksessa ympäröivän väliaineen vaikutus voidaan ottaa huomioon lisätyn massan avulla. Jos lisättyä massaa pituusyksikköä kohti merkitään m'_a :lla, saadaan liikeyhtälöksi

$$(m' + m'_a) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 m' u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - (T - m' u^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q \quad . \quad (13)$$

Lisätyn massan lausekkeita löytyy mm. lähteistä [9] ja [10].

Kun tarkastellaan putkea, jossa virtaa nestettä, saadaan tarvittava liikeyhtälö lisäämällä palkin poikittaisvärähtelyjen liikeyhtälöön nestestä tulevat hitausvoimat. Yksinkertaisin virtausmalli - 'tulppavirtaus' - johtaa liikeyhtälöön

$$(m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 m_f u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - (T - m_f u^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q \quad , \quad (14)$$

missä m_p ja m_f ovat putken ja nesteen massa pituusyksikköä kohti sekä EI on putken taivutusjäykkyys.

3. VAPAA VÄRÄHTELY JA STABILITEETTI

Vapaan värähtelyn ja stabilitetin tarkastelussa tarvitaan liikeyhtälöitä (9), (10) ja (14) vastaavia homogeenisia yhtälöitä, jotka saadaan asettamalla q nollaksi.

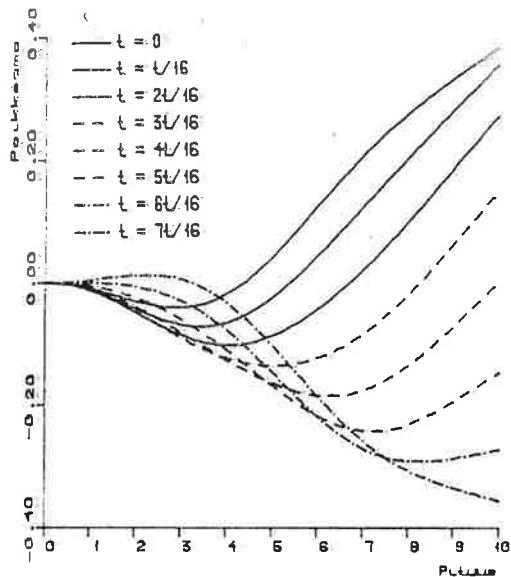
Kaavasta (10) nähdään, että esimerkiksi aksiaalisesti liikkuva jännitetty lanka tulee epästabiiliaksi, kun nopeus u saavuttaa arvon

$$u_{cr} = \sqrt{\frac{T}{m'}} \quad , \quad (15)$$

koska kimmista palautusvoimaa edustava viimeinen termi menee tällöin nollaan. Kriittisen nopeuden olemassaolo on eräs aksiaalisesti liikkuvan materiaalin dynamiikan erityispiirre.

Liikeyhtälöissä esiintyvän ristiderivaatan $\partial^2 w / \partial x \partial t$ vuoksi aksiaalisesti liikkuvan materiaalin poikittaisvärähtelyillä ei ole ominaistaajuksia ja -muotoja perinteisessä mielessä, jolloin systeemi värähtelee harmonisesti samanvaikeisena ominaiskulmataajuksillaan. Aksiaalisesti liikkuvan materiaalin ominaiskulmatajuksilla tarkoitetaan niitä kulmataajuksia, joilla tapahtuva äärellinen heräte aiheuttaa äärettömiin kasvavan vasteen vaimentamattomassa mallissa. Näitä kulmataajuksia vastaavat värähtelymuodot eivät ole samanvaiheisia

(ks. kuva 2). Oleellista on myös se, että ominaistaajuudet pienenevät monotonisesti nopeuden kasvaessa.

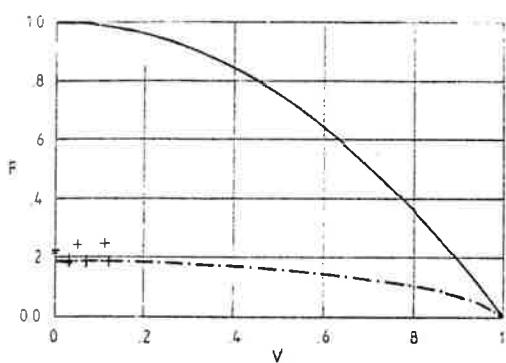


Kuva 2. Nestettä kuljettavan putken ominaismuoto.

missä L on tukiväli, on esittänyt Skutsch jo vuonna 1897, [1].

Yhtälön (13) esittämän tapauksen ominaistaajuuskien lauseke on [11]

$$f_1 = \frac{i(1-m'u/T)}{\sqrt{1+m'_a/m' - m'_a u^2/T}} \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m'}} \quad (17)$$



Kuva 3. Kaavojen (16), -, ja (17), --, mukainen ominaistaajuuden nopeusriippuvuus, kun $m'_a/m = 27$. Vastaan luvussa 5 tarkemmin kuvattua koepaperikoneen paperirainaa.

Systeemi menettää stabiliteettinsa (nurjahtaa) jonkin ominaistaajuuden pienetessä nollaan. Tämä ei ole kuitenkaan ainoa stabiliuden menetystapa. Reunaehdoista riippuen myös dynaaminen epästabilius (flutter) on mahdollinen.

Analyttisia ratkaisuja ominaistaajuksille on esitetty vain yksidimensioisissa tapauksissa (lanka, kapea kalvo, palkki, putki). Aksiaalisesti liikkuvan langan alimman ominaistaajuuden lausekkeen

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m'}} \left(1 - \frac{m'u^2}{T} \right) \quad (16)$$

Kuvassa 3 on esitetty dimensiottomassa muodossa kaavojen (16) ja (17) mukaiset käyrät. Dimensioton nopeus ja ominaistaajuus ovat

$$V = u \sqrt{\frac{m'}{T}} \quad (18)$$

ja

$$F = f_1 2L \sqrt{\frac{m'}{T}} \quad (19)$$

Kuvaan on '+' merkillä merkitty lähteesten [12] kokeellisia tuloksia.

4. ELEMENTTIMENETELMÄRATKAI SU

Aksiaalisesti liikkuvan kalvon sekä etenkin sen ja ympäröivän väliaineen kytkettyä värähtelyä koskevien kenttäyhtälöiden ratkaisu analyyttisesti on todennäköisesti työläs, ellei jopa täysin mahdotonkin. Tämän vuoksi ratkaisua joudutaan hakemaan numeerisesti.

Elementtimenetelmää käytettäessä luonnollisen lähtökohdan diskretoinnille tarjoaa yleensä kenttäyhtälöitä vastaava variaatioperiaate. Sen käyttö painotetuji jäähänenosten menetelmien sijaan tuo luonnolliset reunaehdot diskreettiin malliin mukaan ikaänkuin itsestään.

Tarkasteltaessa kuvan 1 mukaista systeemiä, voidaan todeta, ettei Hamiltonin periaatteen perinteistä muotoa

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (20)$$

voida sellaisenaan käyttää, jos probleeman määrittelyalueeksi otetaan tukien välinen kalvon osa. Kaavan (20) mukaisessa muodossahan Hamiltonin periaate pätee suljetulle systeemille, ts. systeemille, joka koostuu koko ajan samoista partikkeleista. Kuvan 1 systeemissä tukien väliseen alueeseen tulee vasemmalta koko ajan uusia partikkeleita ja niitä poistuu oikealle.

McIver on esittänyt yleistetyn Hamiltonin periaatteen avoimelle systeemille, [13]. Se voidaan helposti kirjoittaa tarkastelun kohteena olevalle systeemille muotoon

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_a} m(\vec{u} \cdot \delta \vec{r})(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds dt = 0 , \quad (21)$$

missä S_a on se reunan osa, jonka läpi tapahtuu sisään ja/tai ulosvirtausta, \vec{u} on reunalla olevien partikkeleiden nopeusvektori, $\delta \vec{r}$ on reunan virtuaalinen siirtymä, \vec{n} on reunan ulospäin suuntautunut yksikkönormaali ja $(T - V)$ on avoimen systeemin Lagrangen funktio. Nyt

$$\vec{u} = u \vec{i} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{k} \quad \text{ja} \quad \delta \vec{r} = \delta w \vec{k} \quad (22), (23)$$

joten (21) saadaan muotoon

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) - \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_a} \mu u \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_x \delta w \, ds \, dt = 0 \quad (24)$$

Nähdään, että jälkimmäinen termi häviää, mikäli sisääntulo- ja ulosmenoreunat sijaitsevat peräänantamattomilla tuilla.

Kun kalvon muoto ja painekenttä esitetään tavanomaisia elementtimenetelmäyritteitä

$$w(x, y, z) = \bar{N} w \quad \text{ja} \quad p(x, y, z) = \bar{N} p \quad (25), (26)$$

käyttäen saadaan Hamiltonin periaatteesta vapaiden väärähtelyjen tapauksessa solmuparametreja koskevan liikeyhtälöryhmä

$$\bar{M} \ddot{w} + \bar{G} \dot{w} + \bar{K} w = 0 \quad , \quad (27)$$

joka poikkeaa tavanomaisesta seuraavien piirteiden osalta

- * \bar{M} on täysi matriisi, koska ympäröivään väliaineeseen syntynyt painekenttä kytkee kaikkien vapausasteiden kiihtyydyt toisiinsa
- * \bar{G} matriisilla ei ole mitään tekemistä vaimennuksen kanssa ja se on vinosymmetrinen
- * \bar{K} riippuu nopeudesta u

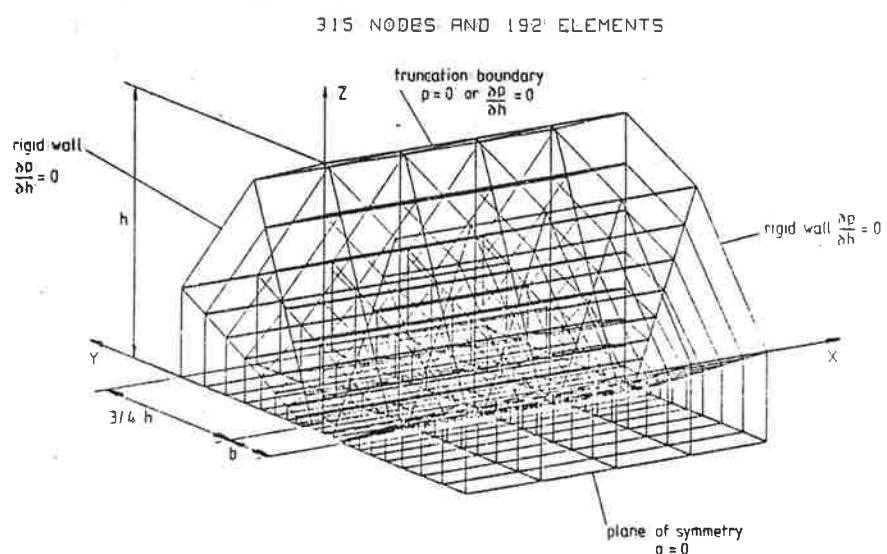
Matriisien alkioiden yksityiskohtaiset lausekkeet on esitetty lähteessä [14].

Mikäli nestettä kuljettavassa putkessa on pistemassoja ja kimmisia tukia käy myös sen dynamiikan analyttinen käsitteily hankalaksi. Elementtimenetelmällä tapahtuva ratkaisua on käsitelty yksityiskohtaisesti lähteessä [15]. Putken vapaiden väärähtelyiden liikeyhtälöt ovat myös muotoa (27). \bar{G} matriisi voi nyt reunaehdoista riippuen olla joko vinosymmetrinen tai epäsymmetrinen.

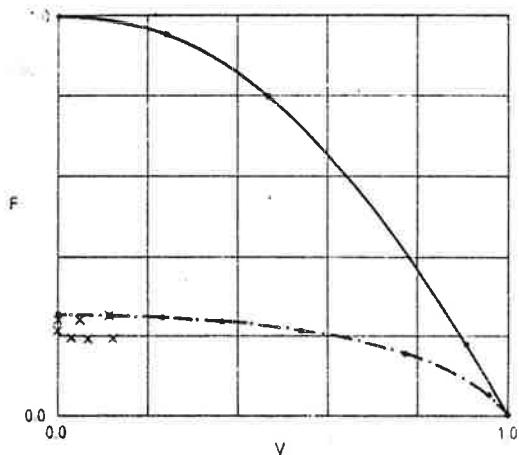
5. SOVELLUTUKSIA

Seuraavassa esitetään joitakin sovellutuksia, jotka on laskettu luvussa 4 lyhyesti esitettyyn teoriaan pohjautuvilla ohelmistoilla. Lisää esimerkkieitä löytyy lähteistä [14] ja [15].

Paperiraina, jonka leveys on 0,47 m ja massa pinta-alayksikköä kohti n. 35 g/m² kulkee koepaperikoneessa kuvan 1 esittämällä tavalla kahden telen yli. Telojen väli on 2,4 m. Kuvassa 4 on esitetty lisätyn massan



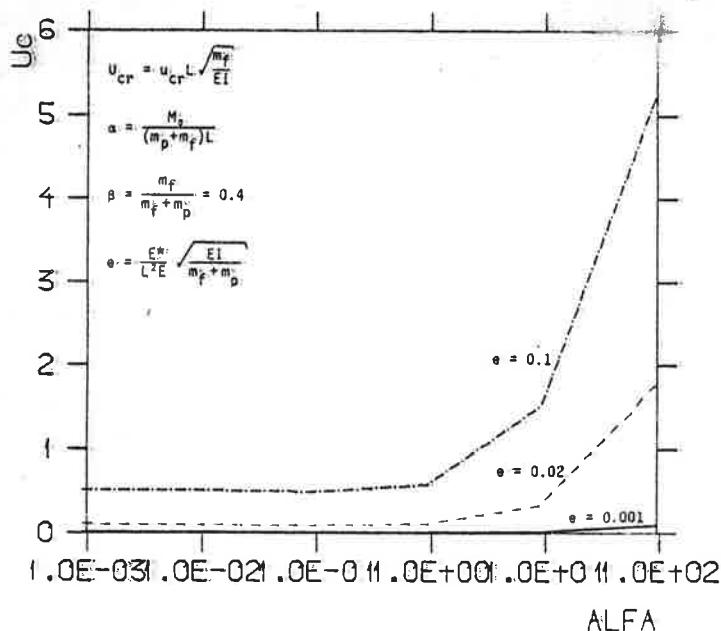
Kuva 4. Lisätyn massan laskennassa käytetty elementtiverkko.



Kuva 5. Alin ominaistaajuus nopeuden funktiona. - ilman lisätttyä massaa, - - - lisätty massa mukana.

massamatriisiin laskennassa käytetty elementtiverkko. Kuvassa 5 on esitetty - kaavojen (18) ja (19) mukaisesti dimensiottomaan muotoon saatettuna - systeemin alin ominaistaajuus nopeuden funktiona. Kuvaan on merkitty tunnuksella 'x' lähteen [12] kokeellisia tuloksia.

Kuvassa 6 on esitetty alapäässä olevan pistemassan, kimmisen kiinnityksen ja vaimennuksen vaikutusta nestettä imevän painovoimakentässä olevan vertikaalisen putken kriittiseen nopeuteen. Tuloksista nähdään, että tällainen systeemi on vaimentamattomana epästabiili jo mullanopeudesta lähtien.



Kuva 6. Nestettä imevän ulokeputken kriittinen nopeus.

LÄHDEVIITTEET

- [1] R. Skutsch, "Über die Bewegung eines gespannten Fadens, welcher gezwungen ist, durch zwei feste Punkte mit einer Konstanten Geschwindigkeit zu gehen und zwischen denselben in Transversalschwingungen von geringer Amplitude versetzt wird", Annalen der Physik und Chemie, vol. 61, 190-195, 1897.
- [2] Mote, C. D., Jr., "Dynamic Stability of Axially Moving Materials", Shock Vib. Dig., vol. 4, no. 4, 2-11, 1972.
- [3] Ulsoy, A. G. and Mote, C. D. Jr., "Band Saw Vibration and Stability", Shock Vib. Dig., vol. 10, no. 1, 3-15, 1978.
- [4] Mote, C. D., Jr., Wu, W. Z., and Schajer, G. S., "Band Saw and Circular Vibration and Stability", Shock Vib. Dig., vol. 14, no. 2, 19-25, 1982.
- [5] D'Angelo, C., III, Alvarado, N. T., Wang, K. W., and Mote, C. D., Jr., "Current Research on Circular Saw and Band Saw Vibration and Stability", Shock Vib. Dig., vol. 17, no. 5, 11-23, 1985.
- [6] Paidoussis, M. P. and Issid, N. T., "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid", J. Sound Vib., vol. 33, 267-294, 1974.

- [7] Chen, S. -S., "Flow-Induced Vibrations of Circular Cylindrical Structures", Appl. Mech. Rev., vol. 40, no. 2, 163-175, 1987.
- [8] Paidoussis, M. P., "Flow-Induced Instabilities of Cylindrical Structures", Appl. Mech. Rev., vol. 40, no. 2, 163-175, 1987.
- [9] W. K. Meyerhoff, Added masses of thin rectangular plates calculated from potential theory, J. Ship Res., vol. 14, 100-111, 1970.
- [10] J. E. Greenspon, Vibrations of cross-stiffened and sandwich plates with application to underwater sound radiators, J. Ac. Soc. Am., vol. 33, 1485-1497, 1961.
- [11] Pramila, A., Natural frequencies of a submerged axially moving band. J. Sound Vib., vol. 113, No. 1, 198-203, 1987.
- [12] Pramila, A., Sheet Flutter and the interaction between sheet and air, TAPPI J., vol. 69, 70-74, 1986.
- [13] McIver, D. B., Hamilton's Principle for Systems of Changing Mass. J. Engn. Math., vol. 7, No. 3, 249-261, 1973.
- [14] Niemi, J., Pramila, A., FEM-analysis of transverse vibrations of an axially moving membrane immersed in ideal fluid. Int. Journal of for Num. Meths. Engn., vol. 24, 2301-2313, 1987.
- [15] Pramila, A., Liukkonen S., Laukkanen J., Dynamics of short and long pipes conveying fluid by FEM, julkaisematon käsikirjoitus, 1988.

MASSIIVINEN MAAVARAINEN KONEPERUSTUS DYNAMIIKAN PROBLEEMANA

Jari Puttonen

Rakennusosasto, Imatran Voima Oy

1. JOHDANTO

Useasti perustuksen osuus konetoimituksen kustannuksista on vähäinen. Tämä on vaikuttanut selvästi syntyneeseen maanvaraisten koneperustusten suunnittelukäytäntöön. Perustukset on suunniteltu soveltamalla helposti ymmärrettäviä mekaniikan periaatteita toiminnaltaan mahdollisimman varmoiksi. Yksinkertaisin periaate on perustuksen tekeminen niin massiiviseksi, että pelkät hitausvoimat varmistavat systeemin liiketilan pysymisen sallituissa rajoissa. Tämän periaatteen noudattaminen on johtanut perustuksiin, joiden massa on jopa 5-10 kertainen koneen massaan verrattuna. Kirjoituksessa maanvaraisen koneperustuksen sovellutuksena on tarkasteltu kaasuturbiiniperustusta. Tämän tyypilliselle harmonisesti herätetylle perustukselle ei ole kansainvälistä normikäytäntöä. Suunnitteliohjeissa on esitetty määräyksiä ainoastaan kuormalle, DIN 4027, ja sallituille siirtymävasteille, VDI 2056. Maaperän mallintaminen jää pitkälle suunnittelijan harkintaan. Kirjoituksessa esitetään eräs viime vuosina suosiota saavuttanut mahdollisuus maan ja rakenteen välisen dynaamisen vuorovaikutusilmiön tarkastelulle. Esitetyllä teorialla on lopuksi analysoitu kaksi viimeaikoina toteutettua kaasuturbiiniperustusta.

2 Dynaamisesti kuormitettu maaperä

2.1 Yleistä

Koneperustuksen dynaamista käyttäytymistä analysoitaessa oletetaan värähtely yleensä lineaariseksi. Helpoin peruste olettamukselle on

epälineaarisen väärähely-yhtälön ratkaisun vaikeus. Fysikaaliset perustelut lineaariselle yhtälölle eivät ole yhtä suoraviivaisia. Koneperustukset ovat usein väsytyskuormitettuja, jolloin systeemin lineaarisuus dynaamiselle kuormalle on välttämätöntä. Koneperustuksissa kuorman staattinen osuus on yleensä merkittävästi dynaamista herätettä suurempi. Siten on ajateltavissa maaperän epälineaarisen käyttäytymisen aiheutuvan pääosin staattisesta kuormasta. Selityksen oikeellisuus riippuu konetyypistä. Koneille, joissa dynaaminen kuorma aiheutuu pyörivistä osista se pitää yleensä hyvin paikkansa.

Maaperä vaikuttaa väärähely-yhtälössä kahteen termiin. Siirtymään verrannolliseen jäykkyyteen ja nopeuteen verrannolliseen vaimennukseen. Aikaisemmin on ajateltu myös osan maaperän massasta väärätelevän yhdessä perustuksen kanssa. Tämä lähestymistapa on kuitenkin todettu virheelliseksi. Kokeissa ei ole havaittu maamassan väärätelevän samassa vaiheessa perustuksen massan kanssa [2]. Johtopäätös maaperästä aiheutuvasta lisämassasta on syntynyt ilmeisesti kokeista, joissa maaperää on kuormitettu taajuuden neliöön verrannollisella keskipakokuormalla. Aiheutuneet epälineaariset vaikutukset on selitetty lisämassalla [1].

2.2 Materiaaliparametreistä

Ajattelemalla maaperä elastiseksi jatkumoksi tarvitaan sen ominaisuuksien kuvaamiseen liukumoduli ja Poissonin luku. Dynamikan probleemassa tarvitaan näiden lisäksi vielä materiaalivaimennus ja tiheys. Ongelmallisimpia näistä ovat liukumoduli ja materiaalivaimennus, sillä niiden valinta määräää suurelta osin lineaarisen teorian soveltuuden tehtävän ratkaisuun.

Poissonin luvusta voidaan todeta, että sen arvoon vaikuttaa merkittävästi pohjavesi. Kyllästyneessä maaperässä luvun arvo on 0,5. Pohjavesi vaikuttaa lisäksi maaperän tiheyteen ja puristusaallon etenemisnopeuteen. Sen vaikutukset ovat sen sijaan vähäiset leikkausmodulin arvoon ja leikkausaallon etenemisnopeuteen.

Kuvaan 1 on koottu kolme lähteessä [1] esitettyä kuvaaa, joissa on esitetty liukumodulin ja materiaalivaimennuksen muuttumista liukuman amplitudin funktiona. Kuvista kolmas kuvaavat koneperustusten maaperään tavallisesti aiheuttamia muodonmuutoksia. Kuvassa $\bar{\gamma}_m$ on liukuma-amplitudi, D on vaimennussuhde, G sekanttiliukumoduli ja G_0 tangenttiliukumoduli. Kuvassa viitataan kahteen yhtälöön, joiden arvoja on verrattu koetuloksiin. Käytetty sekanti- ja tangenttiliukumodulin suhdetta kuvaava yhtälö on [1]

$$G/G_0 = 1/(1+\bar{\gamma}/\gamma_r) \quad (1)$$

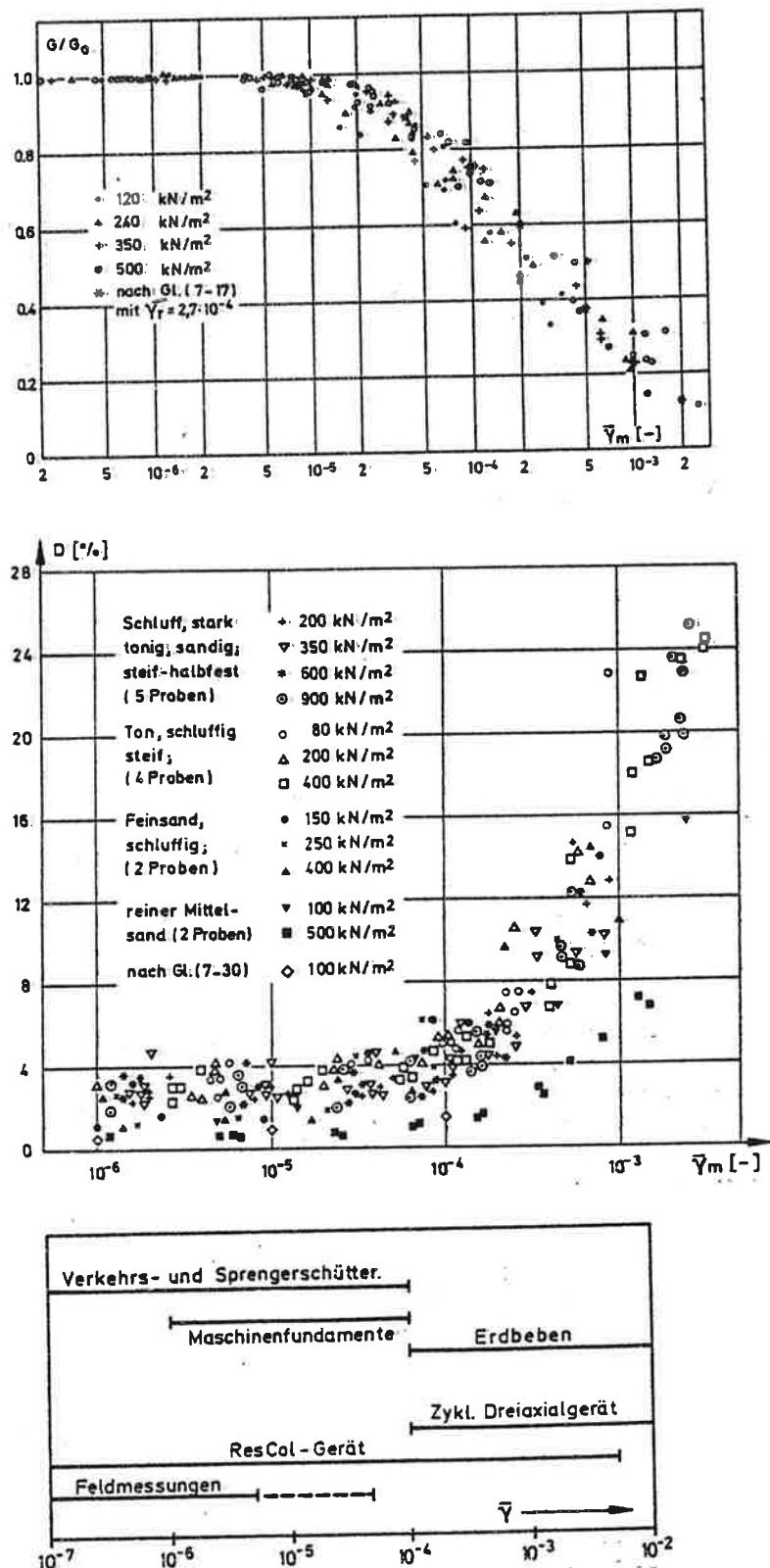
ja vaimennussuhteeseen arvot on laskettu yhtälöstä [1]

$$D=98,5 \cdot (\bar{\gamma})^{0,2} / \sqrt{\sigma_0} \quad (2)$$

missä σ_0 on staattinen paine.

Kuvasta havaitaan vaimennussuhteeseen pysyvän lähes vakiona muodonmuutostasoilla, jotka ovat pienempiä kuin 10^{-4} . Tätä suuremmilla muodonmuutoksilla vaimennussuhde kasvaa selvästi muodonmuutoksen funktiona. Pienillä muodonmuutosamplitudeilla ($<10^{-5}$) sekanti- ja tangenttiliukumoduli yhtyvät, mutta amplitudin kasvaessa sekanttimoduli pienenee selvästi. Tulosten mukaan muodonmuutosamplitudia 10^{-4} vastaava pienennys on noin 40-60% ja amplitudiin 10^{-3} liittyvä pienennys on jo 70-80%.

Koneperustusten maaperään synnyttämät liukuma-amplitudit ovat alueessa $10^{-6}-10^{-4}$. Vertailemalla sekanttimodulin ja vaimennussuhteeseen muuttumista voidaan päätellä, että arvoa 10^{-5} pienemmällä muodonmuutoksilla lineaarisen teorian soveltaminen on perusteltua. Alue $10^{-5}-10^{-4}$ on ongelmallinen, koska esitettyjen tulosten valossa sekanttimodulin arvo oleellisesti pienee, mutta vaimennus ei vastaavasti lisääny. Tällöin väsytykskuormitettussa systeemissä energian sitoutumista ei pystytä lineaarisella teorialla kuvaamaan oikein. Kuva 1 tukee useasti esitettyä toteamusta, ettei maaperän materiaalivaimennus ole merkittävä koneperustusten yhteydessä.



Kuva 1. Koetuloksia maaperän liukumodulin ja materiaalivaimennuksen muuttumisesta leikkausmuodonmuutoksen amplitudin funktiona sekä koneperustuksiin tavallisesti liittyvä maaperän leikkausmuodonmuutosalue [1].

2.3 Maaperän jäykkyys- ja vaimennusominaisuksien kuvaaminen

Maaperän jäykyyttä ja vaimennusta määritetään maaperä ajatellaan kuormitetuksi pohjapinnaltaan perustuksen mukaisella massattomalla kappaleella. Kappaletta kuormitetaan jäykän kappaleen eri vapausasteiden suunnissa vaikuttavilla harmonisilla herätteillä. Saatavan perustuksen siirtymävastefunktion herätteen kanssa samassa vaiheessa oleva osa kuvaaa maaperän jäykyyttä ja eri vaiheessa oleva osa säteilyvaimennusta eli geometristä vaimennusta.

Säteilyvaimennus kuvailee energian leviämistä perustuksesta ympäristöön. Sen huomioon ottaminen perustuksen analysoinnissa on tärkeää, koska muuten laskentamalli on suljettu systeemi, josta energia poistuu vain materiaalivaimennuksen muodossa. Muuttamalla harmonisen herätteen taajuutta perustuksen jäykkyys- ja vaimennusominaisuudet saadaan vapausastekohdaisesti määriteltyä herätetaajuuden funktiona. Kirjallisuudessa näitä funktioita kutsutaan impedanssifunktioiksi. Maaperän materiaalivaimennusta ei yleensä impedanssifunktioita laskettaessa oteta huomioon. Koneperustusten yhteydessä materiaalivaimennus on tavallisesti merkittävästi säteilyvaimennusta pienempi. Tarvittaessa materiaalivaimennus voidaan liittää impedanssifunktioihin käytämällä ns. Lysmerin analogiaa [3].

Impedanssifunktio voidaan määritellä myös maaperän kompleksiarvoisena jäykkyytenä. Jos harmoninen kuorma $P(t)$ on määritelty yhtälöllä

$$P(t) = P_0 e^{i \omega t} \quad (3)$$

saadaan sitä vastaavalle maaperän pinnan siirtymälle perustuksen kohdalla $w(t)$ lauseke

$$w(t) = w_0 e^{i \omega t} \quad (4)$$

Yhtälöissä P_0 ja w_0 ovat kuorman ja siirtymän amplituidien arvoja.

Impedanssifunktion \bar{K} määrittely-yhtälöksi saadaan

$$\bar{K} = P_0 / w_0 \quad (5)$$

Useasti impedanssifunktioille käytetään esitysmuotoa

$$\bar{K} = K(k(a_0) + i a_0 c(a_0)) \quad (6)$$

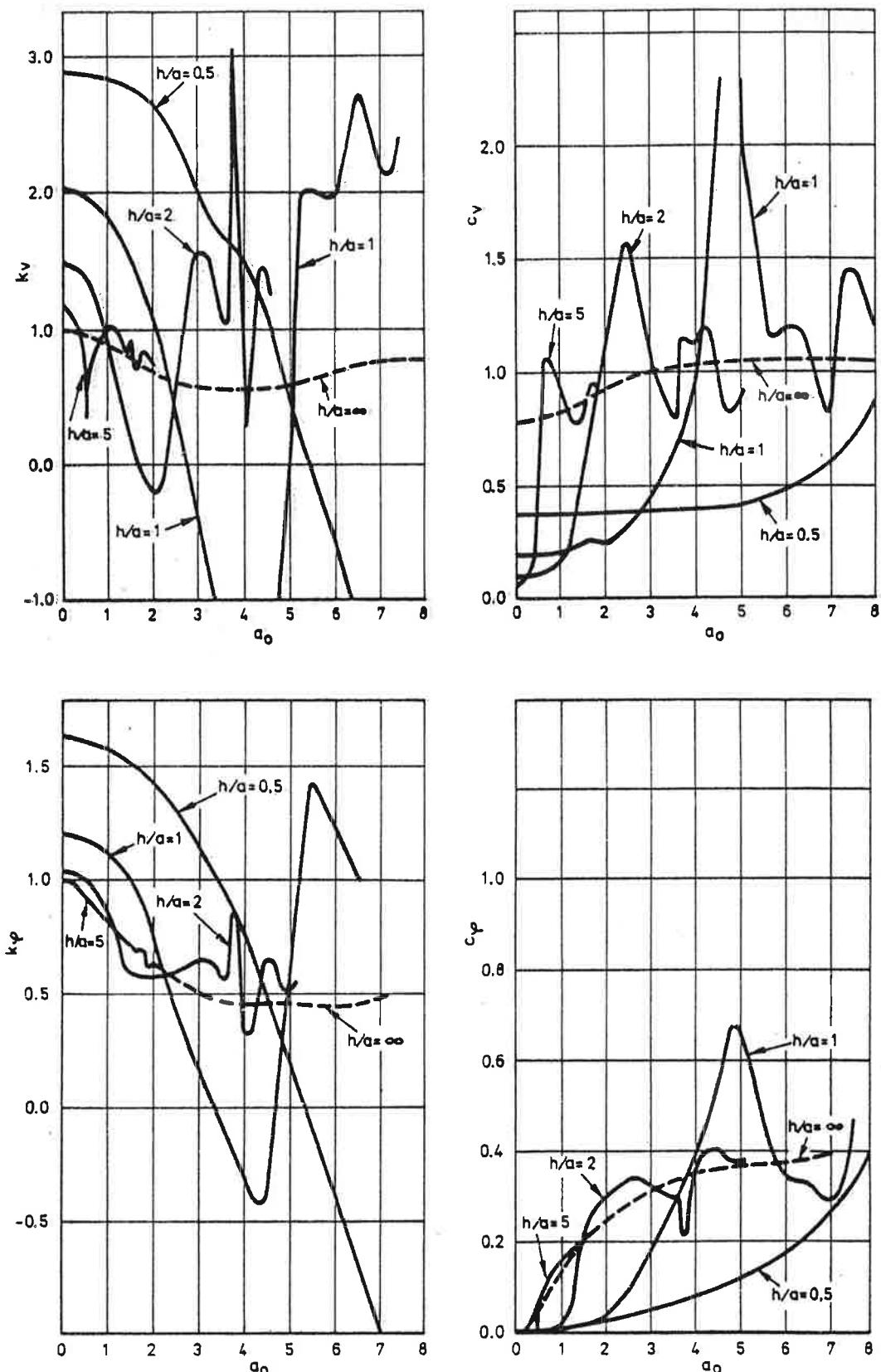
missä K on maaperän jäykkyys staattisesti kuormitettuna, i on imaginääriyksikkö ja $k(a_0)$ sekä $c(a_0)$ ovat dimensiottomia a_0 :n funktioita. a_0 on dimensioton taajuussuhde, joka kuvaa perustuksen pohjapinnan suhdetta maaperään syntyvään leikkausaallon aallonpietuuteen. Sen määrittely-yhtälö on

$$a_0 = \omega R / v_s \quad (7)$$

Yhtälössä ω on herätetaajuus, R pohjapintaa kuvaava pituus (esim. ympyrän säde) ja v_s maaperän leikkausaallon etenemisnopeus.

Funktioita $k(a_0)$ ja $c(a_0)$ on laskettu lukuisille erilaisille maaperävaihtoehtoille ja perustusratkaisuille. Säteilyvaimennukseen vaikuttaa esimerkiksi maaperän kerroksellisuus voimakkaasti. Impedanssifunktioita on laskettu myös upotetuille perustuksille ja paaluperustuksille. Eniten on tutkittu kuitenkin maanpinnalla sijaitsevaa ympyrän muotoista perustusta. Tämän johdosta geometrialtaan monimutkaisten perustusten pohjapinnat usein kuvataan ekvivalentilla ympyräpohjapinnalla.

Kuvassa 2 on esitetty impedanssifunktiot kerroksellisen maaperän pinnalla sijaitsevan ympyräperustuksen kiertymälle ja vertikaali-siirtymälle [4]. Maaperä koostuu kahdesta vaakasuorasta kerroksesta, joista päällimmäisen paksuus on h ja toinen jäykempi kerros on äärettömän paksu. Ensimmäisen kerroksen Poissonin luku on 0,3 ja toisen 0,25. Kerrostien leikkausaallon etenemisnopeuksien suhde on 0,4 ja tiheyksien suhde on 0,85. Kuvissa on esitetty tulokset ympyrän säteen a ja kerrospaksuuden h erilaisille



Kuva 2. Ympyräperustukselle lasketut impedanssifunktiot kiertymälle ja vertikaalisiirtymälle. Maaperän on oletettu muodostuvan kahdesta kerroksesta [4].

suhteille. Tekijä a₀ on laskettu käytämällä päällimmäisen kerroksen materiaaliominaisuksia. Kuvissa on katkoviivalla esitetty elastiseen puoliavaruuteen liittyvät tulokset.

Kerroksellisuus vaikuttaa selvästi impedansifunktioihin. Erityisesti se pienentää säteilyvaimennusta alhaisilla taajuksilla. Epähomogenisuus, jonka aiheuttaa esimerkiksi tiiviyden kasvu syvyyden funktiona, ilmenee myös impedansifunktioissa poikkeavuutena elastiselle puoliavaruudelle saaduista tuloksista. Tämä koskee erityisesti säteilyvaimennusta, joka on mittauksissa todettu vertikaalisuunnalle olevan vain puolet elastisen puoliavaruuden teorialla saadusta arvosta [5]. Perustuksia mitoitettaessa olisikin käytettävä epäselvissä tapauksissa riittävää varmuuskerrointa säteilyvaimennukselle. Nykyisellä tiedon tasolla sopiva arvo voisi olla 2-3.

3 Laskentamalli

Perustuksen dynaamista käyttäytymistä arvioitaessa oletetaan massiivinen koneperustus tavallisesti jäykäksi kappaleeksi. Kuormitukset saadaan joko laitetoimittajalta tai ne arvioidaan normien perusteella. Maaperä kuvataan herätetaajuuksiin liittyyvillä jousi- ja vaimennuselementeillä, jotka vaikuttavat perustuksen pohjatasolla. Tarkastelu voidaan usein suorittaa jokaiselle jäykänkap paleen vapausasteelle erikseen. Mikäli perustuksen ja koneen yhteen painopiste on huomattavasti perustuksen pohjatason yläpuolella, tarkastellaan myös horisonttaalisiirtymän ja perustuksen kiertymän yhdistetty väärähtely.

4 Esimerkki

Sovellutuksena tarkastellaan kahta viimeaikaista kaasuturbiini-perustusta. Perustusten erona on, että toinen on rakennettu kalliolle ja toinen on perustettu kovalle moreenille. Asennetut koneet ovat samanlaiset. Niiden sähköteho on 40 MW. Turbiinin

käyntitaajuus on 85 Hz, massa 140 t ja pyörivien osien paino 12,3 t. Generaattorin käyntitaajuus on 50 Hz, massa 79 t ja pyörivien osien paino 23,6 t. Kummankin perustuksen dimensiot ovat 21*4*1,3 m ja perustuksen massa on 274 t.

Tarkastellut dynaamiset kuormat olivat normaalilin käytönaikainen kuorma ja turbiinin siiven irtoamiseen liittyvä onnettomuustilan. Käytönaikainen kuorma arvioitiin DIN 4027 mukaan. Käyntitaajuuskolla esintyviksi kuorman maksimiamplitudeiksi saatiin turbiinin osalle 105 kN ja generaattorin osalle 118 kN. Turbiinin akseli on 3,5 m ja generaattorin akseli 2,85 m perustuksen pohjapinnan yläpuolella. Turbiinin siiven irtoaminen analysoitiin harmonisena herätteenä, jossa kuorman amplitudi $A(f)$ muuttuu taajuuden funktiona seuraavasti

$$A(f) = 800 * (f/85)^2 \text{ kN} \quad (8)$$

Tarkastelu onnettomusuormalle suoritettiin moreenilla sijaitsevalle perustukselle taajuuksilla 22,5 Hz ja 12 Hz. Taajuudet edustavat vertikaalisuunnan ja kiertymän resonanssitaajuuksia.

Maapohjan jäykkyys- ja vaimennusominaisuksien laskemiseksi määrittiin pohjapintaa vastaavien ekvivalenttien ympyröiden säteet. Vertikaaliliikkeelle säteen arvoksi saatiin 5,17 m ja kiertymälle 3,46 m. Moreenimaaperän kimmokerroin oli 600 MPa, tiheys 2280 kg/m^3 ja Poissonin luku 0,19. Leikkausaallon nopeus oli näin ollen 333 m/s. Kallion kimmokerroin oli vastaavasti 68000 MPa, tiheys 2670 kg/m^3 ja Poissonin luku 0,15. Leikkausaallon nopeudeksi tuli 3337 m/s. Laskuissa käytettiin kuvassa 3 esitettyjä elastiselle puoliavaruudelle saatuja jäykkyys- ja vaimennusarvoja. Käytetyt vaimennusarvot on saatu jakamalla kahdella teorian mukainen arvo.

Kuvassa 4 on esitetty vapausasteisiin liittyvät vaimennussuhteet. Varsinkin kiertyvävapausasteen säteilyvaimennus on selvästi riippuvainen materiaaliominaisuksista ja taajuudesta. Saadut koneen ja perustuksen painopisteen vertikaalisiirtymät ja kiertymät

Taajuus	Maalaji	Kiertymä			Vertikaalisiirtymä		
		a_0	k_0	c_0	a_e	k_e	c_e
85 Hz	Kallio	0,56	0,93	0,03	0,83	0,87	0,42
	Moreeni	5,5	0,45	0,19	8	0,83	0,50
50 Hz	Kallio	0,33	1,00	0	0,49	0,96	0,40
	Moreeni	3,27	0,48	0,16	4,88	0,74	0,50
22,5 Hz	Moreeni	1,49	0,70	0,10	2,19	0,73	0,49
12 Hz	Moreeni	0,79	0,85	0,05	1,17	0,87	0,44

Kuva 3. Normaalilanteen kuormitukseen liittyviä maaperäparametrien arvoja.

Vapausaste	Kallio		Moreeni			
	50 Hz	85 Hz	50 Hz	85 Hz	22.5 Hz	12 Hz
Siirtymä	42 %	38 %	51 %	47 %	51 %	42 %
Kiertymä	2 %	-	13 %	16 %	7 %	3 %

Kuva 4. Vaimennus ilmoitettuna prosentteina kriittisestä vaimennuksesta.

Vapausaste	Kallio		Moreeni		Onnettomuukskuorma Moreeni	
	50 Hz	85 Hz	50 Hz	85 Hz	22.5 Hz	12 Hz
Siirtymä 10^{-6} m	0,18	0,19	2,54	0,76	6,48	3,69
Kiertymä 10^{-6}	0,03	0,06	0,45	0,22	2,77	2,09

Kuva 5. Painopisteiden vertikaalisiirtymä ja kiertymä perustuksen pituusakselin ympäri.

Pituusakselin ympäri on esitetty kuvassa 5. Arvoista nähdään kalliolle rakennetun perustuksen olevan tyypillinen ylösviritetty systeemi, jonka siirtymätila määräytyy suoraan jäykkyysarvoista. Perustuksen massiivisuudella ei tällöin saavuteta siirtymien

kannalta mitään etua. Moreenille rakennettu perustus on sitä vastoin käyttötilan suhteen alasviritetty systeemi, jolloin perustuksen massa vaikuttaa merkittävästi systeemin liiketilaan. Alasviritettyt maanvaraiset perustukset on syytä tarkastella aina dynaamisena systeeminä.

LÄHTEET

- [1] Bodendynamik. Haupt W. (Hrsg.), Vieweg, 1986.
- [2] Analysis of machine foundation vibrations. Gazeta G., Soil dynamics and earthquake engineering, 1983.
- [3] Foundation vibrations with soil damping. Lysmer J., Civil engineering and nuclear power, ASCE, 1980.
- [4] Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium, Luco J.E., Nuclear engineering and design, 1974.
- [5] State-of-the-art in analysis and design of machine foundations, Novak M., Soil-structure interaction ed. Cakmak, Elsevier, 1987.

ORTHOGONALITY RELATION FOR CONTINUOUS SYSTEMS CARRYING DYNAMIC ELEMENTS WITH
DISCRETE DEGREES OF FREEDOM

R.K. Räty

Institute of Mechanics, Helsinki University of Technology,
SF-02150 Espoo, Finland

ABSTRACT

The vibrations of a general one-dimensional conservative linear multi-field system, carrying dynamic elements possessing discrete degrees of freedom, are considered. The starting point of the study is the Lagrangian of the system and the extended Hamilton's principle. The equations of motion and a general orthogonality condition for the eigenfunctions of the system are derived.

1 INTRODUCTION

In the dynamic analysis of continuous physical systems the object is often to determine the forced vibrations of the system. This can usually be accomplished by expanding the solution in terms of the eigenfunctions of the free vibration problem. In order to get an exact expression for the expansion coefficients one has to resort to the orthogonality condition of the eigenfunctions, if available.

If the continuous system carries discrete dynamic elements (e.g. rigid bodies), the eigenfunctions of the field coordinates are no more orthogonal in the traditional Sturm-Liouville sense. The special case of vibrating beams carrying concentrated masses has been treated by several authors [1-6]. The associated orthogonality condition has been derived by the standard procedure of integration by parts and use of the boundary conditions. However, the generalized orthogonality of the eigenfunctions can be established very elegantly by the use of variational techniques.

In this paper the vibrations of a continuous one-dimensional conservative linear multi-field system, carrying dynamic elements possessing discrete degrees of freedom, are studied starting from the Lagrangian of the system and the extended Hamilton's principle. The equations of motion and the generalized orthogonality condition will be derived.

2 THE EQUATIONS OF MOTION

The classical Sturm-Liouville eigenvalue problem consists of the differential equation

$$\sum_{v=0}^n (-1)^v [a_v(x)y^{(v)}(x)]^{(v)} = \lambda p(x)y(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (1)$$

subject to the boundary conditions

$$\sum_{v=0}^{2n-1} [\alpha_{\mu v} y^{(v)}(a) + \beta_{\mu v} y^{(v)}(b)] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n). \quad (2)$$

The eigenvalue parameter λ does not appear in the boundary conditions. The separation of variables in a partial differential equation frequently leads to equation (1) and the parameter λ may appear e.g. due to time differentiation in the original equation. The main results [7, 8] of the self adjoint, full-definite Sturm-Liouville eigenvalue problem are the orthogonality and completeness of the eigenfunctions $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$), i.e.

$$\int_a^b p(x)y_i(x)y_j(x)dx = 0 \quad \text{for } i \neq j \quad (3)$$

and for a $2n$ times continuously differentiable function $u(x)$ satisfying the boundary conditions

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i(x), \quad (4)$$

where

$$c_i = \int_a^b p(x)u(x)y_i(x)dx. \quad (5)$$

If the eigenvalue parameter λ appears in the boundary conditions (2), the above results are no longer valid. This is the case, for example, when one writes Newton's equations of motion for a continuous system carrying discrete dynamic elements at its ends. The eigenvalues and eigenfunctions of the free system can still be solved easily with conventional methods, but the lack of an orthogonality condition causes difficulties to the forced vibration problem. In the following the equations of motion of a general continuous system with dynamic elements are formed. In the next section a generalized orthogonality relation for the linear conservative case is derived.

Let us consider a continuous one-dimensional system in the range $a \leq x \leq b$ carrying discrete dynamic elements. Let us suppose that the continuous part of the system comprises N fields $y_1(x,t), \dots, y_N(x,t)$ contributing to the Lagrangian by the Lagrangian density \mathcal{L} . Connected to the system at points x_i ($i = 1, 2, \dots, P$) there are discrete elements with Lagrangians L^i . The Lagrangian function of the whole system is of the form

$$L = \int_a^b \mathcal{L} dx + \sum_{i=1}^P L^i, \quad (6)$$

where

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(y_r, y'_r, \dots, y_r^{(n_r)}, \dot{y}_r, \dot{y}'_r, \dots, \dot{y}_r^{(n_r)}, x, t) \quad (7)$$

and

$$\begin{aligned} L^i &= L^i(y_{ir}, y'_{ir}, \dots, y_{ir}^{(n_r-1)}, \dot{y}_{ir}, \dot{y}'_{ir}, \dots, \dot{y}_{ir}^{(n_r-1)}, \\ &x_{ir}^0, x_{ir}^1, \dots, x_{ir}^{n_r-1}, \dot{x}_{ir}^0, \dot{x}_{ir}^1, \dots, \dot{x}_{ir}^{n_r-1}) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, P). \end{aligned} \quad (8)$$

In equation (8) the abbreviation $y_r(x_i, t) = y_{ir}$ has been used. The notation in equation (7) means that the Lagrangian density contains all the fields y_r , the time derivatives \dot{y}_r and their spatial derivatives up to order n_r ($r = 1, 2, \dots, N$). The functions L^i contain the corresponding quantities evaluated at points x_i up to order n_r-1 and associated with these the discrete degrees of freedom x_{ir}^k ($k = 0, 1, \dots, n_r-1$) of the dynamic elements and their

time derivatives. Because the spatial derivatives are restricted to order $n_r - 1$, the dynamic elements affect the continuum part of the system at points x_i only through essential boundary conditions [7] (see equation (20)).

Let $q_r(x, t)$ and $Q_{ir}^k(t)$ be the generalized load and the generalized force corresponding to the field $y_r(x, t)$ and the coordinate $x_{ir}^k(t)$, respectively. The expression for the corresponding virtual work is

$$\overline{\delta W} = \sum_{r=1}^N \int_a^b q_r \delta y_r dx + \sum_{i=1}^P \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^{n_r-1} Q_{ir}^k \delta x_{ir}^k . \quad (9)$$

According to the extended Hamilton's principle the path of the motion satisfies for fixed instants of time t_1 and t_2

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \overline{\delta W} dt = 0 \quad (10)$$

for all admissible virtual displacements δy_r and δx_{ir}^k vanishing at times t_1 and t_2 , i.e.

$$\delta y_r(x, t_i) \equiv 0, \quad \delta x_{ir}^k(t_i) = 0 \quad (i = 1, 2) . \quad (11)$$

In the following the notations

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_r^{(k)}} \right] = \mathcal{L}_{y_r^{(k)}}^{(\ell)} \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_r} \right) = \dot{\mathcal{L}}_{\dot{y}_r} \quad (12)$$

and analogous notations for L^i are used. The space and time integration ranges will be denoted by R and τ . The first variation in equation (10) is

$$\begin{aligned} \delta \int_{\tau} L dt &= \int_{\tau} \int_R \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^{n_r} [\mathcal{L}_{y_r^{(k)}} \delta y_r^{(k)} + \mathcal{L}_{\dot{y}_r^{(k)}} \delta \dot{y}_r^{(k)}] dx dt + \\ &+ \sum_{i=1}^P \int_{\tau} \sum_{r=1}^N \sum_{k=0}^{n_r-1} [L_{y_{ir}^{(k)}}^i \delta y_{ir}^{(k)} + L_{\dot{y}_{ir}^{(k)}}^i \delta \dot{y}_{ir}^{(k)} + \\ &+ L_{x_{ir}^k}^i \delta x_{ir}^k + L_{\dot{x}_{ir}^k}^i \delta \dot{x}_{ir}^k] dt . \end{aligned} \quad (13)$$

Because the dynamic elements affect the continuous part of the system only through essential boundary conditions, the functions $y_r^{(k)}(x,t)$ and consequently the admissible virtual displacements $\delta y_r^{(k)}$ for $k = 0, 1, \dots, n_r - 1$ are assumed to be continuous at points x_i , but in the higher derivatives there can be discontinuities¹. So the space integral in equation (13) must be integrated piecewise. It can be assumed that $x_1 = a$ and $x_p = b$, because the case of no dynamic elements at points a or b can be simply achieved by setting L^1 or L^p to zero, respectively. Now integration by parts gives

$$\int_R \sum_{k=0}^{n_r} \mathcal{L}_{y_r^{(k)}} \delta y_r^{(k)} dx = \sum_{i=1}^p \sum_{k=0}^{n_r-1} \sum_{\ell=0}^{n_r-k-1} (-1)^\ell [\mathcal{L}_{y_{ir+}}^{(\ell)} \mathcal{L}_{y_{ir-}}^{(\ell+k+1)} + \\ - \mathcal{L}_{y_{ir+}}^{(\ell)} \mathcal{L}_{y_{ir-}}^{(\ell+k+1)}] \delta y_{ir}^{(k)} + \sum_{i=1}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{\ell=0}^{n_r} (-1)^\ell \mathcal{L}_{y_r}^{(\ell)} \delta y_r^{(k)} dx , \quad (14)$$

where the notation

$$[\mathcal{L}_{y_r}^{(\ell)} \mathcal{L}_{y_{ir\pm}}^{(\ell+k+1)}]_{x=x_i^\pm} = \mathcal{L}_{y_{ir\pm}}^{(\ell+k+1)} \quad (15)$$

has been used and by definition the quantities (15) at x_1^- and x_p^+ outside the range $[a,b]$ are zero. Further

$$\int_\tau \mathcal{L}_{\dot{y}_r^{(k)}} \delta \dot{y}_r^{(k)} dt = - \int_\tau \mathcal{L}_{\ddot{y}_r^{(k)}} \delta y_r^{(k)} dt , \quad (16)$$

because the variations $\delta y_r^{(k)}$ vanish at times t_1 and t_2 by virtue of equations (11) and similarly for the other velocity variations. Using equation (16) in (13) the integral

$$\int_R \sum_{k=0}^{n_r} \mathcal{L}_{\dot{y}_r^{(k)}} \delta \dot{y}_r^{(k)} dx \quad (17)$$

appears. For the integral (17) an expression similar to (14) with the dots properly inserted can immediately be derived. With the aid of above expressions terms containing δy_r , $\delta y_{ir}^{(k)}$ and δx_{ir}^k in equation (13) can be grouped together. Now by the extended Hamilton's principle (10) the equations of

¹cf. for example with the case of a beam carrying rigid bodies

motion can be written

$$\sum_{\ell=0}^{n_r} (-1)^\ell [\dot{\mathcal{L}}_{y_r}^{(\ell)} - \dot{\mathcal{L}}_{\dot{y}_r}^{(\ell)}] + q_r = 0 \quad (x_i < x < x_{i+1}) \quad (18)$$

$$\frac{L^i}{x_{ir}} - \frac{\dot{L}^i}{\dot{x}_{ir}} + Q_{ir}^k = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{n_r-k-1} (-1)^\ell \{ & [\dot{\mathcal{L}}_{y_{ir-}}^{(\ell)} - \dot{\mathcal{L}}_{y_{ir+}}^{(\ell)}] + \\ & - [\dot{\mathcal{L}}_{\dot{y}_{ir-}}^{(\ell)} - \dot{\mathcal{L}}_{\dot{y}_{ir+}}^{(\ell)}] \} + \frac{L^i}{y_{ir}} - \frac{\dot{L}^i}{\dot{y}_{ir}} = 0 . \end{aligned} \quad (20)$$

The ranges of the indices are $i = 1, \dots, p-1$ and $r = 1, \dots, N$ in equation (18) and $i = 1, \dots, p$, $r = 1, \dots, N$ and $k = 0, \dots, n_r-1$ in equations (19) and (20). Partial differential equations (18) and equations (19) are the equations of motion for the fields $y_r(x, t)$ and the discrete dynamic elements, respectively. Equations (20) express the coupling between the fields and the discrete elements.

3 THE GENERAL ORTHOGONALITY CONDITION

Let us now consider the linear conservative case. The Lagrangian density \mathcal{L} and the Lagrangians L^i are of the general form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{j=0}^{n_r} \sum_{k=0}^{n_s} [p_{rsjk} \dot{y}_r^{(j)} \dot{y}_s^{(k)} - a_{rsjk} y_r^{(j)} y_s^{(k)}] \quad (21)$$

and

$$L^i = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^{2n_r} \sum_{k=1}^{2n_s} [b_{rsjk}^i \phi_{ir}^{(j)} \phi_{is}^{(k)} - c_{rsjk}^i \phi_{ir}^{(j)} \phi_{is}^{(k)}] . \quad (22)$$

In equation (22) the notation

$$\begin{aligned}\phi_{ir}^j &= y_{ir}^{(j-1)} \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n_r \\ \phi_{ir}^j &= x_{ir}^{j-n_r-1} \quad \text{for } j = n_r+1, \dots, 2n_r\end{aligned}\tag{23}$$

has been used. Because the kinetic and potential energies are quadratic, the coefficients in (21) and (22) can be taken to be symmetric, that is

$$p_{rsjk} = p_{srkj}, \quad a_{rsjk} = a_{srkj}\tag{24}$$

$$b_{rsjk}^i = b_{srkj}^i, \quad c_{rsjk}^i = c_{srkj}^i.\tag{25}$$

The quantities in (24) may be functions of the space variable x and those in (25) are constants. If particularly p_{rsjk} and a_{rsjk} are diagonal (proportional to $\delta_{rs}\delta_{jk}$), all quantities b_{rsjk}^i and x_{ir}^k are zero and $P = 2$, the equations (18) and (20) lead to the Sturm-Liouville type eigenvalue problem.

With the aid of equation (16) and notation (23) the variation in equation (13) can be written

$$\begin{aligned}\delta \int_{\tau} L dt &= \int_{\tau} \int_R N \sum_{s=1}^{n_s} \sum_{k=0}^N [\mathcal{L}_s^{(k)} - \dot{\mathcal{L}}_s^{(k)}] \delta y_s^{(k)} dx dt + \\ &+ \sum_{i=1}^P \int_{\tau} N \sum_{s=1}^{2n_s} \sum_{k=1}^2 [L_{ik}^i - \dot{L}_{ik}^i] \delta \phi_{is}^k dt.\end{aligned}\tag{26}$$

Let $y_r(x, t)$, $x_{ir}^j(t)$ and $\hat{y}_r(x, t)$, $\hat{x}_{ir}^j(t)$ be two sets of solutions of the free vibration problem and the quantities ϕ_{ir}^j , $\hat{\phi}_{ir}^j$ be determined by equations (23), respectively. Let us carry out the variation (26) in the neighborhood of the former solution and let the variations be $\delta y_s = \varepsilon \hat{y}_s$, $\delta \phi_{is}^k = \varepsilon \hat{\phi}_{is}^k$ ($\varepsilon \ll 1$). These variations are admissible and can be thought to approach the value zero in the infinitesimal vicinity of the time instants t_1 and t_2 without any effect on the results. Now Hamilton's principle gives

$$\begin{aligned}\int_{\tau} \int_R N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^{n_r} \sum_{j=0}^{n_s} \sum_{k=0}^N [p_{rsjk} \ddot{y}_r^{(j)} \hat{y}_s^{(k)} + a_{rsjk} y_r^{(j)} \hat{y}_s^{(k)}] dx dt + \\ + \sum_{i=1}^P \int_{\tau} N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^{2n_s} \sum_{j=1}^{2n_r} \sum_{k=1}^2 [b_{rsjk}^i \phi_{ir}^j \hat{\phi}_{is}^k + c_{rsjk}^i \phi_{ir}^j \hat{\phi}_{is}^k] dt = 0.\end{aligned}\tag{27}$$

Changing the roles of the solutions in (27) and subtracting the resulting equation from equation (27) leads by virtue of the symmetry conditions (24) and (25) to

$$\int_{\tau} \left\{ \int_R \sum_{rsjk} p_{rsjk} [\ddot{y}_r^{(j)} \dot{y}_s^{(k)} - \ddot{\dot{y}}_r^{(j)} y_s^{(k)}] dx + \right. \\ \left. + \sum_{irsjk} b_{rsjk}^i [\ddot{\phi}_{ir}^j \dot{\phi}_{is}^k - \ddot{\dot{\phi}}_{ir}^j \phi_{is}^k] \right\} dt = 0 . \quad (28)$$

Because of the quadratic forms (21) and (22) the equations of motion (18), (19) and (20) for free vibrations are linear and homogeneous. Thus the separation of variables leads to harmonic time dependence and the eigenfunctions can be written

$$y_r(x, t) = Y_r(x) T(t) , \quad \phi_{ir}^j = \Phi_{ir}^j T(t) \quad (29)$$

with

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 . \quad (30)$$

Substitution of (29) and the corresponding expressions with caps into (28) gives, after dividing by $(\hat{\omega}^2 - \omega^2) \int_{\tau} T \dot{T} dt$, for $\omega \neq \hat{\omega}$

$$\int_R \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{j=0}^{n_r} \sum_{k=0}^{n_s} p_{rsjk} Y_r^{(j)} \dot{Y}_s^{(k)} dx + \\ + \sum_{i=1}^P \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^{2n_r} \sum_{k=1}^{2n_s} b_{rsjk}^i \Phi_{ir}^j \dot{\Phi}_{is}^k = 0 . \quad (31)$$

In the degenerate case $\omega = \hat{\omega}$ linear combinations of the two solutions are also solutions with the same eigenvalue. Proper linear combinations may thus be used to ensure the orthogonality in this case also. Equation (31) expresses the general orthogonality condition for the eigenfunctions of the system specified by the equations (21) and (22). If there appear no time derivatives in the functions L^i so that the coefficients b_{rsjk}^i are zero, equation (31) reduces to the Sturm-Liouville type (cf. with (3)).

Finally an alternative form for the orthogonality condition (31) will be stated. Equation (27) gives for the eigenfunctions after division by $\int_{\tau} T \dot{T} dt$

$$\int_R \sum_{rsjk} a_{rsjk} Y_r^{(j)} \hat{Y}_s^{(k)} dx + \sum_{irsjk} c_{rsjk}^i \phi_{ir}^j \hat{\phi}_{is}^k = \\ = \omega^2 \left[\int_R \sum_{rsjk} p_{rsjk} Y_r^{(j)} \hat{Y}_s^{(k)} dx + \sum_{irsjk} b_{rsjk}^i \phi_{ir}^j \hat{\phi}_{is}^k \right]. \quad (32)$$

This leads to

$$\omega^2 = \frac{\int_R \sum_{rsjk} a_{rsjk} Y_r^{(j)} \hat{Y}_s^{(k)} dx + \sum_{irsjk} c_{rsjk}^i \phi_{ir}^j \hat{\phi}_{is}^k}{\int_R \sum_{rsjk} p_{rsjk} Y_r^{(j)} \hat{Y}_s^{(k)} dx + \sum_{irsjk} b_{rsjk}^i \phi_{ir}^j \hat{\phi}_{is}^k} \quad (33)$$

and on the basis of (31) to

$$\int_R \sum_{rsjk} a_{rsjk} Y_r^{(j)} \hat{Y}_s^{(k)} dx + \sum_{irsjk} c_{rsjk}^i \phi_{ir}^j \hat{\phi}_{is}^k = 0. \quad (34)$$

The summation limits above are the same as in equation (31).

Note that the form (31) is completely determined by the kinetic energy of the system. With the aid of this orthogonality condition the forced vibration problem can be reduced to a set of ordinary differential equations having a diagonal form and the integration constants corresponding to given initial conditions can be calculated.

ACKNOWLEDGMENTS

The author is grateful to Professor Matti A Ranta for advice and encouragement and to Marko Jorkama for discussions.

REFERENCES

- [1] Morgan, G.W., Some Remarks on a Class of Eigenvalue Problems with Special Boundary Conditions, Quart. Appl. Math., Vol. 11, 1953, pp. 157-165.

- [2] Pan, H.H., Transverse Vibration of an Euler Beam Carrying a System of Heavy Bodies, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, 1965, pp. 434-437.
- [3] Laura, P.A.A., Reyes, J.A., and Rossi, R.E., Analysis of a Cable-like System Suddenly Stopped at One End, Journal of Sound and Vibration, Vol. 37, 1974, pp. 195-204.
- [4] Timoshenko, S.P., Young, D.H., and Weaver, W., Jr., Vibration Problems in Engineering, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [5] Jacquot, R.G., On Vibration of Systems with Mixed Boundary Conditions, Journal of Sound and Vibration, Vol. 48, 1976, pp. 421-424.
- [6] Takahashi, K., Eigenvalue Problem of a Beam with a Mass and Spring at the End Subjected to an Axial Force, Journal of Sound and Vibration, Vol. 71, 1980, pp. 453-457.
- [7] Collatz, L., The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [8] Kneschke, A., Differentialgleichungen und Randwertprobleme (Band I), B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965.

NOTES ON THE APPLICATION OF THE LEAST SQUARES METHOD TO THE PURE CONVECTION EQUATION

Eero-Matti Salonen and Jouni Freund
Helsinki University of Technology

1 INTRODUCTION

The purpose of this paper is first to give a short account of the nature of the convection-diffusion equation. Thereafter the pure convection equation — a special case of the general convection-diffusion equation — is considered in more detail in connection with the least squares method.

1.1 Convection-diffusion equation

The well-known scalar convection-diffusion equation can be presented in the form

$$\Phi_{,t} + \nabla \cdot (\vec{u}\Phi) - \nabla \cdot (\vec{k} \cdot \nabla \Phi) + c\Phi - f = 0. \quad (1)$$

Here Φ is the unknown representing a concentration for example, \vec{u} is the given velocity field, \vec{k} the diffusivity tensor, c the absorption coefficient and f the source term. The nature of the above equation is described in more detail e.g. in [1] and the contents of this introductory section can also be more or less found in that reference. The notations to be used are roughly a mixture of those employed in [1] and [2]. By using the identity

$$\nabla \cdot (\vec{u}\Phi) = \vec{u} \cdot \nabla \Phi + (\nabla \cdot \vec{u})\Phi \quad (2)$$

equation (1) can be written in an alternative form

$$\Phi_{,t} + \vec{u} \cdot \nabla \Phi - \nabla \cdot (\vec{k} \cdot \nabla \Phi) + \gamma\Phi - f = 0 \quad (3)$$

where $\gamma = c + \nabla \cdot \vec{u}$ is a new absorption coefficient. For simplicity of presentation we shall consider only the steady situation ($\Phi_{,t} = 0$) with an incompressible velocity field ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) and with $c = 0$. Equation (3) now obtains the form

$$\vec{u} \cdot \nabla \Phi - \nabla \cdot (\vec{k} \cdot \nabla \Phi) - f = 0. \quad (4)$$

In two dimensions this can be written using Cartesian x,y -coordinates as follows

$$\begin{aligned} & u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \\ & - \frac{\partial}{\partial x} (k_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (k_{yx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \\ & - f = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

The first row gives the so called convection or advection term, the second row the diffusion term ($k_{xy} = k_{yx}$) and the third one the source term. If $\vec{k} \equiv \vec{0}$ ($\vec{u} \equiv \vec{0}$) the equation is called the pure convection equation (the pure diffusion equation).

1.2 Pure convection equation

The pure convection equation is here

$$\vec{u} \cdot \nabla \Phi - f = 0 \quad \vec{x} \in \Omega \quad (6)$$

or in the two-dimensional case

$$u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f = 0 \quad x, y \in \Omega. \quad (7)$$

Figure 1 shows a plane region Ω where the equation is assumed to be valid. It is easy to show that equation (6) obtains on each streamline the form

$$u \frac{d\Phi}{ds} - f = 0 \quad (8)$$

where u is the scalar flow velocity in the selected positive arclength s direction. Thus the pure convection equation is an ordinary first order differential equation on a streamline. One value of Φ must be given on each streamline to fix the solution. Usually this value is given on the so called inflow boundary Γ_- defined by

$$\Gamma_- = \{\vec{x} \in \Gamma : \vec{n} \cdot \vec{u} \leq 0\} \quad (9)$$

where Γ is the boundary of Ω and \vec{n} is the outward unit normal to Γ (Fig. 1). Thus the boundary condition connected with the pure convection equation is

$$\Phi - g = 0 \quad \vec{x} \in \Gamma_- \quad (10)$$

On the outflow boundary $\Gamma_+ = \Gamma \setminus \Gamma_-$ no boundary condition can be given.

On the basis of equation (8) we can say that in the pure convection equation effect or information travels only in the streamline direction. For example, if there is a discontinuity in the boundary data, it is propagated undiminished into Ω . This is easiest to see in the case when $f = 0$, as the value of Φ is then constant on each streamline. The pure convection equation is mathematically [1,p.168] a hyperbolic equation and the streamlines are characteristic curves.

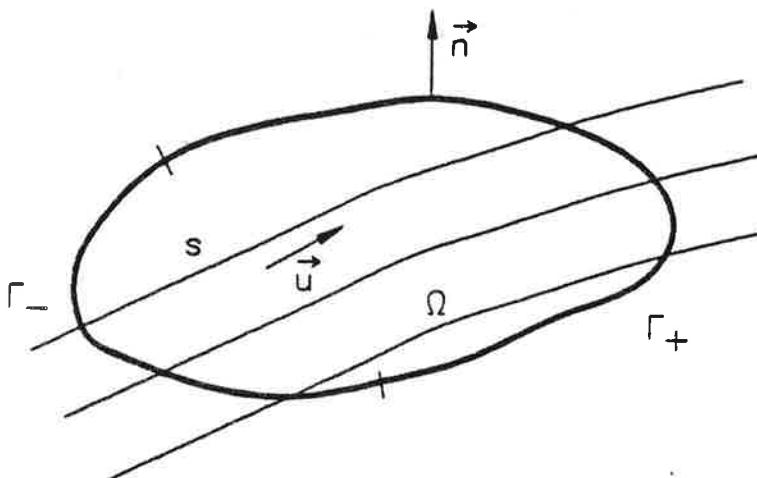


Figure 1. Some notations.

1.3 Pure diffusion equation

The pure diffusion equation is here

$$\nabla \cdot (\vec{k} \cdot \nabla \Phi) + f = 0 \quad \vec{x} \in \Omega \quad (11)$$

or in the two-dimensional case

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{yx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + f = 0 \quad x, y \in \Omega. \quad (12)$$

If the symmetric diffusivity matrix

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (13)$$

is positive definite, the equation is elliptic [3,p.355] and boundary conditions must be given everywhere on Γ . The standard conditions are ($\Gamma_g \cup \Gamma_h = \Gamma$)

$$\Phi - g = 0 \quad \vec{x} \in \Gamma_g, \quad (14)$$

and

$$\vec{n} \cdot (\vec{k} \cdot \nabla \Phi) - h = 0 \quad \vec{x} \in \Gamma_h \quad (15)$$

or in the two-dimensional case

$$n_x(k_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + n_y(k_{yx} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial \Phi}{\partial y}) - h = 0 \quad x, y \in \Gamma_h. \quad (16)$$

Heat conduction is probably the most familiar physical phenomenon obeying the above system. There Φ is the temperature, \vec{k} the conductivity tensor, $-\vec{k} \cdot \nabla \Phi$ the heat flux vector and f the heat source density. For physical reasons, $[k]$ is positive definite in heat conduction.

Equation system (11), (14) and (15) has a well-known variational principle. The corresponding functional is (written in the two-dimensional case)

$$\begin{aligned} \pi^d(\Phi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\}^T \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} f Q \, d\Omega - \int_{\Gamma_h} h \Phi \, d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

where the admissible Φ has to satisfy boundary condition (14). The discretization of the pure diffusion system is normally based on expression (17).

The pure convection equation is not self-adjoint and a classical variational principle to be used in its discretization is not available. However, the least squares method can be conveniently employed as the equation is of first order only and C^0 -continuity is thus enough for the trial functions. In the following we first try to illuminate the character of the least squares method in the continuum case. Then some numerical finite element results are given and ways to avoid crosswind diffusion are discussed.

2.1 Least squares functional

The least squares functional corresponding to equations (6) and (10) is (written in the two-dimensional case)

$$\pi^a(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha(u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f)^2 d\Omega \quad (18)$$

where α is a given non-negative weighting factor which may depend on position. The admissible Φ has to satisfy boundary condition (10). Expression (18) can be written alternatively as

$$\begin{aligned} \pi^a(\Phi) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \partial \Phi / \partial x \\ \partial \Phi / \partial y \end{Bmatrix}^T \alpha \begin{bmatrix} u_x u_x & u_x u_y \\ u_y u_x & u_y u_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \Phi / \partial x \\ \partial \Phi / \partial y \end{Bmatrix} d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} \alpha(u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}) f d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha f^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (19)$$

The Euler equation and the natural boundary condition corresponding to functional (18) or (19) are obtained by the standard way. It is found that the use of the least squares method is equivalent to the system

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \alpha(u_x u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_x u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} \alpha(u_y u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_y u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \\ & - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha u_x f) - \frac{\partial}{\partial y} (\alpha u_y f) = 0 \quad x, y \in \Omega, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Phi - g = 0 \quad x, y \in \Gamma_-, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & n_x \alpha(u_x u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_x u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + n_y \alpha(u_y u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_y u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \\ & - n_x \alpha u_x f + n_y \alpha u_y f = 0 \quad x, y \in \Gamma_+. \end{aligned} \quad (22)$$

If a more concise notation is used, we obtain

$$\nabla \cdot [\alpha \vec{u} (L\Phi - f)] = 0 \quad \vec{x} \in \Omega, \quad (23)$$

$$\Phi - g = 0 \quad \vec{x} \in \Gamma_-, \quad (24)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} \alpha (L\Phi - f) = 0 \quad \vec{x} \in \Gamma_+ \quad (25)$$

where the pure convection equation is written as $L\Phi - f = 0$.

It is most interesting to compare equations (20), (21) and (22) with (12), (14) and (16). Paradoxically, application of the least squares method clearly means that instead of a pure convection system now a pure diffusion one is solved! However, the least squares version is found to mimic the original pure convection system in an admirable way. The diffusivity matrix

$$[k] = \alpha \begin{bmatrix} u_x u_x & u_x u_y \\ u_y u_x & u_y u_y \end{bmatrix} \quad (26)$$

is symmetric but now only positive semidefinite. According to [3,p.355], the field equation (20) is then parabolic. If we represent the diffusivity matrix in a rotated coordinate system with the first coordinate axis aligned along the local velocity direction there is obtained

$$[k] = \alpha \begin{bmatrix} u^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

It is convenient to think again about heat conduction. We have conduction just in the local velocity direction as the conductivity is zero in the perpendicular direction. Thus information travels still only along the streamlines (To make the case more concrete, we could imagine an anisotropic bulk material consisting of separate strands of highly conducting material embedded in a highly isolating matrix. Temperature measurements are made in the conducting material only). In fact the field equation proves to be

$$\frac{d}{ds} [\alpha u (u \frac{d\Phi}{ds} - f)] = 0 \quad (28)$$

on a streamline. This is an ordinary second order differential equation and two boundary conditions are now needed. The least squares method provides the missing condition on the outflow boundary by automatically using the original field equation in the form (22) or

$$n_s \alpha u \left(u \frac{d\Phi}{ds} - f \right) = 0 \quad (29)$$

where n_s is the component of \vec{n} along the local streamline direction.

2.2 Numerical results

Finite element discretization in connection with the least squares functional usually gives quite satisfactory results. However, considerable crosswind diffusion can be detected in some cases. For an discussion of crosswind or false diffusion we refer to [4].

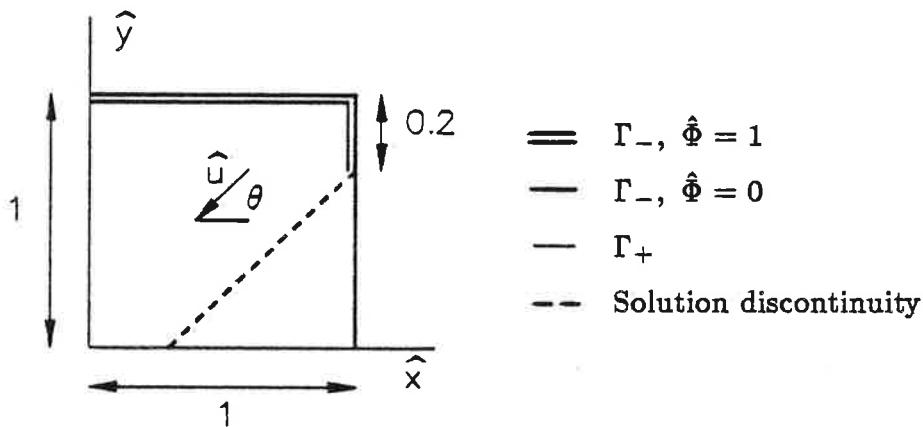


Figure 2. The solution domain and the boundary conditions. Flow speed \hat{u} and angle θ are constants.

Using dimensionless quantities $\hat{\Phi} = \Phi/\Phi_0$, $\hat{x} = x/L$, $\hat{y} = y/L$, $\hat{u}_x = u_x/u_0$ and $\hat{u}_y = u_y/u_0$, where Φ_0 , L and u_0 are some reference values, a simple demonstration problem is considered. The field equation is ($f = 0$)

$$-\hat{u} \cos \theta \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{x}} - \hat{u} \sin \theta \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (30)$$

and the problem domain and some additional information are given in Figure 2. The streamlines are straight and the exact solution is $\hat{\Phi} = 1$ and $\hat{\Phi} = 0$ in the upper and lower portions of the the domain separated by the broken drawn streamline. As the solution is totally discontinuous due to the boundary data, this problem is a very severe case to model numerically with a continuous approximation.

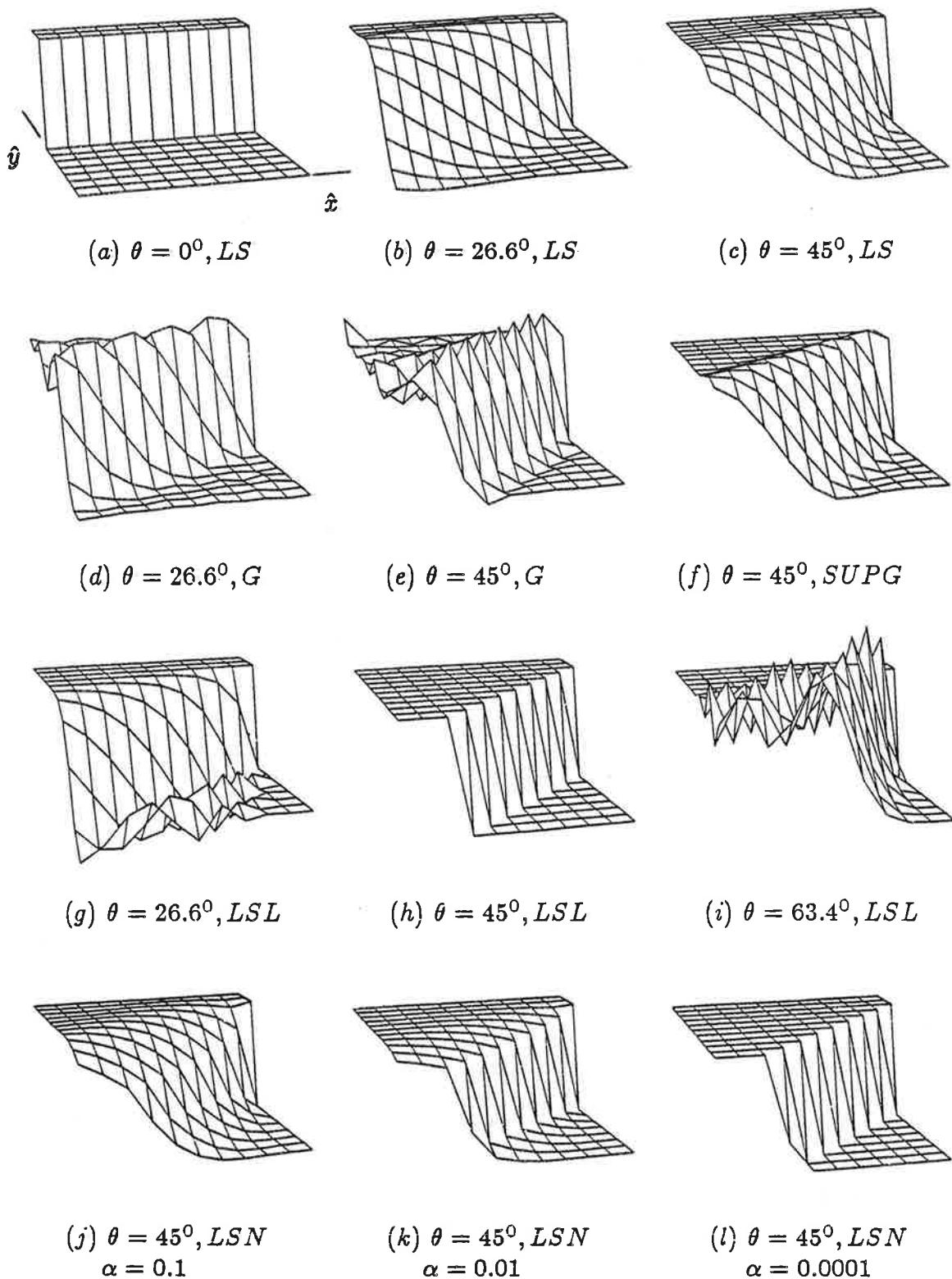


Figure 3. Distribution of $\hat{\Phi}$. LS $\hat{=}$ least squares method with constant α . G $\hat{=}$ Galerkin method. SUPG $\hat{=}$ streamline-upwind Petrov-Galerkin method. LSL $\hat{=}$ least squares method with Lagrange multipliers. LSN $\hat{=}$ least squares method with non-constant α .

A regular 10×10 four-noded bilinear element mesh is used. Some results obtained by the least squares method and for comparison purposes by the Galerkin method and the SUPG-method are given graphically in Figure 3.

The first three distributions (Figures 3(a), (b) and (c)) are found using a constant weighting $\alpha = 1$. Crosswind diffusion is apparent except in the first case where the streamlines are along the mesh lines.

In the Galerkin method the discretization is performed directly on the first order equation (30). Thus there is a little crosswind diffusion but the results are otherwise unacceptable due to strong oscillations (Figures 3(d) and (e)). This is what is to be expected according to the literature as the Galerkin method contains no upwinding.

The SUPG-result (Figure 3(f)) is obtained by the version alike the one given in [2]. The Neumann boundary condition $\partial\hat{\Phi}/\partial\hat{n} = 0$ — which is consistent with the exact solution — has been used on the outflow boundary. Some overshooting can be seen.

2.3 Avoiding crosswind diffusion

We have experimented with two possible ways to reduce crosswind diffusion in connection with the least squares method.

In the first attempt a modified least squares functional

$$\pi^a(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha(u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \lambda(u_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f) d\Omega \quad (31)$$

was used, where λ is a Lagrange multiplier function. The idea was to extend the standard least squares version with information about the original first order field equation. At least with bilinear elements for Φ and elementwise constant approximation for λ the outcome was not encouraging. In the example problem with $\theta = 45^\circ$ the results happened to be nodally exact but for some other values of θ violent oscillations appeared (Figures 3(g), (h) and (i)).

The idea behind the second attempt is as follows. As the information in the pure convection system travels only along the streamlines, we can mentally cut the domain arbitrarily into separate slices along certain streamlines. The solution in each subdomain thus obtained can be determined without any knowledge about the other domains. In the continuum formulation we can achieve this mental cutting in the least squares functional (18) by just letting the weighting factor α to go to zero on a streamline. In our example problem in Figure 2 we could obviously easily get the exact solution by using two totally independent meshes for the upper and lower domains separated by the line of discontinuity. In practice we can approach this by using only one mesh but letting the weighting factor α to be nearly zero in a layer of elements near the discontinuity (α should not be exactly zero in all the elements connected

to a node as then singularity is to be expected). The results given in Figures 3(j), 3(k) and (l) were obtained by lowering the value of α from the otherwise constant value 1 to the numbers shown in the figure text in the elements having non-zero gradients in the nodally exact solution. The accuracy of the results are seen to increase with the decrease of the value of the non-constant α . In the case $\alpha = 0.0001$ the solution is already practically nodally exact except at one node at the outflow boundary.

In the example problem we know beforehand the specific area where high gradient of Φ can be expected. Generally this is not known in advance. But one can speculate on an iterative method. After a first solution is obtained, new values for α are selected based on gradients of Φ and a new solution is determined and so on. There seems to be reason for some further studies on this theme.

FINAL REMARKS

It is useful to study the limiting cases of pure diffusion and pure convection separately in an effort to understand the full convection-diffusion equation, which is utmost importance in fluid mechanics. Here we have discussed some aspects of the pure convection equation and its solution by the finite element least squares method. In fact the current finite element upwind methods for the convection - diffusion equation contain features from least squares. For instance, the matrix corresponding to the so called anisotropic balancing dissipation introduced in [5] is exactly of form (26).

By varying the value of weighting factor α with respect to position interesting possibilities arise. In addition to the procedure hinted at in section 2.3, the least squares method can cope with 'wrong' boundary conditions on the outflow boundary by just putting α to zero in the last element layer. This is of importance when considering the full convection - diffusion equation, where the boundary conditions are given along the whole boundary. The inclusion of the term $\gamma\Phi$ of equation (3) into the least squares formulation is straightforward. Similarly, the unsteady term $\Phi_{,t}$ can be accounted for by considering time as a new coordinate with velocity component equal to one [1,p.170].

REFERENCES

- [1] Johnson,C., Numerical solution of partial differential equations by the finite element method. Studentlitteratur 1987.
- [2] Hughes, J.T.R., Brooks, A., A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: application to the streamline-upwind procedure. Finite Elements in Fluids- Volume 4. Wiley 1982, p.47...65.
- [3] Crandall, S.H., Engineering Analysis. McGraw-Hill 1956.
- [4] Patankar, S.H., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. McGraw-Hill 1980, p.105...109.
- [5] Kelly, D.W., Nakazawa, S., Zienkiewicz, O.C., Heinrich, J.C., A note on upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems. Int. J. num. Meth. Engng, Vol 15, 1980, p.1705...1711.

OHUTLEVYKASETIN VEDETYN LAIPAN TAIPUMAN MÄÄRITTÄMINEN

Seppe Salonen

Teknillinen korkeakoulu/Teräsrakennetekniikka

1. ONGELMAN MÄÄRITTELY

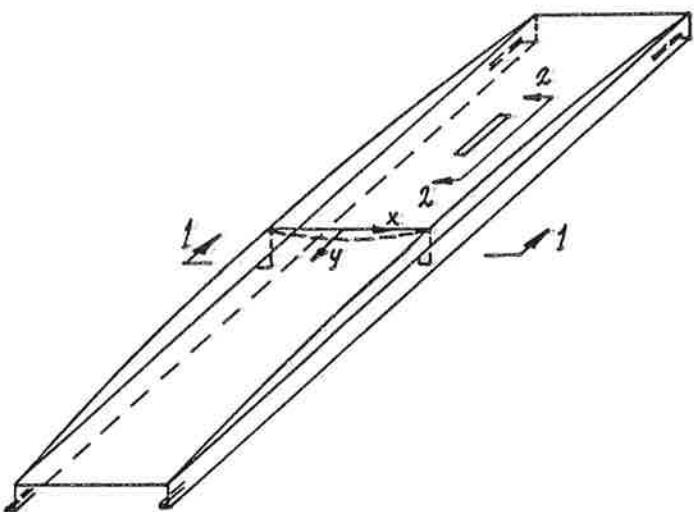
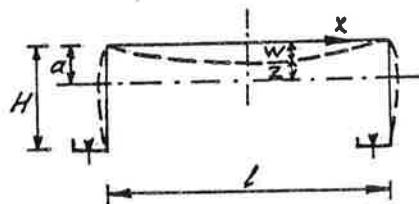
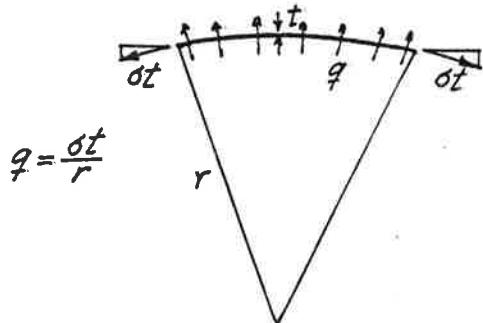
Artikelissa tarkasteltava rakenneosa on talon seinärunkoa täyden-tävä teräshutlevykasetti, jota kuormittaa pääasiassa tuulikuorma (kuva 1). Kun kuorman suunta on sellainen, että leveä laippa tulee puristetuksi, voidaan leveän laipan lommahduksen vaikutus laskea suunnitteluhjeiden [1] mukaan.

Kun kuorman suunta on päinvastainen (kuten kuvassa 1), tulee leveä laippa vedetyksi. Tarkastellaan palkin pituussuunnassa leikattua säiettä (kuva 1, leikkaus 2). Normaalijännitysten σ tasapainottaminen edellyttää, että reunojen kautta säikeeseen vaikuttaa kuorma $q = \sigma t/r$, jolloin säikeestä muuhun rakenteeseen vaikuttaa yhtä suuri, mutta vastakkaisuuntainen kuorma. Näin normaalijännitysten vaikutus voidaan ajatella korvatuksi fiktivisellä pintakuormalla, joka aiheuttaa poikittaissuunnassa (kuva 1, leikkaus 1) taipuman w. Tämä taipuma alentaa poikkileikkauden jäyhyyttä.

Tässä artikelissa esitetään kimmorisella alustalla olevan sauvan analogiaan perustuva laskentamalli taipuman w laskemiseksi. Ruotsalaisessa normissa [2] esitetty laskentakaava on käyttökelvoton, koska se antaa kohtuuttoman suuria arvoja. Profiilin uuman ja kapean laipan lommahduksen vaikutus voidaan laskea suunnitteluhjeen [1] kaavoilla.

2. DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ

Ratkaisun lähtökohtana ovat seuraavat ehdot:

1-12-2

$$q = \frac{\sigma t}{r}$$

Kuva 1. Kasetti kuormitettuna niin, että leveä laippa on vedettynä, poikkileikkaus ja pitkittäiseen säikeeseen vaikuttavat voimat.

- tasapainoehto: $q = \sigma t / r$ (1)

- geometrinen ehto: $1/r = \varepsilon / z$ (2)

- konstitutiivinen ehto: $\varepsilon = \sigma / E$ (3)

Teknillisen taivutusteorian mukaan pätee, jos leikkausmuodonmuusta ei tarvitse ottaa huomioon:

$$\sigma = \frac{M}{I} z \quad (4)$$

M on poikkileikkaukseen vaikuttava taiutusmomentti ja I sen jäyhyys. Poikittaiskuorman intensiteetiksi saadaan edellisistä yhtälöstä

$$q = \frac{M^2 z t}{EI^2} \quad (5)$$

Kun kasetin leveää laippaa tarkastellaan laattakaistana, todetaan, että väännytymä derivaattoineen on pieni ja pituussuuntainen kaarevuuden vaikutusta approksimoidaan fiktiviisen kuorman q avulla. Näin ollen voidaan kirjoittaa laattayhtälöksi ($z = a-w$)

$$w'''' = \frac{q}{D} = \frac{12(1-\nu^2)M^2}{E^2 t^2 I^2} (a-w) \quad (6)$$

Yläpilkku merkitsee derivointia x-suuntaan. Kun $\nu = 0.3$, saadaan

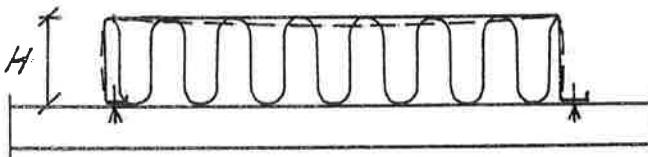
$$w'''' + \frac{10.9 M^2}{E^2 t^2 I^2} w = \frac{10.9 M^2}{E^2 t^2 I^2} a \quad (7)$$

Tämä yhtälö on samaa muotoa kuin kimmorisella alustalla olevan palkin differentiaaliyhtälö. Kun välissä on lämmöneriste, sen vaikutus voidaan ottaa huomioon sijoittamalla q:n tilalle q-r, jossa

$$r = cw = \frac{E_{er}}{H} w \quad (8)$$

Alustaluku c muodostuu eristeen kimmomodulista E_{er} .

Kasetti kiinnitetään kapeista laipoistaan ruuveilla toisensuuntaiseen profililevyyn (kuva 2). Tämä kiinnitys aiheuttaa uumien ja leveän laipan taitekohdan kautta normaalivoiman ja poikittaisen taiutusmomentin siirtymisen leveään laippaan, jossa siis ensisijaisesti vaikuttaa pitkittäinen vетojännitys. Toinen normaalivoi-



Kuva 2. Kasetin kiinnitys profiililevyn.

maa aiheuttava syy on laipan taipumasta aiheutuva taitekohtien keskinäisen etäisyyden lyhenemä, mistä aiheutuu vетоа. Poikittainen resultanttivoima voi siis olla vетоа tai puristusta. Jos puristusvoima pituusyksikköä kohti on P , voidaan vaikutus ottaa huomioon (kuten puristussauvassa) lisäämällä yhtälön (7) vasempaan puoleen termi Pw''/D . Ratkaistavaksi differentiaaliyhtälöksi saadaan siten

$$w'''' + \frac{10.9P}{Et^3} w'' + \left(\frac{10.9c}{Et^3} + \frac{10.9M^2}{E^2 t^2 I^2} \right) w = \frac{10.9M^2}{E^2 t^2 I^2} a \quad (9)$$

Tämä on samaa muotoa kuin kimmorisella alustalla olevan sauvan differentiaaliyhtälö [3]

$$v'''' + 4\beta^2 \omega v'' + 4\beta^4 v = \bar{q}/EI, \quad (10)$$

jossa

$$\beta^2 = \sqrt{k/4EI} \quad (11)$$

$$\omega = \frac{\bar{P}}{EI} \sqrt{\frac{EI}{4k}}, \quad (12)$$

joissa k on alustaluku, \bar{P} puristusvoima ja EI taivutusjäykkyys vertailusauvassa. Yhtälöiden (9) ja (10) suureet on rinnastettu seuraavassa taulukossa.

Kimmoisella alustalla oleva sauva	Kasetin laippa
v	w
β^2	$1.652 \frac{M}{Et} \sqrt{1 + \frac{cEI^2}{M^2 t}}$

ω	$1.652 \frac{PI}{Mt^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{CEI^2}{M^2 t}}}$
\bar{q}/k	$\frac{a}{1 + \frac{CEI^2}{M^2 t}}$

3. YHTÄLÖN RATKAISU

Tapaiksessa $\omega < 1$, jonka tarkastelu on tässä riittävää, on yleinen ratkaisu, kun $\bar{q}(x) = \bar{q}$ (vakio) ja kun merkitään $\xi = \beta x$:

$$v(\xi) = \sin \alpha_2 \xi (C_1 \sinh \alpha_1 \xi + C_2 \cosh \alpha_1 \xi) + \cos \alpha_2 \xi (C_3 \sinh \alpha_1 \xi + C_4 \cosh \alpha_1 \xi) + \bar{q}/k, \quad (13)$$

jossa $\alpha_1 = \sqrt{1-\omega}$ ja $\alpha_2 = \sqrt{1+\omega}$.

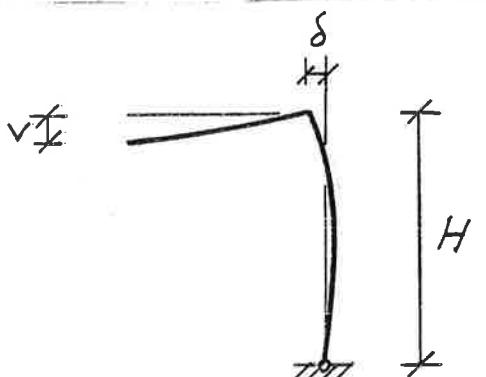
Symmetrian takia $C_2 = C_3 = 0$.

Laipan puolen leveyden matkalla (symmetrisesti) tapahtuva siirtymä

$$\delta = \int_0^{l/2} [1 - \sqrt{1 - (v')^2}] dx \quad (14)$$

Uman ja leveän laipan välisen taitoksen kohdalla ($x = l/2$) momentin tasapainoehdosta saadaan reunaehdoksi (kuva 3)

$$- Dv'' = \frac{3}{H} (v' + \frac{\delta}{H}) \quad (15)$$



Toinen reunaehsto on ($x = l/2$)

$$v = 0 \quad (16)$$

Näistä saadaan, kun

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta \alpha_1 \\ \beta_2 &= \beta \alpha_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Kuva 3. Siirtymätila laipan reunassa

$$C_1 = \frac{1}{\det} \left\{ -\frac{a}{1 + \frac{cEI^2}{M^2 t}} \left[2\beta_1 \beta_2 \sin \frac{\beta_2 l}{2} \sinh \frac{\beta_1 l}{2} - (\beta_1^2 - \beta_2^2) \cos \frac{\beta_2 l}{2} \cosh \frac{\beta_1 l}{2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{H} (\beta_1 \cos \frac{\beta_2 l}{2} \sinh \frac{\beta_1 l}{2} - \beta_2 \sin \frac{\beta_2 l}{2} \cosh \frac{\beta_1 l}{2}) \right] - \frac{3\delta}{H^2} \cos \frac{\beta_2 l}{2} * \right. \\ \left. \cosh \frac{\beta_1 l}{2} \right\} \quad (18)$$

$$C_4 = \frac{1}{\det} \left\{ \frac{3\delta}{H^2} \sin \frac{\beta_2 l}{2} \sinh \frac{\beta_1 l}{2} + \frac{a}{1 + \frac{cEI^2}{M^2 t}} \left[-2\beta_1 \beta_2 \cos \frac{\beta_2 l}{2} \cosh \frac{\beta_1 l}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - (\beta_1^2 - \beta_2^2) \sin \frac{\beta_2 l}{2} \sinh \frac{\beta_1 l}{2} - \frac{3}{H} (\beta_1 \sin \frac{\beta_2 l}{2} \cosh \frac{\beta_1 l}{2} + \beta_2 \cos \frac{\beta_2 l}{2} * \right. \right. \\ \left. \left. \sinh \frac{\beta_1 l}{2}) \right] \right\} \quad (19)$$

$$\det = \frac{1}{2} [2\beta_1 \beta_2 (\cos \beta_2 l + \cosh \beta_2 l) + \frac{3}{H} (\beta_1 \sin \beta_2 l + \beta_2 \sinh \beta_1 l)] \quad (20)$$

Kun siirtymätila nyt tunnetaan, voidaan tehdä liselle poikkileikkauskelle määrittää painopisteenvaihtoehto paikka ja jähyys.

Normaalivoiman suuruus saadaan uuman momenttitasapainoehdosta

$$P = \frac{D}{H} v' \Big|_{x=l/2} \quad (21)$$

Koska yhtälön (9) suureet a ja I riippuvat tuntemattomasta taipumasta, ratkaisu johtaa iteraatioon. Siirtymä δ on syytä integroida numeerisesti jakamalla laipan leveys esim. 20 kaistaan. Yhtälön (9) muut suureet paitsi E ja t ovat myös pituuskoordinaatin y funktioita, joten koko poikkileikkauksen taipuman määrittämiseksi joudutaan kasetti jakamaan kaistoihin myös pituussuunnassa.

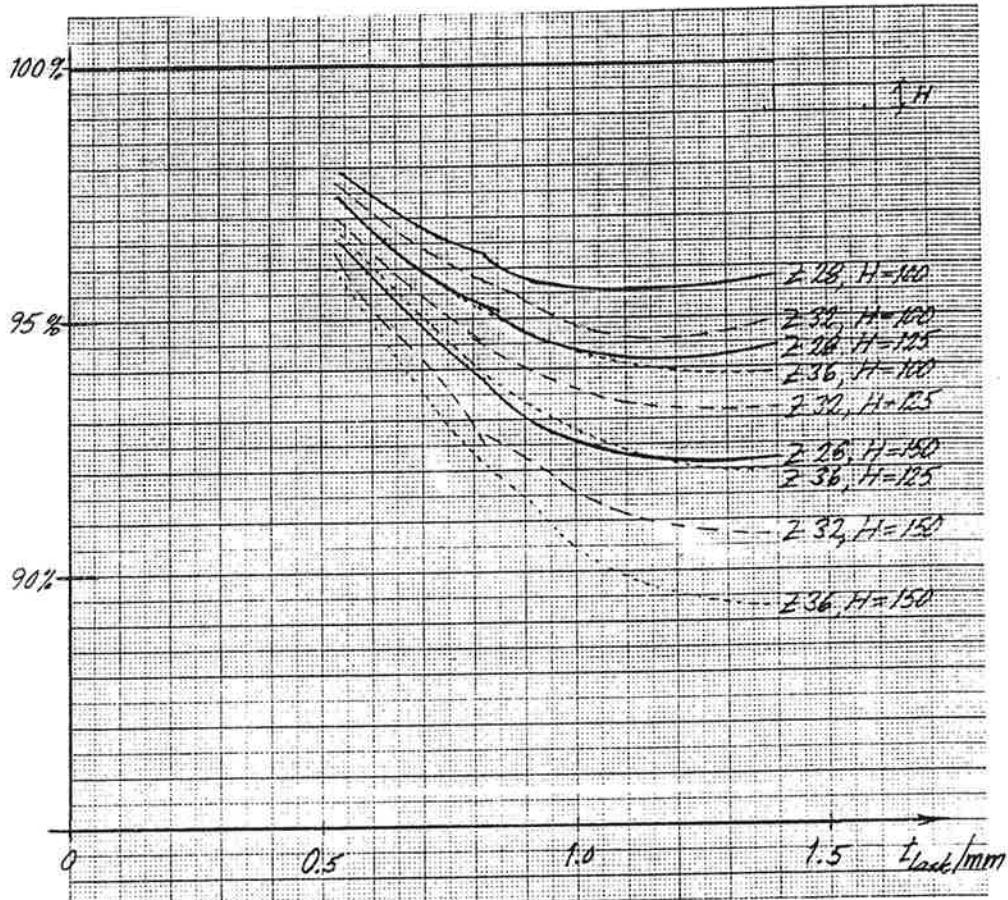
Murtokriteeriksi voidaan asettaa myötörajan saavuttaminen maksimimomentin kohdalla poikkileikkauksen reunassa, koska plastisen nielen ja myötölujenemisen edellyttämää kiertymiskykyä poikkileikkauksella ei ole. Murtorajatilan osavarmuusluku on 1.4 tällaisella sekundaarirakenteella. Lisäksi käyttörajatilassa taipuma ei saa ylittää sallittua arvoa (esim. L/100).

Kuvassa 4 on esitetty laipan käyrystymän vaikutus kestävyyteen laskeutapaksuuden (t), korkeuden (H) ja myötörajan (f_y) funktiona 600 mm leveällä kasetilla. Myös vertailuarvossa (100 %) on osien

lommahdus otettu huomioon. Kestävyyden pieneneminen voidaan prosentteina ilmaista käytäntöä varten riittäväällä tarkkuudella kavalla

$$(-8.0 + 28.5t - 11t^2) * \frac{H}{150} * \frac{f_y}{360} \quad (22)$$

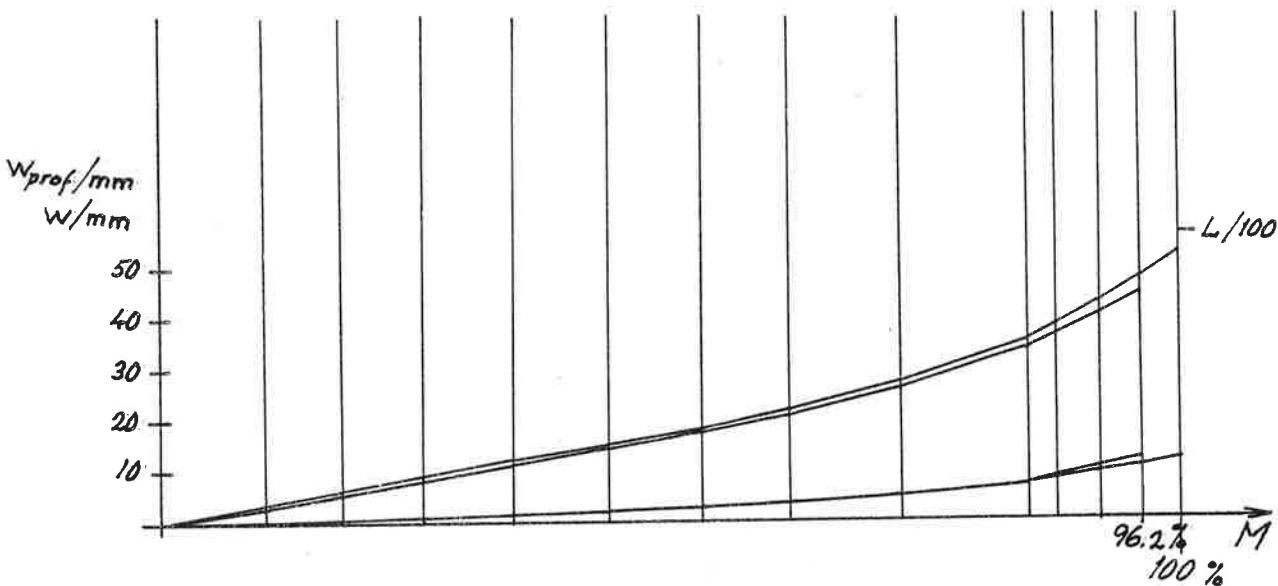
Tukireaktiokesävyys on aina erikseen tarkistettava.



Kuva 4. Leveän laipan taipuman vaikutus kestävyyteen

4. VERTAILU KOETULOKSIIN

Teknillisen korkeakoulun rakennetekniikan laitoksessa suoritettiin vt.prof. Jouko Pellosniemen johdolla koesarja, jossa kolmetoista kasettia kuormitettiin murtoon käyttäen ilmapusseja tuulikuormaa jäljittelyvän pintapaineen aikaansaamiseksi. Kuva 5 esittää yhdessä kokeessa mitattua siirtymätilaa mitattujen voimien perusteella lasketun momentin funktiona (100 vaaka-akselilla vastaa kokeessa saatua murtomomenttia).



Kuva 5. Esimerkkitapaus. Profiilin taipuma (w_{prof}) ja laipan taipuma (w) kokeessa ja laskentamallin mukaan keskileikkausken momentin (M) funktiona ($H=150 \text{ mm}$, $t_{\text{lask}}=0.94 \text{ mm}$)

Ylempi käyräpari esittää (millimetreinä) keskileikkausken taipumaa mitattuna ja laskettuna. Alin käyräpari esittää (millimetreinä) leveän laipan keskipisteen taipumaa verrattuna laipan ja uuman taitekohdan taipumaan vastaavasti mitattuna ja laskettuna (käyrien erotus esittäisi siis laipan keskipisteen ordinaattia alkutilaan verrattuna).

Koesarjassa muuttujina olivat levynpaksuus ja korkeus H . Koesarjassa tulosten keskiarvo poikkeaa 0.25% laskentamallin mukaisesta kestävyydestä, virheen itseisarvon keskiarvo oli 3.1% ja keskihajonta 3.8% . Vertailuissa on käytetty koekappaleista mitattua teräksen paksuutta ja myötörajaa.

5. LASKENTAMALLIN KEHITTÄMINEN

Tasaisesti kuormitetun vapaasti tuetun palkin tapauksessa shear lag -ilmiön vaikutus on vähäinen. Jatkuvassa palkissa shear lag -ilmiö on otettava huomioon väliuelta tulevan pistekuorman takia. Lisäksi tukireaktiokestävyys on tärkeämpää ottaa huomioon kuin kaksitukisessa palkissa.

Jatkuvilla palkeilla leveä laippa on osalla pituutta vedettynä,

osalla puristettuna. Tämä aiheuttaa suppenevuusvaikeuksia, koska siirtymäsuureet riippuvat jäykkyyksistä, jotka vaihtelevat poikileikkauksesta toiseen. Voimatala ratkaistaan siirtymätilan yhteensovivuusehdon ja tasapainoehdon perusteella. Jatkuvan kasetin kestävyys saattaa olla pienempi kuin saman jännemitan omaavalla vapaaasti tuetulla palkilla.

KIRJALLISUUS

- [1] Teräsohutlevyrakenteet. Ohjeet. RakMK B6. Ehdotus 10.11.1987
- [2] Tunnpåtsnorm. StBK-N5. Statens Stålbyggnadskommitté. Uppsala 1979.
- [3] Mikkola, Martti. Kimmoisella alustalla oleva palkki. TKK, Rakennetekniikan laitos. Julkaisu 36. Otaniemi 1981.

A QUADRILATERAL MIXED FINITE ELEMENT METHOD FOR THE ELASTICITY PROBLEM

R. Stenberg and J. Videman

*Institute of Mathematics
Helsinki University of Technology
02150 Espoo, Finland*

1. INTRODUCTION

By a mixed finite element method for problems in elasticity one usually understands a method in which both the stress tensor and the displacement are simultaneously approximated. Traditionally the main motivation for introducing methods of this type has been to obtain an accurate approximation for the stress tensor which usually is the variable of the greatest interest.

The outcome of the research in this field has, however, been rather discouraging; it has been shown that many apparently natural methods do not give the accuracy that one would expect; cf. [1]. The reason is that a method has to satisfy certain stability conditions in order that the accuracy would be the best possible, and for most simple methods these conditions are not valid. On the other hand, the majority of suggested methods satisfying these stability conditions are rather complicated and hence not easily implemented in practice. For a more detailed discussion of the problems connected with the mixed approach, we refer directly to our earlier papers [2,3].

Recently [3,4] we have been considering an idea, originally proposed by Fraijls de Veubeke [5], which seems to give a satisfactory solution to the problem of constructing efficient mixed methods for problems in elasticity. The aim of this paper is to report our first computational results obtained with a method constructed using the approach of Fraijls de Veubeke.

Our notation will be the established one; cf. [6].

2. THE FINITE ELEMENT METHOD

Let us first recall the equations of plane linear elasticity:

$$\begin{aligned}
 A\sigma - \varepsilon(u) &= 0 && \text{in } \Omega, \\
 \operatorname{div} \sigma + f &= 0 && \text{in } \Omega, \\
 u &= 0 && \text{on } \Gamma_1, \\
 \sigma \cdot n &= g && \text{on } \Gamma_2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

where the unknowns are the symmetric stress tensor $\sigma = (\sigma_{ij})$, $i, j = 1, 2$ and the displacement $u = (u_1, u_2)$. For simplicity Ω is assumed to have a polygonal boundary $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. $\varepsilon(u)$ is the linear strain tensor; $\varepsilon(u)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$, $i, j = 1, 2$, where $\partial_j = \partial/\partial x_j$. A is the fourth order tensor expressing the constitutive law, i.e.

$$A\sigma = \alpha\sigma + \beta\operatorname{tr}(\sigma)\delta,$$

where δ is the unit tensor, $\operatorname{tr}(\sigma)$ denotes the trace of σ ,

$$\alpha = \frac{(1+\nu)}{E}, \quad \beta = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}$$

for the plane strain problem and

$$\alpha = \frac{(1+\nu)}{E}, \quad \beta = -\frac{\nu}{E}$$

for the plane stress problem, respectively. As usual E denotes the Young modulus and ν , $0 < \nu < 1/2$, the Poisson ratio.

As noted in the introduction, a direct discretization of (1) by mixed methods has not been very successful. The approach of Fraij de Veubeke, which will be used in this paper, is based on a slight reformulation of (1). First, the stress tensor is not assumed to be symmetric a priori. Instead this condition is treated as an additional equation. Since one new equation is introduced, one also has to introduce one new unknown, with the physical meaning of the skew symmetric rotation tensor. The system to be discretized now takes the following form:

$$\begin{aligned} A\sigma - \nabla u + \gamma &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \sigma - \sigma^T &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \sigma + f &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{on } \Gamma_1, \\ \sigma \cdot n &= g && \text{on } \Gamma_2, \end{aligned} \tag{2}$$

where σ^T is the transpose of σ (i.e. $(\sigma^T)_{ij} = \sigma_{ij}$) and

$$(\nabla u)_{ij} = \partial_j u_i, \quad i, j = 1, 2,$$

$(\partial_j = \partial/\partial x_j)$. The solutions of (1) and (2) are easily seen to coincide with

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j), \quad i, j = 1, 2.$$

We now choose the variational formulation of (2) as follows: Find $(\sigma, u, \gamma) \in H \times V \times W$ such that

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) + b(\tau; u, \gamma) &= 0, & \tau \in H, \\ b(\sigma; v, \eta) + (f, v) &= 0, & (v, \eta) \in V \times W, \end{aligned} \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &= (A\sigma, \tau), \\ b(\sigma; u, \gamma) &= (\operatorname{div} \sigma, u) + (\sigma, \gamma) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} V &= [L^2(\Omega)]^2, \\ H &= \{ \sigma \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} \mid \operatorname{div} \sigma \in V, \sigma \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma_2 \}, \\ W &= \{ \gamma \in [L^2(\Omega)]^{2 \times 2} \mid \gamma + \gamma^T = 0 \}. \end{aligned}$$

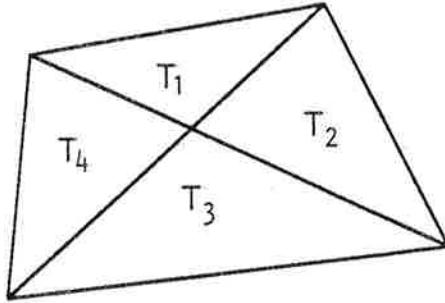
As usual (\cdot, \cdot) stands for the inner product in $[L^2(\Omega)]^2$ or $[L^2(\Omega)]^{2 \times 2}$. Above and in the sequel we assume, without loss of generality, that $g = 0$ on Γ_2 .

The variational formulation (3) leads to finite element methods of the form:
Find $(\sigma_h, u_h, \gamma_h) \in H_h \times V_h \times W_h \subset H \times V \times W$ such that

$$\begin{aligned} a(\sigma_h, \tau) + b(\tau; u_h, \gamma_h) &= 0, & \tau \in H_h, \\ b(\sigma_h; v, \eta) + (f, v) &= 0, & (v, \eta) \in V_h \times W_h. \end{aligned} \tag{4}$$

In our paper [3] we were able to construct a simple family of methods of this kind. In [4] we complemented this family with two low-order methods. In this paper we will consider the quadrilateral method of [4], which we will now recall.

We introduce a partitioning C_h of $\bar{\Omega}$ into regular quadrilaterals. Each quadrilateral $K \in C_h$ is further subdivided into four triangles T_1, T_2, T_3, T_4 by drawing two diagonals; see the figure below.



By b_K we denote the function which is continuous on K , linear on each $T_i \subset K$, $i = 1, 2, 3, 4$, equal to unity at the interior node (i.e. the crossing of the diagonals) and vanishes on ∂K . On K we define

$$\begin{aligned} B(K) &= \{ \tau \in [L^2(K)]^{2 \times 2} \mid (\tau_{i1}, \tau_{i2}) = c_i(\partial_2 b_K, -\partial_1 b_K), c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2 \}, \\ D(K) &= \{ \tau \in [C(K)]^{2 \times 2} \mid \tau_{ij}|_{T_k} \in P_1(T_k), i, j = 1, 2, k = 1, 2, \dots, \kappa \}, \end{aligned}$$

and the finite element spaces are then defined through

$$\begin{aligned} H_h &= \{ \tau \in H \mid \tau|_K \in B(K) \oplus D(K), K \in C_h \}, \\ V_h &= \{ v \in V \mid v|_K \in [P_1(K)]^2, K \in C_h \}, \\ W_h &= \{ \gamma \in W \mid \gamma|_K \in [P_1(K)]^{2 \times 2}, K \in C_h \}. \end{aligned} \tag{5}$$

In [4] we carried out the error analysis of the above method. The method was proven to be stable and hence we obtained the following optimal error estimates:

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|\gamma - \gamma_h\|_0 \leq Ch^2(|\sigma|_2 + |\gamma|_2) \tag{6}$$

and

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^2(|u|_2 + |\sigma|_1 + |\gamma|_1). \tag{7}$$

It is also possible to prove the following estimate:

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^2(|\sigma|_2 + |\gamma|_2 + |u|_{2,\infty}). \tag{8}$$

Let us also remark that from the solution to (4) it is possible to construct, using a simple postprocessing scheme, a new approximation to the displacement with an $O(h^3)$ convergence rate in the L^2 -norm; cf. [3].

For the subspace H_h the condition $\operatorname{div} \sigma \in V$ only implies the continuity of $\sigma \cdot n$ along inter element boundaries. Hence, as the degrees of freedom for $\tau \in H_h$ one can for each $K \in C_h$ take

- (i) the values $\tau \cdot n$ at two distinct points on each side of K ,
- (ii) the values of τ_{ij} , $i, j = 1, 2$, at the interior node,
- (iii) the two degrees of freedom for $B(K)$.

In the implementation of the above method one first eliminates the displacement and the rotation by the penalty method; cf. [3]. Next, one can use standard condensation techniques (cf. e.g. [7]) to eliminate the degrees of freedom of the types (ii) and (iii) above. For the degrees of freedom of the type (i) we here take the limiting values of $(\tau \cdot n)(x)$ as x approaches a vertex of K . The final linear system to be solved has thus approximately eight degrees of freedom per node. Thus the method contains rather many degrees of freedom.

It is, however, possible to considerably improve the method following the approach introduced by us in [1]. The idea of [1] is to impose stronger continuity and symmetry requirements on the stress tensor at the nodes. Below we will also give computational results with the method modified in this way. The modification we use is exactly that of [1] Example 2, p. 419. For a detailed description we refer directly to [1]. Here we would only like to point out that the analysis of [1] carries over to our present method. This modification gives a method with approximately four degrees of freedom per node.

For comparison we also give the results obtained with a method proposed by Zienkiewicz and Taylor [8]. This method is based on the formulation (1) with a continuous piecewise bilinear approximation for the three stress variables and a piecewise constant approximation for the displacement. Hence the displacement can be locally eliminated by the penalty method and this gives a final linear system with only three degrees of freedom per node. Unfortunately, however, this method is not uniformly stable. For a rectangular mesh and Dirichlet boundary conditions it is nevertheless possible to analyse the method but one can only prove that the stresses converge with an $O(h^{3/2})$ rate in the L^2 -norm (the optimal rate would be $O(h^2)$). In addition it is possible to show that the values of the displacement at the midpoints of the elements also converge with an $O(h^{3/2})$ rate.

3. COMPUTATIONAL RESULTS

We consider here a simple plain stress problem where Ω is a unit square, $\nu = 0.3$ and $E = 1$, and $f = (f_1, f_2)$ is chosen in such a way that the exact displacements under the boundary condition $u = 0$ on Γ are

$$\begin{aligned} u_1 &= 16x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)e^{(x_1-x_2)}, \\ u_2 &= \sin\pi x_1 \sin\pi x_2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \end{aligned}$$

The computational results are given in Tables 1 and 2 where they are compared with the results obtained using the method proposed by Zienkiewicz and Taylor [8]. In the calculations we use a uniform partitioning of Ω into squares with sidelength h . Errors for the displacement in Table 2 have been computed by using the following seminorm:

$$\|u - u_h\| = \max_{x_k} \{|u_1(x_k) - u_{1h}(x_k)| + |u_2(x_k) - u_{2h}(x_k)|\},$$

where x_k are the midpoints of squares in the partitioning C_h of Ω . The average convergence rates have also been calculated for each method and, as shown in the tables, the theoretically predicted convergence rates also occur in practice.

$1/h$	Original method	Modified method	Taylor & Zienkiewicz
4	0.200	0.218	0.215
6	0.0913	0.0980	0.119
8	0.0518	0.0549	0.0779
10	0.0333	0.0351	0.0562
12	0.0233	0.0243	0.0430
conv. rate	$O(h^{1.96})$	$O(h^{2.02})$	$O(h^{1.47})$

Table 1. L^2 -error and the convergence rate for the stress tensor.

$1/h$	Original method	Modified method	Taylor & Zienkiewicz
4	0.0996	0.0980	0.104
6	0.0435	0.0460	0.0507
8	0.0253	0.0253	0.0309
10	0.0163	0.0165	0.0220
12	0.0114	0.0118	0.0163
conv. rate	$O(h^{1.96})$	$O(h^{1.84})$	$O(h^{1.64})$

Table 2. Maximum error and the convergence rate for the displacement at the midpoints of partitioning C_h .

REFERENCES

1. PITKÄRANTA, J. and STENBERG, R., Analysis of Some Mixed Finite Element Methods for Plane Elasticity Equations. *Math. Comp.* **41**, 399-423 (1983).
2. STENBERG, R., On the Construction of Optimal Mixed Finite Element Methods for the Linear Elasticity Problem. *Numer. Math.* **48**, 447-462 (1986).
3. STENBERG, R., A Family of Mixed Finite Elements for the Elasticity Problem. Helsinki University of Technology, Institute of Mathematics 1986. To appear in: *Numer. Math.*
4. STENBERG, R., Two Low-Order Mixed Methods for the Elasticity Problem. *J.R. Whiteman (Ed.), The Mathematics of Finite Elements and Applications VI*, MAFELAP 1987. Academic Press, London. To appear.
5. FRAIJS DE VEUBEKE, B.X., Stress Function Approach. *World Conference in Finite Elements*. Bournemouth 1975.
6. CIARLET, P.G., The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, Amsterdam 1978.
7. ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method, 3rd edition. Mc Graw-Hill, New York 1977.
8. TAYLOR, R. and ZIENKIEWICZ, O.C., Complementary Energy with Penalty Functions in Finite Element Analysis. *R. Glowinski et al. (Eds.), Energy Methods in Finite Element Analysis*. Wiley, New York 1979. 143-174.

ANALYSERING AV SANDWICHBALK MED VISKOELASTISKT KÄRNSKIKT.

Anders Westerlund

FINNMAP OY

1 INLEDNING

Kännetecknande för långtidsbelastade sandwichelement är att de erhåller tidsberoende nedböjningar vilka främst förorsakas av de skjuvkrypningsdeformationer vilka uppkommer i kärnskiktet. Dessutom omfördelas både de inre och yttre snittkrafterna framför allt i fallet med statiskt obestämt upplagrade element.

Analytiska beräkningar av skjuvkrypningen är besvärliga vilket medfört att de numeriska metoderna starkt trätt in i bilden. Finita elementmetoden har visat sig vara ett gott redskap för analysering av linjärt elastiska sandwichbalkar och utgående från dessa erfarenheter har man vid Statens tekniska forskningscentrals Konstruktionstekniska laboratorium utvecklat en metod som även tar i betraktande kärnskiktets linjärt viskoelastiska egenskaper.

2 LINJÄRT ELASTISKT KÄRNSKIKT

I det följande härleds sandwichbalkens styvhetsmatriser och ekvivalenta nodkraftsvektorer utgående från sandwichbalkens differentialekvationernas exakta lösningar. Lösningarna fungerar som förskjutningsfunktioner vilket innebär att metoden är exakt inom ramen för den linjära sandwichteorin.

Differentialekvationerna för sandwichbalkar med böjstyva tjocka eller profilerade ytskikt har bl.a. härletts av Stamm och Witte [1]. De olika skikten antas vara linjärt elastiska och kärnskiktets elasticitetsmodul är försumbar i förhållande till ytskiktens dito. Ytskiktens tvärsnitt förblir plana under belastning medan det totala tvärsnittet erhåller skjuvningsdeformationer.

De homogena delarna lyder

$$\frac{w^{(6)}}{L^2} - \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 w^{(4)} = 0 \quad \frac{\gamma^{(4)}}{L^2} - \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \gamma^{(2)} = 0 \quad (1)$$

där $\lambda^2 = \frac{B_s L^2}{B_d B_s}$

Här betyder B sandwichbalkens totala böjstyrvhet, B_d ytskiktens böjstyrvhetter, B_s den s.k sandwichböjstyrheten samt S kärnskiktets skjuvstyrvhet.

Lösningarna för nedböjningen $w(x)$ och kärnskiktets skjuvning $\gamma(x)$ lyder

$$w(x) = C_1 \sinh \lambda \frac{x}{L} + C_2 \cosh \lambda \frac{x}{L} + C_3 + C_4 x + C_5 x^2 + C_6 x^3 \quad (2)$$

$$\gamma(x) = D_1 \sinh \lambda \frac{x}{L} + D_2 \cosh \lambda \frac{x}{L} + D_3 + D_4 x \quad (3)$$

Som frihetsgrader kan man välja nedböjningen w , kärnskiktets skjuvning γ och tvärsnittets vinkeländring $w' - \gamma$ och i matrisform uttrycker man nodförskjutningarna

$$\{ \delta \} = [A] \{ C \} \quad (4)$$

Snittkrafterna uttrycks med hjälp av förskjutningarna och sålunda kan man på motsvarande sätt uttrycka nodkrafterna med hjälp av konstanterna C_i . Nodkrafterna vilka motsvarar nodförskjutningarna är skjuvkraften Q , ytskiktsmomentet M_d och det totala böjmomentet M .

$$\{ F \} = [B] \{ C \} \quad (5)$$

Efter en invertering av matrisen $[A]$ kan man uttrycka nodkrafterna med hjälp av nodförskjutningarna

$$\{ F \} = [B] [A]^{-1} \{ \delta \} = [K] \{ \delta \} \quad (6)$$

där $[K]$ är sandwichbalkelementets styvhetsmatris.

De ekvivalenta nodkrafterna härleds genom att lösa sandwichbalkens differentialekvationer för de speciella belastningsfallen och använda som randvillkor helt förhindrade förskjutningar vid stöden. Förskjutningsvillkoret lyder

$$\{ \delta \} = [A] \{ C \} + \{ d \} = \{ 0 \} \quad (7)$$

där $\{ d \}$ betecknar speciallösningen för ifrågavarande belastningsfall. Nodkrafterna uttrycks på motsvarande sätt

$$\{ F \} = [B] \{ C \} + \{ f \} \quad (8)$$

Insättning av (7) i (8) ger

$$\{ F \} = [K] \{ d \} + \{ f \} \quad (9)$$

Jämnviktsvillkoret vid noderna skrivs

$$\{ R \} + \{ F \} = 0 \quad (10)$$

där $\{ R \}$ betecknar den ekvivalenta nodkraftvektorn som vidare skrivs

$$\{ R \} = [K] \{ d \} - \{ f \} \quad (11)$$

3 LINJÄRT VISKOELASTISKT KÄRNSKIKT

I det viskoelastiska fallet uttrycks det konstitutiva sambandet mellan töjningar och spänningar med en s.k minnesintegral

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t J(t-t') \frac{dt}{dt'}, dt' \quad (12)$$

som beskriver skjuvdeformationen $\gamma(t)$ vid en godtycklig tidpunkt t och beaktar även den rådande spänningen och dess hela historia. $J(t)$ är en s.k. skjuvkrypningsfunktion och den kan beräknas genom att studera de skjuvdeformationer som uppstår under påverkan av en konstant

skjuvspänning τ_0 enligt sambandet

$$J(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0} \quad (13)$$

Den i föregående kapitel härledda styvhetsmatrisen gäller även i det viskoelastiska fallet såvida man ersätter kärnskiktets skjuvmodul G med en tidsberoende sekantmodul G_s som beskriver förhållandet mellan de rådande skjuvdeformationerna och -spänningarna. Sekantmodulen beräknas ur ekvation (12) genom att man utför en numerisk tidsintegration.

Strukturekvationssystemet

$$[K(\delta(t))] \{ \delta(t) \} = \{ F \} \quad (14)$$

blir således förskjutnings- och tidsberoende och för att lösa det bör man tillgripa ett iterationsförfarande.

Låt oss anta att förhållandet mellan nodförskjutningarna och -krafterna

$$\{ F \} = [K]_k \{ \delta \}_k \quad (15)$$

är känt vid en viss tidpunkt t_k . Den i kärnskiktet verkande skjuvspänningen förorsakar under ett tidsintervall Δt en krypningsdeformation $\Delta \{ \delta \}$ och sålunda råder vid tidpunkten $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ sambandet

$$\{ F \} = [K]_{k+1} \{ \delta \}_{k+1} \quad (16)$$

Genom att bearbeta (15) och (16) kan man omskriva övergången från (15) till (16) som en iterationsekvation

$$[K]_k \{ \delta \}_{k+1}^{n+1} = \{ F \} - ([K]_{k+1}^n - [K]_k) \{ \delta \}_{k+1}^n \quad (17)$$

och vidare i formen

$$[K]_k \Delta \{ \delta \}_{k+1}^n = \{ F \} - [K]_{k+1}^n \{ \delta \}_{k+1}^n \quad (18)$$

$$\text{där } \Delta \{ \delta \}_{k+1}^n = \{ \delta \}_{k+1}^{n+1} - \{ \delta \}_{k+1}^n$$

Iterationsförfarandet (18) beskrivs i bild (1) och svarar matematiskt mot en förenklad Newton-Raphson iterationsmetod. Den vänstra delen i

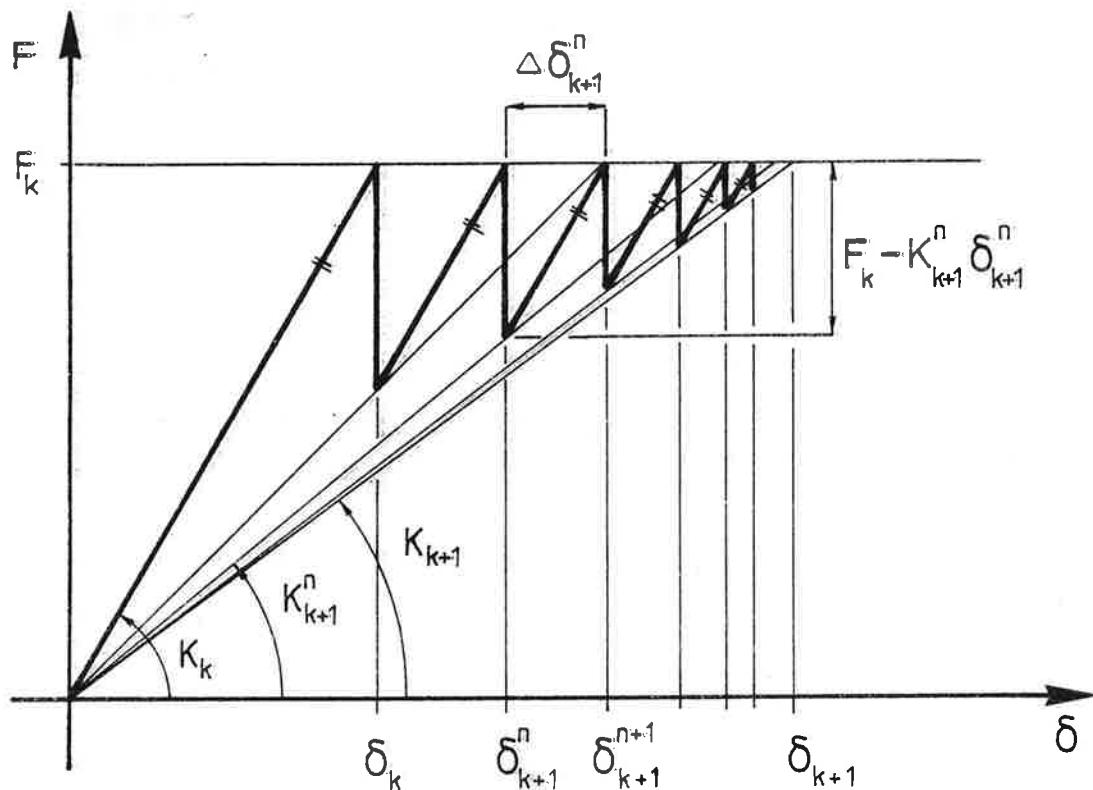


Bild 1. Tolkning av iterationsekvationen (18).

(18) betecknar en kraft som behövs för att balansera den högra sidans ojämnvikt, som består av skillnaden mellan de yttre $\{ F \}$ och de inre krafterna $[K]_{k+1}^n \{ \delta \}_{k+1}^n$. Efter varje iterationsvarv uppdaterar man $[K]_{k+1}^n$ med hjälp av sekantmodulen G_s .

De ovannämnda metoderna har programmerats för en mikrodator. Med programmen kan man analysera kontinuerliga på elastiska stöd upplagda sandwichbalkar. Balkarna kan ha både s.k. tunna och tjocka ytskikt och kärnskiktets tidsberoende egenskaper beskrivs med fritt valda krypningsfunktioner. Som belastningar används jämnt fördelad last, punktlast samt temperaturdifferenser mellan ytskiktens. Belastningen kan variera stegvis med tiden och man kan definiera belastningsperioder vilka beskriver t.ex. snölastens variation under ett år. Utskriften omfattar nedböjningar, förskjutningar, spänningar och snittkrafter vid godtyckliga tidpunkter.

Ett kort exempel genomgås. Holmijoki [2] har utfört långtidsprover på sandwichbalken presenterad i bild 2. och har på basen av resultaten beräknat parametervärdet för en av honom föreslagen empirisk skjukrypningsfunktion. Kärnskiktet består av polyuretan. Nedböjningarna i bild 3. har räknats som skillnaden mellan nedböjningen i balkens mitt och en tiondedel från balkändan.

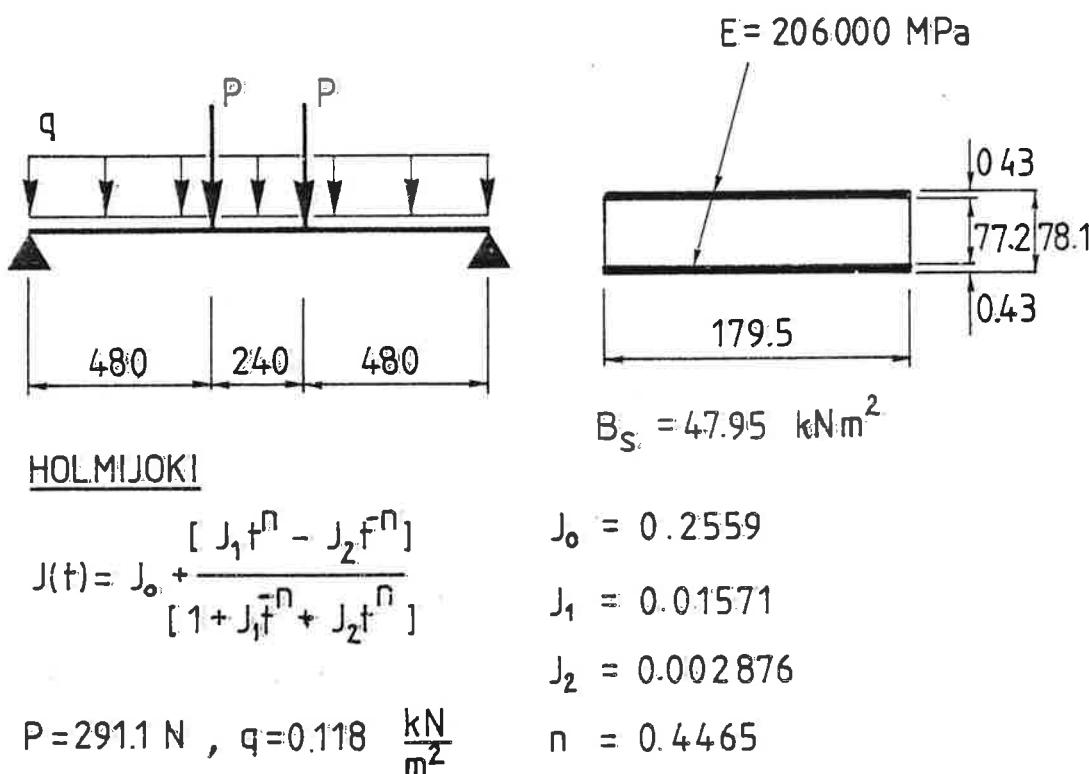


Bild 2. Exempllets balkdata och belastningsfall.

De med OVISANO (ohutkuorisen viskoelastisen sandwich-palkin ana lysointiohjelma) uträknade nedböjningarna är aningen större än de uppmätta vilket beror på skillnaden mellan de uppmätta och beräknade skjuvspänningarna.

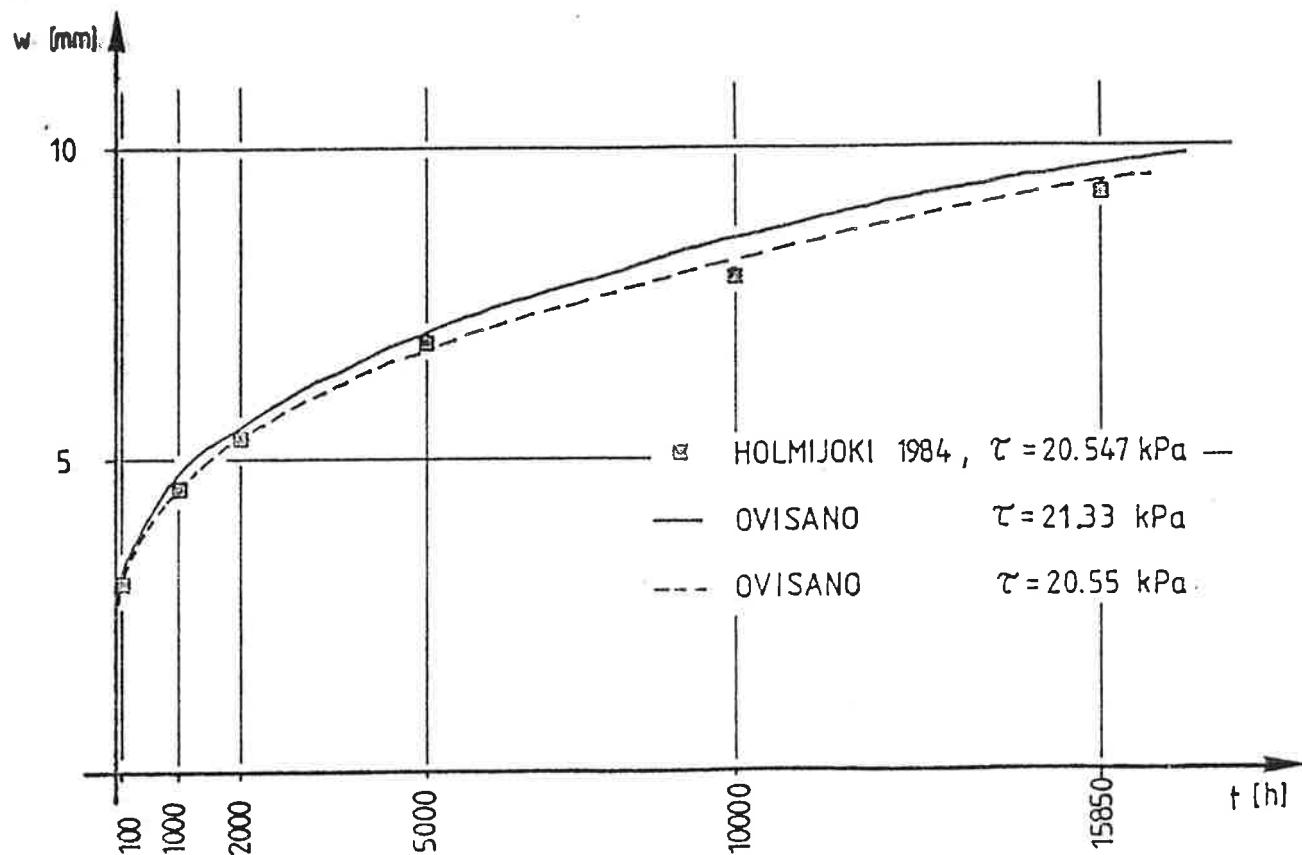


Bild 3. Sandwichbalkens nedböjning under långtidsbelastning.

5 SAMMANFATTNING

En finit elementmetod för analysering av linjärt viskoelastiska sandwichbalkar har presenterats. Metoden möjliggör en god uppskattning av sandwichbalkars spänningstillstånd och nedböjningar under varierande långtidsbelastning. Praktiska olinjära fall torde också vara möjliga att lösa såvida man kan utveckla en skjuvkrypningsfunktion som är t.ex. skjuvspännings- och temperaturberoende.

LITTERATURHÄNVISNINGAR

- [1] Stamm,K.,Witte,H., Sandwichkonstruktionen. Springer-Verlag, Wien 1974. 337 s.
- [2] Holmijoki,O., Solupolyureataanin leikkauslujuusominaisuudet ja leikkausvirumisen kuvaaminen sandwichpalkkikokeiden avulla. Diplomityö. Teknillinen Korkeakoulu, Rakennusinsinöriosasto, Espoo 1984.
- [3] Westerlund, A., Analysering av viskoelastisk sandwichbalk med finit elementmetod. Diplomarbete. Tekniska Högskolan, Avdelningen för lantmäteri och byggnadsteknik. Esbo 1987.

HIERARCHICAL ELEMENTS IN SURFACE DESIGN

Simo Virtanen

Tampere University of Technology

1 INTRODUCTION

The hierarchical finite element forms are used nowadays in many linear problems because of their advantages in equation conditioning, estimating the errors existing at any given stage of the subdivision and calculating error indicators if successive refinement is sought. In the standard h -refinement process the number and type of the interpolating functions over each element are fixed and the finite element mesh is refined in such a way that the maximum diameter of the elements, h , approaches zero. In the p -refinement the number and distribution of finite elements is fixed and the number and degree of interpolating functions, p , is progressively increased. This method has been analysed during the past ten years and there is some very promising software development [1] which proves the superiority of the p -version over the h -version. A combination of the h - and p -version is called the hp -refinement. C^0 elements are used in most cases, see e.g. ref.[2-6], articles, where C^1 elements are used, are quite rare [7-9]. In nonlinear problems only a few results have been obtained till now and all of them use h -refinement [10-12].

The nonlinear surface creation problem, which is presented in reference [13], is solved here by FEM using p -adaptive hierarchical elements. The functional under minimisation is the area of the surface

$$S = \int_A \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA \quad (1)$$

It is not quadratic and has to be solved iteratively. The constraint is the volume enclosed by the surface and the xy -plane, i.e.

$$\int_A z dA = V \quad (2)$$

When bicubic Hermitian polynomials are used as shape functions to achieve C^1 continuous surfaces the mapping of a typical element e from the ξ, η -plane

to the xy-plane is

$$\begin{aligned} x^e(\xi, \eta) &= N^e(\xi, \eta) \hat{x}^e \\ y^e(\xi, \eta) &= N^e(\xi, \eta) \hat{y}^e \end{aligned} \quad (3)$$

where N^e is the shape function matrix and vectors \hat{x}^e and \hat{y}^e contain the nodal coordinates and their derivatives with respect to ξ and η . Expression for z^e is analogous in the h -refinement. In p -version also hierarchical functions are used.

2 HIERARCHICAL ELEMENTS

2.1 Hierarchical functions

The hierarchical functions are Legendre-type polynomials which have zero values and slopes at nodes, i.e. the same functions as Delpak and Peshkam used in reference [7].

The surplus function of the i :th order is defined as

$$S_i = \frac{d^i}{d\xi^i} (\xi^2 - 1)^{i+2}, \quad i \geq 0 \quad (4)$$

In figure 1 are shown the graphs of the functions $S_0 \dots S_3$.

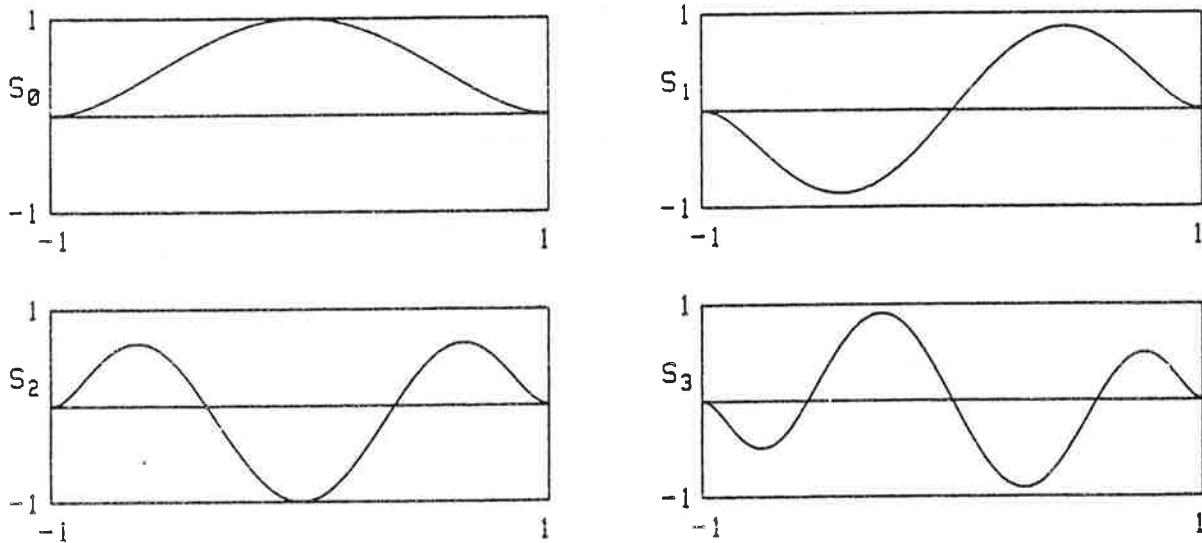


Figure 1. Hierarchical functions $S_0 \dots S_3$.

2.2 Two dimensional shape functions

Applying the one dimensional functions in the two directions ξ and η the hierarchical shape functions are obtained. We have three kinds of shape functions in the p -version:

1. Nodal shape functions. There are sixteen nodal shape functions. These are exactly the same as in the h -version i.e. products of the one dimensional parametric cubic Hermitian polynomials.

2. Side modes. There are $8(p-3)$ shape functions associated with the sides of the element when $p \geq 4$. They have the following form

$$N_k(\xi, \eta) = H_{ij}^1(\xi) S_{p-4}(\eta)$$

or

$$N_k(\xi, \eta) = H_{ij}^1(\eta) S_{p-4}(\xi)$$

where $k > 16$, $p \geq 4$, $i=0,1$, $j=1,2$ and H_{ij}^1 are the first order Hermitian polynomials and S_{p-4} are the polynomials defined in equation (4).

3. The bubble modes. There are $(p-3)^2$ internal modes when $p \geq 4$. They use hierarchical functions S_i in both ξ and η directions. So the values and the slopes of the shape functions are zero at every point of the boundary.

In figure 2 are graphs of some shape functions as an example.

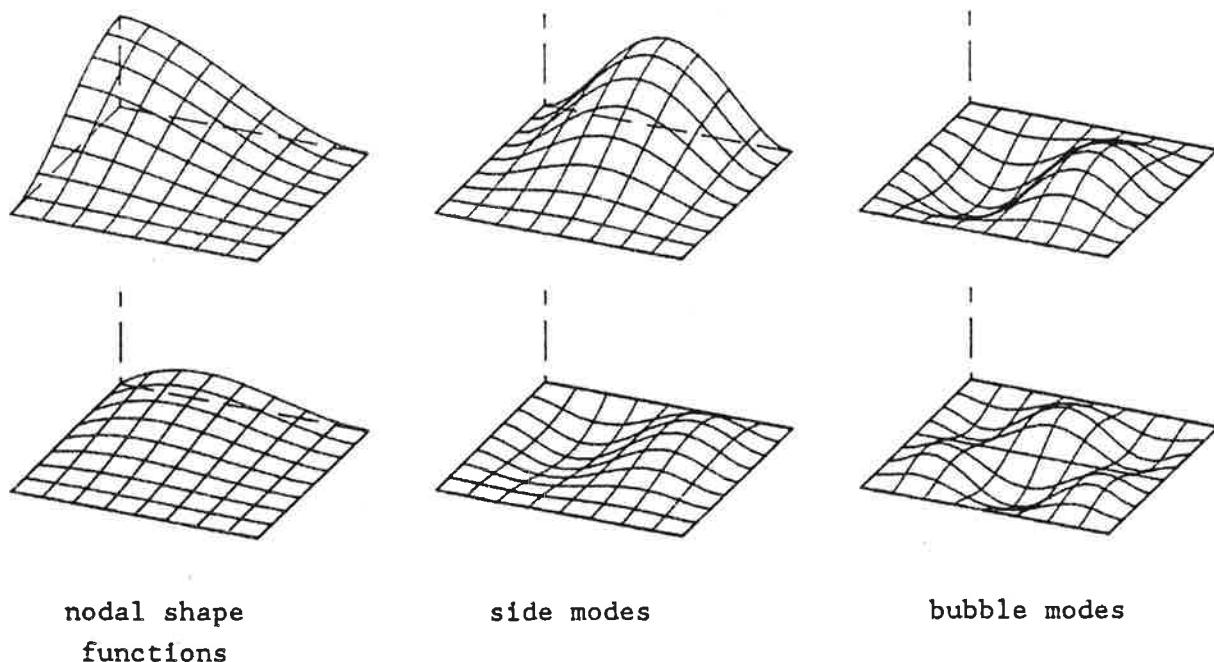


Figure 2. Examples of shape functions.

The bubble modes can be condensed in the element level with a usual manner. The side modes cause more trouble because these new degrees of freedom are shared by two elements or they affect to the boundary conditions. Also the possible different number of unknowns in each element causes extra work in book-keeping. So in the following example only the bubble modes are used in the p -refinement to increase the polynomial order.

3 EXAMPLE

The surface enclosing a given volume and having a minimum area is a sphere. Thus the test example is a spherical cap. For symmetry reasons only a quarter of a cap is considered. The example is calculated by the computer program developed. As boundary conditions the function values are fixed to zero at the outer edge. The iteration is stopped when the relative change in the surface area is below 0.01 per cent. All integrations are performed numerically. The number of Gaussian quadrature points is increased along with the degree of the shape functions. For example in calculating the area of the surface in equation (1) the number of integration points in both directions ξ and η is the same as the degree of the polynomials p . To get the reference for the convergence the problem is first calculated using normal uniform h -refinement. The used element meshes are shown in figure 3.

In the p -refinement the number of elements is fixed to one and only the degree p and at the same time the number of the shape functions is increased. The experimental convergence rates are shown in figure 4. The error e_{r1} is the relative error in the area of the surface

$$e_{r1} = \frac{|S - S_n|}{S} \quad (6)$$

where S is the exact area of the cap and S_n the computed area of the surface. The solid line is for the p -refinement and the dashed line for the h -refinement. The performance of the h -version is almost linear in this log-log scale and the downward slope is about 1.0. With the p -refinement the error decreases first quite fast, downward slope is about 3.5. But when $p \geq 7$ the results get worse although the number of degrees of freedom is increased. One explanation is that the area is so near to the right one, error is less than 0.5%, that the higher order polynomials, which cause some oscillations to the surface, can not improve the area anymore.

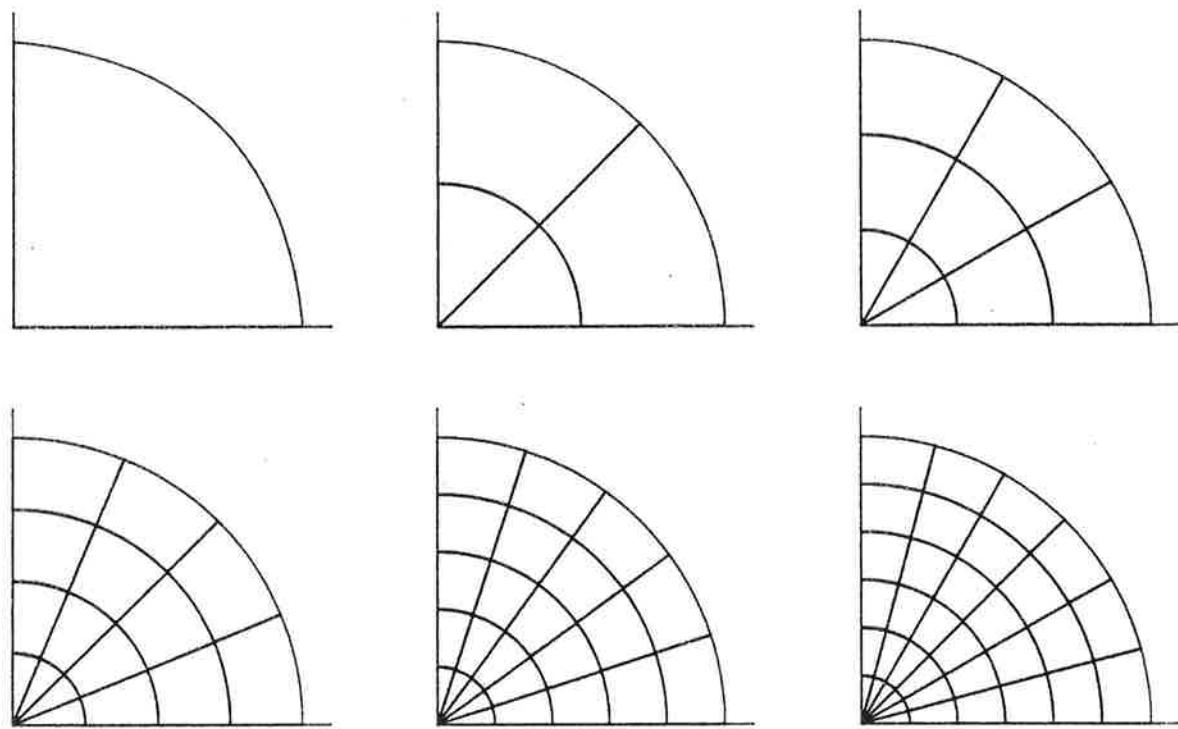


Figure 3. Spherical cap: symmetric quadrant meshes.

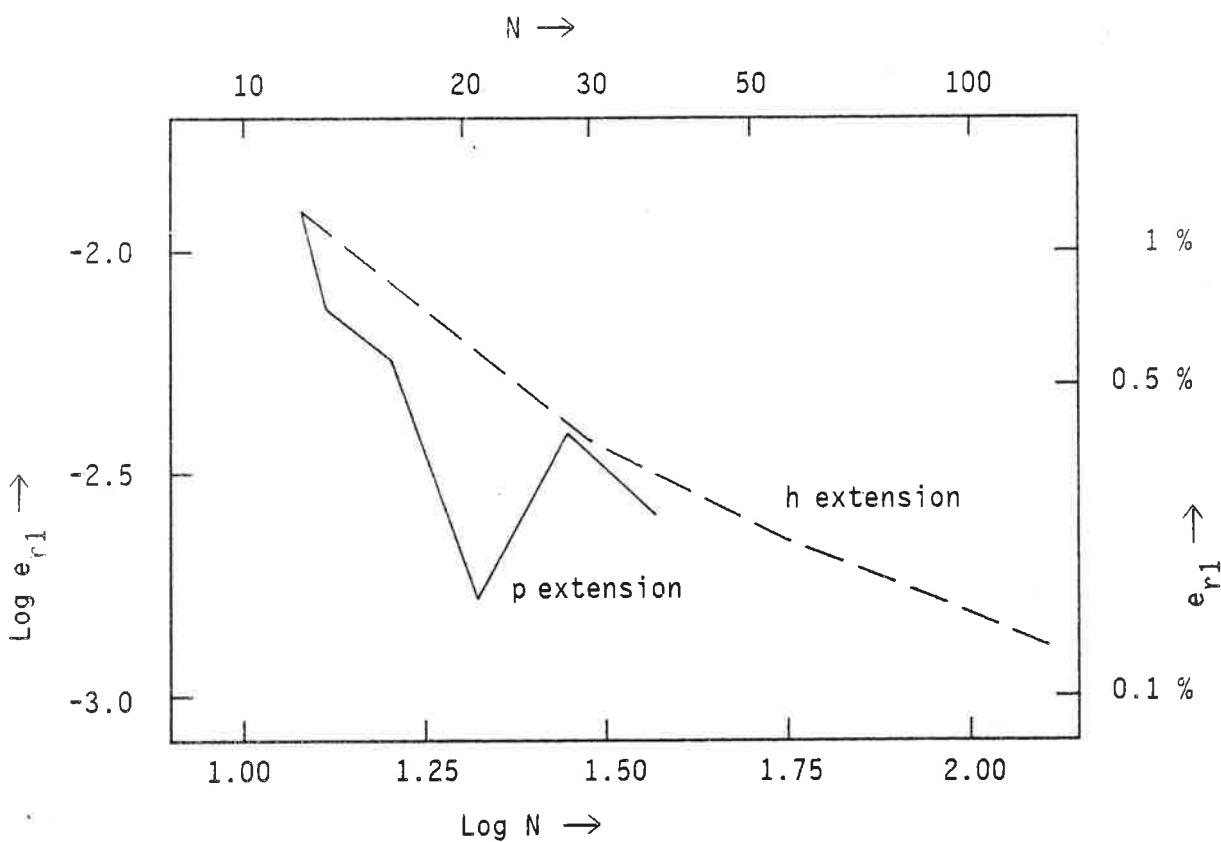


Figure 4. Experimental rates of convergence for the h and p extensions with respect to error e_{r1} .

To compare the results another error measure e_{r2} is also used. It is the relative error of the function value at the middle point (with one element its ξ and η coordinates are zero, with four elements it is in the middle node).

$$e_{r2} = \frac{|z_0 - z_n|}{z_0} \quad (7)$$

where z_0 is the exact value and z_n is the computed value. The rates of convergence using this error are shown in figure 5. In this case the h -refinement does not reduce the error from the value 20% even if a very fine element mesh is used. The p -refinement behaves much better. Compared to the figure 4 the numbers of degrees of freedom are slightly different because in this example also the function values at the highest point of the cap are fixed.

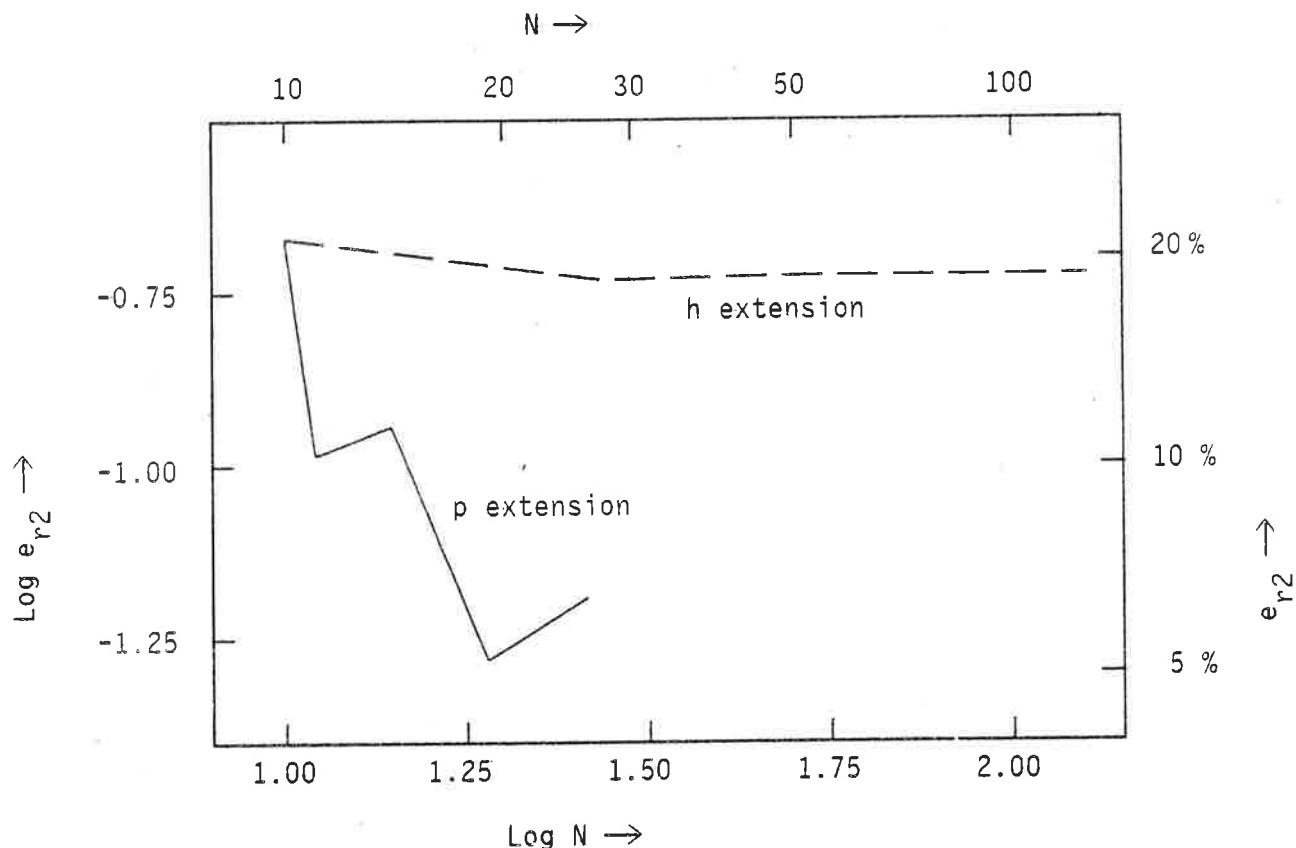


Figure 5. Experimental rates of convergence for the h and p extensions with respect to error e_{r2} .

To compare the time spent in calculations in figure 6 is shown the error e_{r2} as a function of the computer time used. All calculations are made with Hewlett-Packard 217 desktop computer using program language BASIC. The reading

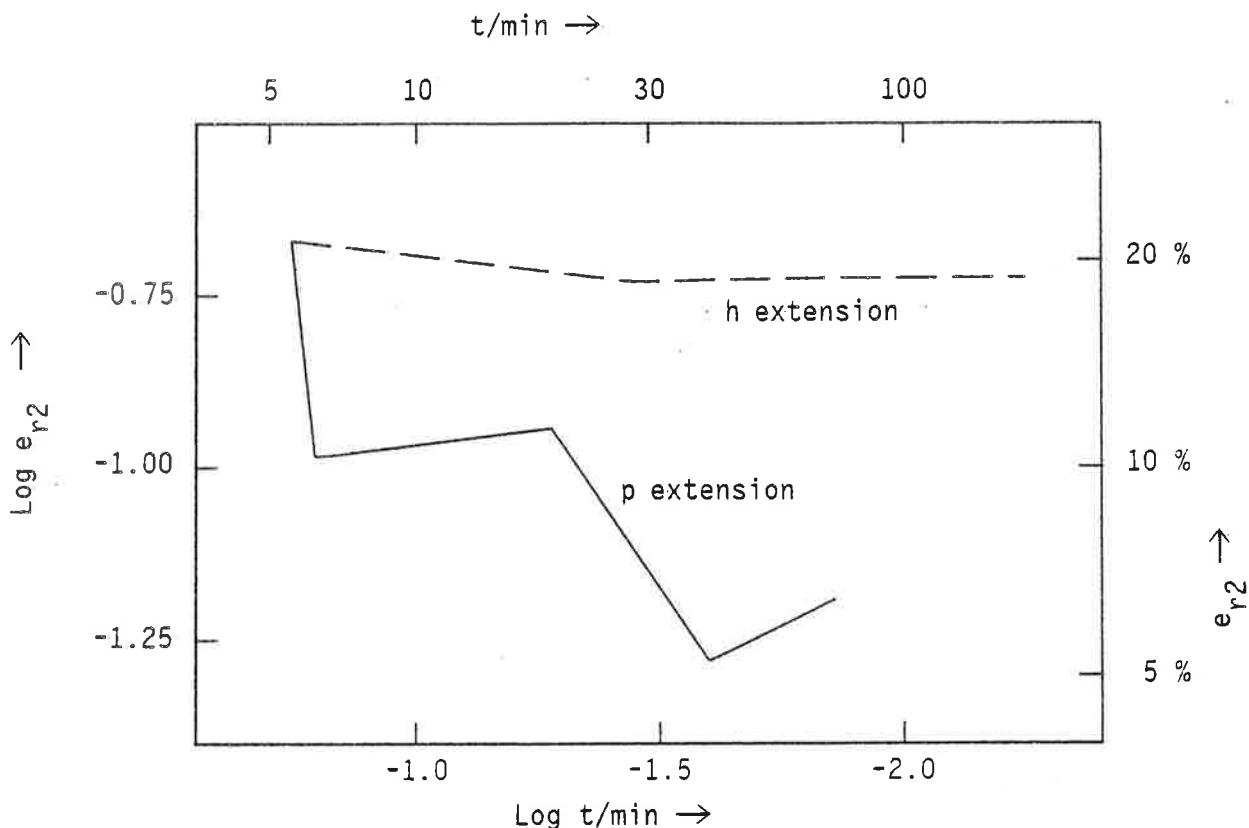


Figure 6. The error e_{r2} as a function of time.

of the input data is not included in this time. This is in favor of the h -refinement because in the p -refinement the amount of generated data is smaller. The graphs in figures 5 and 6 resemble each other. Only difference is that with the p -refinement the convergence rate is slower when time is the argument. The reason for this is clearly seen in figure 7 where it is shown how the computer time depends of the number of degrees of freedom. In the p -version the time per degree of freedom is greater because it uses more complicated shape functions and more integration points in every element although there are fewer elements. The number of iteration cycles in the h -version was five with all element meshes used. In the p -version the number of iteration cycles was five when $p=4,5$ and six when $p \geq 6$.

4 ACKNOWLEDGEMENTS

The financial support received from the Academy of Finland and the Foundation of Tampere Research is gratefully acknowledged.

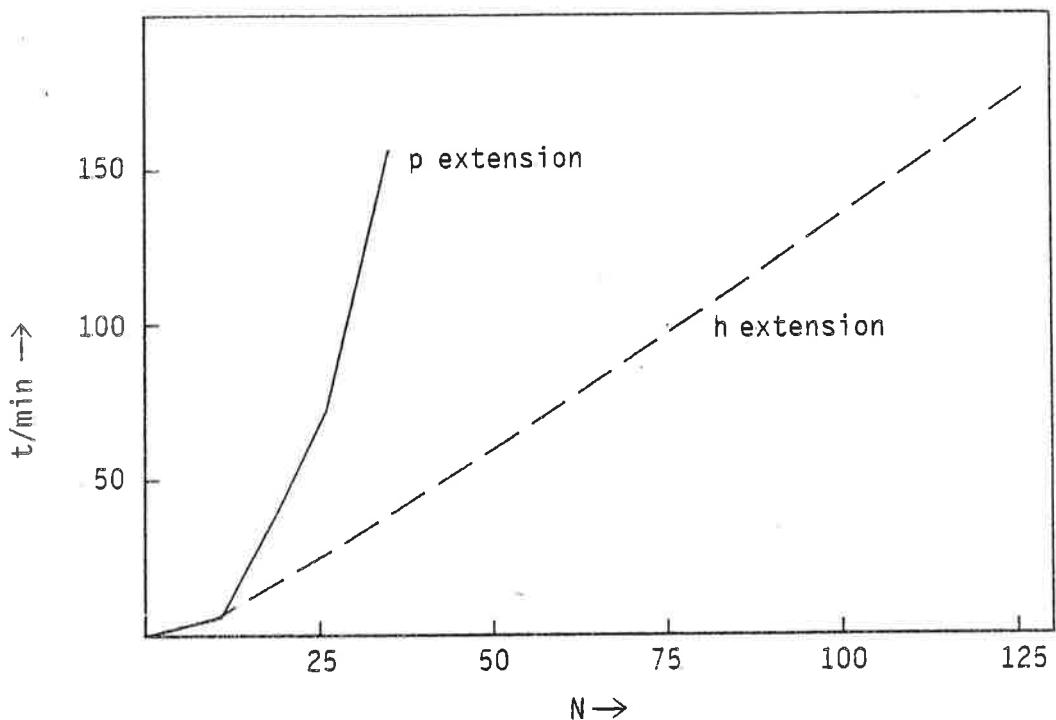


Figure 7. The computer time used as a function of the number of degrees of freedom.

5 REFERENCES

- [1] B.A.Szabó, PROBE: theoretical manual, Release 1.0, NOETIC Technologies Corporation, St.Louis, 1985.
- [2] A.Peano, A.Pasini, R.Riccioni and L.Sardella, 'Adaptive approximations in finite element structural analysis', Computers & Structures, 10, 333-342 (1979).
- [3] I.Babuska, B.A.Szabó and I.N.Katz, 'The p-version of the finite element method', SIAM J. Numer. Anal., 18, 515-545(1981).
- [4] O.C.Zienkiewicz, J.P.de S.R.Gago and D.W.Kelly, 'The hierarchical concept in finite element analysis', Computers & Structures, 16, 53-65(1983).
- [5] I.Babuska and M.Vogelius, 'Feedback and adaptive finite element solution of one-dimensional boundary value problems', Numer.Math., 44, 75-102(1984).

- [6] J.E.Schiermeier and B.A.Szabó,'Interactive design based on the p-version of the finite element method',Finite Elements in Analysis and Design,3, 93-107(1987).
- [7] A.Peano,'Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending',Comp.& Maths.with Appl.,2,211-224 (1976).
- [8] R.Delpak and V.Peshkam,'A study of the influence of hierarchical nodes on the performance of selected parametric elements',Int.j.numer.methods eng., 22,153-171(1986).
- [9] P.O.Friberg,'An error indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical finite element method',Int.j.numer.methods eng.,23, 91-98(1986).
- [10] W.C.Rheinboldt,'Error estimates for nonlinear finite element computations', Computers & Structures,20,91-98(1985).
- [11] E.Rank and H.Werner,'An adaptive finite element approach for the free surface seepage problem',Int.j.numer.methods eng.,23,1217-1228(1986).
- [12] M.Bieterman,J.E.Flaherty and P.K.Moore,'Adaptive refinement methods for non-linear parabolic partial differential equations',in I.Babuska, O.C.Zienkiewicz,J.Gago and E.R.de A.Oliveira (eds),Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations,John Wiley & Sons, New York,1986.
- [13] A.Pramila and S.Virtanen,'Surfaces of minimum area by FEM',Int.j.numer. methods eng.,23,1669-1677(1986).

