

**Tampereen teknillinen korkeakoulu
Konetekniikan osasto
Teknillinen mekaniikka**

Raportti 29



**Tampere University of Technology
Department of Mechanical Engineering
Applied Mechanics**

Report 29

Antti Pramila (ed.)

**II SUOMEN MEKANIKKAPÄIVIEN
ESITELMÄT**

**Proceedings of the 2nd Finnish
Mechanics Days**

**Tampere University of Technology,
Tampere, Finland**

2.-3.9.1985

Tampere 1985

UDK 624.073

ISBN 951 - 997 - 0

ISSN 0356 - 7060

ESIPUHE

Tämä raportti sisältää II Suomen mekaniikkapäivillä Tampereella 2.-3 syyskuuta 1985 pidetyt esitelmät. Ne on painettu offset-tekniikkaa käyttäen esitelmöitsijöiden lähettämistä painovalmiista arkeista, joten kukin kirjoittaja vastaa mahdollisista virheistään.

Ensimmäisillä Suomen mekaniikkapäivillä Oulussa 21.-22 toukokuuta 1982 pidettiin 20 esitelmää. Nyt esitelmien lukumäärä on kasvanut 39:ään. Esitelmien lukumäärän kaksinkertaistuminen on nähdäkseni seurausta koko mekaniikan ja lujuusopin kentän merkityksen kasvusta. Teknologian vieminen entistä vaativampiin olosuhteisiin - sekä rakenteiden ja koneiden koon kasvu ovat toisaalta lisänneet entistä perusteellisempien analyysien ja selvitysten tarvetta ja toisaalta tietokonetekniikan kehitys on tarjonnut näihin välineet. Tämä tarpeen ja tarjonnan yhteisvaikutus on vauhdittanut niin laskennallista kuin kokeellistakin tutkimusta.

Tämänkertaisten mekaniikkapäivien organisoinnista on vastannut järjestelytoimikunta:

Antti Pramila, puh.joht.
Hannu Outinen
Matti Mikkola
Tuula Granroth, siht.
Pia Kaila, siht.

Käytännön järjestelyihin on ottanut osaa koko Teknillisen mekaniikan laitoksen henkilökunta.

Päivien pääesitelmän piti professori O.C. Zienkiewicz,
Swansea yliopistosta. Hän esitti laajan yleiskatsauksen
mekaniikan ja lujuusopin numeeristen menetelmien nykytilaan
ja tulevaan kehitykseen. Professori Zienkiewiczien esitelmän
tiivistelmä on painettu tämän raportin ensimmäisille sivuille.

Tampereella 31.7.1985

Professori Antti Pramila
Järjestelytoimikunnan puheenjohtaja

SISÄLLYSLUETTELO

O.C. Zienkiewicz	1
Iterative methods and hierarchical approaches; a prospect for the future of the finite element method	
M. Mikkola	35
Deformoituvan kappaleen suuret siirtymät	
R. Stenberg	45
Analysis of some mixed finite element methods for the stokes problem in R^3	
J. Aalto, E-M. Salonen	53
A triangel non-conforming plate bending element	
J. von Boehm, R. Rätty, H.M. Isomäki	61
About the chaotic motion of the classical periodically driven damped duffing's oscillator	
A. Pramila, S. Virtanen	69
Creation of surfaces of minimum area enclosing given volume by fem	
T. Mikkola, H. Talja	85
Murtumistekniikan soveltaminen rakenteiden analysoinnissa	
S. Räsänen, R. Salminen, E-M. Salonen.....	107
Ideal fluid flow, oblique neumann boundary condition and finite elements	
M. Määttänen	117
Ympyräsynterikuoren likiratkaisu	
H. Outinen	125
Ohuen pyörähdyskuoren rotaatiosymmetrinen statiikka	

S-G. Sjölin	139
Epälineaarisen viskoelastisen rakenteen stabiliteettianalyysi	
P. Hassinen	151
Bilineaarisesti kimmoisella alustalla olevan laatan lommahdus	
J. Köliö	159
Kokeellinen esikäsittelijä jäykistettyjen ohutkuorimallien luomiseen	
J. Matusiak	169
Tasaisessa jäässä kulkevaan alukseen kohdistuvat kuormat ja aluksen vasteet	
J. Nevaranta	185
Itseherätteisen värähtelyn minimointi paperikoneen kalanterissa	
M. Tervonen	193
Paperikoneen konekalanterin värähtelymalleista	
K. Tikka	195
Laiva- ja offshore-rakenteiden väsymisluotettavuuden määrittelyyn käytettyjen menetelmien vertailu	
R. Lindberg	207
Liitoksen toiminnan vaikutus mastojäykistetyin teräsbetonikehän muodonmuutoksiin ja rasituksiin	
P. Piila	219
Jatkuvan hauraan aineen murtumismalli ja sen soveltaminen betoniin	
R. Lindberg, T. Turunen	229
Tartuntajännebetonirakenteen pitkäaikaiskäyttäminen	
M. Leskelä	241
Betonin murtoehdot ja epälineaariseen kimmoisuuteen perustuvat jännitys-muodonmuutos-mallit	
R. Turunen	251
Measurements of guyed mast dynamic properties at Ylläs, Finland	

M- Rätty, J. von Boehm, H.M. Isomäki	261
Chaotic motion of a damped classical oscillator driven by an amplitude-modulated periodic impulsive force	
H. Isomäki, J. von Boehm, R. Rätty	263
Chaotic oscillations of an impacting body	
J. Kaski, J. Kinnunen, V. Siekkinen	273
Bending wave generation in the drill rod	
H. Salmenperä	283
Geodeettiset ja fotogrammetriset menetelmät muodon ja muodon- muutosten mittauksessa	
V. Karppinen	291
Kimmoaallon etenemisen seuraaminen holografiaa soveltaen	
M. Lähteenmäki	299
Kosketusongelman variaatioperiaate siirtymämenetelmälle	
M. Heinisuo, A. Miettinen	315
Laatan ja vetoakestävättömien viivamaisten tukien kitkaton kosketus	
E. Pulkkinen	327
Jäävoimien määrittämisestä elementtimenetelmällä	
T. Salmi	335
Käyrä isoparametrinen palkkielementti	
P. Tuominen	351
Kaaren jäykkyyskertoimien määrittäminen jännitysresultanttien lausekkeista	
R. Kouhia	363
Epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaisumenetelmiä	
J. Laukkanen	373
Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisumenetelmistä käytettäessä elementtimenetelmää	
R. Iivonen, K. Vaittiniemi, E. Niemi	383
Arinarakenteen estetty vääntö liitosten joustavuus huomioon- ottaen	

ITERATIVE METHODS AND HIERARCHICAL APPROACHES; A PROSPECT FOR THE FUTURE OF THE FINITE ELEMENT METHOD

O.C. Zienkiewicz, F.R.S.

ABSTRACT

The paper discusses important trends in the finite element method today and in particular singles out the development of iterative processes for equation solving and error estimation. Such procedures as viscous relaxation and its acceleration are introduced. Hierarchical concepts are outlined and shown to provide an ideal setting for iteration as well for error estimation and adaptive refinement.

The developments outlined are of particular importance in connection with the use of parallel processing micro-computers and similar hardware developments.

1 INTRODUCTION

The 'finite element method' today is a tool without which no industrial organization can compete in efficient design of its mechanical or structural products. Indeed in other fields of design involving the determination of electro-magnetic fields or of fluid flow characteristics and even in production processes themselves such as metal and polymer forming its uses are increasing daily and superceeding trial and error and physical modelling procedures. This unprecedented expansion of numerical methodology occurred in the last quarter century and was made possible by the birth of the computer which paralleled the development. The figures 1-6 show a selection of some current applications and illustrate both the complexity and variety of these. This is made possible by the growth of machine capability and underlying theory.

With this success already achieved it would seem that the pace of research and development would be slackening and that few breakthroughs in basic methodology could be anticipated. This is not the case as is witnessed by the exponential growth of publications (exceeding some 10000 in the last year alone). What motivates this activity, and in which direction progress can be expected? In the writer's view the motivation is provided by:

- (a) the need to solve problems of increasing size and non-linear complexity
- (b) the need to solve new areas of physics and engineering for which new formulations and indeed new physical laws are required

and finally

- (c) the need to increase the confidence of the users by providing them with quantitative accuracy checks in place of qualitative, 'experience' assessments.

While present day techniques are in principle capable of dealing with most of the problems posed, the possibilities opened up by the methodology and the practical demand for it exceed often the computational facilities available (despite the dramatic hardware improvements in recent years). To discuss fully the present activities needs a text rather than a short paper. For this reason we shall concentrate here on one aspect of current research which promises to provide answers to the first and last of the needs posed above.

The key here is the development of iterative procedures and the use of hierarchical forms of approximation to improve the convergence. As the latter also conveniently give error estimating capabilities several objectives appear to be achieved here simultaneously.

We shall introduce these concepts by

- (1) outlining the general nature of finite element approximation,
- (2) showing the relation of explicit transient solution methods to certain simple iterative processes,
- (3) showing how acceleration of convergence can be achieved,
- (4) introducing the hierarchical concept and showing its relation to multigrid processes of further accelerating convergence

and finally

- (5) showing how error estimates and adaptive processes arise inherently from hierarchical forms.

All the above developments are current topics of research which promise to give a dramatic improvement and extension of power of the finite element procedures to the practitioner. However much yet has to be done.

2 THE BASIC NATURE OF THE DISCRETIZATION PROCESSES

To set the stage we shall repeat the essence of discretization (or semi discretization) processes inherent in the generalized finite element method [1] which includes as its particular cases the 'standard' f.e.m., the finite difference method, the boundary element methods, etc. We shall consider first the solution of a continuum set of differential equations of the type

$$c \frac{\partial \phi}{\partial t} + L\phi + q = 0 \quad 1(a)$$

in a spatial domain Ω with boundary condition

$$G\phi = 0 \quad 1(b)$$

on the boundary Γ .

In above L and G are appropriate linear or non linear operators in

space, c is a space dependent parameter and ϕ is the unknown function.

The reader will recognise here as particular cases such problems of his everyday experience as heat transfer equations, electro magnetic phenomena, elastic problems etc.

The essence of approximation is the replacement of the infinite set ϕ by finite set $\hat{\phi}$

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (2)$$

where N_i are predetermined shape (or basis) functions in the spatial co-ordinates x and a_i unknown parameters.

To obtain a discrete set of equations satisfying approximately the equations (1) a weighted residual (or weak) set is created by writing

$$\int_{\Omega} W_j \left(c \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + L\hat{\phi} + q \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_j G\hat{\phi} d\Gamma = 0 \quad (3)$$

where $j = 1-n$ and the test (or weighting functions) W_j and $\bar{W}_j$ are suitably prescribed. For linear operators which do not vary with time a set of ordinary differential equations in n unknowns a_i arises in the form

$$\underline{C} \dot{\underline{a}} + \underline{K} \underline{a} + \underline{f} = \underline{0} \quad (4)$$

which can be solved by "standard" procedures (the $\dot{\underline{a}}$ in above represents time differentiations).

More generally in non linear problems a more complex form is obtained as

$$\underline{C} \dot{\underline{a}} + \underline{\psi}(\underline{a}) = \underline{0} \quad (5)$$

Detailed examples of such forms using various finite element formulations are available in texts [2] and [3] and we shall not elaborate on these here, except to remark that in self adjoint problems the "best" approximation involves the use of

$$W_j = \bar{W}_j = N_j . \quad (6)$$

This is the so called Galerkin-Bubnov weighting procedure. Now, for self adjoint problems, the matrices $\underline{C}$ and $\underline{K}$ are symmetric and positive definite.

Steady state problems involve simply the solution of

$$\underline{K} \underline{a} + \underline{f} = \underline{0} \quad (7)a$$

or

$$\psi(\underline{a}) = 0 \quad (7)b$$

and here arise the most costly parts of the solution, utilizing much computer storage and many operations.

For example if we consider the solution of the linear simultaneous equation system of equation (7)a by Gaussian elimination in a one, two or three dimensional cube (d = dimension) with banded connectivity using N elements per side (viz. Fig. 7) we find that the number of operations NOP are

$$NOP \sim N^d NBAND^2 \sim N^d N^{(d-1)2} \sim N^{3d-2} \quad (8)$$

and the storage requirements (NSTORE) are

$$NSTORE \sim N^d NBAND \sim N^{2d-1} . \quad (9)$$

Even with rapid growth of both storage and speed capabilities of computers the requirements for three dimensional problems present a serious limitation especially if non linear situations (such as

given by Eq. (7)b) are considered. Here, even the best techniques, require a complex computer usage of 5-10 times of that applicable to linear situations if standard solution procedures are used. For this reason it is useful to explore the possibilities of iterative approaches.

3 TRANSIENTS AND ITERATION

In the transient linear form of Eq. (4) in principle at least, analytical processes can be used in the time domain solution - in practice if non-linear forms (such as Eq. (5)) have to be tackled various numerical time integration processes are used involving repeated equation solving (4).

For example using the simplest approximation of Eq. (4) we have

$$\underline{C}(\underline{a}_{n+1} - \underline{a}_n)/\Delta t + \underline{K}(\theta \underline{a}_{n+1} + (1-\theta)\underline{a}_n) + \underline{f}_\theta = \underline{0} \quad (10)$$

or

$$\underline{a}_{n+1} = (\underline{C} + \theta \underline{K} \Delta t)^{-1} (\underline{C} \underline{a}_n - \underline{K} (1-\theta) \underline{a}_n \Delta t - \underline{f}_\theta \Delta t) \quad (10)$$

where $0 \leq \theta \leq 1$ and subscripts $n+1$ and n denote two sets of values of $\underline{a}$ separated by Δt interval. Thus in general at each time step a set of equations of the same size as in the static problems $(\underline{K} \underline{a})$ has to be repeatedly solved.

If $\theta = 0$ and the matrix $\underline{C}$ is approximated by a diagonal form * the equation solving becomes trivially simple and so called explicit procedure arises.

* The diagonal form of $\underline{C}$ arises naturally in finite difference approximations but if the 'best', Galerkin, weighting is used its diagonality can only be achieved by such further approximations such as numerical quadrature etc. [2] [4]. However, now quite serious losses of accuracy can occur. These can be countered by the use of a corrective term in the algorithm of Eq. (11) by adding to $\underline{\psi}(\underline{a}_n)$ the difference between lumped and consistent approximations. This is fully discussed elsewhere [5].

Now

$$\tilde{a}_{n+1} = \tilde{a}_n + \Delta \tilde{a}_n \quad (11)a$$

where

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{a}_n &= -\Delta t \tilde{C}^{-1} (\tilde{K} \tilde{a}_n + \tilde{f}_n) \\ &= -\Delta t \tilde{C}^{-1} \psi(\tilde{a}_n) \end{aligned} \quad (11)b$$

the last form generalizing to non linear problems.

The computation only involves the evaluation of the vector $\psi(\tilde{a}_n)$ at each time step.

Indeed in this computation no banding (numbering) problems arise and the process lends itself to simple programming irrespective of its "dimensionality". It is perhaps for this reason that the most dramatic examples of applications illustrated in the beginning of this paper concern dynamic problems in which such explicit processes were used.

As inevitably transient systems come to rest (as indeed is manifested by the nose cone example of Fig. 1) the static problem is surely a particular case and can benefit from the achievements of the transient solution algorithm. Thus for instance the solution of

$$\tilde{K} \tilde{a} + \tilde{f} = \tilde{0} \quad (12)a$$

or

$$\psi(\tilde{a}) = \tilde{0} \quad (12)b$$

could be considered as 'terminal' stages of solving

$$\tilde{C} \dot{\tilde{a}} + \tilde{K} \tilde{a} + \tilde{f} = \tilde{0} \quad (13)a$$

or

$$\underline{C} \underline{a} + \underline{\psi}(\underline{a}) = \underline{0} \quad (13)b$$

and the explicit algorithm of Eq. (11) could be used effectively.

This idea appears to have been first suggested by Swedish scientist Karrholm in 1958 [6] and formed the basis of so called 'dynamic relaxation' procedures of the early sixties [7,8] in which the second order time derivative is used in Eq. (13) in addition to the first order viscous terms. We shall only consider here the form suggested by Eq. (13) and term it thus 'viscous relaxation'.

Let us now consider the efficiency of such a process. To simplify the arguments we shall only discuss the linear form of Eq. (13) coupled to the explicit algorithm (11). Non linear problems can in general be subject to same arguments noting that in a small time step Δt we can always approximate

$$\underline{\psi}(\underline{a}) \approx \underline{\psi}(\underline{a}_n) + \underline{K}_T \Delta \underline{a} \quad (14)$$

where $\underline{K}_T$ is the Jacobian (tangent) matrix.

The linear problem has the following well known characteristics

- (1) the maximum value of Δt is limited for stability by the highest eigenvalue of

$$(\underline{\lambda}_i \underline{C} + \underline{K}) \underline{a} = \underline{0} \quad (15)a$$

or

$$(\underline{\lambda}_i \underline{I} + \underline{C}^{-1} \underline{K}) \underline{a} = \underline{0} \quad (15)b$$

This means that in practice

$$\Delta t \sim 1/\lambda_{\max} \quad (16)$$

- (2) the solution $\tilde{a}$ approaches the steady state value $\tilde{a}_\infty$ in a manner governed by the smallest eigenvalue $\lambda_{\min}$ as

$$\tilde{a} = \tilde{a}_\infty + e^{-\lambda_{\min} t} (\tilde{a}_0 - \tilde{a}_\infty) \quad (17)$$

Thus the computation time to achieve a given error percentage of the steady state (static) value $\tilde{t}$ (or the number of time steps required) is given by

$$\text{NSTEP} \sim \lambda_{\max} / \lambda_{\min} \quad (18)$$

and increases rapidly with the value of condition number of the matrix $\tilde{C}^{-1}K$.

If we consider the same type of problems as illustrated in Fig. 7 for comparison of performance with that of the Gaussian elimination process we first note that

$$\lambda_{\max} / \lambda_{\min} \sim N^m \quad (19)$$

where m is the order of equations occurring in the operator L (of Eq. (1)).

Immediately we see that a viscous relaxation solution which demands N^d operations in a single time step, results in total number of operations

$$\text{NOP} \sim N^{m+d} \quad (20) a$$

However the number of storage locations now needed is

$$\text{NSTORE} \sim N^d \quad (20) b$$

For most common problems $m = 2$ and in table 1 we contrast the number of operations and storage locations for both Gaussian elimination and viscous relaxation in such problems.

Table 1. Operation and storage counts for Gauss elimination, viscous relaxation and accelerated viscous relaxation for d-dimensional N -cube ($m = 2$ -order of operator).

d	GAUSS EL.		V.R.		A.V.R.	
	NOP	NSTORE	NOP	NSTORE	NOP	NSTORE
1	N	N	N^3	N	N^2	N
2	N^4	N^3	N^4	N^2	N^3	N^2
3	N^7	N^5	N^5	N^3	N^4	N^3

Immediately it is evident why iteration of the kind suggested has not gained popularity in one or two dimensional problems. The solution operations in two dimensions are of the same order for both procedures. As the elimination process has the advantage of being able to treat several 'load' vectors simultaneously in linear problems, this creates for it, a great advantage in two dimensional linear problems which has guided the direction of finite element development.

In three dimensional problems however the operations count gives the iteration procedure a considerable advantage. This coupled with a very substantial storage reduction and possible use of parallel processing and micro-computers makes iteration competitive here even in the linear situations. For non linear problems where multiple load vectors can not be treated simultaneously and where some form of iteration is imperative the prospects are even brighter. However we still note that the iteration has a slow convergence and in the following section we shall address the problem of its acceleration.

In the solution of steady state linear problems the choice of the diagonal 'damping' matrix $\tilde{C}$ is somewhat arbitrary (providing all terms are taken as positive). To minimize the maximum value of eigenvalue $\lambda_{\max}$ it is convenient to take

$$C_{ii} = K_{ii} \quad (21)$$

and thus limit $\lambda_{\max}$ to unity (with $\Delta t_{\max} = 1$).

It is readily seen that with above choice the time stepping problem of Eq. (11) becomes identical to the 'point Jacobi' procedure [9]. This is known not to be the best technique but preserves considerable merits of simplicity.

4 ACCELERATED VISCOUS RELAXATION (AVR)

If we consider the time stepping process of viscous relaxation as a purely iterative process of solving Eq. (12) then many acceleration processes become available. In all of these the value of Δa_n is computed as in Eq. (11) but the new value of a_{n+1} is found as

$$a_{n+1} = a_n + \alpha \Delta a_n \quad (22)$$

where α is an "over-relaxation factor".

A very simple and effective procedure of determining this factor has recently been suggested by the authors [10].

This follows the observation that after a few iterations the higher modes of behaviour of the solution are filtered out and this settles to the solution corresponding to the lowest eigenmode (viz. Eq. (17))

$$a = a_{\infty} + e^{-\lambda_{\min} t} (a_0 - a_{\infty}) \quad (23)$$

On differentiation of above we have (approximately)

$$\begin{aligned} \Delta a &= -\lambda_{\min} \Delta t e^{-\lambda_{\min} t} (a_0 - a_{\infty}) \\ &= -\lambda_{\min} \Delta t (a - a_{\infty}) \end{aligned} \quad (24)$$

or

$$\tilde{a}_\infty = \tilde{a} + \frac{1}{\Delta t \lambda_{\min}} \Delta \tilde{a} \quad (25)$$

Comparison with Eq. (22) provides an estimate of the value of α as

$$\alpha = 1/\Delta t \lambda_{\min} \quad (26)$$

which is useful providing $\lambda_{\min}$ is known. As in general it is not, we can obtain a working approximation to it by further differentiating Eq. (24). Thus

$$\Delta(\Delta \tilde{a}) = -\lambda_{\min} \Delta t \Delta \tilde{a} \quad (27)$$

and pre-multiplying by $\Delta \tilde{a}^T$ gives

$$\lambda_{\min} = -\Delta \tilde{a}^T \Delta(\Delta \tilde{a}) / \Delta \tilde{a}^T \Delta \tilde{a} \Delta t \quad (28)$$

or

$$\alpha = -\Delta \tilde{a}^T \Delta \tilde{a} / \Delta \tilde{a}^T \Delta(\Delta \tilde{a}) \quad (29)$$

This relation allows us to compute α when the standard iteration process yields values of the above quantity which are nearly constant (say when $|\Delta \alpha / \alpha| < 0.05$) and to update its value subsequently.

The process is not dissimilar to that used in the Aitken accelerator [11,12] and becomes identical to it if pre-multiplication of Eq. (27) is made by $\Delta(\Delta \tilde{a})$.

It can also be shown that it is essentially a line-search technique of minimizing the projection of the error on $\Delta \tilde{a}$.

In Fig. 8 we show how in the simple context of a heat conduction equation in a square domain the use of the AVR procedure reduces the number of time steps required for a given accuracy in the problem discussed earlier by an order N . The table 1 shows the

advantages which can now be gained for the process applied to this particular problem with regards to NOP counts.

Naturally the computational times are only proportional to the NOP and in fairly large problems the cross-over point for actual economy must be carefully determined. Preliminary experiments of a numerical kind show that even in 2D situations such economies can be apparent and further, that non linear solutions are not much more costly than linear ones. In Fig. 9 we show a solution of a Poisson equation type problem in which either the permeability or the load terms are dependent on the function ϕ . The differences in computation times and the number of iteration steps are quite trivial. (This type of problem arises in the solution of semiconductor device problems or in spontaneous ignition computations).

5 HIERARCHIC FORMS AND "MULTI-LEVEL" ITERATION

The AVR iterative procedures may still show a quite slow convergence with the NOP count being proportional to the condition number of the matrix $\tilde{C}^{-1}\tilde{K}$ or $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$. It is well known that this condition number tends to infinity if "standard" finite element subdivisions are followed and size of elements decreases.

A very efficient way of avoiding this difficulty arises through the use of hierarchical finite element forms.

In the approximation procedure outlined in Section 2 we have introduced the concept of the function expansion as

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i a_i . \quad (30)$$

We shall define a hierarchical (or series) expansion by simply requiring that the shape functions N_i do not depend on the degree of subdivision n . In Fig. 10 we illustrate successive stages of a finite element refinement in a 1D problem with a simple subdivision of linear elements (h-refinement) or with increase of polynomial order (p-refinement) and note that neither set of shape

functions is hierarchic in above definition. To achieve a hierarchic form the parameters introduced with refinement are no longer the values of the function at nodal points but are the departures of the new solution due to refinement as also shown in Fig. 10. Such a hierarchical form is possible to achieve at all times providing one does not insist on the conventional meaning of nodal variables. As will be shown the formulation achieves many advantages relevant to iterative solutions.

It is of interest to observe that the hierarchical form in connection with p-refinement was first introduced as early as 1971 [13] and many developments of these have been suggested more recently [14-16]. h-refinement hierarchical elements have so far not been used but may well possess similar advantages.

Three features of hierarchic forms are immediately evident:

(I) Preservation of structure

If the steady state problem is formulated with say the crude linear mesh of Fig. 10 in terms of variables $\tilde{a}_n$ then the approximation equations for a steady state solution of Eq. (1) are

$$\tilde{K}_{nn}\tilde{a}_n + \tilde{f}_n = \tilde{0} . \quad (31)$$

If the problem is refined by addition of new variables $\tilde{a}_m$ then the resulting system becomes

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{nn} & \tilde{K}_{nm} \\ \tilde{K}_{mn} & \tilde{K}_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{a}_n \\ \tilde{a}_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{f}_m \end{Bmatrix} = \tilde{0} \quad (32)$$

in which the original matrix $\tilde{K}_{nn}$ remains embedded. This clearly is not the case in standard finite element forms.

This structure is preserved for any number of stages of hierarchic subdivision and indeed will be recognised as the characteristic of all series expansions.

(II) Reduction of condition number of $\tilde{K}$

Though standard and hierarchic forms of finite element approximation yield identical accuracy for a given stage of subdivision the resulting matrices $\tilde{K}$ have invariably a considerably lower condition number. We show as an example here the condition numbers for 2D cubic element in Fig. 11 and note that even in small assemblies better than one order of magnitude in reduction of the condition number results. Indeed it appears now that as $h \rightarrow 0$ (or $p \rightarrow \infty$) with refinements we no longer have a situation in which the condition number tends to infinity (as with standard element subdivision) [17].

Clearly if an iterative solution of the system (32) were attempted by procedures outlined previously (i.e. adding a term $\tilde{C} \dot{\tilde{a}}$ and taking $C_{ii} = K_{ii}$) then similar reductions in computational time in a VR (or AVR) type of solution are to be expected. This represents a large step forward but further possibilities emerge immediately.

(III) Multilevel iteration

If we return to the two level hierarchic forms of Eq. (31) and (32) we note that a solution of Eq. (31) provides a first approximation $\tilde{a}_n^{(1)}$ for $\tilde{a}_n$ occurring in the two level hierarchic variable approximation of Eq. (32). As $\tilde{K}_{nn}$ has a much smaller set of eigenvalues than $\tilde{K}$ the solution for $\tilde{a}_n^{(1)}$ uses much larger time steps and is more rapidly convergent than that of the whole system.

Further, the first approximation to $\tilde{a}_m^{(1)}$ obtained by iterating on the second of Eq. (32) will converge rapidly albeit with smaller time steps, as the higher modes here have only a local significance. Indeed in the special case of 1D problems where it is well known that a linear approximation produces exact nodal values this iteration is confined to the element level alone.

We can now quite generally follow the sequence of iteration (or AVR) given below now in terms of the equivalent viscous relaxation of Eq. (13).

(i) assume $\tilde{a}_m^0 = 0$

(ii) solve the first of Eq. (32) iteratively (with AVR) keeping

$$\tilde{a}_m = \tilde{a}_m^0$$

i.e.

$$\tilde{C}_{nn} \dot{\tilde{a}}_n + \tilde{K}_{nn} \tilde{a}_n + (\tilde{f}_n + \tilde{K}_{nm} \tilde{a}_m^0) = 0$$

this gives $\tilde{a}_n^{(1)}$

(iii) solve the second of Eq. (32) iteratively keeping a constant

$$\tilde{a}_n$$

$$\tilde{a}_n = \tilde{a}_n^{(1)}$$

i.e.

$$\tilde{C}_{mm} \dot{\tilde{a}}_m + \tilde{K}_{mm} \tilde{a}_m + (\tilde{f}_m + \tilde{K}_{mn} \tilde{a}_n^{(1)}) = 0$$

this gives $\tilde{a}_m^{(1)}$

(iv) Return to (ii) and repeat the cycle

Clearly the above process can be done for any number of hierarchical stages. Further it is obvious that in a general non linear problem the process is equally applicable with the evaluation of $\psi(\tilde{a}_n, \tilde{a}_m)$ using a constant value of $\tilde{a}_m$ replacing stage (ii) etc.

This sequential iteration is almost identical to the so called multi-grid methods [18,19] hailed recently as a most significant step forward in the finite difference analysis [20]. Here clearly the procedure is natural and almost obvious [21].

In practice it is not desirable to impose stringent iteration convergence criteria at the early stages of the cyclic process and we suggest that these should be only gradually 'tightened' as the

cycles proceed.

It is of passing interest here to remark that the use of a diagonal $\underline{C}$ matrix in place of a consistent one is less obvious in true time stepping solutions of transient problems. This problem, irrelevant if only steady state solutions are required and the $\underline{C}$ matrix is fictitious, is of some practical importance in dynamics and truly transient situations. Various procedures of effectively reducing the critical time step without loss of accuracy are here being investigated but we shall not enter into a full discussion at this stage.

6 HIERARCHIC FORMS, ERROR ESTIMATES AND ADAPTIVE PROCEDURES

Up to this point we have been concerned only with introducing iterative procedures into a fully discretized problem to achieve computing economy. This point has been made and well demonstrated, however, the hierarchic forms of approximation have a further advantage which can be exploited simultaneously with the iterative process. This is their capability of estimating the errors existing at any given stage of the subdivision.

We can define the local discretization error existing at any stage of solution as

$$e = \phi - \hat{\phi} \quad (33)$$

where $\hat{\phi} = \underline{N} \underline{a}$ is the approximate solution (such as for instance existing when $\underline{a}_n^{(1)}$ has been determined.

If we now introduce (iteratively) the new degrees of freedom say $\underline{a}_{n+m}$ $m = 1, 2, \dots$ then the first iterates of the corrections arise as

$$\underline{a}_{n+1} = -(\underline{f}_{n+1} + \underline{K}_{n+1, n} \underline{a}_n) / \underline{K}_{n+1, n+1} \quad (34)$$

$$\underline{a}_{n+2} = -(\underline{f}_{n+2} + \underline{K}_{n+2, n} \underline{a}_n) / \underline{K}_{n+2, n+2}$$

etc.

Approximately the error e can be written as

$$e \approx \sum_{\ell=1}^m N_{n+\ell} a_{n+\ell} . \quad (35)$$

Indeed if we find that the hierarchical additions of a are negligible, then the discretization error of the original solution is also negligible.

It is in general inconvenient to deal with local errors as defined by Eq. (33) and other measures of error are available. A convenient one is given by a scalar quantity, the energy norm of the error.

This is defined as

$$\| e \| = \left[\int_{\Omega} e L(e) d\Omega \right]^{1/2} \quad (36)$$

where L is the operator of the original Eq. (1). However, we can write on using this equation

$$Le = L(\phi - \hat{\phi}) = -(L\hat{\phi} + q) = -r \quad (37)$$

where r is the residual obtained by inserting $\hat{\phi}$ into the original equation.

Thus

$$\| e \| = \left[- \int_{\Omega} e r d\Omega \right]^{1/2} . \quad (38)$$

Now as our equations of approximations are written as integration of weighted residuals it is clear that

$$f_{n+1} + K_{n+1,n} a_n = \int_{\Omega} N_{n+1} r_{n+1} d\Omega \quad (39)$$

etc. and by virtue of Eq. (34) and (35) we can approximate the energy error by summation of terms

$$\|e\|_{n+m} = \left[\left(\int_{\Omega} N_{n+m} r_{n+m} d\Omega \right)^2 / K_{n+m,n+m} \right]^{1/2} \quad (40)$$

or more simply

$$\|e\|_{n+m} = \left[(f_{n+m} + K_{n+m,n} a_n)^2 / K_{n+m,n+m} \right]^{1/2} \quad (41)$$

The evaluation of errors by either formula is possible providing sufficient number of higher hierarchic terms is included. A modification of the formula (40) relying on the inequality

$$\left(\int_{\Omega} N r d\Omega \right)^2 \leq \int_{\Omega} N^2 d\Omega \int_{\Omega} r^2 d\Omega \quad (42)$$

has been used with considerable success [16], [22] and [23] but more recently the simpler expression (41) using two levels of additional approximation has proved very effective [24].

In Fig. 12 we show how such error estimates allow the introduction of additional degrees of freedom in an adaptive way so that only those able to correct a large amount of error are used. The interested reader will find a fuller description of the problems elsewhere. What is important at this stage is to observe the close tie up with the proposed multi-level iteration, which leads to possibilities which yet have to be explored. At this stage it is easy to forecast a possible 'new look' of future strategy, following such lines as

- (1) Division of a problem into a relatively coarse mesh of single elements and the use of a rapid iterative solutions (by AVR or similar process).

- (2) Introduction of selected, new hierarchical degrees of freedom and evaluation of their first iterates. Computation of the probable error by Eq. (41).
- (3) Further selection of the most important of the new degrees of freedom from (2) and completion of iterative solution.
- (4) Repetition of stages (2) and (3) until desired accuracy is achieved.

Such procedures, easily applicable to both linear and non linear problems, promise efficiency of computation and the advantages of being able to achieve desired accuracy level economically. The path to future research and application is clear.

8 FINAL REMARKS

In the foregoing we have mapped what promises to be an important and generally applicable evolution of the current finite element approximation procedures. Many problems, however, had to be omitted for consideration. Here we would like to list such items for extension of iterative/adaptive processes to the areas of

- (a) incompressible phenomena
- (b) coupled or mixed equation systems
- (c) hyperbolic problems (compressible supersonic flow)

In all of above considerable strides are being made but much further work is necessary. However, the advent of a new generation of parallel processors, distributed array processors and simply of coupled micro-computers will give incentive to rapid development in areas here described.

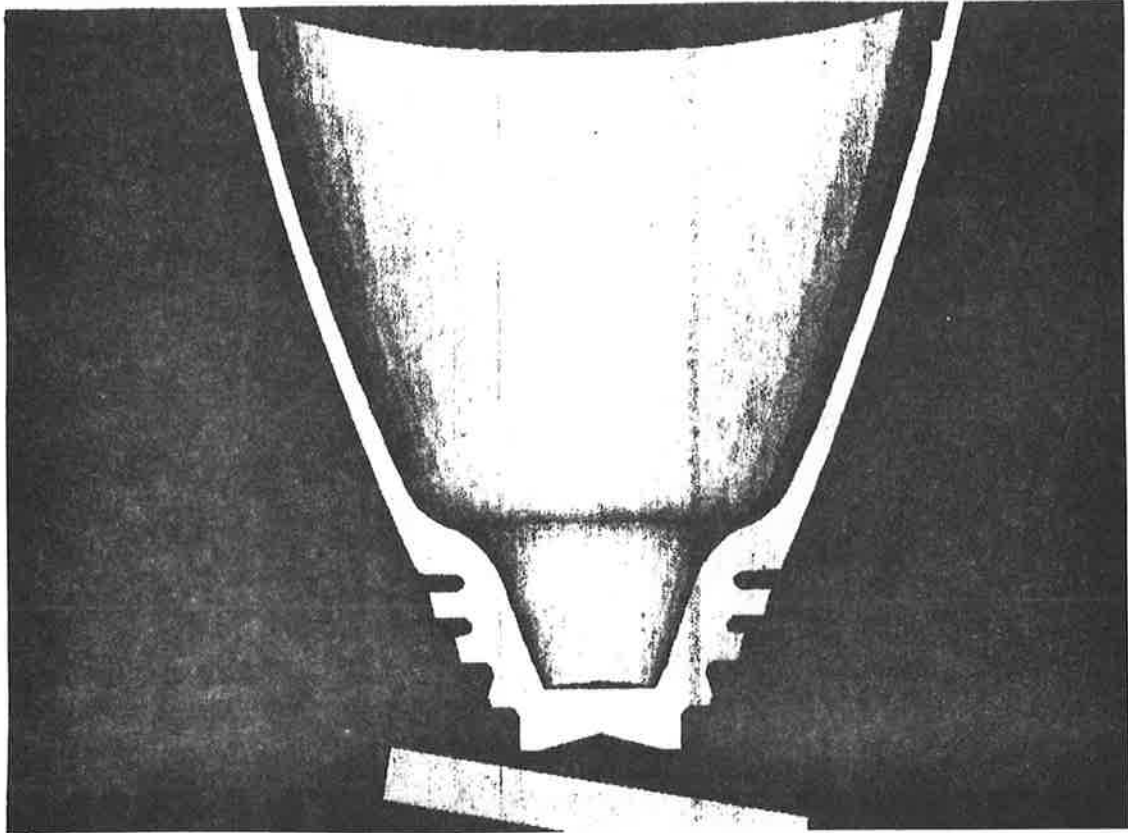
Development of automatic mesh generation and general computer graphics has been providing much useful activity in the recent years. The procedures here proposed will ease the way as only a preliminary mesh has to be generated at the outset and remaining subdivision can be done adaptively with the utmost economy.

REFERENCES

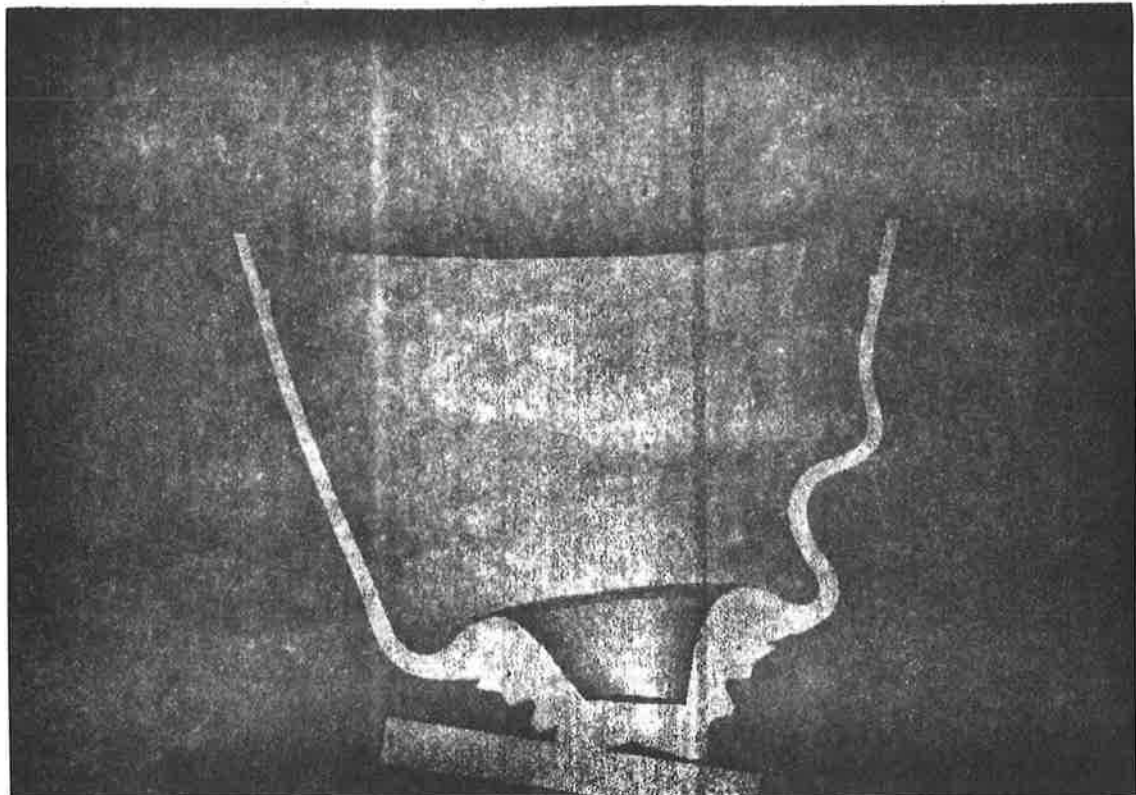
- [1] O.C. Zienkiewicz, 'The generalized finite element method - state of art and future directions', J. Appl. Mech. 50th Anniversary issue, 1983.
- [2] O.C. Zienkiewicz, 'The finite element method', 3rd Ed. McGraw Hill, 1977.
- [3] O.C. Zienkiewicz & K. Morgan, 'Finite elements and approximations', J. Wiley, 1983.
- [4] O.C. Zienkiewicz, 'Finite elements in the time domain', Ch.13 'State of the art surveys on finite element technology' 405-449, Ed. A.K. Noor & W.D. Pilkey, Am. Soc. Mech. Eng. 1983.
- [5] R. Lohner, K. Morgan & O.C. Zienkiewicz, 'The solution of non-linear hyperbolic equation by the finite element method', Int. J. Num. Meth. Fluids, 1984.
- [6] G. Karrholm, 'A method for iteration applied to beams resting on springs', Transactions of the Chalmers Univ. of Technology, Goteborg, Sweden, Nr. 199, 1958.
- [7] A.S. Day, 'An introduction to dynamic relaxation', Engineer 219, 218-221, 1965.
- [8] J.R. H. Otter, E. Cassel & R.E. Hobbs, 'Dynamic relaxation', Proc. Inst. Civ. Engrs. 35, 633-656, 1966.
- [9] R.S. Varga, 'Matrix iterative analysis', Prentice Hall, 1962.
- [10] O.C. Zienkiewicz & R. Lohner, 'Accelerated "Relaxation" or direct solution; future prospects for F.E.M.' to be published I.J.N.M.E., see also (I.N.M.E. report CR/465/83, November 1983, Swansea).
- [11] A.C. Aitken, 'On Bernoulli's numerical solution of algebraic equation', Proc. Roy. Soc. Edinb. 46, 289-305, 1926.
- [12] B.M. Irons & R.C. Tuck, 'A version of the Aitken accelerator for computer iteration', IJNME 1, 275-277, 1969.
- [13] O.C. Zienkiewicz, B.M. Irons, F.C. Scott & J. Campbell, 'Three dimensional stress analysis'. Proc. IUTAM Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures. Univ. of Liege Press, 413-433, 1971.

- [14] A.G. Peano, 'Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending'. *Comp. Math. with Appl.* 2, 1976.
- [15] B.A. Szabo & A.V. Mehta, 'p-convergent finite element approximation in fracture mechanics', *Int. J. Num. Meth. Eng.* 12, 551-560, 1978.
- [16] O.C. Zienkiewicz, J.P. Gago & D.W. Kelly, 'The hierarchical concept in finite element analysis'. *Comp. & Structures* 16, 53-65, 1983.
- [17] A. Samuelsson, Private communication, Chalmers University, Sept. 1983.
- [18] A. Brandt, 'Multi level adaptive solutions to boundary value problems', *Mathematics & Computations*, 31, 333-390, 1979.
- [19] R.A. Nicolokides, 'On some theoretical and practical aspects of multigrid methods', *Mathematics & Computations*, 33, 933-952, 1979.
- [20] McCormick, *Nat. Academy of Science*, 1983.
- [21] Bo Haggblad, 'Multigrid techniques, adaptive mesh refinement and hierarchical finite elements - indispensable ingredients in tomorrows F.E. program', Dec. 1981, ASEA Note PA KYB, 81-015.
- [22] O.C. Zienkiewicz & A.W. Craig, 'A-posteriori error estimation and adaptive mesh refinement in the finite element method'. Given at IMA expositive conference in the finite element method at Imperial College, London, Jan. 1983. Proc. to be published by OUP (ed. D. Griffiths).
- [23] O.C. Zienkiewicz & A.W. Graig, 'Adaptive mesh refinement and a-posteriori error estimation for the p-version of the finite element method'. Given at workshop on Adaptive methods for partial differential equations, University of Maryland, 1983, to be published by SIAM 9ed. Babuska & Chandra).
- [24] A.W. Graig & C.O. Zienkiewicz, 'A multigrid algorithm using a hierarchical finite element basis'. Given at Multigrid Conference, University of Bristol, Sept. 1983. Proc. to be published by IMA.

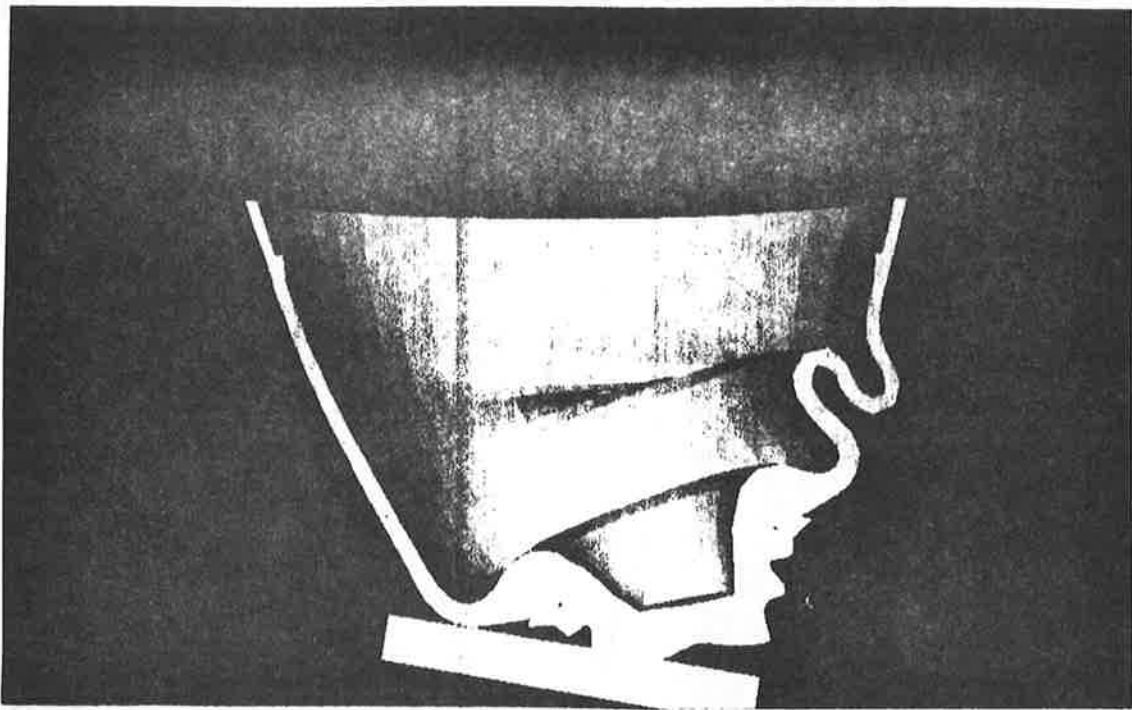
FIGURES



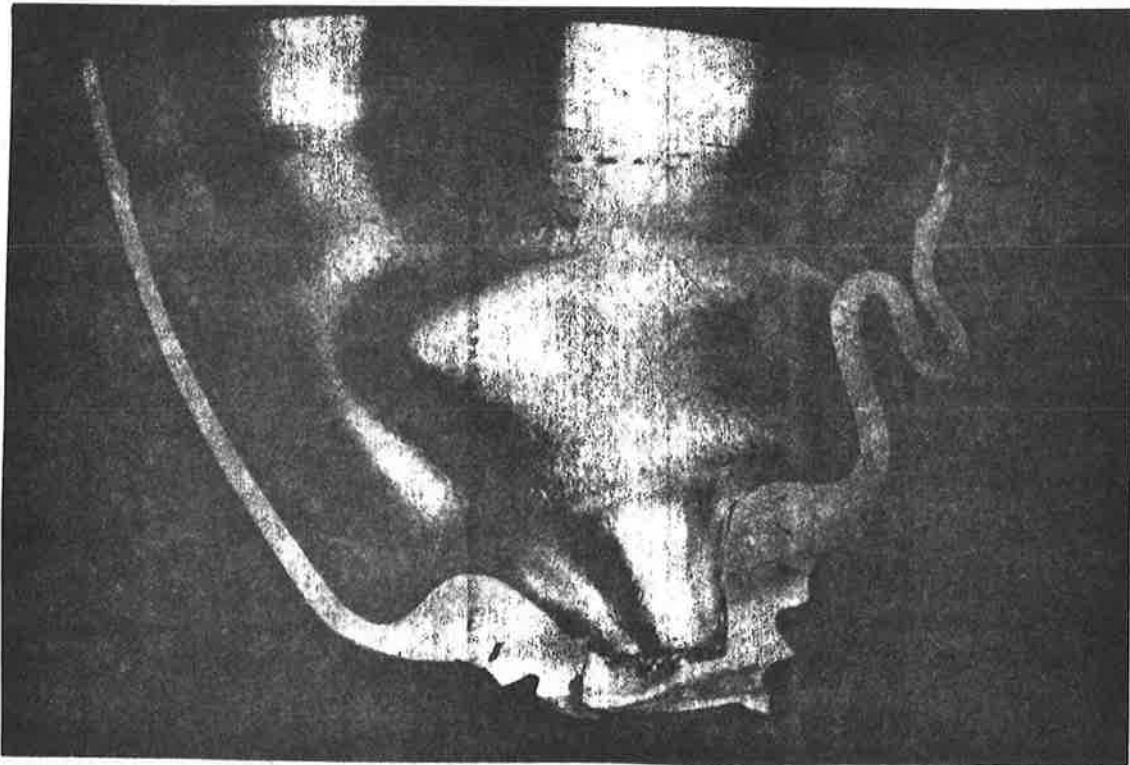
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 1. Impact of a projectile. An explicit, elasto plastic, three dimensional solution (Lawrence Livermore Laboratory), California, U.S.A. (a) - (b) - (c) transient computation. (d) experiment.

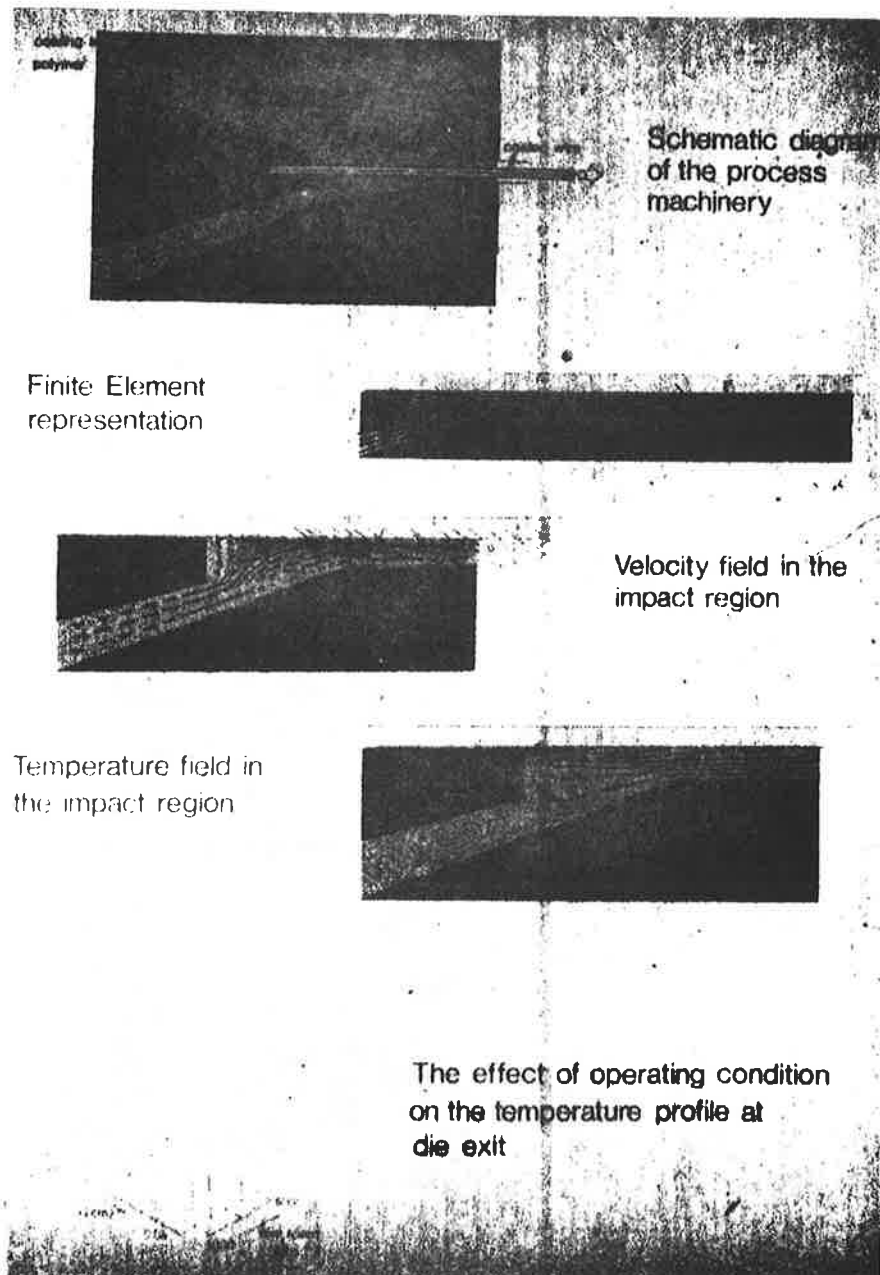


Figure 2. Extrusion of a polymer wire coating melt. A coupled velocity field - thermal field solution. (S. Nakazawa, J. Pittman & O.C. Zienkiewicz, Inst. of Num. Meth. in Eng. Swansea 1982).

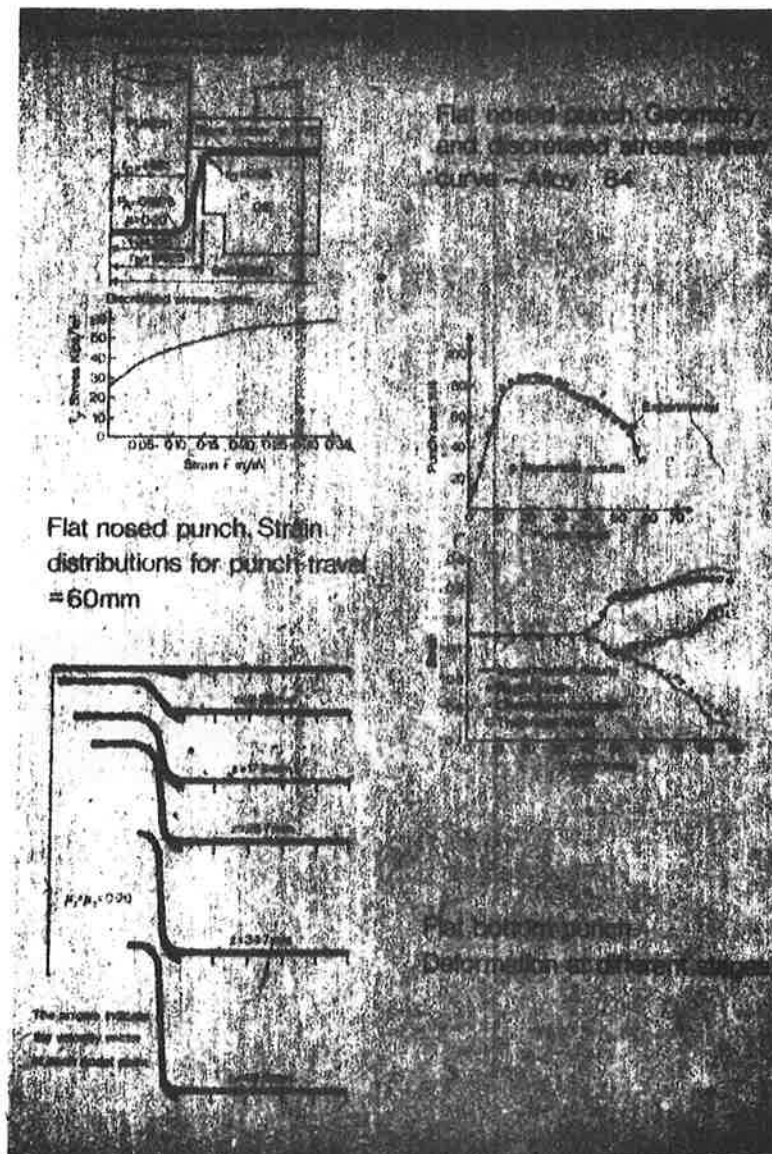


Figure 3. A metal forming problem (E. Onate and O.C. Zienkiewicz, Inst. of Num. Meth. in Eng. Swansea, 1979).

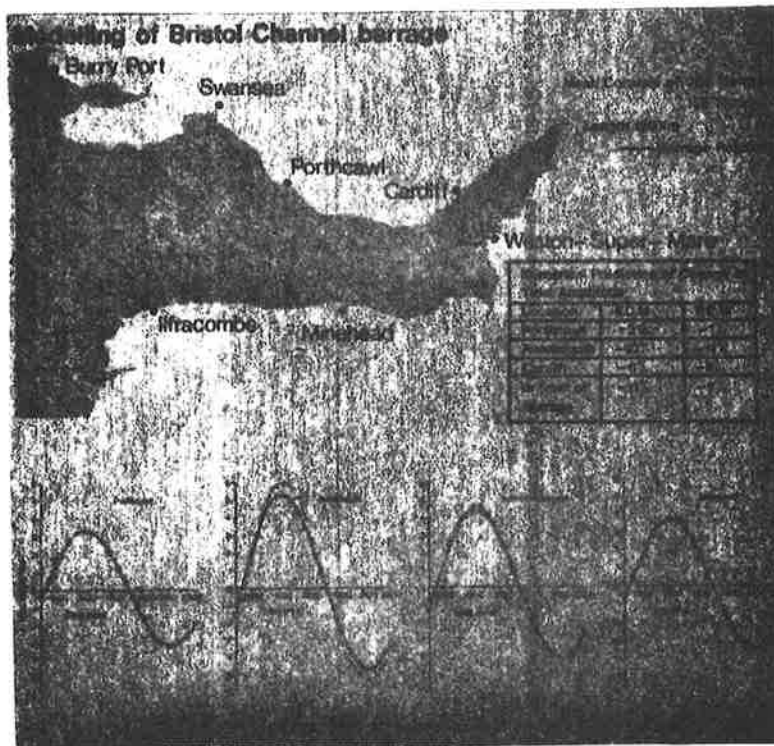


Figure 4. A tidal flow computation of the Severn estuary (S. Nakazawa, R. Evans & O.C. Zienkiewicz, Inst. of Num. Meth. in Eng., Swansea 1982).

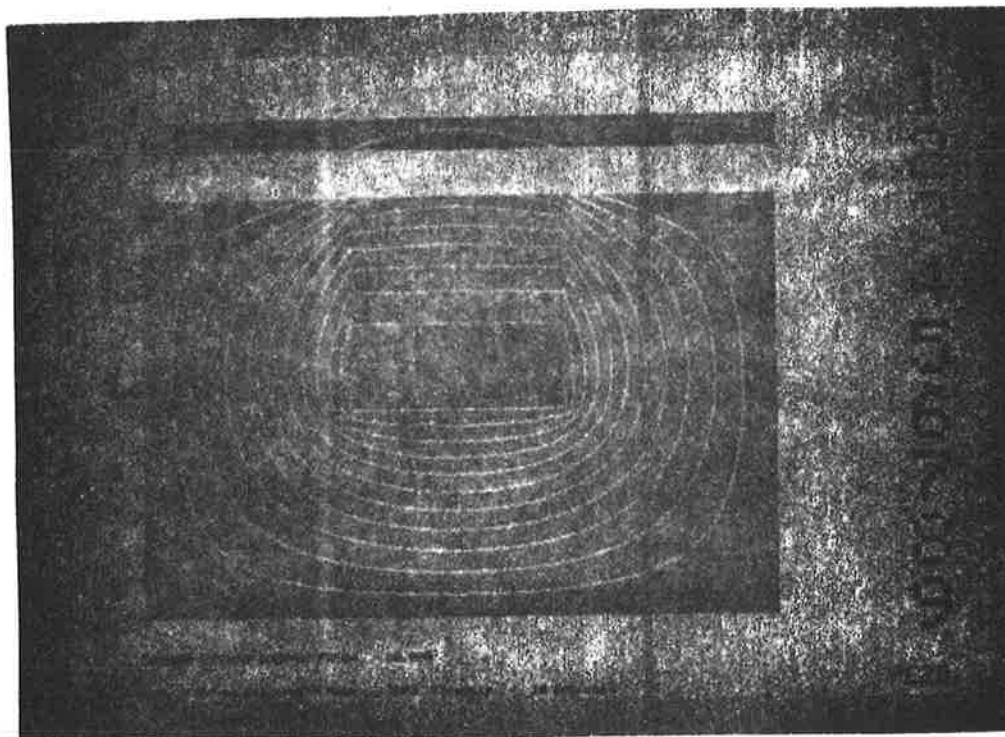


Figure 5. An electromagnetic field computation, Rutherford - Appleton Laboratory, U.K. 1982.

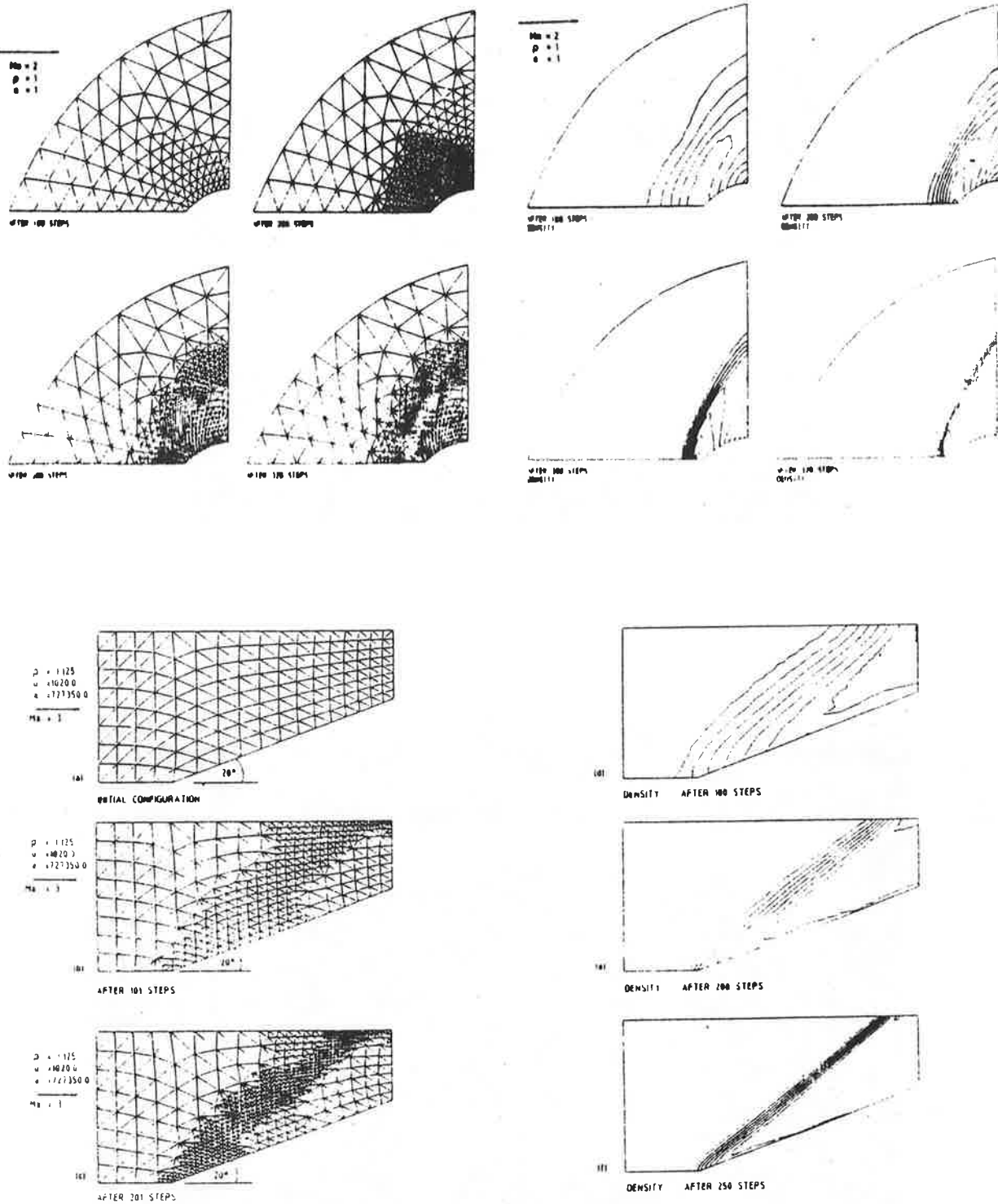


Figure 6. A hyperbolic problem. Solution of supersonic gas flow around an aerofoil. Note adaptive mesh refinement during solution (R. Lohner, K. Morgan & O.C. Zienkiewicz, Inst. of Num. Meth. in Eng., Swansea, 1984).

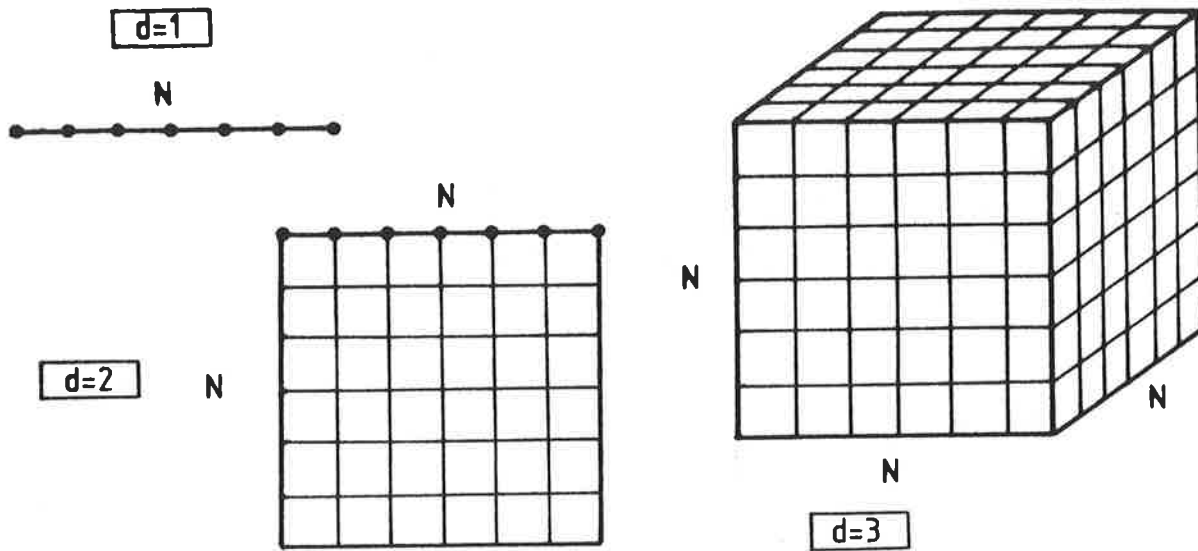


Figure 7. A d -dimensional "cube" with N -subdivisions.

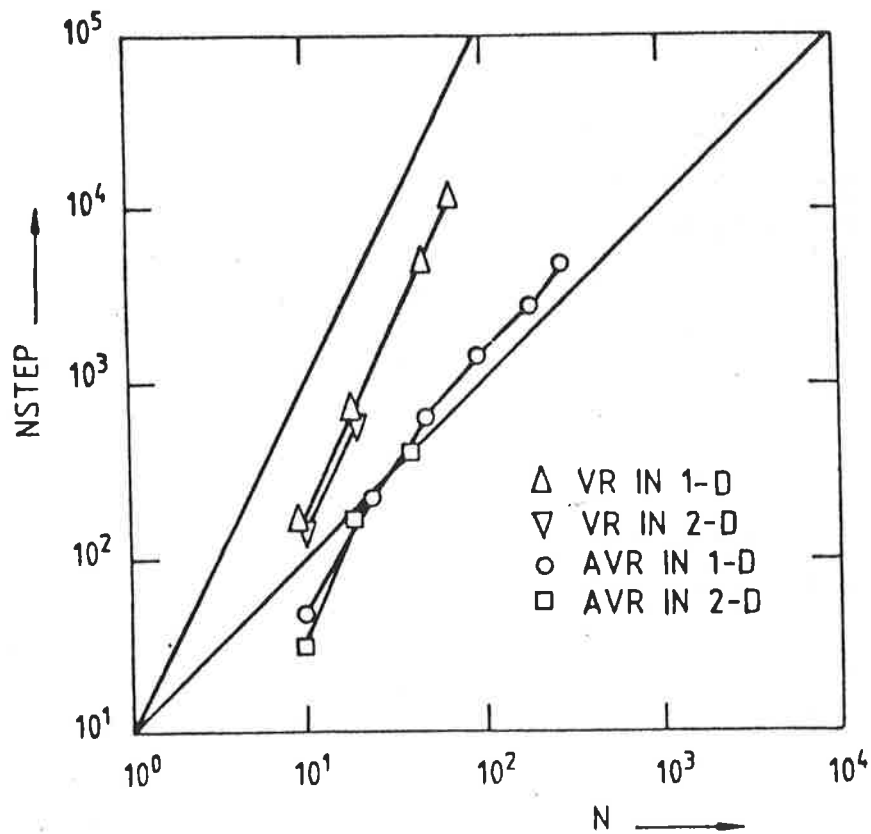
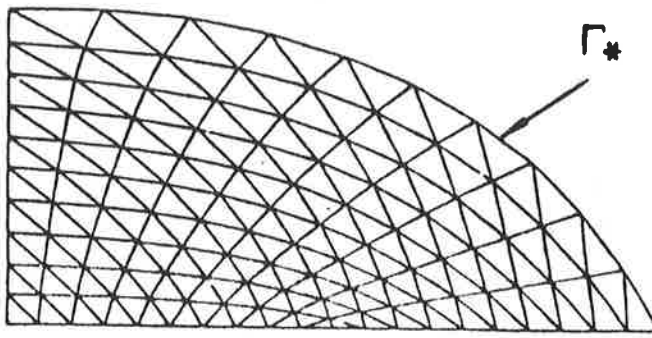
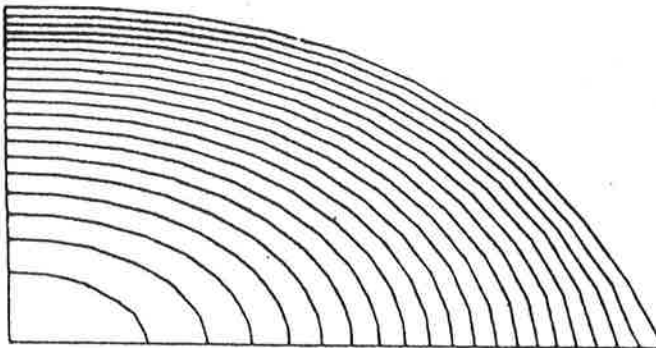


Figure 8. Problem of heat conduction in a one and two dimensional (N) cube. NSTEP required for different problem dimension N .



MESH

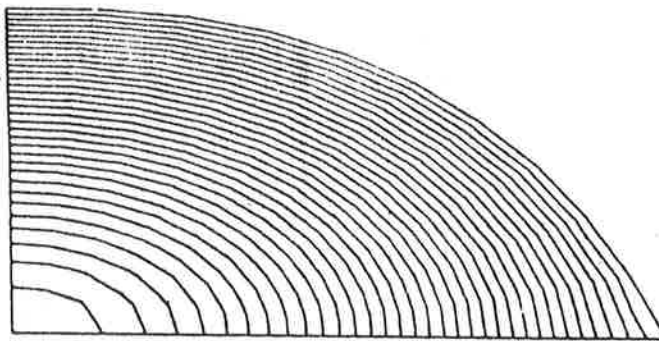
Linear
 $f = 1$



Computime = 51
NSTEP = 106

LINEAR CASE
CONTOUR INTERVAL : 0.02

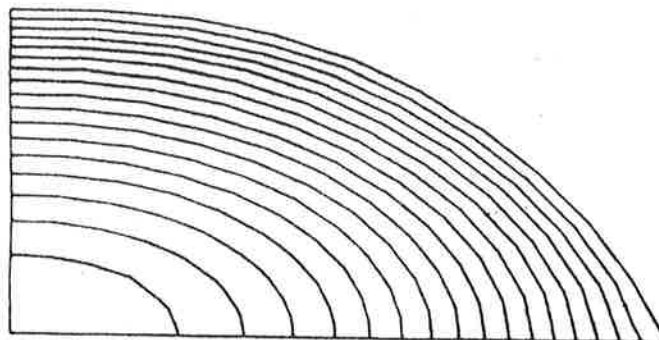
Nonlinear
(softening)



Computime = 166
NSTEP = 180

CASE : $f = \exp(u)$
CONTOUR INTERVAL : 0.02

Nonlinear
(hardening)

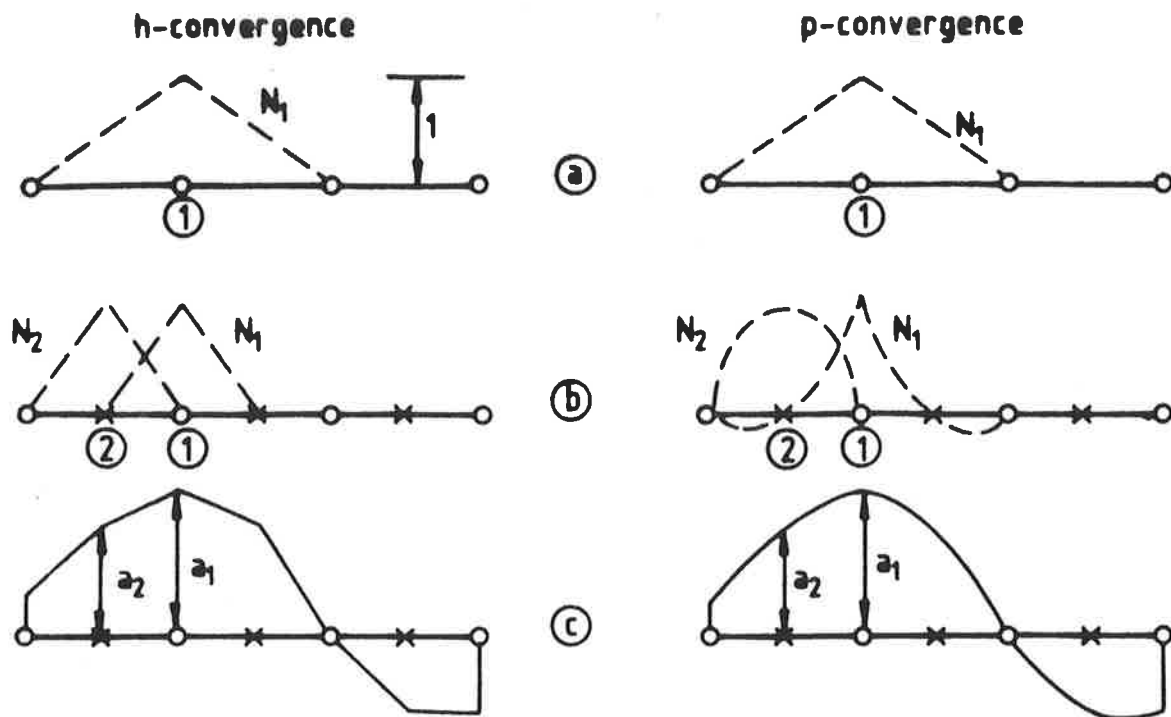


Computime = 91
NSTEP = 190

CASE : $k = k(u) = 1 + u$
CONTOUR INTERVAL : 0.02

Figure 9. Comparison of computation times. Linear/non linear problems of heat conduction. $u = 0$ on boundary Γ^* . $\nabla(k\nabla u) + f = 0$.

STANDARD F.E. APPROXIMATION



HIERARCHICAL F.E. APPROXIMATION

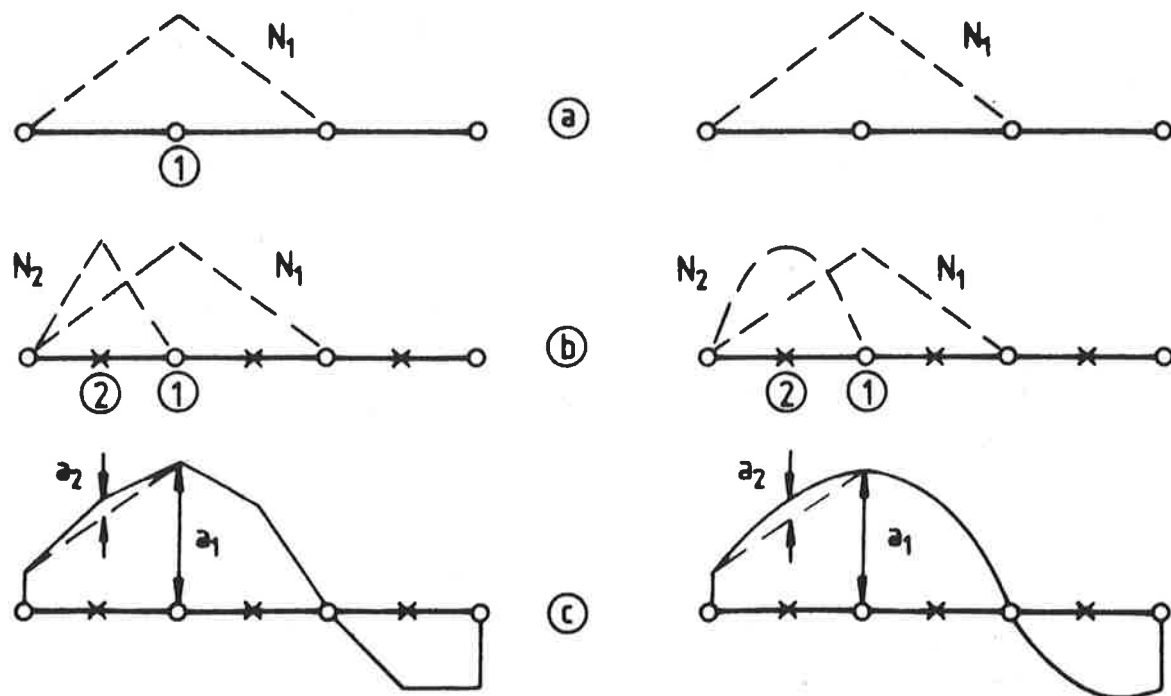
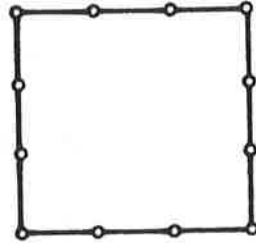


Figure 10. Standard and hierarchical finite element approximations. (a) shape functions for first approximation. (b) shape functions for second approximation. (c) approximation to the function ϕ and the meaning of parameters in $\hat{\phi} = N_i a_i$.

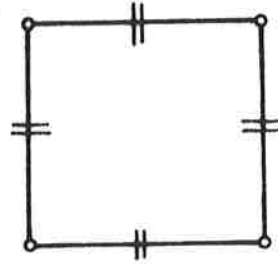
SINGLE ELEMENT

(A)

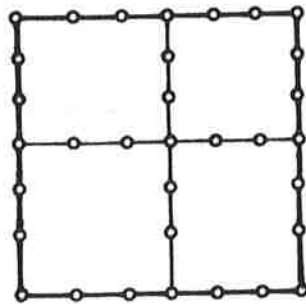


$$\lambda_{\max} / \lambda_{\min} = 390$$

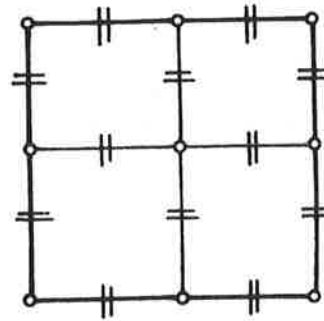
(B)



$$\lambda_{\max} / \lambda_{\min} = 36$$



$$\lambda_{\max} / \lambda_{\min} = 1643$$



$$\lambda_{\max} / \lambda_{\min} = 124$$

Figure 11. Improvement of condition number by use of hierarchic form. Cubic order elements. (A) standard shape function. (B) hierarchic shape function. (Elasticity isotropic $\nu = 0.15$.)

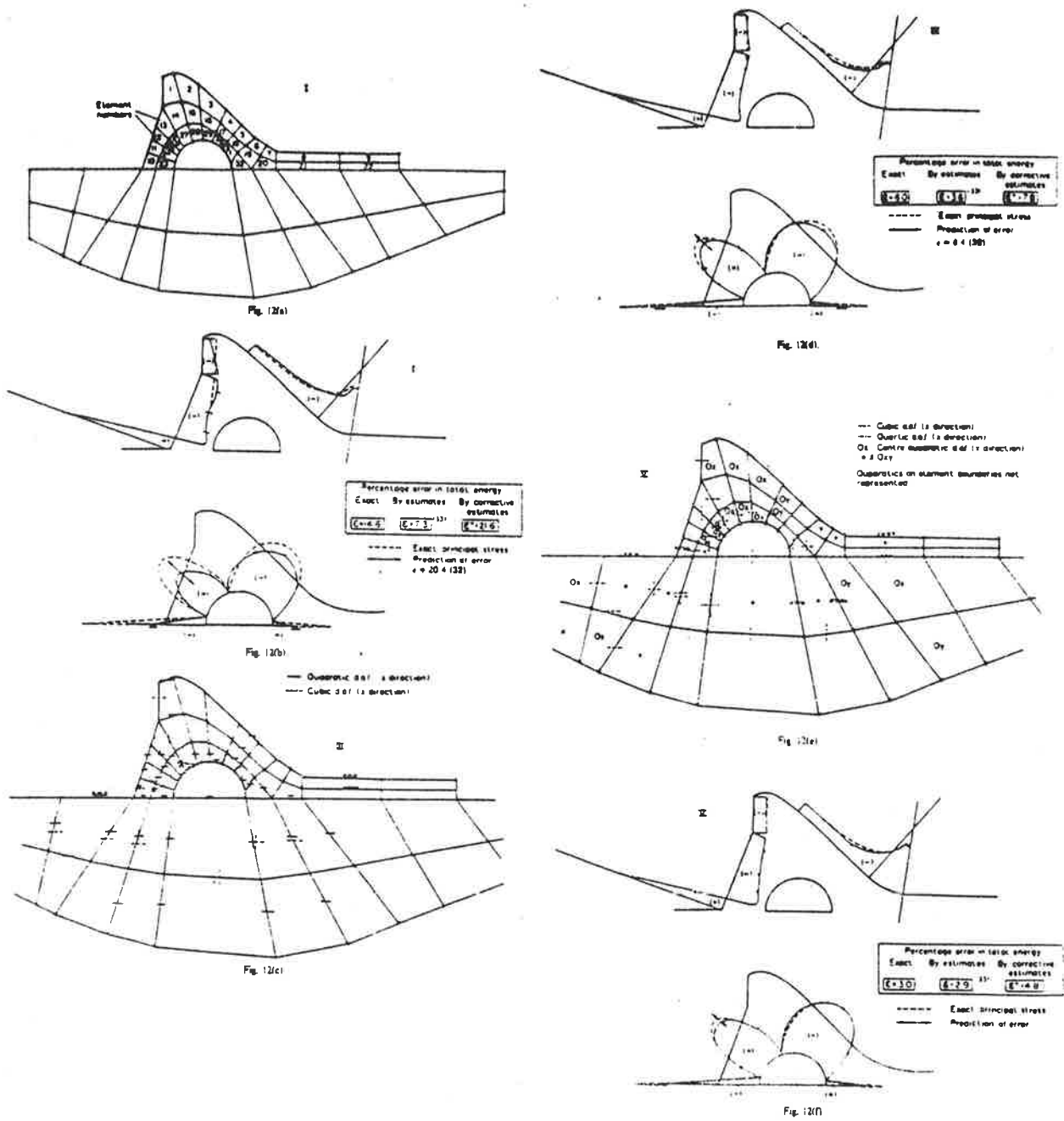


Figure 12. Adaptive refinement and error analysis.

MURTUMISMEKANIIKAN SOVELTAMINEN RAKENTEIDEN ANALYSOINNISSA

DI Timo Mikkola ja DI Heli Talja
Valtion teknillinen tutkimuskeskus
Ydinvoimatekniikan laboratorio

1 JOHDANTO

Murtumismekaniikka on nuori ja voimakkaasti kehittynvä lujuusopin haara, joka on varsinaisesti muotoutunut vasta toisen maailmansodan jälkeen. Murtumismekaniikan tärkeimpiä soveltajia ovat olleet ydinvoima-ala ja lentokoneteollisuus pyrittäessä toisaalta turvallisuuden maksimointiin ja toisaalta mahdollisimman suureen taloudellisuuteen. VTT:ssa murtumismekaniikan tutkimus aloitettiin 1970-luvulla ydinvoimalaitosten turvallisuusanalyysien yhteydessä /5/.

Kiinnostus murtumismekaniikan hyödyntämiseen myös konventionaalisessa metalliteollisuudessa on jatkuvasti lisääntynyt. Murtumismekaniikkaa voidaan soveltaa rakenneanalyysseissa ainakin seuraavantyyppisissä tapauksissa:

- väsymisanalyysit, särön kasvu,
- murtumisriskin arviointi, kriittinen särökoko ja
- murtumistavan analysointi, murtumiskäyttäytyminen.

Rakenteiden murtuminen voidaan jakaa kahteen päätyyppiin: hauras ja sitkeä murtuminen. Hauras murtumistyyppi, jota tarkastellaan lineaaris-elastisen murtumismekaniikan avulla, esiintyy metalleilla matalissa lämpötiloissa. Lineaaris-elastinen murtumismekaniikka soveltuu hyvin myös väsymistarkasteluihin. Sitkeillä materiaaleilla murtumista edeltää materiaalin voimakas plastisoituminen, jolloin on käytettävä elastis-plastista murtumismekaniikkaa.

VTT:n ydinvoimatekniikan laboratoriossa on kehitetty valmiudet lineaaristen ja epälineaaristen murtumismekaanisten analyyysien tekemiseen ja metallilaboratoriossa valmiudet murtumismekaanisten materiaaliparametrien mittaamiseen. Kokeellinen ja laskennallinen murtumismekaniikka ovat läheisessä yhteistyössä, mikä on tarpeen paitsi laskennallisissa analyyseissä tarvittavien materiaaliparametriarvojen saamiseksi myös laskentamenetelmien luotettavuuden testaamiseksi.

2 VTT:n MURTUMISMEKAANISET ANALYYSIVALMIUDET

Murtumismekaniikan laskennallisten menetelmien kehitys aloitettiin ydinvoimatekniikan laboratoriossa 70-luvun loppupuolella lisäämällä elementtimenetelmäohjelmiin murtumismekaanisia parametreja laskevat osat. Alkuvaiheessa käytettiin 2D-elementtimalleja ja materiaalimallit olivat jo varsin varhaisessa vaiheessa epälineaarisia. Nykyisin pystytään käyttämään myös 3D-malleja. Elementtimenetelmän soveltamisen ohella on kerätty laaja kokoelma käsikirjakaavoja. Kolmas käytetty menetelmä on painofunktiomenetelmä, jota voidaan käyttää joustavasti yhdessä käsikirjakaavojen tai elementtimenetelmän kanssa.

Murtumismekaniikan laskentamenetelmät kehittyvät edelleen voimakkaasti, joten kehityksen jatkuva seuranta on välttämätöntä. Murtumismekaanisia parametreja laskevia ohjelmia alkaa jo olla kaupallisestikin saatavilla, mutta murtumismekaniikan luotettava soveltaminen vaatii edelleen erityisasiantuntemusta. VTT:ssä laskentaohjelmien kehittäminen tullaan jatkossakin suorittamaan pääasiassa itse soveltamisessa tarvittavan asiantuntemuksen kehittämiseksi. Ohjelmista saadaan itse kehittämällä myös paremmin omiin tarkoituksiin soveltuvia ja niiden muuttaminen on helpompaa.

2.1 Käsikirjakaavat

Murtumismekaniikan soveltaminen on yksinkertaisinta tapauksiin, joihin on valmiita käsikirjaratkaisuja. Tällaisia ratkaisuja löytyy nykyisin paitsi yksinkertaisille koekappale- tai levygeometrioille myös tavanomaisille rakennelosille kuten putkille, joissa on

erilaisia säröjä.

Käsikirjaratkaisuja voidaan käyttää myös likiratkaisujen muodostamiseen. Tyypillisimmin käytetään elliptiselle pintasärölle esitettyjä ratkaisuja olettaen, että särön pieni koko ei edellytä rakenteen todellisen geometrian huomioonottamista.

Jännitysintensiteettikertoimen ratkaisuja on koottu käsikirjaksi, josta ratkaisuja löytyy paitsi koesauvageometrioille myös muutamille rakenneosille sekä 2D että 3D -tapauksille. Oman käsikirjan ylläpitäminen julkaistujen käsikirjojen hankinnan lisäksi on välttämätöntä, koska tällä tavoin saadaan käyttöön jatkuvasti uusimmat ja tarkimmat ratkaisut. Erityisesti rakenneosille esitetään jatkuvasti uusia ratkaisuja.

Käsikirjakaavojen soveltamisessa tulee olla varovainen, sillä esimerkiksi elliptiselle pintasärölle on esitetty useita toisistaan poikkeavia tuloksia. Käsikirjakaavojen antaman tuloksen luotettavuus tulisi voida tarkistaa joko toiseen lähteeseen perustuen tai jollain muulla menetelmällä.

2.2 Painofunktioiden käyttö

Särön jännitysintensiteettikerroin voidaan laskea ehjän rakenteen jännitysjakautuman perusteella, jos tunnetaan ko. rakenteen ja särön geometrioista riippuvat painofunktiot. Painofunktioiden määrittäminen on periaatteessa tehtävä aina esimerkiksi elementtimenetelmän tai käsikirjaratkaisujen avulla. Jos rakenteelle tunnetaan ratkaisu yhdelle kuormitustapaukselle, esimerkiksi tasaiselle vedolle, voidaan tunnetun tapauksen avulla johtaa likiratkaisut myös muille kuormitustapauksille. Menetelmä on yleiskäyttöinen ja sopii halpuutensa ja nopeutensa ansiosta hyvin tapauksiin, joissa tarvitaan tulos useissa kuormitustapauksissa särökoon funktiona.

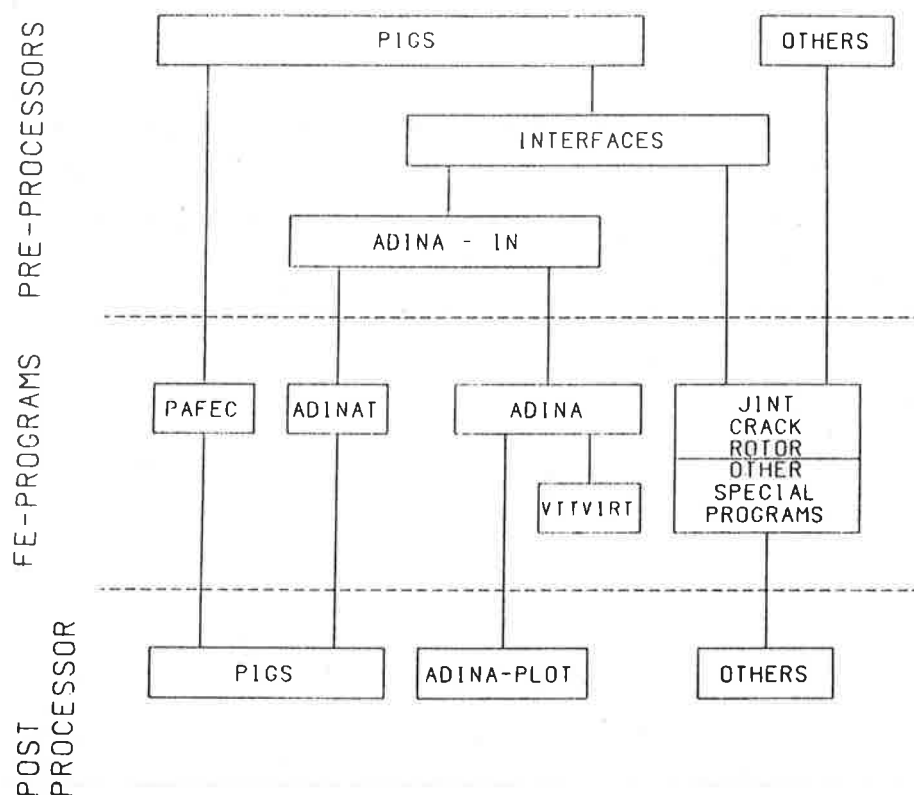
Ainoana rajoituksena on, että ollaan lineaaris-elastisen murtumismekaniikan pätevyysalueella. Painofunktiomenetelmä on tärkeä nimenomaan sovellettaessa murtumismekaniikkaa käytännön rakenteisiin, koska sen ja käsikirjakaavojen avulla pystytään useissa tapauksissa antamaan nopeasti riittävän tarkka ratkaisu. Rakenteel-

le tarvitsee tehdä vain jännitysanalyysi olettaen rakenne säröttömäksi, mikä helpottaa laskentaa.

2.3 Elementtimenetelmä

Elementtimenetelmä on yleiskäyttöisin tapa säröllisen rakenteen analysointiin. Särön kuvaaminen vaikeuttaa laskelmia särön kärki-alueen voimakkaan jännityshuipun vuoksi, mutta nykyisillä menetelmillä tavanomaisissa tapauksissa saatava tulos on luotettava. Elementtimenetelmä antaa mahdollisuuden elastis-plastisiin analyysiin ja myös särön todellinen muoto voidaan ottaa huomioon.

VTT:lla on käytettävissä varsin monipuolinen elementtimenetelmäohjelmisto (kuva 1). Vaikka murtumismekaanisiin sovellutuksiin on nykyisin ostettavissa hyviä tietokoneohjelmia, tullaan ydinvoimatekniikan laboratoriossa myös jatkossa kehittämään omia tietokoneohjelmia ensisijaisesti asiantuntemuksen parantamiseksi ja osin myös valmiiden ohjelmien kalleuden takia.



Kuva 1. VTT:n elementtimenetelmäohjelmisto.

Lineaaris-elastisiin murtumisanalyysihin kehitettiin aluksi CRACK-ohjelma, joka laskee jännitysintensiteettikertoimen arvoja eri menetelmillä /5/. Elastis-plastisessa murtumismekaniikassa yleisimmin käytetyn parametrin J-integraalin laskemiseen on kehitetty materiaalin plastisoitumisen huomioonottava JINT-ohjelma /3 ja 4/. Edellä mainitut ohjelmat soveltuvat kaksidimensioisiin ja pyörähdysymmetrisiin analyysihin.

Nykyään pystytään murtumismekaniikassa hyödyntämään ADINA-ohjelman tarjoamia monipuolisia mahdollisuuksia. VTT:n kehittämä VTTVIRT-ohjelma laskee J-integraaliarvoja ADINA:n tuloksista deLorenzin formuloimalla virtuaalisen särönkasvun menetelmällä /1 ja 2/. Ohjelma soveltuu sekä kaksi- että kolmidimensioisiin tapauksiin.

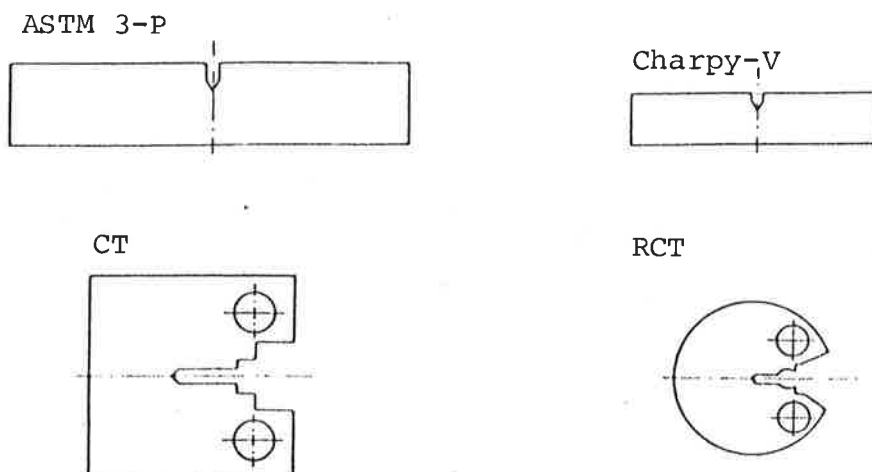
2.4 Valmiuksien verifiointi

Murtumismekaniikan soveltaminen lineaaris-elastisella alueella, kun materiaali käyttäytyy hauraasti, on saavuttanut luotettavan tason. Tällä alueella laskentamenetelmien soveltaminen on helppointa, kun epälineaarisia ilmiöitä ei tarvitse ottaa huomioon. VTT:n metallilaboratoriossa on kehitetty murtumismekaniikan soveltamisohje haurasmurtuma-aluetta varten /10/. Analysoitaessa rakennetta, jota käytetään materiaalin sitkeän murtuman alueella, on käytettävä elastis-plastista murtumismekaniikkaa, jota sovellettaessa vaaditaan kehittyneitä laskentamenetelmiä ja asiantuntemusta niiden käytössä hyvään lopputulokseen pääsemiseksi.

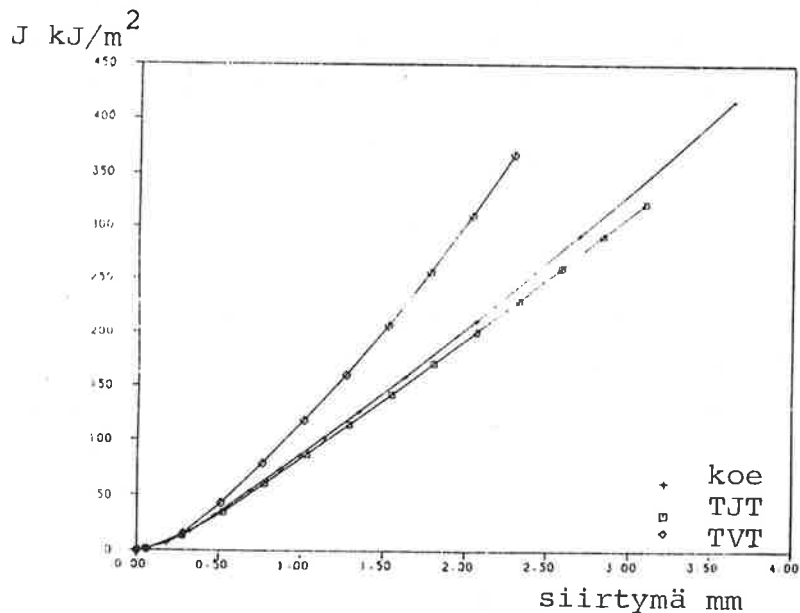
Hyvät edellytykset laskennallisten valmiuksien verifioimiseen tarjoavat VTT:n metallilaboratoriossa kehitetyt monipuoliset murtumismekaaniset koestusmahdollisuudet alkaen yksinkertaisista iskukokeista (Charpy-V ym.) ja päättyen vaativiin murtumisvastuskäyrä- ja jännityskorroosiomittauksiin /11, 16 ja 17/.

Metallilaboratorion ja ydinvoimatekniikan laboratorion kesken on suoritettu laaja kokeellislaskennallinen vertailuohjelma /14 ja 15/. Siinä on erilaisilla, eri materiaaleista valmistetuilla koesauvoilla (kuva 2) tehtyjä kokeita simuloitu kaksidimensioisilla laskentamalleilla. Laskelmat ja kokeelliset tulokset vastaavat hyvin toisiaan (kuva 3). Tasomaisille kappaleille, joiden paksuus

on samaa suuruusluokkaa tasomittojen kanssa, saadaan tasojännitys- ja tasovenymätilalaskelmilla haarukka, johon mitatut tulokset sijoittuvat. Täsmällinen sijainti riippuu mm. materiaalin muokkaus- lujittumisominaisuuksista.

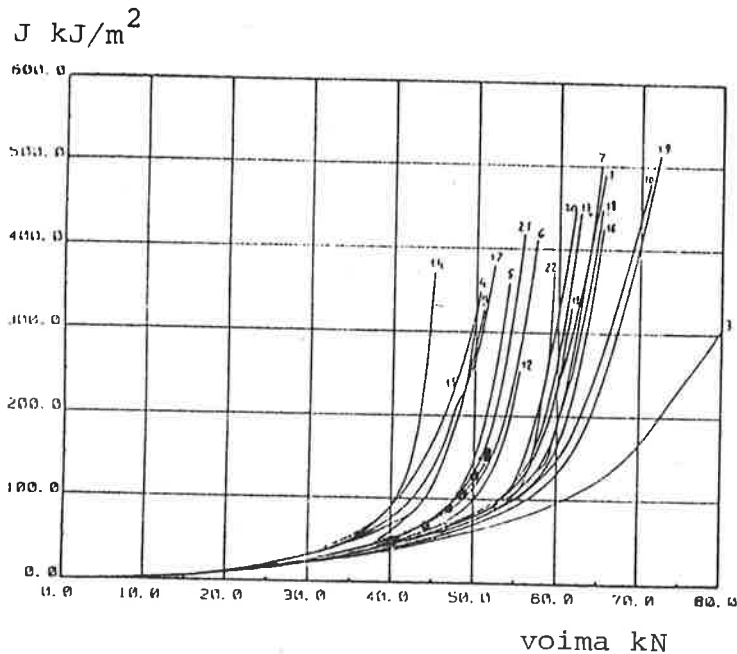


Kuva 2. Vertailuohjelmassa käytetyt koesauvageometrit.

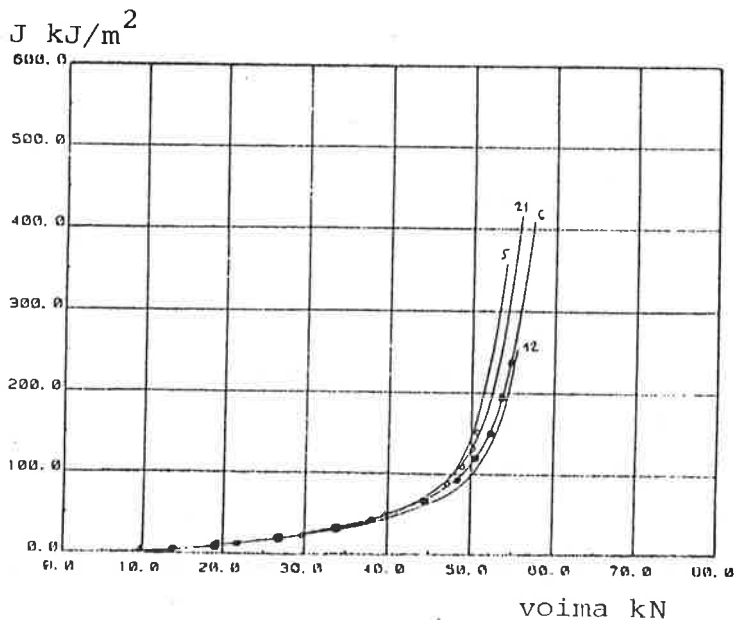


Kuva 3. Mitattujen ja laskettujen J-siirtymäriippuvuuksien vertailu CT-koesauvalla, materiaalina ruostumaton teräs.

VTT osallistuu myös kansainvälisiin kokeellisiin ja laskennallisiin murtumismekanikan vertailuohjelmiin. Eurooppalaisessa laskennallisessa vertailuohjelmassa analysoitiin CT-koesauvaa. Tulosten hajonta oli melkoinen (kuva 4) ja vain kolmidimensioista analyysia käyttäen päästiin hyvään yhteensopivuuteen koetulosten kanssa /6/. Tasojännitystilassa saatiin odotetusti liian joustavia ja tasovenymätilassa liian jäykkiä arvoja. VTT:n lähettämä

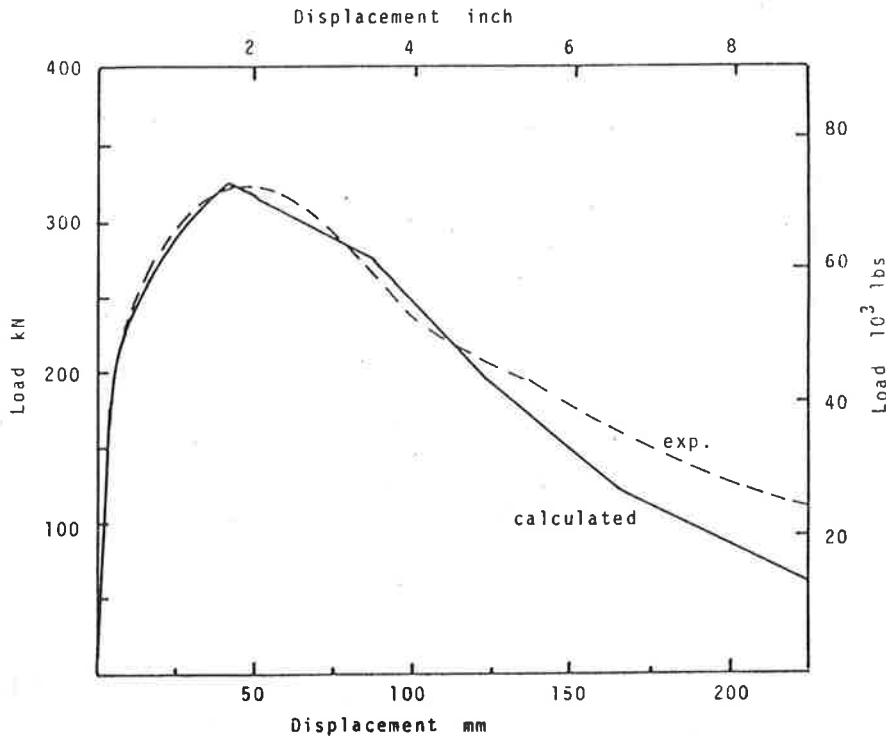


Kuva 4. Voiman ja J-integraalin riippuvuudet eurooppalaisessa vertailuohjelmassa (kaikki osanottajat). Koetulos on merkitty ympyröillä.



Kuva 5. Kolmidimensioisella analyysillä saadut voiman ja J-integraalin riippuvuudet. VTT:n tulos on merkitty pisteillä.

ratkaisu sijoittuu muiden tasojännitystilaratkaisujen keskivaiheille. VTTVIRT-ohjelman kolmidimensioisen version valmistuttua laskelma uusittiin VTT:ssa, jolloin päästiin hyvin lähelle kokeellista tulosta ja tulos oli vertailukelpoinen Euroopan parhaiden tutkimuslaitosten tulosten kanssa (kuva 5).



Kuva 6. NRC:n vertailulaskelmaa varten saatu voimasiirtymäriippuvuus verrattuna mitattuun.

Amerikkalaisen NRC:n järjestämässä laskennallisessa vertailuohjelmassa tarkasteltiin CT-sauvaa, jossa särönkasvu oli voimakasta. VTT:ssa analysoitiin probleema käsitellen viittä eri särönpituutta alkupituudesta loppusärönpituuteen asti. Vain materiaalin epälineaarisuus otettiin huomioon. Särönkasvutarkastelua varten valittiin eri särönpituuksia kuvaavista käyrästä pisteet mitatun siirtymän ja särönkasvun riippuvuuden perusteella ja yhdistettiin ne lopullisiksi tuloksiksi. Kuva 6 esittää näin saatua voimasiirtymäkäyrää verrattuna kokeelliseen. Vastaavuus on varsin hyvä luokunottamatta suurimpia siirtymäarvoja, joiden kohdalla geometrisen epälineaarisuuden vaikutus luonnollisesti korostuu.

3 VALMIUKSIEN SOVELTAMINEN

Murtumismekaniikkaa on sovellettu pääasiassa ydinvoimaloiden rakenteiden turvallisuusanalyysissä, mutta muiden teollisuusalojen sovellukset ovat jatkuvasti lisääntyneet. Soveltamista on tähän asti usein rajoittanut luotettavien materiaaliparametriarvojen puute ja toisaalta laskentamenetelmien käytön kalleus ja menetelmien puutteellisuus. Molempien rajoittavien tekijöiden merkitys on tällä hetkellä selvästi vähentynyt. Materiaaliparametrien osalta on luotettavaa tietoa saatavilla erityisesti ydinvoimaloissa käytettävien materiaalien osalta ja toisaalta pystytään tarvittavat parametrien arvot realistisesti arvioimaan tavanomaisten materiaaliparametrien lähinnä iskusitkeyden avulla. Luonnollisesti voidaan tarvittavat parametrit myös mitata. Laskentamenetelmien luotettavuus, halpuus ja sovellettavuus ovat jatkuvasti parantuneet. Seuraavassa esitellään joitakin murtumismekaniikan käytännön sovelluskohteita.

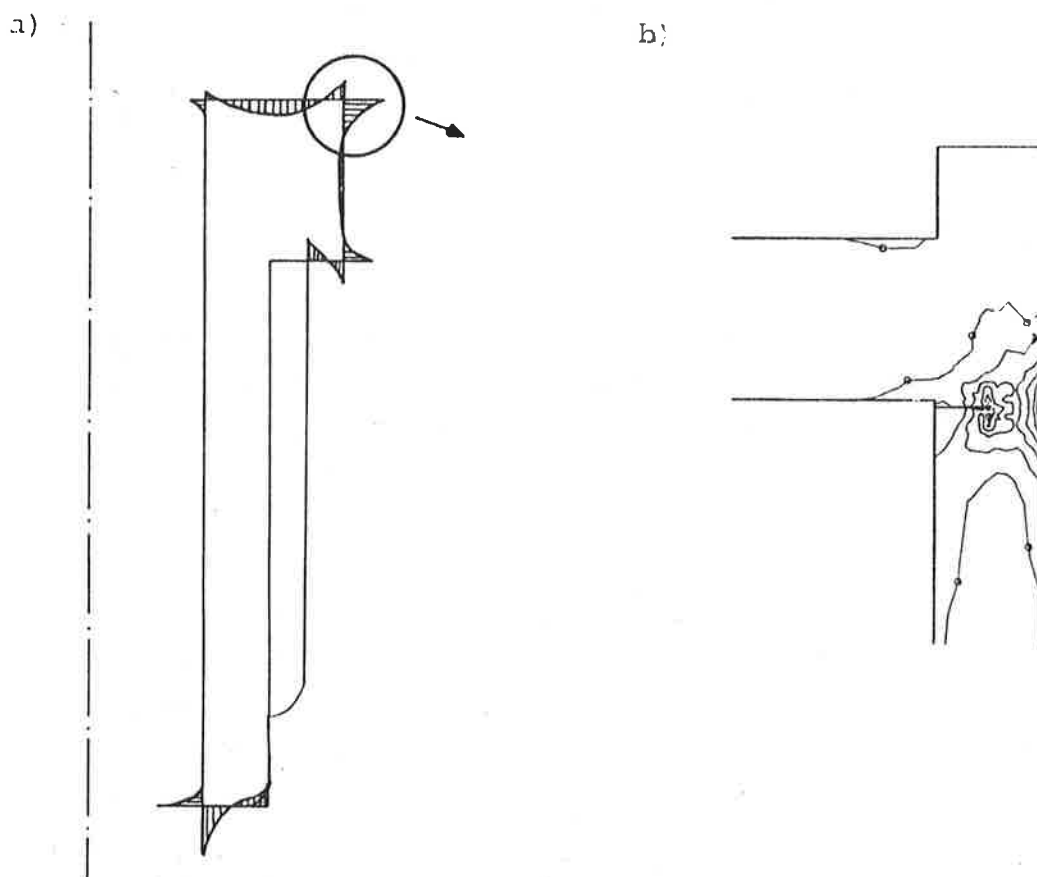
3.1 Höyrykattila

Eräällä höyrykattilalla esiintyneen väsymisvaurion vuoksi valmistaja halusi selvitettäväksi samantyyppisistä kattiloista mahdollisesti löytyvien säröjen vaikutuksen jäljellä olevaan käyttöikään, koska monien vikautuneiden kattiloiden korvaaminen heti uusilla ei olisi ollut käytännössä mahdollista.

Vaurioituneen nurkan väsymisanalyysiä varten tehtiin ensin koko rakenteelle jännitysanalyysi ilman säröjä PAFEC-ohjelmalla (kuva 7) ja tuloksia käytettiin kuormituksina säröytyneelle nurkalle. Nurkkiin syntyi voimakkaat jännityshuiput, jotka aiheutuivat lähes yksinomaan sisäisen paineen vaikutuksesta lämpötilaerojen vaikutuksen ollessa vähäinen. Tekemällä nurkalle tarkempi analyysi useilla särönpituuksilla voitiin johtaa särönpituuden ja jännitysiteettikertoimen välille funktionaalinen riippuvuus, jonka avulla saatiin laskukaava särönkasvulle.

Hankaluutena oli, että rakenteen kuormituspektriä ja materiaalin särönkasvuparametrien arvoja ei tunnettu tarkasti. Kuormitusvaihteluksi oletettiin konservatiivisesti vaihtelu nollasta täyteen suunnittelupaineeseen. Materiaaliparametreille käytettiin kirjallisuudesta saatuja konservatiivisia vertailuarvoja.

Konservatiivisuudesta huolimatta tehdystä analyysistä on ollut tilaajalle merkittävää taloudellista hyötyä, kun tarkastuksessa säröytyneeksi havaitun rakenteen käyttöä on voitu saatujen tulosten perusteella jatkaa.



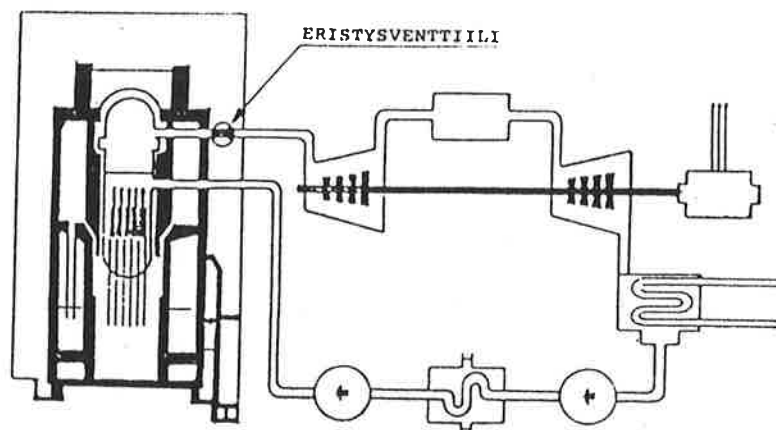
Kuva 7. Rasitusten jakautuminen kattilan seinämässä (a) ja tarkasteltavan nurkan vertailujännitys jakauma eräällä särönpi-tuudella (b).

3.2 Venttiililautasen analyysi

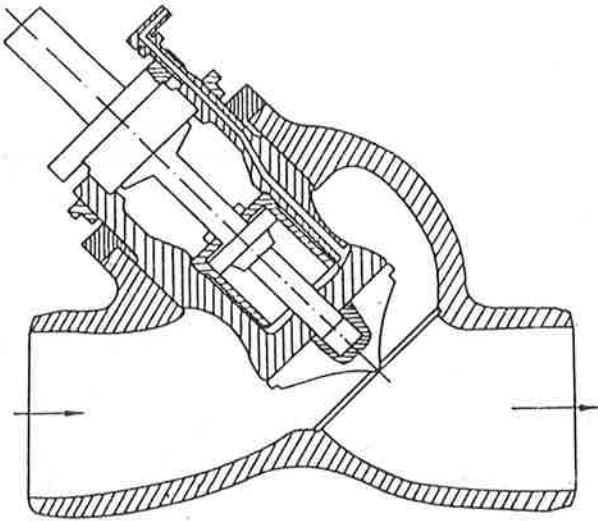
Kiehutusvesireaktorityyppisissä ydinvoimalaitoksissa on päähöyrylinjan eristysventtiilien (kuva 8) tehtävänä tarvittaessa sulkea höyrylinjat ja eristää suojarakennus. Venttiilien toimintavarmuus on erityisen tärkeätä onnettomuustilanteissa: radioaktiivisten aineiden vapautumisriskin on pahimmissakin tilanteissa oltava mitätön.

Venttiilien toimintaa on selvitetty monissa eri tutkimuksissa: Suomessa VTT ja Teollisuuden Voima oy (TVO) yhteistyössä saksalaisten ja ruotsalaisten tutkimuslaitosten kanssa. Tutkimusten tuloksena on venttiilien luotettavuudesta voitu varmistua ja lisäksi koetulosten perusteella osoittaa virtauksen ja venttiilin toiminnan kuvaamiseen käytetty laskentamalli riittävän tarkaksi /8/.

Venttiilin todettiin kestävän sekä onnettomuustilanteen nopean sulkemisen että käytön aikaisen väsyttävän kuormituksen edellyttäen että rakenteessa ei ole säröjä. Säröjen vaikutuksen selvittämiseksi tehtiin VTT:ssa murtumismekaniikkaan perustuva väsymistarkastelu. Lisäksi analysoitiin säröytymisen vaikutus päähöyrylinjan täydellisen katkeamisen aiheuttamassa venttiilin sulkemisessa.



Kuva 8. Kiehutusvesireaktorin periaatepiirros.



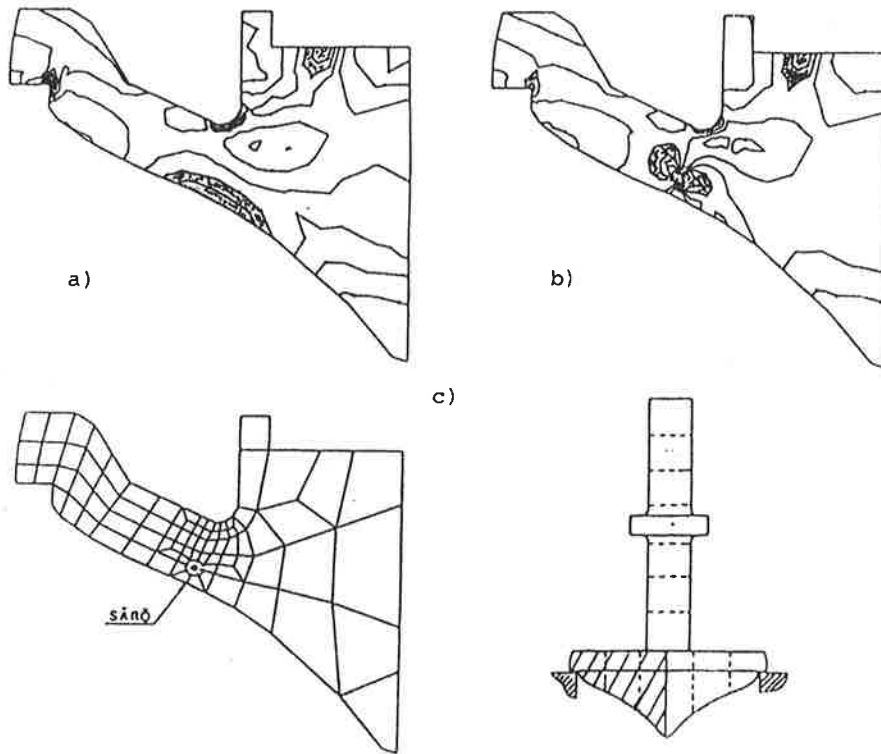
Kuva 9. Eristysventtiilin rakenne.

Tarkasteltavien eristysventtiilien rakenne on massiivinen (kuva 9). Venttiilin tiiveyden menettämisen kannalta vaarallisin säröytymiskohta on venttiililautanen, jonka kestävyysmekaanisessa tarkastelussa keskityttiin. Venttiilin sulkeutumisnopeus ja sulkeutumisen aikana vaikuttavat voimat laskettiin TMOC-ohjelmalla /13/. Rakenteen lujuusanalyysissä tarkasteltiin vain liikuvia osia, joista muodostettiin jousimassa-malli. Mallilla laskettiin venttiililautasen taipumavaste sulkeutumisessa.

Murtumismekaaniset analyysit suoritettiin elementtimenettelmällä JINT-ohjelmalla /3 ja 4/. Rakenteesta analysoitiin vain venttiililautanen pyörähdyssymmetrisellä elementtimallilla. Analyysi tehtiin staattisena ottaen kuormitukseksi dynaamisella analyysillä jousimassa-mallilla saatu taipuma.

Venttiililautasen säröytymisen oletettiin tapahtuvan rakenteen kriittisimmässä kohdassa, joka selvitettiin ehjälle rakenteelle elementtimenettelmällä suoritetun analyysin perusteella (kuva 10a). Säröytymiskohdaksi osoittautui venttiililautasen alapinta ja pahimmaksi säröksi kehän suuntainen pyörähdyssymmetrinen särö (kuva 10b). Olisi realistisempaa olettaa särön ulottuvan vain osasektoriin, mutta tuloksen kannalta tällä ei ole suurta merkitystä.

Särön jännitysintensiteettitekijä laskettiin kaksidimensioisella pyörähdysymmetrisellä elementtimallilla (kuva 10c). Analyysi suoritettiin muutamilla särön syvyyksillä ja tuloksiin sovitettiin käyrä.

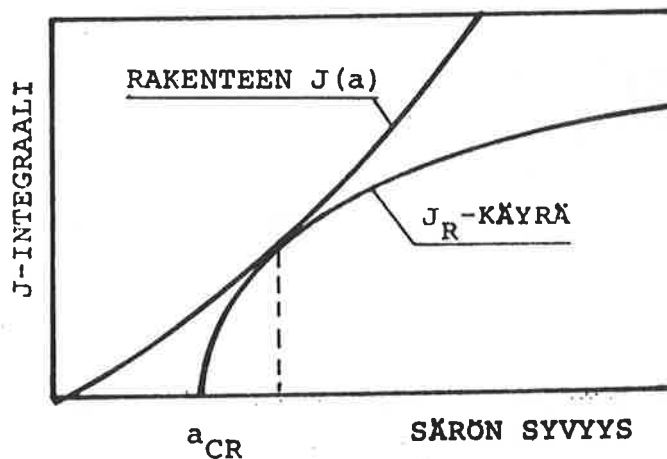


Kuva 10. Yhdistetyn jännityksen sama-arvokäyrät a) ehjälle rakenteelle ja b) säröytyneelle rakenteelle sekä c) elementtimalli.

Väsymisanalyysi tehtiin käyttökokemuksista arvioidun kuormitus-spektrin perusteella. Käyttöiäksi oletettiin konservatiivisesti 40 v ja särönkasvunopeus saatiin kirjallisuudessa esitetyistä tuloksista. Tuloksen herkkyyttä tarkasteltiin laskemalla särönkasvu myös 10 % arvioitua suuremmalle kuormitukselle. Särön kasvu osoittautui niin hitaaksi, ettei se voi aiheuttaa vaaraa venttiilien tiiveydelle laitoksen käyttöaikana.

Eristysventtiilin tehtävä onnettomuustilanteessa on eristää suojarakennus. Vaarallisin tilanne syntyy päähöyryputken katkeamisen yhteydessä, jolloin venttiililautasen sulkeutumisnopeus on noin 26 m/s. Venttiililautanen myötää törmäyksessä voimakkaasti myötämisen keskittyessä tarkastelun kohteeksi valittuun säröytymiskohtaan.

Särön J-integraali laskettiin JINT-ohjelmalla ja kriittinen särön syvyys määritettiin materiaalille kokeellisesti saadun murtumisvastuskäyrän avulla, jonka avulla voitiin myös arvioida särön repeämistä, jos se olisi kriittistä mittaansa syvempi (kuva 11).



Kuva 11. Murtuman kannalta kriittisen särökoon määrittäminen murtumisvastuskäyrän ja särön J-integraalin avulla.

3.3 Särön vaikutus pyörivän roottorin värähtelyyn

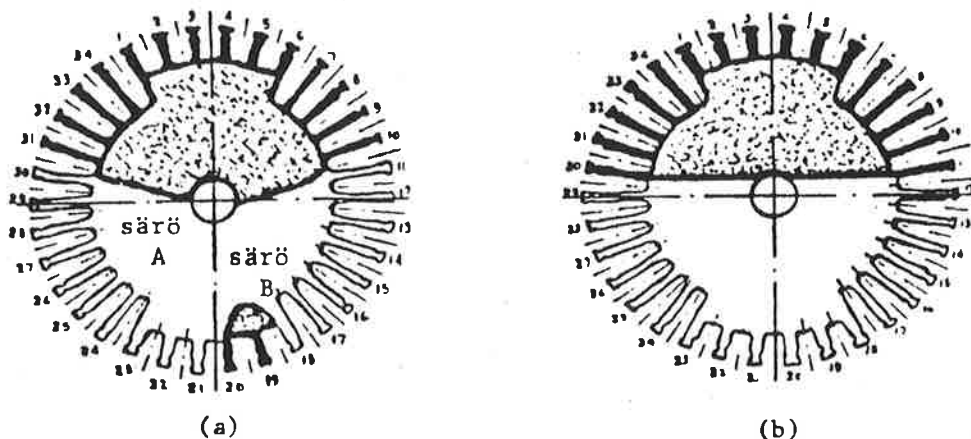
Voimalaitosten sähkötehon kasvaessa on otettu käyttöön yhä suurempia vaihtovirtageneraattoreita. Nykyään ei 700 MW:n generaattori ole harvinainen, kun vielä 1940-luvulla suurimmat valmistetut generaattorit olivat sähköteholtaan vain noin 120 MW. Roottorien koon kasvu synnyttää luonnollisesti joukon uusia ongelmia, joista ehkä yllättävin on ollut poikittaisen särön kehittyminen ja kasvaminen roottoriin.

Pyörivässä roottorissa olevan särön havaitseminen tavanomaisin aineenkoetuskeinoin on nykytekniikalla mahdotonta, ja roottorin usein tapahtuva pysäyttäminen tarkastuksia varten on kohtuuttoman kallista. Niinpä akselivärähtelyiden seuranta on yleisesti käytetty keino roottoreiden kunnan tarkkailussa.

Särö vaikuttaa roottorin dynaamiseen käyttäytymiseen kolmella tavalla /12/:

1. Roottorin jäykyys pienenee, jolloin ominaistajuus alenee.
2. Roottoriin, jonka jäyhyysellipsi on ympyrä, syntyy uusi ominaistajuus.
3. Roottorin siirtymävaste muuttuu.

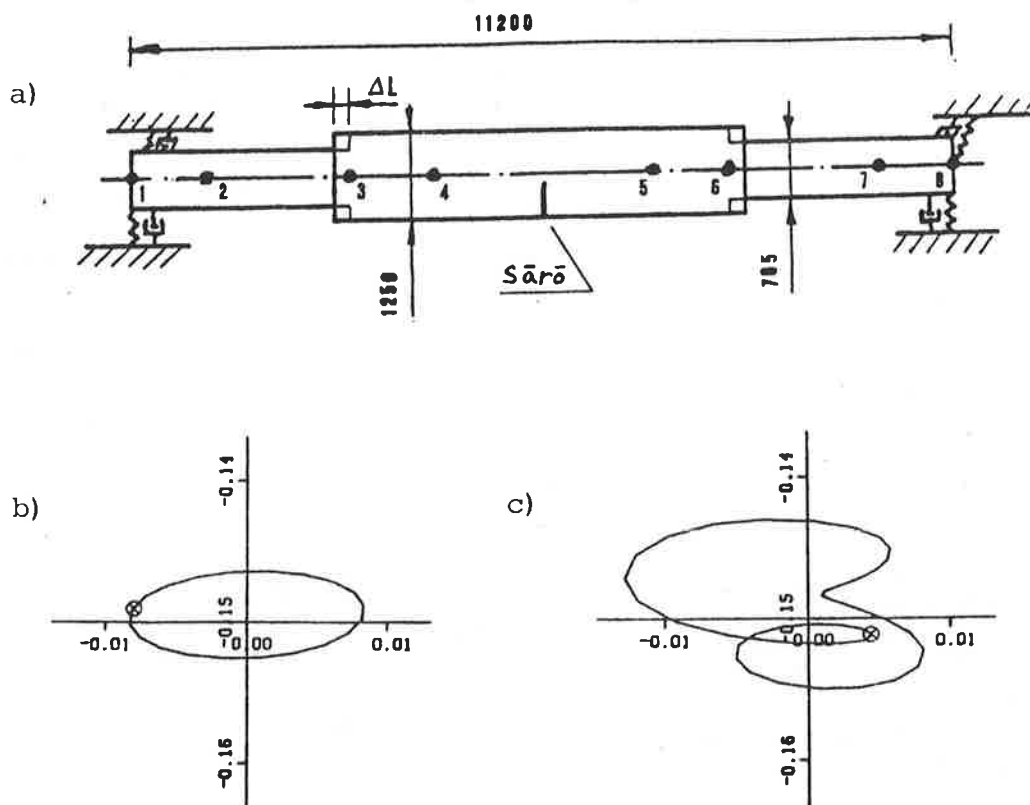
Tehdyssä tutkimuksessa /12/ tarkasteltiin luetelluista kolmesta roottorin dynaamisen käyttäytymisen osa-alueesta lähinnä särön vaikutusta ratakäyriin eli siirtymävasteeseen laakereiden kohdalla. Tavoitteena oli määrittää, kuinka tietynlainen särö vaikuttaa tietynlaisen roottorin ratakäyriin ja erikoisesti kuinka suuri on särön oltava, jotta se voidaan havaita suurella varmuudella akselivärähtelyiden seurannalla. Tätä varten särön etenemisrintama kuvattiin suoraksi (kuva 12) ja särön vaikutuksesta roottorin jäykkyyteen kehitettiin malli, joka ottaa huomioon särön "hengittämisen" roottorin pyöriessä /12/.



Kuva 12. Suurehko särö ja pieni särö roottorissa (a) ja laskelmissa käytetty särön malli (b) /12/.

Särön ja mahdollisten erisuurten pääjäyhyysmomenttien vaikutuksesta pyörivän roottorin liikeyhtälö on epälineaarinen, toisin sanoen systeemin jäykkyyismatriisi ei ole vakio. Liikeyhtälön ratkaisemiseksi kehitettiin elementtimenetelmää soveltava ROTOR-ohjelma /12/. Ohjelma muodostaa särölliselle elementille oman jäykkyyismatriisin käyttäen CRACK-ohjelmaa /5/. Ohjelman antamia tuloksia verrattiin analyttisesti laskettuihin ja kokeellisesti mitattuihin arvoihin, ja ohjelma todettiin luotettavaksi.

Kuvassa 13 on ohjelmalla laskettu esimerkki. Vasemmanpuoleinen käyrä esittää akselin siirtymävastetta laakerissa, ns. ratakäyrää, kun roottori on ehjä. Oikeanpuoleinen esittää ratakäyrää, kun roottorin keskellä on särö, jonka syvyys on $0,75 \cdot \text{säde}$.



Kuva 13. Esimerkkiroottorin solmupistejako (a), ehjän roottorin ratakäyrä (b) ja säröllisen roottorin ratakäyrä (c) /12/.

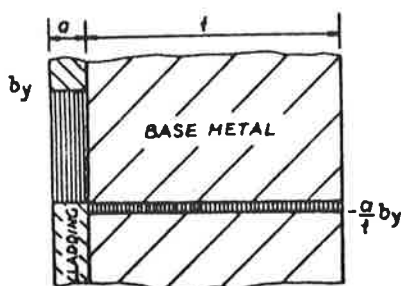
3.4 Reaktoripaineastian hätäjähdytysanalyysi

Reaktoripaineastiateräkset on kehitetty sitkeästi käyttäytyviksi. Hätäjähdytystilanteissa on haurasmurtumien esiintyminen kuitenkin mahdollista, sillä lämpötila saattaa laskea säteilyn vaikutuksesta kohonneen transitiolämpötilan alapuolelle.

Hätäjähdytysanalyysi jakautuu kahteen vaiheeseen.

1. Termohydraulisen analyysin tuloksena saadaan jäähdytteen massavirrat, lämmönsiirtokertoimet sekä paine ja lämpötila tarkastelukohdalla.
2. Rakenneanalyttinen tarkastelu suoritetaan käyttäen edellä mainittuja tuloksia lähtötietoina. Jännitysintensiteettikertoimen K_I laskemista varten selvitetään ensin paineastian seinämän lämpötila- ja jännitysjakautumat ajan funktiona.

Hätäjähdytysanalyysin yhteydessä selvitettiin paineastian vuoraukseen syntyvien jäännösjännitysten vaikutusta pyörähdyssymmetrisen radiaalisen särön jännitysintensiteettikertoimeen /9/. Perinteisesti vuorauksen vaikutus on otettu huomioon vain lämpötilajakautumien määrittämisessä.



Kuva 14. Jäännösjännitysjakautuma vuoratun paineastian ehyessä seinämässä.

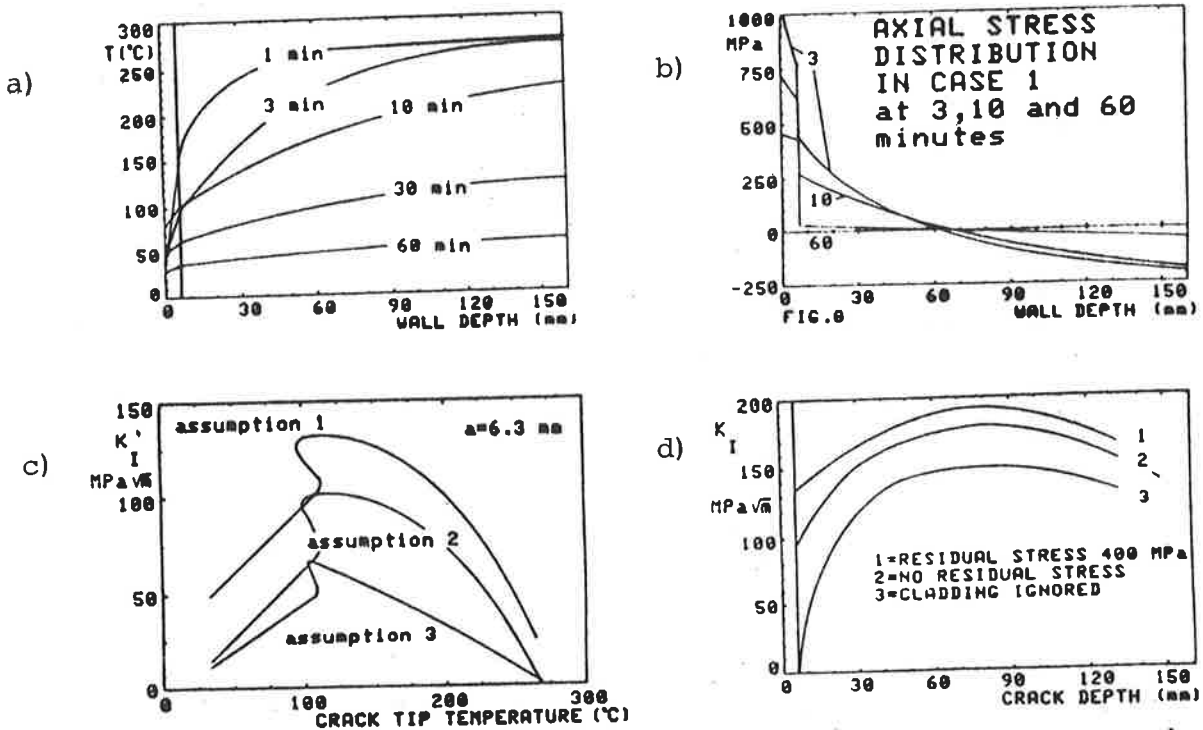
Kun paineastia jäähtyy 600 - 700 °C:n myöstöhehkutuslämpötilasta huoneenlämpötilaan, perusaineen ja vuorauksen lämpöpitenemiskertoimien erisuuruudesta aiheutuu vuoraukseen myötörajan suuruinen vetojännitys. Jännitysjakautumaa paineastian seinämässä voidaan

kuvata kuvan 14 mukaisella yksinkertaisella mallilla. Käyttölämpötilassa jäännösjännitykset ovat noin 0...50 % huoneenlämpötilan arvosta, mutta hätäjäähtäytyksen aiheuttama lämpötilan lasku kasvattaa jälleen huomattavasti vuorauksen lämpöjännityksiä.

Kuvassa 15 esitetään vuorauksen läpäisevälle särölle kolmeen eri oletukseen perustuen laskettuja tuloksia.

1. Vuoraus ja sen jäännösjännitykset on otettu huomioon.
2. Vuoraus on otettu huomioon, mutta ei jäännösjännityksiä.
3. Vuorauksista on käsitelty vain lämpötilajakautumaa laskettaessa.

Tulokset osoittavat vuorauksen poisjättämisen aiheuttavan särön vaarallisuuden huomattavan aliarvioinnin. Juuri perusaineeseen ulottuva särö osoittautuu vaaralliseksi syvempiin säröihin verrattuna.



Kuva 15. a) Paineastian seinämän lämpötila- ja b) aksiaali-jännitys-jakauma sekä c) jännitysintensiteettikertoimen riippuvuus särön kärjen lämpötilajakaumasta ja d) särön pituudesta.

4 YHTEENVETO JA JATKOTUTKIMUKSET

Murtumismekaniikka on saavuttanut tason, jolla soveltaminen käytännön rakenteiden analysointiin on mahdollista. Soveltaminen vaatii edelleen erityisasiantuntemusta sekä erityisohjelmia luotettavan tuloksen takaamiseksi, joten murtumismekaniikan analyysi- ja koestuspalvelujen tarjonta säilynee vielä pitkään VTT:n kaltaisten tutkimuslaitosten ja korkeakoulujen tehtävänä. Murtumismekaniikka myös kehittyy edelleen voimakkaasti, minkä vuoksi menetelmien kehittämiseen ja kehityksen seurantaan on jatkuvasti kiinnitettävä huomiota.

VTT:ssa elementtimenetelmään pohjautuvien menetelmien kehityksessä keskitytään VTTVIRT-ohjelman monipuolistamiseen esimerkiksi lämpökuormitusten ja särön kyljillä vaikuttavien painekuormitusten huomioinnoksi. Ohjelmaa on mahdollista laajentaa myös dynaamisiin kuormitustilanteisiin ja virumistarkasteluihin soveltuvaksi, jolloin sillä voitaisiin laskea J-integraalin ohella myös muiden murtumisparametrien arvoja.

Painofunktiomenetelmän käyttöä tehostetaan kehittämällä siihen ja käsikirjaratkaisuihin perustuva helppokäyttöinen ohjelmisto, jolloin jännitysanalyysi tarvitsee tehdä vain säröttömälle rakenteelle.

Tämän hetken tärkein tutkimuskohde on epälineaarisen murtumismekaniikan antamien tulosten verifiointi vaativissa kuormitustilanteissa. Verifiointiin käytetään todellisilla rakenteilla suoritettavista kokeista saatavia tuloksia, joita saadaan kansainvälisistä tutkimusohjelmista.

Toinen tutkimusohjelmista on yhteispohjoismainen projekti 'katastrofaalisen murtumisen estäminen paineastioissa ja putkistoissa' eli LBB (Leak Before Break) -projekti. Projektin tavoitteena on selvittää, millä edellytyksillä paineistetun rakenteen vaurioitua syntyy havaittava vuoto ennen rakenteen katastrofaalista murtumista. Projektissa suoritetaan puoli- ja täysimittakaavakoikeita paineastioilla ja putkikappaleilla. Suurimmat koestettavat paineastiat ovat ydinvoimalan reaktoripaineastian suuruusluokkaa.

Kokeissa on paineistettuun koestettavaan rakenteeseen tarkoitus aiheuttaa vuoto, ja kokeita tullaan simuloimaan murtumismekaanisilla laskentaohjelmilla.

VTT on yhteistyössä saksalaisen HDR (Heiss Dampf Reaktor) -projektin kanssa, jossa tehdään täyden mittakaavan kokeita käytöstä poistetulla HDR-ydinvoimalaitoksella. VTT osallistuu paineastian lämpöshokkikokeiden sekä putkiston vaurioitumiskokeiden analysointiin /7/. Paineastialle suoritettavissa lämpöshokkikokeissa kasvatetaan yhdealueelle ja seinämään säröt, joiden kasvua seurataan. Viime vaiheessa on tarkoitus voimakkaalla paineistettua lämpöshokkia simuloivalla kokeella saada aikaan vuoto paineastiassa. Putkistokokeissa kasvatetaan ensin väsyttävällä kuormituksella putkistoon säröjä, jotka lopuksi synnyttävät vuodon. Koetta käytetään myös LBB-ehdon verifiointiin.

5 KIRJALLISUUSVIITTEET

- 1 deLorenzi, H. G., 1984, Energy release rate calculations by the finite element method. Engineering Fracture Mechanics 21(1985), s. 129 - 143.
- 2 deLorenzi, H. G., 1982, On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations. International Journal of Fracture 19(1982), s. 183 - 193.
- 3 Ikonen, K., 1980, J-integraali ja sen laskeminen elementtime-netelmällä. Espoo 1980. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Ydinvoimatekniikan laboratorio, Tiedonanto 56. 54 s. + liitt. 20 s.
- 4 Ikonen, K. ja Mikkola, T., 1981, J-integraalin laskevan tietokoneohjelman JINT käyttöohje ja ohjelman käyttökokemuksia. Espoo 1981. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Tiedotteita 34. 61 s. + liitt. 26 s.
- 5 Ikonen, K., ym., 1983, Ydinvoimalakomponenttien rakenneanalyysit. Espoo 1983. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Tiedotteita 218, s. 92 - 94.

- 6 Larsson, L. H., 1984, EGF numerical round robins on EPFM. In: Proceedings of Third International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics. Swansea 1984.
- 7 Mikkola, T., Materiaalin teoreettinen kuormitus- ja murtumistutkimus HDR-projektissa v. 1984 - 1987. Helsinki 1984. VTT/YDI Työraportti RAP-5/84, 17 s.
- 8 Persson, R., Kilpi, K., Siikonen, T., Noro, H., Thermal-hydraulic analysis of steam isolation valves. SMIRT 7 paper G/F 6/2, Chigago 1983, s. 413 - 420.
- 9 Päätiläinen, P., Ahlstrand, R. and Raiko, H., Linear elastic fracture analysis of irradiated nuclear components having welded cladding. Trans. 6th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Paris 17 - 21 August, 1981. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1981. Paper G 1/4. 9 s.
- 10 Rahka, K. ym., Iskusikeyslämpötilan valinta matalien käyttölämpötilojen teräsrakenteiden kuormitetuille liitoksille, sä-rönsietokyvyn varmistaminen. Espoo 1985. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, 77 s.
- 11 Rintamaa, R. ym., 1984, Instrumented impact testing machine with reduced specimen oscillations effects. Espoo 1984. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Tutkimuksia 290. 44 s.
- 12 Salminen, P., Särön vaikutus joustavan roottorin värähtelyihin. Diplomityö. Helsingin teknillinen korkeakoulu, koneinsinööri-osasto. Otaniemi 1982. 194 s.
- 13 Siikonen, T., A short description of the computer code TMOC. Technical Research Centre of Finland, Research Notes 257, Espoo 1983, 70 s.
- 14 Talja, H. ja Wallin, K., 1984, Murtumismekaniikkakoesauvojen elastis-plastinen analyysi. Osa 2. Espoo 1984. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Tutkimuksia 329. 33 s. + liitt. 75 s.

- 15 Valkonen, A., Talja, H. ja Ikonen, K., 1983, Murtumismekaniikkakoesauvojen elastis-plastinen analyysi. Osa 1. Espoo 1983. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Tutkimuksia 150. 54 s. + liitt. 64 s.
- 16 Valkonen, A. ja Saarelma, H., 1981, Murtumisvastuskäyrä ja sen määrittäminen joustomenetelmällä. Espoo 1981. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Tutkimuksia 30. 40 s. + liitt. 6 s.
- 17 Wallin, K., Saarelma, H. ja Varis, E., 1984, Materiaalin sitkeyden määrittäminen automatisoidulla testausjärjestelmällä. Espoo 1984. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Tiedotteita 386. 19 s.

IDEAL FLUID FLOW, OBLIQUE NEUMANN BOUNDARY CONDITION AND FINITE ELEMENTS

Satu Räsänen*, Risto Salminen** and Eero-Matti Salonen***

* The Academy of Finland

** Mikkeli School for Technical Education

*** Helsinki University of Technology

1 INTRODUCTION

This paper is concerned with the numerical solution of plane ideal fluid flow using the stream function formulation. The presentation differs from the conventional one with respect to an unusual boundary condition.

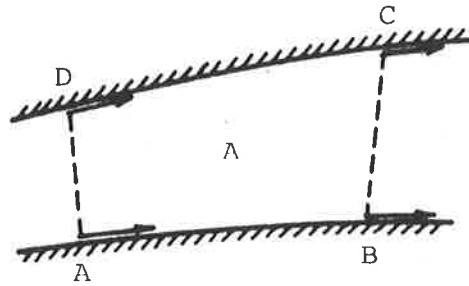
We consider two-dimensional incompressible irrotational fluid flow — shortly ideal fluid flow. The stream function ψ is employed, which gives the velocity components as $v_x = \partial\psi/\partial y$ and $v_y = -\partial\psi/\partial x$. The well-known governing field equation is the Laplace equation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } A, \quad (1)$$

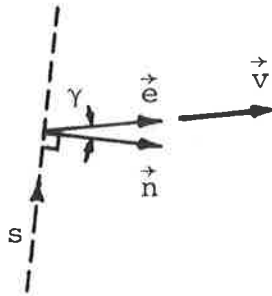
where A is the plane domain under consideration.

In fluid flow problems one great difficulty is the proper selection of a reasonable boundary for the domain needed to solve the problem at hand. The boundaries should be taken so that meaningful approximations about the appropriate boundary conditions can be made.

Quite often we can say something about the direction of flow at certain places. As an example let us consider the flow domain ABCD shown in Figure 1 (a). Boundaries AB and DC consist of rigid solid walls. Boundaries BC and DA must be taken rather arbitrarily through the fluid just to have a closed calculation domain.



(a)



(b)

Boundaries AB and DC are streamlines because of the rigid walls. Thus we know the direction of the flow at points A, B, C and D. In certain cases a reasonable engineering assumption could be that the flow direction varies more or less smoothly — say linearly — between the two known values at the ends of sections DA and BC.

As the value of the stream function is constant on a streamline, the knowledge of the flow direction on a boundary part s_2 leads to the boundary condition

Figure 1. (a) A fluid domain
(b) Some details on section BC.

$$\frac{\partial \psi}{\partial e} = 0 \quad \text{on } s_2, \quad (2)$$

when the notation in Figure 1 (b) is employed.

This condition differs from the classical homogeneous Neumann boundary condition $\partial \psi / \partial n = 0$, where n is the normal direction. We shall call condition (2) or more generally the nonhomogeneous condition "the derivative of a function in a specified direction is given" the oblique Neumann boundary condition. This is due to the name "the oblique derivative boundary condition" used in the mathematics text [1] for a more general condition of the type $a\psi + \partial \psi / \partial e = q$ where a and q are given.

On the remaining part s_1 of the boundary we have the conventional nonhomogeneous Dirichlet boundary condition

$$\psi = \bar{\psi} \quad \text{on } s_1, \quad (3)$$

where $\bar{\psi}$ is a given function (usually a constant as for instance on boundaries AB and CD in Figure 1 (a)).

Thus our problem is described mathematically by equations (1), (2) and (3). We are not aware of any treatment of the oblique Neumann condition in the fluid mechanics literature.

2 TWO WEIGHTED RESIDUAL FORMULATIONS

System (1), (2) and (3) is not self-adjoint [2] with respect to the boundary conditions. In Reference [3] we gave two discretization schemes which were based on a quasi-functional. We made use of the fact that if condition (2) is replaced by the conventional Neumann one a well-known variational principle exists [4, p. 68] and we formally transformed our problem into such a form that the standard equations following from the variational principle could be employed.

Here we deal again with the same two discretization schemes but now we look at them as weighted residual formulations. This kind of derivation may be considered somewhat more straightforward than the one used in Reference [3]. Before proceeding we first write the derivative $\partial\psi/\partial e$ either as

$$\frac{\partial\psi}{\partial e} = e_n \frac{\partial\psi}{\partial n} + e_s \frac{\partial\psi}{\partial s} \quad (4)$$

or as

$$\frac{\partial\psi}{\partial e} = e_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (5)$$

where the notation is obvious (see Figure 1). In addition we have the relationship

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = n_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + n_y \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (6)$$

We start from the integral statement

$$\int_A v \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dA + \int_{s_2} \bar{v} \frac{\partial\psi}{\partial e} ds = 0 \quad (7)$$

corresponding to equations (1) and (2). Quantities v and $\bar{v}$ are test functions in A and on s_2 [4, p. 48]. Function ψ is considered constrained in advance to satisfy condition (3) so that the corresponding integral over s_1 does not appear. Integration by parts of the area integral gives a so called weak form

$$-\int_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA + \int_{s_1} v \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \int_{s_2} \left(v \frac{\partial \psi}{\partial n} + \bar{v} \frac{\partial \psi}{\partial e} \right) ds = 0. \quad (8)$$

First we select the test functions to be

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 && \text{on } s_1, \\ \bar{v} &= -\frac{1}{e_n} v && \text{on } s_2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

which gives the form (signs are changed)

$$\int_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA - \int_{s_2} v \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{1}{e_n} \frac{\partial \psi}{\partial e} \right) ds = 0 \quad (10)$$

or taking into account expression (4) the form (see Figure 1)

$$\int_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA + \int_{s_2} v \tan \gamma \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = 0. \quad (11)$$

The second selection is

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 && \text{on } s_1, \\ \bar{v} &= -v && \text{on } s_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

which gives the form (signs are changed)

$$\int_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA - \int_{s_2} v \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial e} \right) ds = 0 \quad (13)$$

or taking into account expressions (5) and (6) the form

$$\int_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dA + \int_{s_2} v \left[(e_x - n_x) \frac{\partial \psi}{\partial x} + (e_y - n_y) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] ds = 0. \quad (14)$$

We note that if $\vec{e}$ coincides with $\vec{n}$ the line integral in equation (11) and in (14) disappears.

3 DISCRETE EQUATIONS

Using C^0 -elements the approximation is

$$\hat{\psi} = \sum_j N_j(x, y) \psi_j \quad (15)$$

where N_j is a shape function and ψ_j a nodal value of ψ . The corresponding approximations needed in statements (11) or (14) are

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial s} &= \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial s} \psi_j, \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} &= \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \psi_j, \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} &= \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} \psi_j. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

The discrete equation corresponding to a node i in A or on s_2 is produced by the Galerkin method, i.e., we take $v = N_i$. Thus a system

$$\sum_j K_{ij} \psi_j = 0 \quad (17)$$

is obtained with either

$$K_{ij} = \int_A \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA + \int_{s_2} N_i \tan \gamma \frac{\partial N_j}{\partial s} ds \quad (18)$$

or

$$K_{ij} = \int_A \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA + \\ + \int_{s_2} N_i \left[(e_x - n_x) \frac{\partial N_j}{\partial x} + (e_y - n_y) \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] ds. \quad (19)$$

We shall call the discretization using expression (11) or (18) formulation 1 (F1) and expression (14) or (19) formulation 2 (F2). We note the following. System (17) is linear but in general unsymmetric due to the line integral terms. These contributions do not however increase the bandwidth. Non-zero contributions can appear in F1 only if the element in question has both the nodes i and j on boundary s_2 . In F2 in addition node j can be an inner node of an element having its edge on s_2 . Inspection of expression (18) reveals our intentions in the selections leading to F1. The derivative $\partial N_j / \partial s$ is in the direction of the boundary and involves thus only the nodal values along the boundary. Therefore we may expect somewhat better accuracy than in F2 where the derivatives $\partial N_j / \partial x$ and $\partial N_j / \partial y$ evaluated at the boundary clearly correspond to some kind of unilateral approximations. On the other hand F1 has the drawback that when $\gamma \rightarrow \pm 90^\circ$, $\tan \gamma$ becomes unbounded. In fact this situation means that we are approaching the Dirichlet boundary condition, since formula (2) then reads $\partial \psi / \partial s = 0$, i.e., ψ is constant.

A banded solver was employed to determine the nodal values in system (17). The Dirichlet data (3) is taken into account in the usual way by specifying the nodal values on s_1 .

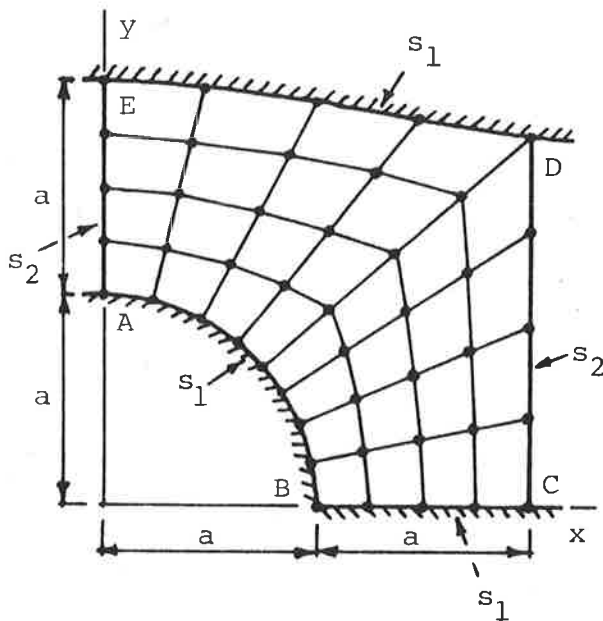
4 NUMERICAL EXAMPLE

We have studied the numerical behaviour of the proposed formulations with Lagrangian four-noded and nine-noded isoparametric quadrilateral elements. The numerical integration was performed using Gaussian quadrature with four and nine integration points in the quadrilateral elements and two and three points in the line elements on the boundary with four- and nine-noded elements, respectively. Example cases with known analytical solutions were

studied to be able to compare the errors involved.

The formulations have worked quite well in all the cases treated. For practical purposes there is hardly any difference between the results obtained using the Neumann condition or the oblique one — with either formulation 1 or 2 — when the boundary data is taken according to the exact solution. Thus somewhat against our expectations formulation 2 has not proved to be less accurate than formulation 1.

As an example we give here the case shown in Figure 2. Flow around



a circular cylinder without circulation in an infinite domain is considered. The well-known exact solution in polar coordinates is

$$\psi = q_0 \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \quad (20)$$

where q_0 is the far field uniform x-direction stream velocity. The calculation domain ABCDE (Figure 2) is taken so that boundary DE is the streamline through point

Figure 2. Flow around a cylinder. (0, 2a). From symmetry reasons boundary ABC is also a streamline. These boundaries may then be considered as solid walls. The boundary conditions used are

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 0 && \text{on } ABC \\ \psi &= \frac{3}{2} q_0 a && \text{on } DE \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 && \text{on } EA \\ \frac{\partial \psi}{\partial e} &= 0 && \text{on } CD \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

or

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad \text{on CD} \quad (22)$$

The last condition is used in the standard formulation. The direction of $\vec{e}$ and the value of v on CD are calculated from the exact solution.

The calculations were performed using a 3×5 , a 5×9 and a 9×17 node mesh. The 5×9 mesh with four-noded elements is shown in Figure 2. As a measure of the error the relative mean square norm

$$e = \frac{[\int (\hat{\psi} - \psi)^2 dA]^{1/2}}{(\int \psi^2 dA)^{1/2}} \quad (23)$$

has been used. The error is calculated with the same element mesh as in the finite element solution, but with a higher order Gaussian integration rule.

The results are shown in Table 1. As can be seen, the numbers are practically the same with the different formulations for a given element mesh.

Table 1. Error e for different formulations and element meshes.

	Mesh	Four-noded elements	Nine-noded elements
Standard formulation	3×5	0.015 867	0.013 549
	5×9	0.004 120	0.002 042
	9×17	0.001 040	0.000 286
Formulation 1	3×5	0.015 914	0.013 549
	5×9	0.004 121	0.002 043
	9×17	0.001 040	0.000 286
Formulation 2	3×5	0.015 897	0.013 551
	5×9	0.004 112	0.002 043
	9×17	0.001 035	0.000 286

The plot of the error e as a function of the relative mesh size h/a is shown in Figure 3. Here h is the uniform distance between the nodes on the x - or y -axis (Figure 2). The slope of the lines gives the convergence rate p with respect to norm (23). In the

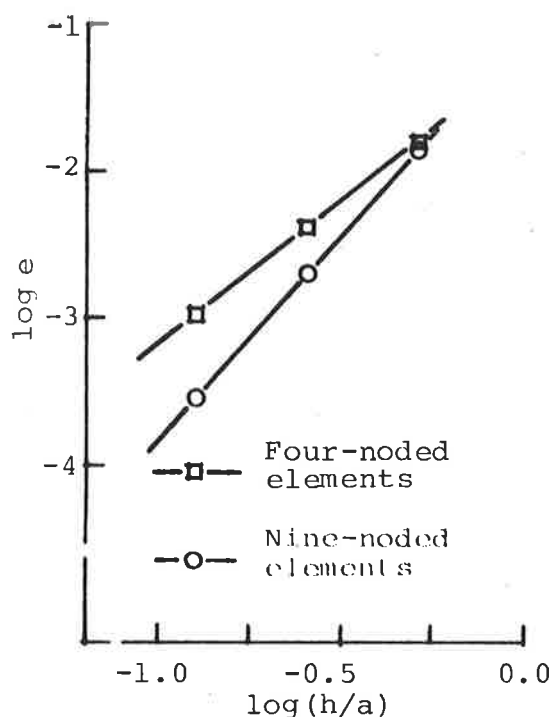


Figure 3. Log-log plots of the error e as a function of the relative mesh size h/a .

case of four-noded elements $p = 2, 0$ and for nine-noded elements $p = 2, 8$.

In a real problem the exact boundary conditions are naturally not known. The possibility to be able to use boundary condition (2) in the way discussed in the Introduction clearly facilitates the selection of a suitable calculation domain in a problem. For instance, in Reference [5] it is reported that the computational domain must be adjusted in certain cases so that the lateral vertical boundaries are either at a crest or at a through of a wave. Then the usual boundary condition of horizontal flow (i.e. condition $\partial\psi/\partial n = 0$) is meaningful. With our scheme we could dispense with this condi-

tion. This theme is considered in more detail in Reference [3].

5 CONCLUDING REMARKS

When a problem is self-adjoint and a classical variational principle can be employed, the discretization procedure is conceptually an easy one. When a variational principle cannot be found, however, the situation is much more complicated and nothing is any more obvious — at least for an engineer. How to discretize the system in a reasonable way? We proposed two formulations associated with the non-standard system (1), (2) and (3). These two are naturally not the only possible ones as in theory infinitely many ways to obtain the discrete system exist. Our selections were guided originally by a variational principle which exists when boundary condition (2) happens to be the classical Neumann one.

It is then reasonable to construct such a discretization that it at least contains as a special case the classical one associated with the variational principle. The observed good numerical behaviour of the formulations gives some further confidence on the selections.

Reference [3] contains more numerical results obtained with formulation 1. Possible extensions to other problems than ideal fluid flow are also discussed there.

ACKNOWLEDGEMENTS

The writers want to thank MScTech J. Aalto for his help on programming aspects, MScTech T. Manner for performing some preliminary calculations and Associate Professor J. Pitkäranta for useful discussions on the mathematics of the problem.

REFERENCES

- [1] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer 1977, p. 115.
- [2] Lanczos, C., Linear Differential Operators, van Nostrand 1966, p. 180.
- [3] Räsänen, S.M. and Salonen, E-M., 'Solution of the Laplace Equation with a Modified Neumann Boundary Condition', Report No. 10, Institution of Mechanics, Helsinki University of Technology, Finland 1982.
- [4] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, Third edition, McGraw-Hill 1977.
- [5] Aitchison, J.M., 'A finite element solution for critical flow over a weir'. Proceedings of the Third International Conference on Finite Elements in Flow Problems, Banff, Alberta, Canada, 10-13 June, 1980, Vol. II, pp. 52-59.

YMPYRÄSYLINTERIKUOREN LIKIRATKAISU

Mauri Määttänen
Oulun yliopisto

ABSTRAKTI

Ympyräsyylinterikuoren likiratkaisun lähtökohtana on päistään vapaasti tuetun kuoren tarkka ratkaisu kaksoisfouriersarjoja käyttäen. Reunaehdot toteutetaan superponoimalla kullekin sarjan termille likimääräinen ympyräsyylinterikuoren homogeeniratkaisu, joka pohjautuu Calladinen esittämään kahdeksannen kertaluvun differentiaaliyhtälön korvaamiseen kahdella toisistaan riippumattomalla likimääräisellä neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä. Reunaehdot erilaisille päätykiinnityksille esitetään. Likiratkaisun sovellutusmahdollisuuksia selvitetään ja mikrotietokoneelle kehitetyn tietokoneohjelman laskemia tuloksia tarkastellaan.

1. JOHDANTO

Ympyräsyylinterikuoren tarkka ratkaisu edellyttää Fluggen /3/ kahdeksannen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisua ja reunaehtojen toteuttamista. Jättämällä tarkasta isotrooppisen ja homogeenisen ympyräsyylinterikuoren differentiaaliyhtälöstä pois tilanteen mukaan pieniä termejä päädytään hiukan yksinkertaisempaan ratkaisuun /2,5/. Menettely on kuitenkin työläs ja vain harvoja käytännön sovellutuksia on esitetty /5,6,7/.

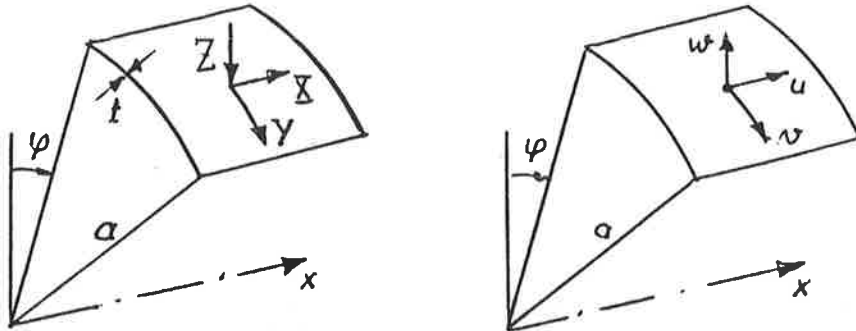
Elementtimenetelmä on nykyisin yleisimmin käytetty ratkaisumenetelmä rakenteiden lujuusanalyysissä silloin, kun valmiita "taulukkotapauksia" ei ole käytettävissä. Geometrialtaan yksinkertaisessa ympyräsyylinterikuoressa joudutaan kuitenkin varsin raskaaseen elementtimalliin riittävän tarkkojen tulosten saamiseksi. Syynä ovat reunahäiriöalueilla esiintyvät voimakkaat taivutusjännitysgradientit, mitkä edellyttävät tiheätä elementti-verkkoa. Yleinen kuormitus taas edellyttää joko kuorielementtien käyttöä tai kuormitusten Fourier-kehittelmiä joko kehänsuunnassa rengaskuorielementeillä tai akselinsuunnassa suikale-elementeillä.

Calladine /1/ esittää yksinkertaisen likiratkaisun korvaamalla Donnellin differentiaaliyhtälö kahdella neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä. Näistä toinen kuvaa pääasiassa kuoren taivutusta ja toinen pinnansuuntaista venytystä. Osaratkaisut lähestyvät asympotoottisesti Donnellin ratkaisua kuoren geometrian ja kuormituksen täyttäessä tietyt edellytykset. Kuormitus jaetaan kummankin osaratkaisun kesken näiden jäykkyyksien suhteessa.

Nyt esitettävässä ympyräsyylinterikuoren likiratkaisussa käytetään hyväksi tarkkaa Fluggen differentiaaliyhtälöä kuormituksen huomioinnissa ja Calladinen likiratkaisua reunaehtojen toteuttamisessa. Yksityisratkaisu on siis tarkka ja homogeeniratkaisu likimääräinen. Menetelmän etuna on laajempi sovellutusalue ratkaisun säilyttäessä kuitenkin yksinkertaisuutensa.

2. RATKAISUN TEORIA

Kuvassa 1 on esitetty ympyräsynterikuorialkioon kohdistuvat ulkoiset voimasuureet sekä siirtymien positiiviset suunnat.



Kuva 1. Ympyräsynterikuorialkion kuormitus ja siirtymät.

Sisäiset kalvo- ja taivutusvoimat voidaan lausua siirtymien avulla, /3/, jolloin kuorialkion tasapainoyhtälöistä saadaan isotrooppisen ja homogeenisen ympyräsynterikuoren tarkka differentiaaliyhtälöryhmä 1 siirtymäsuureille u , v ja w , /3,4/:

$$\left\{ \begin{aligned} & a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \mu a \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}(1+\mu) a \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + k \left[\frac{1}{2}(1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - a^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{2}(1-\mu) a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} \right] + X \frac{a^3}{D} = 0, \\ & \frac{1}{2}(1+\mu) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2}(1-\mu) a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + k \left[\frac{1}{2}(1-\mu) a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(3-\mu) a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right] + Y \frac{a^3}{D} = 0, \\ & \mu a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + k \left[\frac{1}{2}(1-\mu) a \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \varphi^2} - a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{2}(3-\mu) a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right] + Z \frac{a^3}{D} = 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\text{jossa:} \quad k = \frac{K}{D a^3} \quad K = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad D = \frac{E t}{1-\nu^2}$$

Nämä toisiinsa kytkeytyneet differentiaaliyhtälöt ovat siirtymäkomponenteille u ja v toista astetta ja taipumalle w neljättä astetta. Kuoren päiden tuennan ollessa vapaa, ns. veitsenterätuenta, on löydettävissä Fourier-sarjamuotoinen ratkaisu, joka toteuttaa suoraan kaikki reunaehdot. Tämä edellyttää kuormituksen kehittämistä vastaavanmuotoiseksi Fourier-sarjaksi 2. Koska sarjan

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \sum_m \sum_n X_{mn} \cos m \varphi \cos \lambda \frac{x}{a}, \\ Y &= \sum_m \sum_n Y_{mn} \sin m \varphi \sin \lambda \frac{x}{a}, \\ Z &= \sum_m \sum_n Z_{mn} \cos m \varphi \sin \lambda \frac{x}{a} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

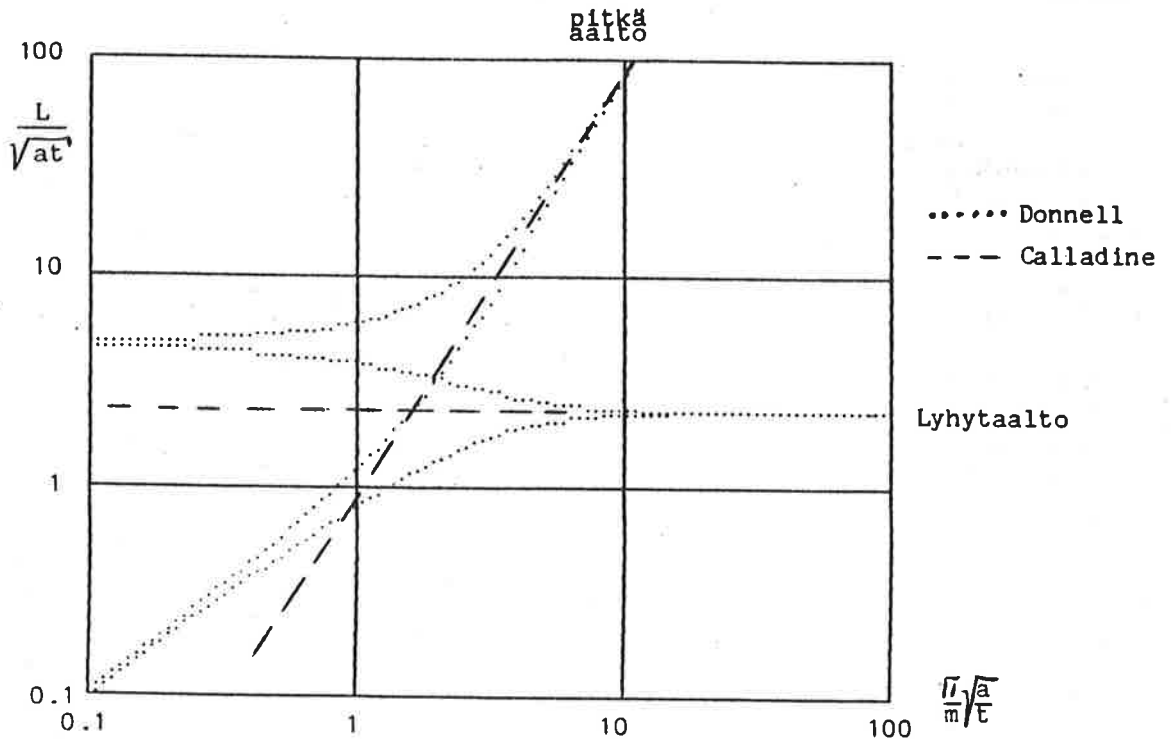
$$\text{jossa:} \quad \lambda = n \pi \frac{a}{l}$$

termit eivät ole keskenään kytkeytyneitä saadaan kullekin sarjan termille kolme lineaarista yhtälöä, joista siirtymäkomponenttien kertoimet 3 voidaan ratkaista.

$$\begin{cases} X = X_{mn} \cos m \varphi \cos \lambda \frac{x}{a}, \\ Y = Y_{mn} \sin m \varphi \sin \lambda \frac{x}{a}, \\ Z = Z_{mn} \cos m \varphi \sin \lambda \frac{x}{a} \end{cases} \quad \begin{cases} u = u_{mn} \cos m \varphi \cos \lambda \frac{x}{a}, \\ v = v_{mn} \sin m \varphi \sin \lambda \frac{x}{a}, \\ w = w_{mn} \cos m \varphi \sin \lambda \frac{x}{a} \end{cases} \quad (3)$$

Jos kuoren pään reunaehdot poikkeavat vapaasti tuetusta, esimerkiksi jäykästi kiinnitetty tai vapaa reuna, on homogeeniratkaisulla toteutettava tarvittavat muutokset vapaasti tuetun reunan reunaehtoihin. Tarkka menettely edellyttää kahdeksannen kertaluvun homogeenisen differentiaaliyhtälön 1 ratkaisua kullekin Fourier-sarjan termille yhdessä kuormituksen toteuttavan yksityisratkaisun kanssa. Työläytensä takia - vaikka differentiaaliyhtälöä olisi yksinkertaistettu jättämällä pieniä termejä pois - menetelmää ei ole käytännössä juurikaan sovellettu.

Calladine /1/ lähtee liikkeelle Donnellin yksinkertaistetuista differentiaaliyhtälöistä ja osoittaa, että kun kehäsuuntaisen Fourier-sarjan termin aallon pituus on suurempi kuin akselin suuntaisen aallon vaimenemismatka, ympyräsyylinterikuoren ratkaisu degeneroituu kahdeksi toisistaan riippumattomiksi osaratkaisuiksi, kuva 2, joita voidaan kuvata neljännen kertaluvun differentiaali-



Kuva 2. Donnellin ja Calladinen diff. yht. juuret.

yhtälöillä. Näistä toinen on pääasiassa akselin suuntainen lyhytaaltoinen nopeasti vaimeneva taivutushäiriö ja toinen pitkäaaltoinen koko kuoren yli ulottuva pääasiassa kalvovoimia käsittävä ratkaisu. Jos taas kehäsuuntaisen aallon pituus on tuntuvasti pienempi kuin aksiaalisen reunahäiriön aallonpituus

degeneroituu ympyräsylinterikuoren ratkaisu laattaratkaisuksi.

Käytännössä aksiaalisen taivutushäiriön aallonpituus on ympyräsylinterikuorilla pienempi kuin ympyrän säde. Näin Calladinen likiratkaisu on käytettävissä kun kuormitus kehän suunnassa jakaantuu tätä leveämmälle alueelle. Kaikki oman painon, sisäisen paineen tai nestekuorman tapaukset täyttävät helposti po. vaatimuksen. Jos kuoreen kohdistuu kapeampi kuormitus eroavat Calladinen likiratkaisun juuret jo tuntuvasti Donnellin ratkaisun juurista. Virhe vaikuttaa oleellisesti kuorman välittymisessä paikallisena taivutuksena tai kalvovoimina.

Huomioimalla kuormitus tarkan Fluggen differentiaaliyhtälön toteututtavalla ratkaisulla voidaan pelkästään reunaehdot toteuttaa Calladinen likiratkaisulla. Tällöin ei tarvita vaatimusta pelkästään radiaalisesta kuormituksesta ja virhe ilmenee ainoastaan reunahäiriöiden vaimenemisessa. Tapaukset, joissa kehänsuunnassa tarvittava aallonpituus on suurempi kuin reunahäiriön vaimenemismatka, tulos on vähintään yhtä tarkka kuin suoraan Donnellin differentiaaliyhtälöä käyttäen. Kapeilla kuormituksilla tärkeimpiä jännityksiä ovat paikalliset taivutusjännitykset, jotka kuvautuvat kuorman vaikutuskohdassa tarkasti, mikäli kuormitus ei ole keskittyneenä reunahäiriön vaikutusalueelle. Reunaehdot puolestaan toteutuvat, mutta likiratkaisun virhe voi ilmetä kiinnitystuki-reaktioissa. Koska kuitenkin virhettä aiheuttavat "kapeat" kehänsuuntaiset Fourier-sarjan termit ovat pieniä matalimpiin termeihin verrattuna likimääräistysvirhe jää pieneksi kokonaisratkaisussa. Lisäksi jos kuormitus ei ole reunahäiriöalueella summautuu reunalaueella virhevaikutus kuormituksen Fourier-sarjan tapaan pieneksi.

Calladinen lyhytaaltoratkaisun differentiaaliyhtälö 4 on rotaatiosymmetrisen ympyräsylinterikuoren differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \frac{E t}{D a^2} w_s = 0 \quad (4)$$

aksaalisuunnassa. Kehänsuunnassa vain saatu ratkaisu kerrotaan kulloisellakin kosinitermillä. Lyhytaaltoratkaisu vaikuttaa voimakkaimmin kuoren voimasuureisiin M_x ja N_φ . Reunaehdoista voidaan toteuttaa reunan taipuma, kallistuma, momentti M_x tai leikkausvoima Q_x . Koska vain neljä reunaehto on toteutettavissa voidaan tarvittaessa reunavääntömomentti $M_{x\varphi}$ yhdistää Kirchhoffin menetelmällä leikkausvoimaan Q_x , jolloin saadaan reunan staattisesti ekvivalentti korvikeleikkausvoima $\bar{Q}_x$.

Calladinen pitkäaaltoratkaisun differentiaaliyhtälö 5 on myöskin muodoltaan ympyräsylinterikuoren differentiaaliyhtälö aksiaalisuunnassa, mutta nyt ensimmäisen kertaluvun termin kerroin on

$$\frac{\partial^4 w_L}{\partial x^4} + \left[\frac{2}{E t a^6} m^4 (m^2 - 1)^2 \right] w_L = 0 \quad (5)$$

riippuvainen kehänsuuntaisesta Fourier-sarjan termin järjestysnumerosta m . Mitä korkeampi termi, sitä lyhyempi tulee olemaan ratkaisun aallonpituus. Pitkäaaltoratkaisu vaikuttaa voimakkaimmin kuoren voimasuureisiin N_x ja M_φ . Reunaehdoista voidaan toteuttaa reunan aksiaali- ja tangentiaalisiirtymä, sekä reunavoimat N_x ja $N_{x\varphi}$. Reunan kalvoleikkausvoimaan on huomioitava mahdollisesti lyhytaaltoratkaisun leikkausvoimatermistä Q_x tuleva osuus. Pitkäaaltoratkaisu tulee kyseeseen vain kehän suuntaisille Fourier-termeille, joiden järjestysluku on 2 tai suurempi.

Termeillä 0 tai 1 on laskettava yksinkertainen vakioratkaisu tai palkin taivutusta vastaava ratkaisu.

3. REUNAEDDOT

Reunaehdot jäykästi päästään kiinnitetyille ympyräsylinterikuorelle ovat:

$$\begin{cases} u=v=w=0 \\ w'=0 \end{cases} \quad (6)$$

Reunaehtoyhdistelmäksi tulee silloin:

$$\begin{cases} w_S = w_L = 0 \\ w'_S = -w'_L \\ w'_L = -\frac{m}{a} u_0 \end{cases} \quad (7)$$

Alaindekseillä S ja L on merkitty Calladinen homogeeniyhtälöiden lyhyt- ja pitkäaaltoista ratkaisuosaa ja indeksillä 0 vapaasti tuetun ympyräsylinterikuoren tarkkaa ratkaisua kullekin Fourier-sarjan termille m ja n. Pitkäaaltoisen ratkaisun $w'_L=0$ toteuttaa vaatimuksen $u=0$, ja $w'_S=0$ toteuttaa vaatimuksen $v=0$.

Vapaasti tuetulla reunalla tulee asettaa:

$$\begin{cases} v=w=0 \\ N=0 \\ M=0 \end{cases} \quad (8)$$

Koska yksityisratkaisu toteuttaa nämä vaatimukset tulee homogeeniratkaisuilla toteuttaa samat ehdot. Tämä johtaa reunaehtoihin:

$$\begin{cases} w_S = w_L = 0 \\ w'_S = w'_L = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Nyt ehto $w'_L=0$ toteuttaa ehdon $N_X=0$.

Vapaalla reunalla ovat reunaehdot:

$$\begin{cases} N_X=0 \\ N_{Xp}=0 \\ M_X=0 \\ Q_X=0 \end{cases} \quad (10)$$

Calladinen likiratkaisulla nämä voidaan toteuttaa asettamalla:

$$\begin{cases} w'_S = w'_L = 0 \\ w''_S = w''_L = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Pitkän ratkaisun ehto $w'_L=0$ vastaa ehtoa $N_X=0$ ja ehto $w''_L=0$ vastaa ehtoa $N_{Xp}=0$.

Merkillepantavaa on, että kaikissa tapauksissa sekä lyhyt- että pitkäaaltoisen ratkaisun tapauksissa kummallekin syntyy samanlainen reunaehtoyhtälöryhmä. Lyhyen ja pitkän ratkaisun reunaehtoyhtälöt voidaan ratkaista toisistaan riippumatta ja edellä olevan samannuotoisuuden takia samalla rutiinilla vain

vakioita vaihtaen. Molemmat reunat samanaikaisesti huomioiden syntyy neljän tuntemattoman yhtälöryhmä, joka voidaan po. reunaehtotapauksissa ratkaista suljetussa muodossa.

Edellä esitettyjen reunaehtotapausten lisäksi kyseeseen voi tulla liittyminen toiseen kuoreen tai muunlainen joustava kiinnitys. Kaikissa tapauksissa voidaan reunaehdot kuitenkin esittää yksinkertaisesti edellä esitettyjä periaatteita noudattaen.

4. SOVELLUTUSESIMERKKEJÄ.

Edellä esitettyä teoriaa hyväksikäyttäen on tehty Basic-kielinen tietokoneohjelma 16-bitin pöytätietokoneelle. Ohjelman pituus on noin 200 riviä, ja ratkaisuaika 154 jännitysten lskentapisteele 21 sekuntia kutakin Fourier-sarjan termiä kohden. Käytännössä riittävän tarkkoja tuloksia saadaan kun Fourier-kehitelmiään otetaan niin monta sarjan termiä, että termin aallonpituus akselin suunnassa on pienempi kuin reunahäiriön vaimenemismatka ja kehän suunnassa pienempi kuin kuormitusalueen kehänsuuntainen pituus.

Tavallisimmat ympyräsylinterikuoren kuormitukset, joita on analysoitu ja julkaistu, johtuvat vaakasuorassa olevan kuoren omasta painosta tai nestekuormasta. Tällöin tarvitaan vain kehänsuuntaiset Fourier-sarjan termit $m=0$ ja 1 . Kuoren pituussuunnassa tarvittavien termien määrä riippuu pituuden ja vaimenemismatkan suhteesta. Vertaamalla viitteessä /4/ julkaistuja tuloksia molemmista päistään jäykästi tuetusta ympyräsylinterikuoresta ja tässä esitetyllä teorialla laskettuja on saatu muuten identtiset tulokset paitsi nyt on saatu nelinkertainen tuen taivutushäiriö Fourier-sarjan termillä $n=1$.

Jos kuoren nestetäyttö on osittainen tarvitaan useita kehänsuuntaisia termejä. Vertailutapausta, jossa olisi muu kuin vapaa tuenta ei kirjallisuudesta löytynyt. Vapaalla tuella ei taas tarvita lainkaan esitetyn likiratkaisun mukaista reunaehtokorjausta.

Vertailutapaus täpläkuormituksesta saadaan kun lasketaan paikallisen taivutushäiriön suuruus vapaasti tuetulle ja jäykästi kiinnitetulle ympyräsylinterikuorelle. Edellyttäen, että kuormitusalueen koko on pieni kuoren pituuteen verrattuna, tulee kuormitusalueella olevan taivutushäiriön olla kummassakin tapauksessa lähes yhtä suuria, mutta superponoituneena erilaiseen koko kuoren palkkimaiseen taivutukseen.

Kuvassa 3 on esitetty sovellutuskuoren mitat ja kuormitus. Kuoren taivutuksesta johtuvat aksiaali- ja kehäjännitysten jakaumat vaipan ulkopinnalla on esitetty pitkittäisleikkauksessa $=0$ ja poikittäisleikkauksessa $x=L/2$. Aksiaalinen taivutusjännitys on keskialueella kolmen numeron tarkkuudella kummallakin reunaehdolla sama. Kehän suuntaisessa taivutusjännityksessä on havaittavissa läpi koko kuoren pituuden ulottuva vaikutus momentissa M .

Kuormitusalue kehän suunnassa, 30 cm, on kapeampi kuin Calladinen likiratkaisun vaatimus. Esimerkin suurimmalla kehän suuntaisella termillä $m=30$ on kuvan 2 abskissan arvo 0.52, eli jo kun $m>5$, Calladinen ehto ei enää toteudu. Jos sama jäykästi tuettu kuori lasketaan käyttäen 20 kehän suuntaista sarjan termiä ilmenee tuloksissa eroja vasta kolmannessa numerossa. Jos lasketaan vain

viittä kehän suuntaista termiä käyttäen, jolloin Calladinen ehto toteutuu, tulos muuttuu täpläkuorman vaikutuskohdassa, koska sarja ei pysty kuvaamaan enää kapeata kuormitusta oikein vaikkakin kokonaiskuormitus tulee oikein huomioiduksi. Jäykästi kiinnitetyissä päädyissä taas eroa on vasta kolmannessa numerossa, eli alle prosentin ero. Näin ollen korkeimpien m -termien väärä vaimenemismatka ei vaikuta merkittävästi tuloksiin. Tämä tulos osoittaa nyt esitetyn likiratkaisun kelvollisuuden laajemmalla sovellutusalueella kuin mitä alkuperäinen Calladinen menetelmä. Lisäksi kaikki kuormituskomponentit X, Y ja Z voivat olla mukana ratkaisun säilyttäessä edelleen yksinkertaisuutensa.

5. YHTEENVETO

Ympyräsylinterikuorelle on esitetty likiratkaisu käyttämällä yksityisratkaisuna tarkkaa Fluggen differentiaaliyhtälöä ja homogeneeniratkaisuna reunaehtojen toteutukseen likimääräistä Calladinen ratkaisua kahdella toisistaan riippumattomalla neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä.

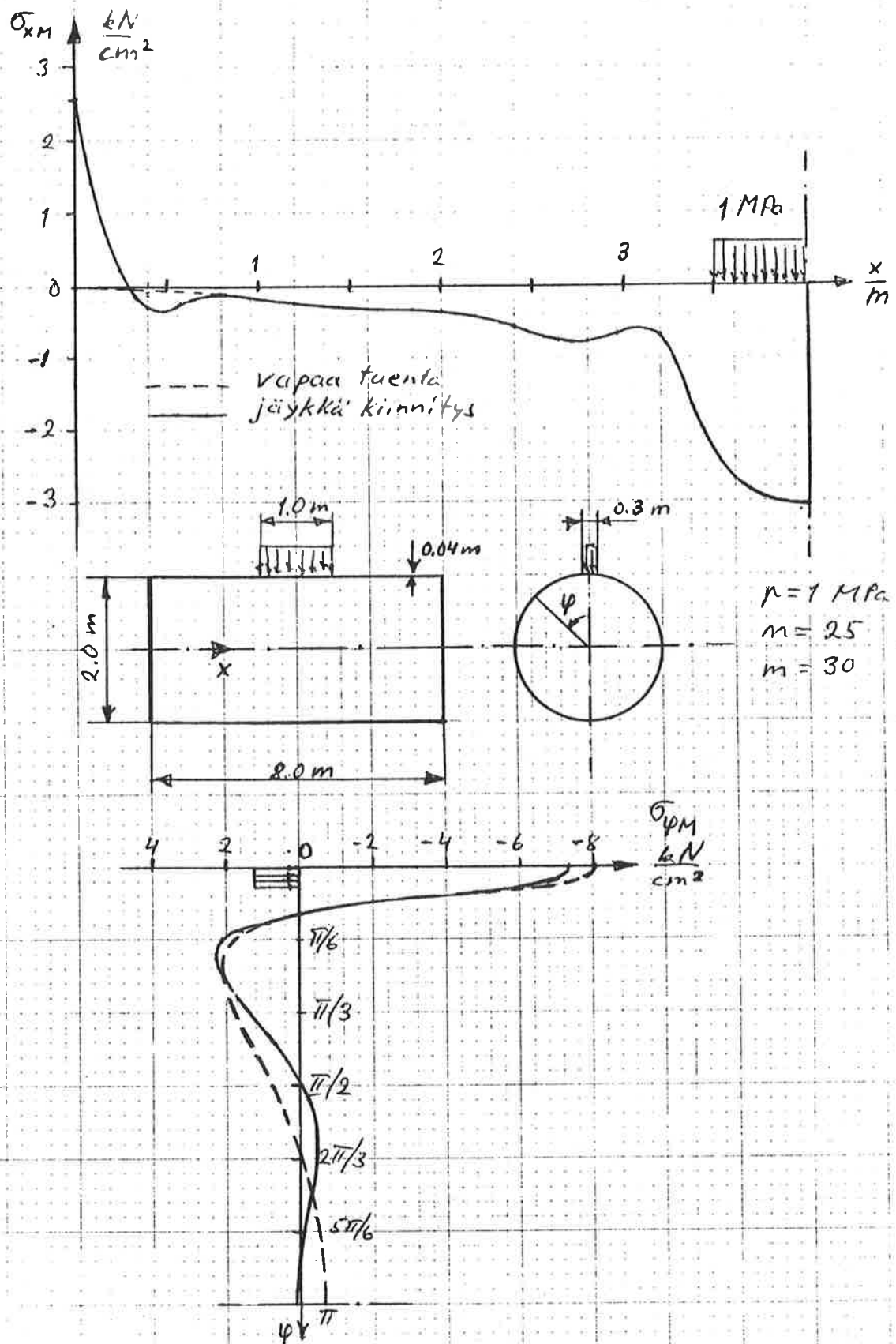
Ratkaisu on sovellettavissa laajemmin kuin jos myös kuormitus huomioitaisiin Calladinen likiratkaisulla.

Reunaehdot tavallisimmille ympyräsylinterikuoren pääntuontavaihtoehtoilta on esitetty. Teoriaan perustuen on laadittu Basic kielinen tietokoneohjelma ympyräsylinterikuorien ratkaisemiseksi kaikille kuormituksille, jotka voidaan kehittää Fourier-kaksoisarjaksi.

Lasketut tulokset osoittavat yhdenmukaisuutta harvoin kirjallisuudessa julkaistuihin esimerkkitapauksiin. Vertailu kahden erilaisen reunaehtotapauksen kesken osoittaa likiratkaisun kuvaavan taivutushäiriön oikein täpläkuormituksen alueella.

KIRJALLISUUSVIITTEET

1. Calladine C.R.: Theory of Shell Structures. Cambridge University Press, Cambridge 1983.
2. Donnell L.H.: Stability of Thin Walled Tubes under Torsion. NACA Report 479, Washington 1933.
3. Flugge W.: Statik und Dynamik der Schalen. Springer Verlag, Berlin 1934.
4. Girkman K.: Flächentragwerke. Springer Verlag, Wien 1956.
5. Hoff N.J.: Boundary Value Problems of the Thin Walled Circular Cylinder. Journal of Applied Mechanics, Vol 21, s 343-350, 1954.
6. Holand I.: Design of Circular Cylindrical Shells. Oslo University Press, Oslo 1957.
7. Olsen O.: Kontinuerlige Skall. Akademiska Tryggningsentral, Oslo 1951.



Kuva 3. Sovellutusesimerkki ympyräsylinterikuoresta.

$a = 1$ m, $L = 8$ m, $t = 0.04$ m, $p = 1$ MPa 1×0.3 m² alueella, $m = 30$, $n = 25$

OHUEN PYÖRÄHDYSKUOREN ROTAATIOSYMMETRINEN STATIIKKA

Hannu Outinen

Tampereen teknillinen korkeakoulu

Konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Koneenrakennus- ja rakennustekniikka soveltavat hyvin usein kanta-
vissa rakenteissaan pintarakenteita kuten levyjä, laattoja ja kuoria.
Niiden laskennallinen käsittely tuli yleisemmin mahdolliseksi vasta,
kun numeeriset ratkaisumenetelmät pääsivät tietokoneiden myötä rat-
kaisevasti kehittymään. Erityisesti elementtimenetelmä (FEM) on 60-
luvusta lähtien tarjonnut erittäin tehokkaan, joustavan ja monipuoli-
sen työkalun näiden vaativien rakenteiden suunnittelijalle.

Tämä esitys liittyy laajempaan työhön [1],..., [10], jonka tavoitte-
na on esittää, miten ohuen pyörähdyskuoren statiikan ongelma voidaan
ratkaista klassisen kuoriteorian puitteissa *tarkasti*, kun kuormitus-
kin on pyörähdyssymmetrinen. Jotta ratkaisu ei rajoittuisi yksinker-
taisiin peruskuoriin, sovitetaan se siirtymämenetelmän mukaisen ele-
menttimenetelmän puitteisiin. Menetelmä on siis palkkirakenteiden
yhteydestä tutun tarkan elementtimenetelmän mukainen.

Ongelmaa ei tekijän käsityksen mukaan ole aikaisemmin käsitelty sa-
malla tavalla. Muut ratkaisut, kuten esim. HAMPE:n [11], tähtäävät
käsinlaskentaan ja niistä puuttuu aksiaalisten vaikutusten huomioon-
otto.

2 PYÖRÄHDYSSYMMETRISESTI KÄYTTÄYTYVÄN OHUEN PYÖRÄHDYSKUOREN KLASSINEN KUORITEORIA

2.1 Perusoletukset

LOVEN [12, 13] jo vuonna 1888 esittämän ohuen kuoren likiteorian mukaisesti oletetaan, että kuoren paksuus h on pieni sen referenssipinnan pääkaarevuussäteisiin R_1 ja R_2 verrattuna ja että siirtymät ovat niin pieniä paksuuden rinnalla, että linearisoitu kinematiikka on käytettävissä. Paksuussuuntaisen jännityksen vaikutusta muodonmuutoksiin ei oteta huomioon ja kinematiikka rakennetaan "hiusharjamaalin" varaan, jolloin referenssipinnan normaalilla olevat materiaali-pisteet säilyvät taipuneenkin referenssipinnan normaalilla eivätkä nämä "harjakset" veny.

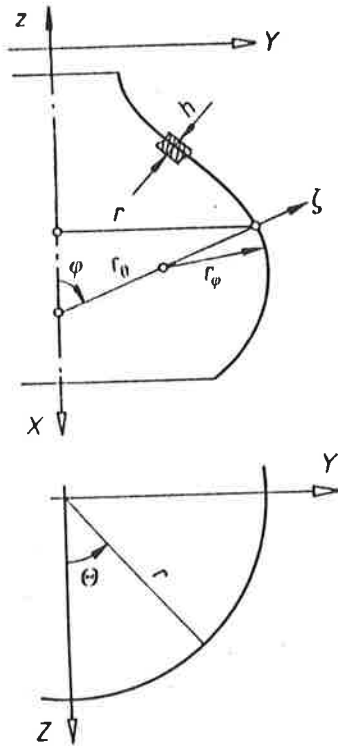
Näihin LOVEN hypoteeseihin lisätään vielä, että materiaali on homogeenista, lineaarisesti kimmoista ja ortotrooppista sekä mekaanisen että lämpöpitenehämisen ortotropioiden pääsuuntien yhtyessä referenssipinnan pääkaarevuussuuntiin. Referenssipinnan venymien vaikutusta pääkaarevuusmuutoksiin ei oteta huomioon ja tekijät $1+\zeta/R_i$ ($i = 1, 2$) korvataan luvulla 1, missä ζ on referenssipinnasta sen normaalia pitkin mitattu koordinaatti. Näihin perustuvaa teoriaa sanotaan tässä esityksessä *klassiseksi kuoriteoriaksi*.

Tässä työssä käytetään referenssipintana kuoren seinämän keskipintaa, jonka oletetaan syntyvän siten, että tasokäyrä (meridiaani) pyörähtää täyden kierroksen tasossaan olevan pyörähdysakselin ympäri. Kuoren tuenta ja kuormitus oletetaan myös pyörähdyssymmetrisiksi.

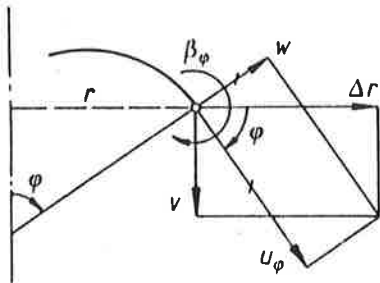
2.2 Kuoren differentiaaliyhtälöryhmä

Kuvasta 1 selviävät käytetty karteellinen XYZ-koordinaatisto sekä käyräviivaiset φ, θ, ζ -koordinaatit ja keskipinnan pääkaarevuussäteet r_φ ja r_θ . Leveysympyrän säde $r = r_\theta \sin \varphi$. Jos $r_\varphi = \infty$, kuten sylinterillä ja kartiolla, korvataan koordinaatti φ meridiaania pitkin mitatulla suoraviivaisella koordinaatilla x .

Kinemaattisten muuttujien β_φ ja u_φ & w sekä v & Δr positiiviset suunnat on esitetty kuvassa 2 sekä jännitysresultanttien M_φ ja N_φ & Q_φ



Kuva 1. Pyörähdyskuoren keskipinnan koordinaatit φ, θ, ζ ja pääkaarevuussäteet r_φ, r_θ .



Kuva 2. Kinemaattiset suureet.

sekä V_φ & H_φ vastaavasti kuvassa 3a. Rengasmomentti M_θ ja rengasvoima N_θ selviävät kuvasta 3b.

Kinemaattisten ja kineettisten reunakuormitusten lisäksi käsitellään kenttäkuormitusta q_ζ ja q_φ , jotka ovat positiivisia koordinaattisuuntiensa ζ ja φ mukaisesti. Lämpötilakuormituksen $T(\varphi, \zeta)$ vaikutus otetaan huomioon paksuuskeskiarvon $T_0(\varphi)$ ja paksuusgradientin $T_1(\varphi)$ avulla, joiden määritelmät ovat

$$T_0(\varphi) = \frac{1}{h} \int T d\zeta \quad (1)$$

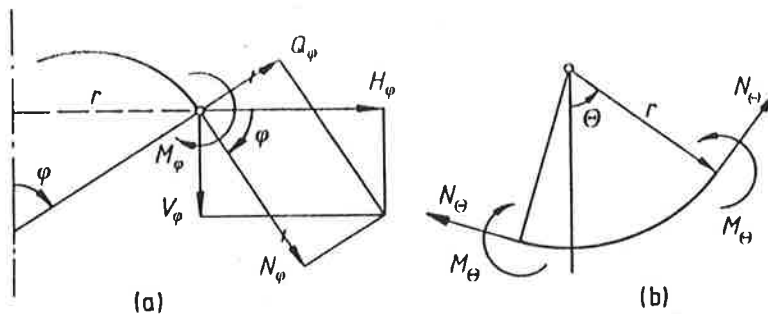
$$T_1(\varphi) = \frac{12}{h^3} \int T \zeta d\zeta$$

Lineaarisen, homogeenisen ja ortotrooppisen materiaalin yhtälöistä, "hiusharjamalliin" perustuvista linearisoiduista kinemaattisista yhtälöistä ja tasapainoyhtälöistä saadaan H. REISSNERin [14] ja E. MEISSNERin [15] esittämällä tavalla perus-differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{aligned} L(W) - 2fW &= \Gamma U + H(\varphi) \\ L(U) &= -E_\theta W + G(\varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

jossa

$$W = h^3 \beta_\varphi \quad U = r_\theta Q_\varphi. \quad (3)$$



Kuva 3. Kineettiset suureet.

L on tietty [9, 16] lineaarinen, toisen kertaluvun differentiaalioperaattori, jonka kertoimet ovat tässä yleisessä tapauksessa varsin mutkikkaita pääkaarevuussäteiden r_φ , r_θ ja paksuuden h sekä näiden derivaattojen funktioita. Vakiokerroin

$$\Gamma = 12(1 - \nu_{\varphi\theta}\nu_{\theta\varphi})/E_\varphi \quad (4)$$

riippuu POISSONin kertoimista $\nu_{\varphi\theta}$, $\nu_{\theta\varphi}$ ja kimmomoduulista E_φ . E_θ on toinen kimmomoduuli. Kerroinfunktio

$$f = \nu_{\varphi\theta} \frac{h}{r_\varphi} + \left[\left(\frac{r_\theta}{r_\varphi} - \nu_{\varphi\theta} \right) \cot \varphi + \left(\frac{r_\theta}{r_\varphi} \right)_{,\varphi} \right] \frac{h_{,\varphi}}{r_\varphi} + \frac{r_\theta h_{,\varphi\varphi}}{r_\varphi^2} \quad (5)$$

$H(\varphi)$ on lämpötilakuormitustermi ja $G(\varphi)$ sekakuormitustermi, joka sisältää aksiaalisen reunakuormituksen ja kineettisen kenttäkuormituksen lisäksi lämpötilakuormituksen paksuuskeskiarvon $T_0(\varphi)$ vaikutuksen.

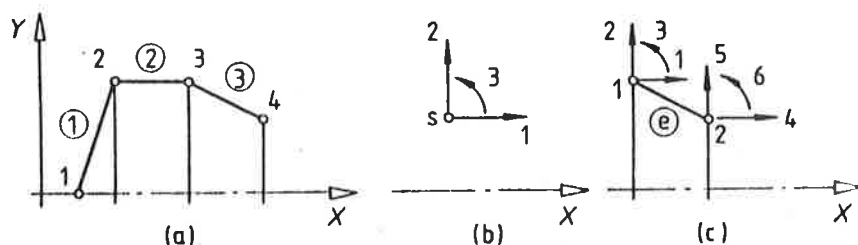
Kun perustuntemattomat W ja U on ratkaistu, saadaan muut kuorimuuttujat eksplisiittisistä lausekkeista [10, 16], jotka sisältävät myös funktioiden U ja W derivaatat $U_{,\varphi}$ ja $W_{,\varphi}$.

3 RATKAISUMENETELMÄ

3.1 Menetelmän yleiskuvaus

Jotta perusdifferentiaaliyhtälöparin (2) analyttinen ratkaisu ei kävisi toivottoman hankalaksi, on pakko rajoittaa sellaisiin peruskuoriin, joiden geometria on yksinkertainen. Tällaisia ovat sylinteri, kartio, pallo ja ympyrätoroidi.

Näistä peruskuorista voidaan kuitenkin yhdistämällä rakentaa hyvinkin monipuolisia pyörähdysymmetrisiä kuoria. Yhdistetyn kuoren statiikka on yksinkertaisinta ratkaista siirtymäperusteisen elementtimenetelmän mukaisesti. Elementit ovat peruskuoria, joita yhdistävät leveysympyrät ovat laskentamallin solmuja (kuva 4a). Kullakin solmulla on varauduttava C^1 -jatkuvuuteen elementtien siirtymien välillä, joten solmuuureiden mittaus on kuvan 4b mukainen. Siirtymämittaus sisältää tällöin aksiaalisen ja säteettäisen translaation lisäksi meridiaanin kääntymiskulman. Jotta jäykkyysmatriisi olisi symmetrinen, "kerätään" solmuvoimavektorin komponentit radiaanin kaarelta.



Kuva 4. Laskentamallin elementit ja solmut (a), solmusuureiden (b) sekä elementin solmusuureiden (c) mittaus.

Elementin (kuva 4c) solmusiirtymä- ja solmuvoimavektori ovat siis

$$\{u\} = \{v_1 \quad \Delta r_1 \quad -\beta_{\varphi_1} \quad v_2 \quad \Delta r_2 \quad -\beta_{\varphi_2}\} \quad (6)$$

$$\{F\} = \{-r_1 V_{\varphi_1} \quad -r_1 H_{\varphi_1} \quad r_1 M_{\varphi_1} \quad r_2 V_{\varphi_2} \quad r_2 H_{\varphi_2} \quad -r_2 M_{\varphi_2}\} \quad (7)$$

Niitä kytkävä elementin jäykkyyssmatriisi $[k]$ määritellään yhtälöllä

$$\{F\} = [k]\{u\} \quad (8)$$

Koko rakenteen laskentamallin jäykkyyssmatriisi $[K]$ saadaan tavanomaisesti sijoittelusummauksella sen elementtien jäykkyyssmatriiseista

$$[K] = \sum [k] \quad (9)$$

Kenttäkuormitus otetaan huomioon elementtien ekvivalenttisten solmukuormitusten $\{r\}$ avulla, jotka lisätään solmukuormituksiin $\{P\}$ sijoittelusummauksella

$$\{R\} = \{P\} + \sum \{r\} \quad (10)$$

Kun tuenta otetaan huomioon, saadaan FEM-yhtälöstä

$$[K]\{U\} = \{R\} \quad (11)$$

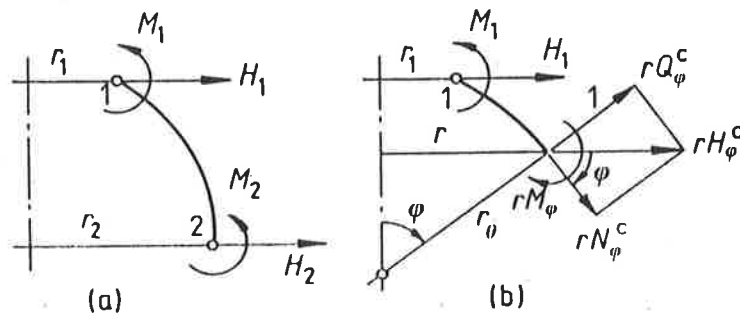
ratkaistua rakenteen solmusiirtymät $\{U\}$ ja tukireaktiot. Vektorista $\{U\}$ poimitaan nyt kunkin elementin solmusiirtymät $\{u\}$, jolloin sen solmuvoimat voidaan laskea yhtälöstä

$$\{F\} = [k]\{u\} - \{r\} \quad (12)$$

Lopuksi määritetään kunkin elementin kenttäsuureet yhteenlaskuperiaatteen avulla ottaen kenttäkuormitus huomioon.

3.2 Homogeenisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisu

Panemalla kuormitustermit $H(\varphi)$ ja $G(\varphi)$ nolliksi perusdifferentiaaliyhtälöparissa (2) saadaan vastaava homogeeninen pari. Sitä vastaa ns. *homogeeninen kuormitus* (kuva 5), johon kuuluvat säteettäinen reunovoima ja reunamomentti. Aksiaalinen reunakuormitus sisältyy seka-kuormitustermiin $G(\varphi)$, joten se ei ole mukana homogeenisessä kuormituksessa.



Kuva 5. Homogeeninen kuormitustapaus (a) ja sen kohdalta φ leikatun yläosan vapaakappalekuva (b).

REISSNER & MEISSNER-ratkaisuteknikka [9, 16] edellyttää, että kaavan (5) mukainen kerroinfunktio f on vakio. Tämä ns. *jakaantumisehto* toteutuu seuraavilla pyörähdyskuorilla.

1. Tasapaksut kuoret ($h = \text{vakio}$)
 - a) Sylinteri, b) kartio, c) pallo, d) toroidi.
 - e) Kaikki pyörähdyskuoret, joilla $v_{\varphi\theta} = 0$.
2. Sylinterikuori, jonka $h = Ax^2 + Bx + C$
3. Kartiokuori, jonka $h = Ax + B$

Kun f on vakio, saadaan homogeenisen parin yleinen ratkaisu muodossa

$$U^C = [S]\{A\} \quad W^C = [\underline{S}]\{A\} \quad (13)$$

missä $\{A\}$ sisältää neljä vapaata integroimisvakiota. Matriisi

$$[S] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \quad (14)$$

saadaan differentiaaliyhtälön

$$L(U^C) + \lambda^2 U^C = 0 \quad (15)$$

$$\lambda^2 = -f + i\mu_0^2 \quad \mu_0^4 = 12(1 - v_{\varphi\theta}v_{\theta\varphi})E_\theta/E_\varphi - f^2 \quad (16)$$

kahden toisistaan lineaarisesti riippumattoman yksityisratkaisun reaali- ja imaginaariosista

$$U_1^C = S_1 - i S_2 \qquad U_2^C = S_3 - i S_4 \qquad (17)$$

Toisen perustuntemattoman W^C kantafunktiot määritetään lineaarisella muunnoksella

$$[\underline{S}] = [S][[B] \ [B]] \qquad (18)$$

missä

$$[B] = \begin{bmatrix} -f & -\mu_0^2 \\ \mu_0^2 & -f \end{bmatrix} \qquad (19)$$

Kuten raporteissa [1], ..., [10] on osoitettu, differentiaaliyhtälön (15) ratkaisu löytyy alkeisfunktioiden joukosta vain tapauksissa 1a ja 3, jos $B = 0$. Tapauksissa 1b ja 2, jossa $A = 0$, voidaan käyttää toisen kertaluvun KELVINin funktioita $\text{ber}_2(0)$, $\text{bei}_2(0)$, $\text{ker}_2(0)$ ja $\text{kei}_2(0)$, mutta muissa kohdissa on johdettava sopivat potenssisarjat kantafunktioiksi.

3.3 Täydellisen differentiaaliyhtälöparin yksityisratkaisut

Kuten tunnettua lineaarisen differentiaaliyhtälöryhmän yleinen ratkaisu on vastaavan homogeenisen ryhmän yleisen ratkaisun ja täydellisen ryhmän minkä tahansa yksityisratkaisun summa.

$$U = U^C + U^P \qquad W = W^C + W^P \qquad (20)$$

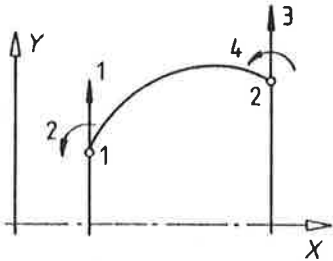
missä U^P ja W^P ovat parin (2) mikä tahansa yksityisratkaisupari.

Raporteissa [1], ..., [10] on määritetty aksiaalista, itsensä tasapainottavaa reunakuormitusta V_1 & V_2 sekä seuraavia kenttäkuormituksia vastaavat yksityisratkaisut eri peruskuorille.

1. Paineakuormitus, joka muuttuu lineaarisesti aksiaalikoordinaatin X suhteen tai on vakio.
2. Lumikuormitus, jonka tiheys pyörähdysakselin normaalitasolta mitattuna on vakio.
3. KiihtyvyySKUORMITUS aksiaalisuunnassa, jonka erityistapaus on painovoima.
4. Keskipakovoima.
5. Lämpötilakuormitus, jonka T_0 ja T_1 ovat enintään lineaarisia aksiaalikoordinaatin X funktiona.

Yksityisratkaisut on löydetty yleensä alkeisfunktioiden joukosta, mutta toroidilla on ollut pakko turvautua potenssisarjoihin.

3.4 Jäykkyyismatriisin määrittäminen



Kuva 6. Homogeeninen solmusuureiden mittaustaus.

Koska aksiaalinen reunakuormitus ei sisälly homogeeniseen kuormitukseen (kuva 5), edellyttää kuvan 4c solmumittauksista vastaavan jäykkyyismatriisin määrittäminen myös aksiaalista reunakuormituksesta vastaavan yksityisratkaisun käyttöä. Lasketaan ensin kuvan 6 solmumittauksista vastaava joustomatriisi. Homogeenisen tapauksen ratkaisun perusteella saadaan

$$\{F^C\} = [C]\{A\} \quad \{u^C\} = [D]\{A\} \quad (21)$$

joissa olevat kerroinmatriisit ovat

$$[C] = \begin{bmatrix} -1 & h & 1 & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [S]_1 \\ [S^*]_1 \\ [S]_2 \\ [S^*]_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[D] = \frac{1}{E_\theta h^2} \begin{bmatrix} h & -1 & h & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\hat{S}]_1 \\ [\underline{S}]_1 \\ [\hat{S}]_2 \\ [\underline{S}]_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Alaindeksi 1 tai 2 tarkoittaa, että kyseinen matriisi on laskettava kulman φ reuna-arvolla φ_1 tai φ_2 . Matriisien $[S^*]$ ja $[\hat{S}]$ muunnoskaavat ovat

$$[S^*] = \frac{E_\varphi/E_\theta}{1 - \nu_{\varphi\theta}\nu_{\theta\varphi}} \left(\frac{r}{r_\varphi} [\underline{S}_{,\varphi}] + \left(\nu_{\varphi\theta} \cos \varphi - \frac{r}{r_\varphi} \cdot \frac{2h}{h} \varphi \right) [\underline{S}] \right) \quad (24)$$

$$[\hat{S}] = \frac{r}{r_\varphi} [S_{,\varphi}] - \nu_{\varphi\theta} [S] \cos \varphi \quad (25)$$

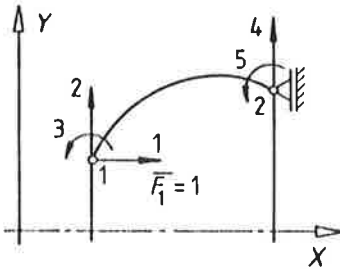
Yhtälöistä (21) seuraa

$$\{u^C\} = [D][C]^{-1}\{F^C\} = [a^C]\{F^C\}$$

joten kuvaa 6 vastaava 4*4 joustomatriisi

$$[a^C] = [D][C]^{-1} \quad (26)$$

Tämä täydennetään kuvan 7 solmumittausta vastaavaksi 5*5 joustomatriisiksi $[\bar{a}]$ lisäämällä aksiaaliset joustoluvut δ_{ii} .



Kuva 7. Solmusuureiden mittausta ja aksiaalinen ykköskuormitus.

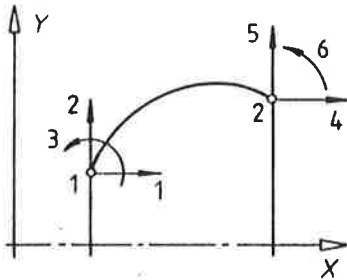
$$[\bar{a}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} & \delta_{41} & \delta_{51} \\ \delta_{21} & & & & \\ \delta_{31} & & & & \\ \delta_{41} & & & & \\ \delta_{51} & & & & \end{bmatrix} \quad [a] \quad (27)$$

Ne saadaan laskemalla kuvassa 7 esitettyä aksiaalista ykköskuormitusta $\bar{F}_1 = 1$ vastaavat solmuisiirtymät aksiaalisen reunakuormituksen yksityisratkaisun ja homogeenisen kuormitustapauksen ratkaisun avulla.

Kääntämällä joustomatriisi $[\bar{a}]$ saadaan kuvan 7 solmumittausta vastaavaksi 5*5 jäykkymatriisiksi

$$[\bar{k}] = [\bar{a}]^{-1} \quad (28)$$

Tästä päästään tavoitteena olevaan kuvan 8 solmumittauksen 6*6 jäykkymatriisiin $[k]$ lisäämällä neljäs rivi ja sarake matriisiin $[\bar{k}]$ kolmannen ja neljännen rivin ja sarakkeen väliin. Aksiaalisen tasapainoehdon mukaan lisäys on tehtävä niin, että matriisin $[k]$ ensimmäinen ja neljäs rivi (sarake) ovat toistensa vastalukuja.



Kuva 8. Solmusuureiden mittausta.

3.5 Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Elementin tietyn kenttäkuormituksen ekvivalenttiset solmukuormitukset $\{r\}$ saadaan määritettyä täydellisen differentiaaliyhtälöparin (2) vastaavan yksityisratkaisun avulla. Koska yksityisratkaisu saa olla muutoin mielivaltaisen, kunhan kuormitustermeihin $G(\varphi)$ ja $H(\varphi)$ kyseinen kenttäkuormitus sisältyy, kannattaa yksityisratkaisuksi valita mahdollisimman yksinkertainen lauseke, joka on säännöllinen elementin alueessa.

Ekvivalenttinen solmukuormitus muodostuu kiinnitysrekatioiden vastasuureista, joten

$$\{r\} = -\{\bar{r}\} = [k]\{u^P\} - \{F^P\} \quad (29)$$

missä $\{u^P\}$ ja $\{F^P\}$ ovat yksityisratkaisun mukaiset solmusiirtymä- ja solmuvoimavektorit.

4 ATK-OHJELMA ESAS

Edellä selostetun tarkan elementtimenetelmän pohjalta on laadittu ATK-ohjelma ESAS ohuen, pyörähdysymmetrisesti kuormitetun pyörähdyskuoren statiikan ratkaisemista varten. Ohjelman nimi ESAS muodostuu otsikon "Exact Solution of Axisymmetric Shells" alkukirjaimista. Ohjelma sisältää kommentteineen n. 6000 riviä.

Ohjelman nykyversio on sovitettu HP 200-sarjan pöytätietokoneeseen HP 9816, jossa on n. 800 kbyte keskusmuisti. BASIC 2.1 ja EXTENSION AP2-1 vievät n. 300 kbyte. Työasemaan kuuluu lisäksi kaksoiskalvo-levyasema HP 9121, jonka levyille mahtuu 270 kbyte verran tietoa, ja matriisikirjoitin HP 82906A. Kone laskee n. 15 numeron tarkkuudella.

Keskusmuistin säästämiseksi ohjelma on jaettu kolmeen lohkoon SYOTT, RATKA ja KENTTA, jotka on ketjutettu siten, että yksi niistä on kerrallaan keskusmuistissa. Ohjelmalohko SYOTT toimii esiprosessorina, jonka avulla hoidetaan vuorovaikutteisesti syöttö, sen tarkistus ja tulostus sekä tallennus levyille. Se on laadittu siten, että aikaisemmin annettuja syöttötietoja on helppo muuttaa.

RATKA huolehtii ominpäin perusyhtälön $[K]\{U\} = \{R\}$ muodostamisesta ja ratkaisemisesta. Tähän käytetään *skylinetekniikkaa* ja sarakeratkaisijaa (BATHE [17]). Koska tavoitteena on tarkka ratkaisu, on BATHEn ohjelmaa kehitetty siten, että siirtymäkuormitukset käsitellään tarkasti. Vinon tuennan tarkkaa käsittelyä varten ohjelmaan sisältyy solmumittauskoordinaatiston kiertomahdollisuus.

KENTTA on jälkiprosessori, jonka avulla voidaan vuorovaikutteisesti hallita kenttäsuureiden laskentaa ja tulostusta. Esi- ja jälkiprosessorien toimintaa ohjataan kuvaruudussa näkyvillä valikoilla (menuilla), jotka liittyvät koneen erityisfunktionäppäimiin.

Ohjelman ESAS nykyversio sisältää seuraavat pyörähdysymmetriset elementit.

1. Ohut vahvistusrengas.
2. Ympyrälaatta ja ympyrärengaslaatta.
3. Sylinteri.
4. Täyskartio ja katkaistu kartio.
5. Pallon kalotti ja segmentti.

Näiden lisäksi ovat mukana jonkin verran keskeneräisinä seuraavat elementit.

6. Toroidin segmentti.
7. Paksuudeltaan lineaarisesti muuttuva sylinteri.
8. Paksuudeltaan lineaarisesti muuttuva kartio.
9. Paksuudeltaan lineaarisesti muuttuva rengaslaatta.

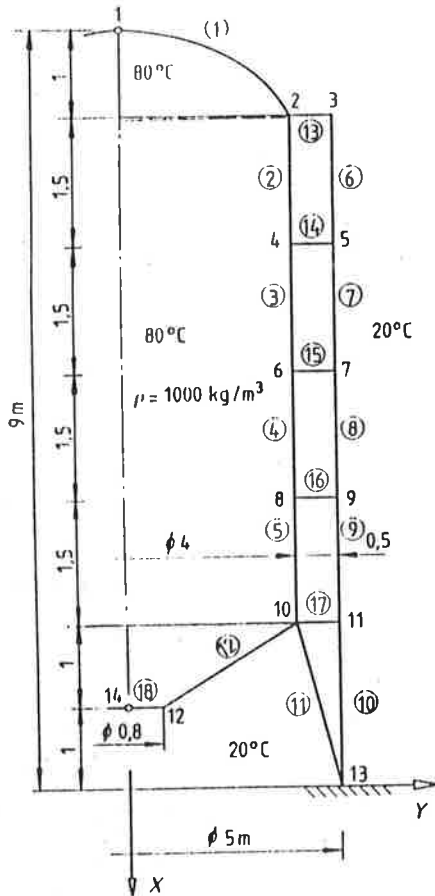
Näistä on toistaiseksi sovellettu ortotrooppiselle materiaalille vain elementit 2, 3, 7 ja 8. Muiden kohdalla on tyydytty isotrooppiseen materiaalmalliin.

Kuormituksina voidaan antaa rakennekohtaisesti solmuvoimien ja solmusiirtymien lisäksi aksiaalinen kiihtyvyys ja painovoima, tasainen paine, hydrostaattinen paine, vakio lämpötila, vakio lämpötilaero sisä- ja ulkopinnan välillä sekä keskipakovoima. Paine- ja lämpötilakuormitus voidaan antaa myös yksittäisille elementeille, mutta lumi-kuormitus on aina elementtikohtainen.

5 SOVELLUTUSESIMERKKI

Kuvassa 9 on esitetty kuviteltu nestesäiliö [9]. Se muodostuu sisäsylinteristä, jonka yläpään sulkee pallon kalotti sekä alapään kartio ja ympyrälaatta. Sisäsylinteri liittyy viidellä rengaslaatalla ja alakartiolla ulkosylinteriin. Ulkosylinteri ja alakartio muodostavat säiliön jalan. Pallokuvun, ulkosylinterin, sisäsylinterin kahden ylemmän osan ja neljän ylimmän rengaslaatan paksuus on 3 mm. Sisäsylinterin toiseksi alin osa on 4 mm paksu. Sisäsylinterin alin osa ja jalkakartio ovat 5 mm, alakartio 6 mm, alin rengaslaatta 10 mm ja alalaatta 16 mm paksuja. Materiaali on terästä, jonka $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\rho_g = 78000 \text{ N/m}^3$ ja $\alpha_t = 12 \text{ } \mu/\text{ }^\circ\text{C}$.

Kuvassa 9 on esitetty myös ESAS-laskennassa käytetyn laskentamallin globaali XY-koordinaatisto, elementit ja solmut. Elementtejä on 18



Kuva 9. Erityisnestesäiliön solmut 1...14 ja elementit 1...18.

ja solmuja 14. Tuentaa on vain solmulla 13, jossa on poistettu X- ja Y-translaatiot.

Tavoitteena on seuraavia kuormitustapauksia vastaavan statiikan ratkaiseminen.

- Sisäpuolinen ylipaine 70 kPa.
- Nestekuormitus ($\rho g = 10 \text{ kN/m}^3$), joka ulottuu sylinteriosan yläreunaan.
- Yhdistetty kuormitus, johon sisältyvät oma painovoima ($\rho g = 78 \text{ kN/m}^3$), neste-kuormitus b) ja lämpötilakuormitus, joka muodostuu siten, että säiliön sisälämpötila nousee vertailuarvosta 20°C arvoon 80°C .

a) Paineukuormitus

ESAS-ratkaisun tulostus on esitetty raportissa [9]. Sen perusteella nähdään, että suurin maksimileikkausjännityshypoteesin mukainen vertailujännitys on elementin 5 solmun 10 puoleisella reunalla ja on 144,2 MPa. Seuraavaksi suurin vertailujännitys 137,9 MPa on elementin 1 alareunassa. ESAS tarvitsi noin 15 s yhtälöryhmän muodostamiseen ja ratkaisemiseen. Noin 10 s meni kaikkien 13 kenttäsuureen reuna-arvojen laskentaan.

Tehtävä on ratkaistu myös ohjelmalla ANSYS käyttäen mallitukseen sen ohuen kartion elementtiä STIF 11, joka sopii myös sylinterin ja ympyrälaatan muotoisille rajatapauksille. Se on kahden solmun elementti, jonka meridiaanin suuntainen siirtymä interpoloidaan lineaarisesti ja normaalin suuntainen kolmannen asteen polynomilla. Integrointiin käytetään viittä integroimispistettä.

Säiliön ANSYS-laskentamalliin on käytetty yhteensä 1546 solmua ja 1550 elementtiä, jotka ovat kunkin ESAS-elementin alueella tasajako. Malli olisi tietenkin huomattavasti tehokkaampi, jos kuorien elementtijakoa olisi tihennetty risteyskohtiin päin, mutta tasajako

oli helpompi generoida. Malliin sisältyy 4632 vapausastetta rinta-
maleveyden maksimin ollessa vain 12, joten yhtälöryhmän ratkaisu oli
varsin nopea. VAX 11/780 käytti laskentaan yhteensä CP-aikaa 497,23 s,
josta yhtälöryhmän käsittelyyn meni 5,54 s.

ANSYS tulokset poikkeavat ESAS-arvoista alle promillen siirtymien
ja alle prosentin voimasuureiden osalta.

b) Nestekuormitus

ESAS- ja ANSYS-tulokset yhtyvät suunnilleen kohdan a) tarkkuudella.
Suurin vertailujännitys 136,8 MPa saadaan sisäsynterinin 5 alareun-
naan. Toiseksi suurin arvo 136,8 MPa tulee alakartion 12 yläreunaan.

c) Yhdistetty kuormitus

ESAS-laskenta kesti n. 20 s + 15 s. Sen mukaan suurin vertailujän-
nitys 319,8 MPa esiintyy alakartion 12 alareunassa. Toiseksi suurin
arvo 259,0 MPa on sisäsynterinin 5 alareunassa.

6 KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] OUTINEN, HANNU: Ortotrooppisen ympyrälaatan rotaatiosymmetri-
nen statiikka. TTKK, Teknillinen mekaniikka. Raportti 8.
Tampere, 1979. 81 s.
- [2] OUTINEN, HANNU: Isotrooppisen pallokuoren rotaatiosymmetrinen
statiikka. Osa 1. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 10.
Tampere, 1983. Tarkistettu 1985. 63 s.
- [3] OUTINEN, HANNU: Ortotrooppisen sylinterikuoren rotaatiosymmet-
rinen statiikka. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 12.
Tampere, 1983. 64 s.
- [4] OUTINEN, HANNU: Isotrooppisen kartiokuoren rotaatiosymmetrinen
statiikka. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 13.
Tampere, 1983. 82 s.
- [5] OUTINEN, HANNU: Paksuudeltaan lineaarisesti muuttuvan ortotroop-
pisen sylinterikuoren rotaatiosymmetrinen statiikka. TTKK, Tek-
nillinen mekaniikka, raportti 14. Tampere, 1983. 25 s.
- [6] OUTINEN, HANNU: Paksuudeltaan lineaarisesti muuttuvan orto-
trooppisen kartiokuoren rotaatiosymmetrinen statiikka. TTKK,
Teknillinen mekaniikka, raportti 15. Tampere, 1983. 33 s.
- [7] OUTINEN, HANNU: Paksuudeltaan lineaarisesti muuttuvan isotroop-
pisen ympyrälaatan rotaatiosymmetrinen statiikka. TTKK, Tek-
nillinen mekaniikka, raportti 20. Tampere, 1983. 32 s.

- [8] OUTINEN, HANNU: Isotrooppisen pallokuoren rotaatiosymmetrinen statiikka. Osa 2. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 26. Tampere, 1985. 113 s.
- [9] OUTINEN, HANNU: Pyörähdysymmetrisesti käyttäytyvän ohuen pyörähdyskuoren statiikka. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 27. Tampere, 1985. 97 s.
- [10] OUTINEN, HANNU: Isotrooppisen ohuen, ympyrätoroidikuoren rotaatiosymmetrinen statiikka. TTKK, Teknillinen mekaniikka, raportti 28. Ilmestyy syksyllä 1985.
- [11] HAMPE, ERHARD: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke. Band 1,2,3 und 4. Veb Verlag für Bauwesen, Verlin, 1971. 211 s., 262 s ja 368 s.
- [12] LOVE, A.E.H.: On the Small Free Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells. Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 17A, 491-546 (1888).
- [13] LOVE, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., New York: Dover Publications, 1944, Chapter 24.
- [14] REISSNER, H.: Spannungen in Kugelschalen. Müller-Breslau Festschrift, Leipzig: Kröner (1912), pp. 181-193.
- [15] MEISSNER, E.: Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen-, Kugel-, und Kegel-form, Physik. Zeit., 14, 343-349 (1913).
- [16] KRAUS, HARRY: Thin Elastic Shells. Wiley, N.Y. 1967. 476 s.
- [17] BATHE, KLAUS-JÜRGEN: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982. 735 s.

EPÄLINEAARISEN VISKOELASTISEN RAKENTEEEN STABILITEETTIANALYYSI

Stig-Göran Sjölin
Oulun yliopisto, konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Monet konstruktiomateriaalit käyttäytyvät viskoelastisesti rakenteiden normaaleissa käyttölämpötiloissa. Tällaisissa rakenteissa on erilaisten stabiliteetti-ilmiöiden esiintymisen vaara olemassa silloin, kun rakenteiden kuormitukset aiheuttavat puristusjännityksiä rakenteeseen ja erityisesti silloin, kun rakenteet ovat ohutseinäisiä. Metalleista ja muista kideäisistä aineista valmistetuissa rakenteissa on deformaation (tai venymänopeuden) viskoosiosuus hyvin epälineaaraisesti riippuvainen rakenteen jännitystasosta korkeassa homologisessa lämpötilassa. Tämä voi johtaa hyvin monimutkai-
siin stabiliteetti-ilmiöihin, joissa samanaikaisesti esiintyy geometria- ja materiaaliepälineaarisuuksia.

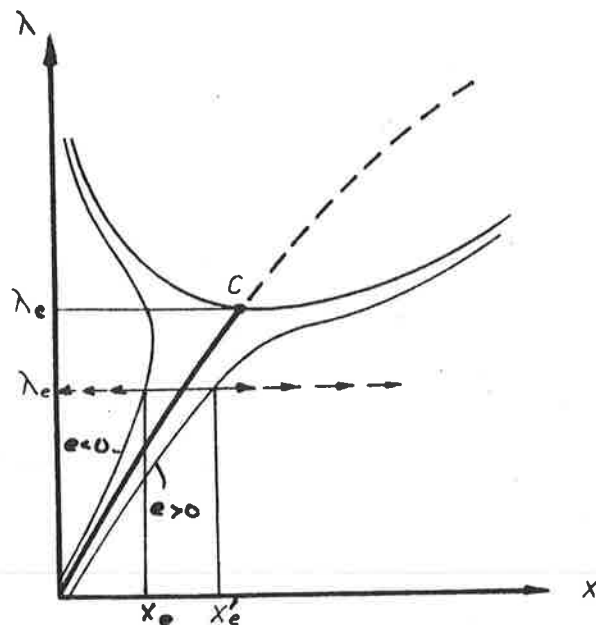
Tässä esityksessä tarkastellaan lyhyesti erityyppisiä kriittisiä pisteitä rakenteiden voima-siirtymäkäyrillä sekä mahdollisuuksia niiden saavuttamiseksi viskoelastisten muodonmuutosten yhteydessä. Määritellään inkrementaalinen, heikko reuna-alkuarvoprobleema rakenteelle, jonka pintakuormana on mm. hydrostaattinen painekuorma. Probleema diskretisoidaan elementtimenetelmällä ja esitetään yksinkertainen ratkaisumenetelmä. Sovellutuksina esitetään analyysitu-
loksia muutamista yksinkertaisista rakenteista.

2 VISKOELASTISEN RAKENTEEEN STABILITEETTI

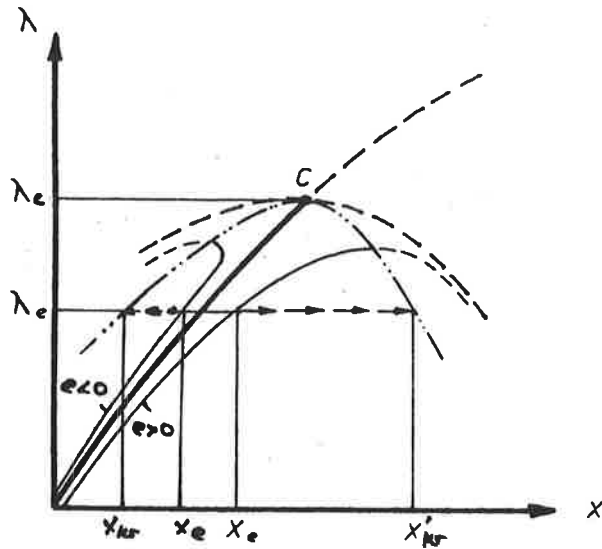
Kimmoisten rakenteiden stabiliteettiteoriaa sekä muotovirheiden merkitystä rakenteiden käyttäytymiseen kriittisten tasapainotilojen ympäristössä on seikkaperäisesti tutkinut mm. W.T. Koiter [1, 2]. Viime vuosina on myös tutkittu ja luokiteltu erityyppisiä kriittisiä pisteitä matemaattisen katastrofiteorian avulla [3, 4]. Tällöin

on pyritty selvittämään tarvittavien häiriöparametrien lukumäärää, joilla on mahdollista havaita kaikki erityyppiset tasapainokäyrät kriittisen pisteen ympäristössä.

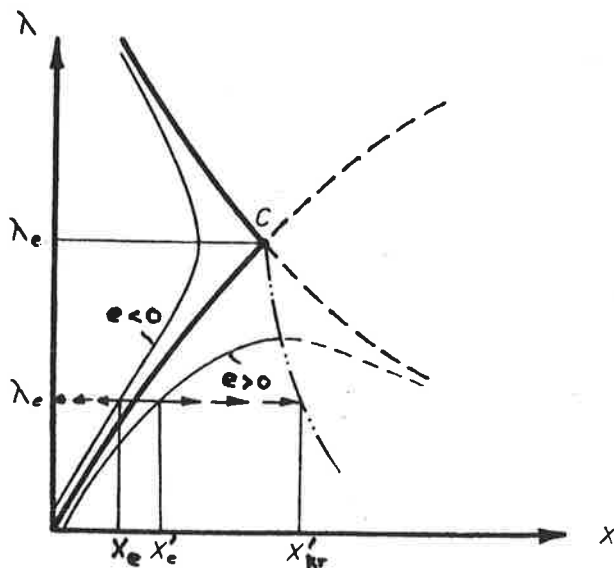
Viskoelastisten rakenteiden yhteydessä on rakenteiden käyttäytyminen kriittisten pisteiden (bifurkaatio- ja rajapisteen) ympäristössä usein karkeasti ottaen samanlaista kuin kimmoisten rakenteiden. On kuitenkin otettava huomioon, että viskoelastisten rakenteiden deformaatiot ja usein myös jännitysjakaumat ovat ajasta riippuvaisia myös vakiokuormalla. Stabiilin bifurkaatiopisteen ympäristössä (kuva 1) kimmoelastisen rakenteen muodonmuutokset kasvavat kimmoisista alkudeformaatioista x_e (kun muotovirhe $e > 0$) tai x_e' (kun $e < 0$) jatkuvasti nuolien osoittamassa suunnassa. Epästabiilin bifurkaatiopisteen lähellä (kuva 2) alkudeformaatiot x_e' tai x_e kasvavat kunnes pisteissä x'_{kr} tai x_{kr} rakenteessa tapahtuu läpilyönti ja katsotaan, että rakenne on menettänyt stabiilisuutensa. Epäsymmetrisen bifurkaatiopisteen lähellä (kuva 3) rakenne voi menettää stabiilisuutensa vain silloin, kun kuvan mukaisesti $e > 0$. Bifurkaatiopisteitä ei voi esiintyä käytännön rakenteissa, koska rakenteet sisältävät aina muotovirheitä, joiden johdosta bifurkaatiopisteet voivat muuttua rajapisteiksi kuvien 1...3 mukaisesti. Kuvat 1...3 esittävät kaavamaisesti tilannetta isostaattisissa rakenteissa, joissa jännitysjakauma on vakio. Hyperstaattisissa rakenteissa kriittiset pisteet muodostuvat vasta deformaatiotapahtuman yhteydessä, koska rakenteen geometria ja jännitysjakauma muuttuvat jatkuvasti.



Kuva 1. Stabiili symmetrinen bifurkaatiopiste.



Kuva 2. Epästabiili symmetrinen bifurkaatiopiste.



Kuva 3. Epäsymmetrinen bifurkaatiopiste.

3 VISKOELASTISEN RAKENTEN REUNA-ALKUARVOPROBLEEMA

Viskoelastisen rakenteen tasapainoyhtälöt on numeerista laskentaa ajatellen edullista kirjoittaa heikossa muodossa. Tässä esityksessä sovelletaan Lagrangen tarkastelutapaa, jonka mukaan rakenteen muodonmuutosten vertailutilaksi valitaan rakenteen deformatumaton alkutila C_0 ajalla $t = 0$. Rakenteen muodonmuutostilaa hetkellä $t = t_1$ kuvataan siirtymillä u_i ja Green-Lagrangen venymätensorilla E_{ij} . Rakenteen jännitystilaa kuvataan 2. Pila-Kirchhoffin pseudojännitystensorin S_{ij} avulla. Karteesiset tensorit E_{ij} ja S_{ij} ovat

energiakongruenssisuureita, niiden aikaderivaatat $\dot{E}_{ij}$ ja $\dot{S}_{ij}$ ovat objektiivisia, joten niiden käyttäminen on edullista silloin, kun materiaalin konstitutiivinen yhtälö on esitettävissä niiden avulla. Tässä esityksessä oletetaan lisäksi, että pintakuorma $\bar{t}_i$ on annettu pinnalla S_t , pinnalla S_T vaikuttaa hydrostaattinen paine $\bar{T}_i$ ja pinnalla S_u on siirtymät $\bar{u}_i$ annettu.

Oletetaan, että rakenne on tasapainossa hetkellä $t = t_1$ ja $t = t_2 = t_1 + \Delta t$. Jännitykset ovat tällöin S_{ij} ja $S_{ij} + \Delta S_{ij}$ sekä siirtymät u_i ja $u_i + \Delta u_i$. Tasapainoyhtälö hetkellä $t = t_1$ on

$$\begin{aligned} \int_{V_0} S_{ij} \delta E_{ij} dv - \int_{V_0} \bar{f}_i \delta u_i dv - \int_{S_t} \bar{t}_i \delta u_i dS_t \\ - \int_{S_T} \bar{T}_i \delta u_i dS_T = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

missä δu_i on kinemaattisesti käyvän siirtymäkentän variaatio tasapainoasemasta C_1 ja δE_{ij} on vastaava venymäkentän variaatio. Tasapainoyhtälö hetkellä $t = t_2$ on vastaavasti

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (S_{ij} + \Delta S_{ij}) \delta \Delta E_{ij} dv - \int_{V_0} (\bar{f}_i + \Delta \bar{f}_i) \delta \Delta u_i dv \\ - \int_{S_t} (\bar{t}_i + \Delta \bar{t}_i) \delta \Delta u_i dS_t - \int_{S_T} (\bar{T}_i + \Delta \bar{T}_i) \delta \Delta u_i dS_T = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

missä $\Delta \bar{f}_i$, $\Delta \bar{t}_i$ ja $\Delta \bar{T}_i$ ovat tilavuusvoiman ja pintakuormien muutokset aikavälillä Δt .

Yhtälön (2) siirtymävariaatioita laskettaessa pidetään tasapainoasemaa C_1 kiinteänä, joten varioidaan vain siirtymien lisäykset Δu_i .

Inkrementaalinen tasapainoyhtälö saadaan muodostamalla yhtälöiden (2) ja (1) erotus ja ottamalla huomioon, että variaatio on kinemaattisesti käypä myös tasapainoasemassa C_1 .

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\Delta S_{ij} \cdot \delta \Delta E_{ij} + S_{ij} \cdot \Delta u_{n,i} \cdot \delta \Delta u_{n,j}) dv - \int_{V_0} \Delta \bar{f}_i \cdot \delta \Delta u_i dv \\ - \int_{S_t} \Delta \bar{t}_i \cdot \delta \Delta u_i dS_t - \delta \Delta U_T = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

missä δU_T on pintakuorman $\bar{T}_i$ inkrementaalinen virtuaalinen työ. Kun rakenteen pintakuormana on hydrostaattinen paine, vaikuttaa pintavoima deformatuneen pinnan normaalin $\bar{n}_i$ suunnassa ja pintakuorman suuruus p riippuu tarkastelupisteen paikkakoordinaateista x_i , joten

$$\bar{T}_i = -p(x_j) \cdot \bar{n}_i \quad (4)$$

Elementtimenetelmälaskentaa ajatellen on edullista ottaa käyttöön käyräviivaisia, skaalattuja pintakoordinaatteja r, s . Pintakuorman $\bar{T}_i$ tekemä inkrementaalinen virtuaalinen työ $\delta \Delta U$ on tällöin

$$\begin{aligned} \delta \Delta U_T = & e_{ijk} \int_r \int_s [p (X_{j,r} + u_{j,r}) \Delta u_{k,s} + \Delta u_{j,r} \cdot \Delta u_{k,s} \\ & + \Delta u_{j,r} (X_{k,s} + u_{k,s}) + \Delta p (X_{j,r} + u_{j,r} + \Delta u_{j,r}) \\ & (X_{k,s} + u_{k,s} + \Delta u_{k,s})] \delta \Delta u_i \cdot dr ds \end{aligned} \quad (5)$$

missä e_{ijk} on permutaatiokerroin, X_i on Lagrangen materiaalikoordinaatit, p on paine hetkellä $t = t_1$ ja Δp on paineen muutos aikavälillä Δt .

Yhtälössä (3) kuvattu inkrementaalinen tasapainoyhtälö voidaan nyt helposti diskretoida elementtimenetelmällä käyttämällä isoparametrisia kolmiulotteisia elementtejä. Tällöin

$$u_i = N_{ij} r_j \quad (6)$$

$$X_i = N_{ij} Y_j \quad (7)$$

$$x_i = X_i + u_i = N_{ij} (Y_j + r_j) \quad (8)$$

missä N_{ij} ovat muotofunktioita, r_j solmupistesiertymiä ja Y_j solmupisteiden materiaalikoordinaatit.

Oletetaan nyt, että materiaalin konstitutiivinen yhtälö on kirjoitettavissa muodossa

$$\Delta S_{ij} = C_{ijkl} (\Delta E_{kl} - \Delta E_{kl}^C) \quad (9)$$

missä C_{ijkl} on kimmokerroin ja ΔE_{kl}^C on viskoosivenymän muutos aikavälillä $\Delta t = t_2 - t_1$. Yhtälöiden (5)...(9) avulla saadaan yhtälöstä (3) seuraava algebrallinen, inkrementaalinen tasapainoehto

$$\begin{aligned} K(\Delta r, r)_{ij} \cdot \Delta r_j + K(S)_{ij} \cdot \Delta r_j - \Delta \bar{f}_i - \Delta \bar{t}_i \\ - \Delta \bar{T}(\Delta r, r)_i - \Delta f_i^C = \Delta R_i \end{aligned} \quad (10)$$

missä $K(\Delta r, r)_{ij}$ on sekanttijäykkyysmatriisi, $K(S)_{ij}$ on stabiliteettijäykkyysmatriisi, $\Delta \bar{T}_i(\Delta r, r)$ hydrostaattisen paineen kuormitusvektorin muutos, Δf_i^C on viskoosivenymän muutoksesta johtuva vektori ja ΔR_i jäännosvektorin muutos aikavälillä Δt .

Yhtälöryhmän (10) aikaintegrointi tunnetusta alkutilasta C_0 hetkellä $t = 0$ antaa

$$\begin{aligned} \sum_1 [K(\Delta r, r)_{ij} + K(S)_{ij}] \cdot \Delta r_j - \Delta \bar{f}_i - \Delta \bar{t}_i \\ - \Delta \bar{T}(\Delta r, r)_i - \Delta f_i^C \big|_1 = R_i \end{aligned} \quad (11)$$

Yhtälöryhmien (10) ja (11) ratkaisemiseksi voidaan soveltaa esim. Haislerin itsekorjaavaa askelmenetelmää /5/ muodossa

$$\Delta R_i + Z R_i = 0_i \quad (12)$$

missä Z on skalaarinen painokerroin.

Yksinkertainen ratkaisualgoritmi yhtälön (12) ratkaisemiseksi saadaan siirtämällä kaikki siirtymän suhteen epälineaariset termit yhtälön oikealle puolelle, jolloin saadaan

$$\frac{1}{Z} K_{ij} \cdot \dot{r}_j + K_{ij} r_j = Q(\Delta r, r)_i \quad (13)$$

missä $\dot{r}_j = \Delta r_j / \Delta t$ ja $Q(\Delta r, r)_i$ sisältää kuormitustermit ja epälineaarisuuksista johtuvat termit.

Yhtälö (13) on samaa muotoa kuin rakenteen lineaarinen, dynaaminen tasapainoyhtälö Rayleigh-vaimennuksella $\beta = 1/Z$ ja massamatriisilla

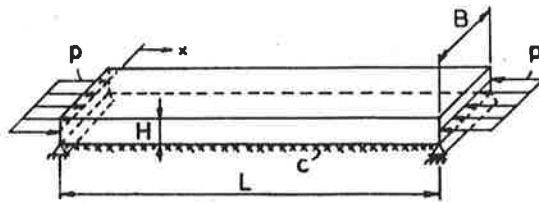
$m_{ij} = 0$. "Kuormitusvektori" $Q(\Delta r, r)_i$ riippuu ajasta ja deformaatiohistoriasta, joten sen arvo on laskettava jokaisella aika-askeleella aika-integroinnin yhteydessä. Aikaintegrointi voidaan suorittaa normaaleilla, rakenteiden dynaamista analyysia varten kehitetyillä menetelmillä esim. Wilsonin θ -menetelmällä.

4 SOVELLUTUKSIA

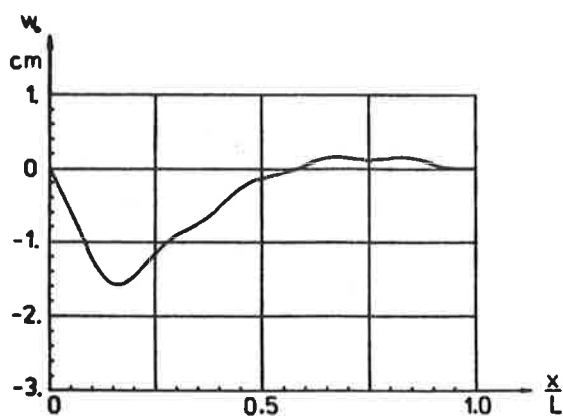
Ensimmäisenä sovellutuksena tarkastellaan kuvan 4 mukaista vapaasti tuettua palkkia, joka lepää kimmoisella alustalla ja on kuormitettu pituussuunnassa jakautuneella puristuskuormalla P [7]. Puristuskuorma $P = 0,5 P_{kr}$, jossa P_{kr} on kimmainen nurjahduskuorma. Palkkimateriaalin viskoosiominaisuudet kuvataan Nortonin yleistetyllä virumismallilla $\dot{\epsilon}_{ij}^c = k \cdot S_e^{n-1} \cdot S_{ij}^1$, missä S_e on von Misesin vertailujännitys, S_{ij}^1 on jännitysderivaattori sekä $K = 6,842 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{KN}^3/\text{s}$ ja $n = 3$ ovat materiaaalivekioita. Palkin pituus $L = 5 \cdot \pi \cdot L_b$, missä $L_b = (EI/cB)^{1/4}$, $H = 0,2 \text{ m}$ ja $B = 1,0 \text{ m}$. Palkin diskretisoinnissa on käytetty 30 kpl 16-solmuista 3-D -elementtiä ja aika-askel on ollut $\Delta t = 16 \text{ s}$. Palkin alkutaipuma on kuvattu funktiolla

$$w_0(x) = \sum_{i=1}^{10} (\pm) A_i^+ \cdot \sin(i\pi x/L)$$

missä amplitudit $|A_i(0^+)| = 0,001 \text{ m}$ ja etumerkki $(\pm)$ on valittu stokastisesti. Kuvassa 5 on esitetty tällä tavalla laskettu alkutaipuma $w_0(x)$.

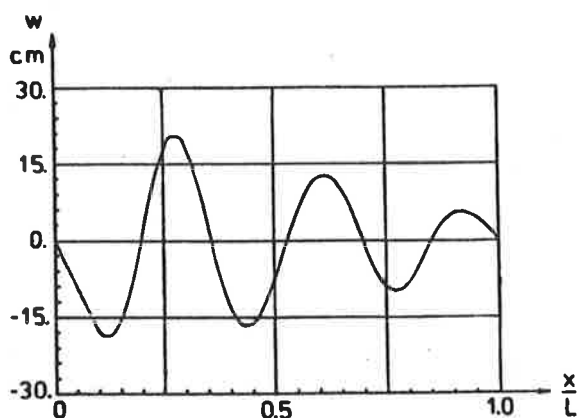


Kuva 4. Palkki kimmoisella alustalla.



Kuva 5. Palkin alkutaipuma $w_0(x)$ hetkellä $t = 0^+$.

Kuvassa 6 on esitetty palkin taipuman muoto $w(x)$ vähän ennen kuin palkki menettää stabiilisuutensa $t \approx t_{kr}$.

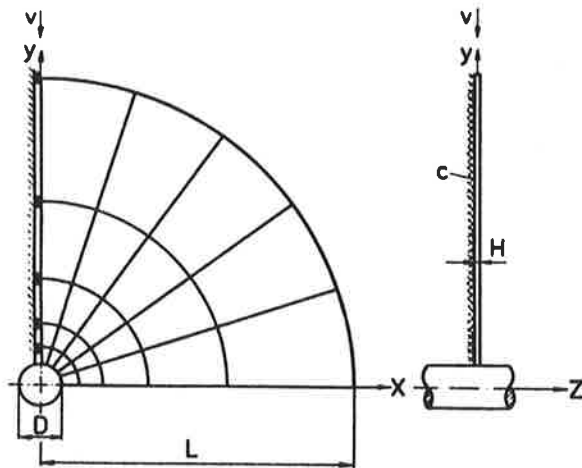


Kuva 6. Palkin taipuma hetkellä $t \approx t_{kr}$.

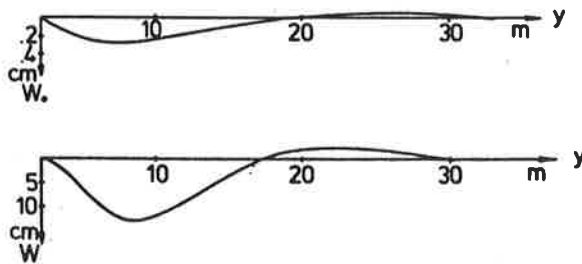
Kuvien 5 ja 6 perusteella voidaan päätellä, että kimmoisella alustalla olevan palkin virumis-nurjahdusprosessi on selektiivinen kriittisen nurjahdusmuodon suhteen. Todellinen nurjahdusaika saadaan vain silloin, kun alkutaipuma sisältää komponentteja myös lopullisesta nurjahdusmuodosta.

Toisena sovellutuksena tarkastellaan kimmoisella alustalla oleva laatta, joka liikkuu vakionopeudella $v = 0,375$ cm/s jäykkää pilaria vastaan kuvan 7 mukaisesti [6]. Laatan dimensiot ovat $L = 33$ m, $H = 0,2$ m ja $D = 4$ m. Laatan materiaaliominaisuudet ovat $E = 7,0$ GPa, $\nu = 0,3$ ja alustakerroin $c = 10\,000$ N/m³. Laatan sisäreuna on

kiinnitetty pilariin, reuna $y = 0$ on vapaa, reuna $x = 0$ pääsee vapaasti liikkumaan z -suunnassa ja ulkoreuna liikkuu vakionopeudella v . Laatan alkutaipuma w_0 ja lopputaipuma w silloin, kun laatta menettää stabiilisuutensa on esitetty kuvassa 8.

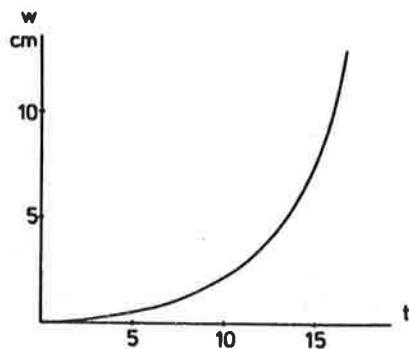


Kuva 7. Kimmoisella alustalla oleva laatta.

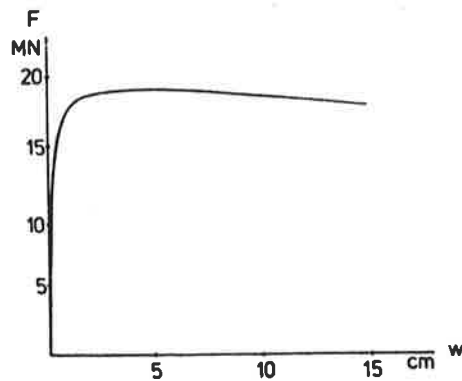


Kuva 8. Laatan alkutaipuma w_0 ja lopullinen taipuma w .

Kuvassa 9 on esitetty laatan maksimitaipuma w ajan funktiona ja kuvassa 10 puolilympyrän muotoisen laatan aiheuttama kokonaisvoima F pilaria vastaan maksimitaipuman w funktiona.



Kuva 9. Laatan maksimitaipuma w ajan t funktiona.



Kuva 10. Laatan aiheuttama kokonaisvoima F pilaria vastaan maksimitaipuman w funktiona.

5 KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Koiter, W.T., Over de Stabyliteit van het Elastisch Evenwicht, University of Delft thesis, Amsterdam, 1945 (English translation, NASA Rept. TTF-10, 1967).
- [2] Koiter, W.T., Current Trends in the Theory of Buckling, Proc. IUTAM Symp. on Buckling of Structures, 1974 (Ed. B. Budiansky) Springer-Verlag, 1 - 16 (1976).
- [3] Golubitsky, M. & Schaetter, D., A Theory for Imperfect Bifurcation via Singularity Theory. Comm. Pure. Appl. Math., Vol. 32 (1979), s. 21 - 98.
- [4] Golubitsky, M., An Introduction to Catastrophe Theory and its Applications. SIAM Review Vol. 20, No. 2, April 1978, s. 352 - 387.
- [5] Tillerson, J.R., Stricklin, J.A. & Haisler, W.E., Numerical Methods for the Solution of Nonlinear Problems in Structural Analysis. Detroit, Michigan Nov. 11 - 15 (1973), ASME New York, s. 67 - 102.
- [6] Sjölin, S.-G., Analys av stabilitet hos olinjära visko-elastiska balkar och plattor på elastiskt underlag. Licentiatarbete. Uleåborgs universitet (1984).

- [7] Sjölin, S.-G., Visco-elastic Buckling Analysis of Floating Ice Sheets. To be published in Cold Regions Science and Technology.

BILINEAARISESTI KIMMOISELLA ALUSTALLA OLEVAN LAATAN LOMMAHDUS

Paavo Hassinen

VALTION TEKNILLINEN TUTKIMUSKESKUS

Rakennetekniikan laboratorio

1 JOHDANTO

Puristetun laatan kriittistä jännitystä lommahdusta vastaan voidaan voimakkaasti kasvattaa tukemalla laattaa kimmoisella alustalla. Laatan lommahtaessa alustaan kohdistuu jännityksiä, joista erityisesti vetojännityksiä useat alustat tai levyn ja alustan välinen sauma kantaa huonosti. Näitä tapauksia varten Seide [1] on hakenut ratkaisun laatalle, joka on tuettu vetoa kestävämmällä kimmoisella alustalla. Tätä ratkaisua voidaan laajentaa alustoihin, joissa alustakertoimet niihin kohdistuville puristus- ja vetojännityksille ovat erilaiset. Tässä bilineaarisesti kimmoisella alustalla ymmärretään alustaa, jonka jäykkyydet puristus- ja vetojännitysten suhteen ovat erilaiset.

2 LAAJENNETTU SEIDEN RATKAISU

2.1 Yhtälöiden muodostaminen

Alustaan kohdistuvien jännitysten mukaan voidaan Winkler-tyyppisellä alustalla lepäävän yhden akselin suunnassa puristetun laatan taipumille esittää yhtälöt (kuva 1)

$$D \nabla_1^4 w_1 + N (\partial^2 w_1 / \partial x_1^2) + K_1 w_1 = 0, \quad -c\lambda < x_1 < c\lambda \text{ ja} \quad (1)$$

$$D \nabla_2^4 w_2 + N (\partial^2 w_2 / \partial x_2^2) + K_2 w_2 = 0, \quad -(1-c)\lambda < x_2 < (1-c)\lambda. \quad (2)$$

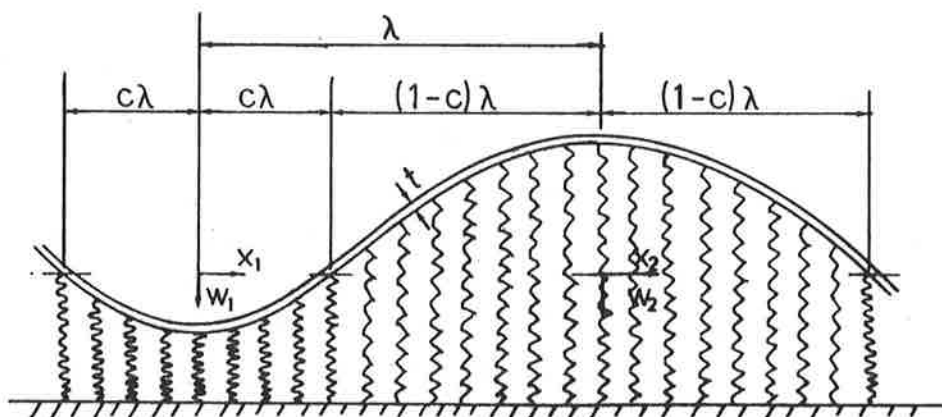
Kahden alueen rajakohdassa, $x_1 = c\lambda$ ja $x_2 = -(1-c)\lambda$ on toteuduttava reunaehtojen

$$w_1 = w_2 = 0, \quad (3a,b)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}, \quad (3c)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} \quad \text{ja} \quad (3d)$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}. \quad (3e)$$



Kuva 1. Pitkän laatan lommahduskuvio sekä kaavoissa käytettyjä merkintöjä.

Pitkän kuormittamattomilta reunoiltaan nivelellisesti tuetun laatan taipumien ratkaisua haetaan lausekkeista

$$w_1 = F_1(x_1) \cos(\pi y/b) \quad \text{ja} \quad (4a)$$

$$w_2 = F_2(x_2) \cos(\pi y/b). \quad (4b)$$

Kun oletetaan alustan vetojäykkyyden olevan puristusjäykkyyttä pienemmän saadaan symmetriaehtoja hyväksikäyttäen funktioille F lausekkeet

$$F_1(x_1) = A_1 \cosh \alpha_1(x_1/b) \cos \alpha_2(x_1/b) + A_2 \sinh \alpha_1(x_1/b) \sin \alpha_2(x_1/b) \quad \text{ja} \quad (5a)$$

$$F_2(x_2) = B_1 \cos \beta_1(x_2/b) + B_2 \cos \beta_2(x_2/b), \quad (5b)$$

missä on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\alpha_{1,2} = (\pi/2) (2(1+\gamma_1)^{1/2} \mp (k-2))^{1/2}, \quad (6a)$$

$$\beta_{1,2} = (\pi/2) (2(k-2) \mp 2((k-2)^2 - 4(1+\gamma_2))^{1/2})^{1/2}, \quad (6b)$$

$$\gamma_1 = b^4 \bar{K}_1 / \pi^4 D, \quad (7a)$$

$$\gamma_2 = b^4 \bar{K}_2 / \pi^4 D \text{ ja} \quad (7b)$$

$$k = b^2 N / \pi^2 D. \quad (7c)$$

Lausekkeissa b on laatan leveys, $\bar{K}_1$ ja $\bar{K}_2$ alustakertoimia ja D laatan taivutusjäykkyys.

$$D = Et^3/12(1-\nu^2) \quad (8)$$

2.2 Yhtälöryhmän ratkaiseminen

Kahden ensimmäisen reunaehdon (3a, b) avulla eliminoidaan lausekkeista (5) integrointivakiot A_1 ja B_1 ja kolmen jälkimmäisen reunaehdon (3c, d, e) avulla suhteen A_2/B_2 vakioisuuteen perustuen muodostetaan kaksi lauseketta lommahdusaallon muotoa kuvaavien parametrien λ/b ja c ratkaisemiseksi:

$$\begin{aligned} f_1 = & 2\alpha_1\alpha_2(\cosh 2\xi_1 + \cos 2\xi_2)(\beta_1 \sin \eta_1 \cos \eta_2 - \beta_2 \cos \eta_1 \sin \eta_2) \\ & + (\beta_1^2 - \beta_2^2)(\alpha_1 \sin 2\xi_2 + \alpha_2 \sinh 2\xi_1) \cos \eta_1 \cos \eta_2 = 0 \text{ ja} \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & 2\alpha_1\alpha_2(\cosh 2\xi_1 + \cos 2\xi_2)(\beta_1^3 \sin \eta_1 \cos \eta_2 - \beta_2^3 \cos \eta_1 \sin \eta_2) \\ & - (\beta_1^2 - \beta_2^2)(\alpha_1^3 \sin 2\xi_2 + 3\alpha_1^2\alpha_2 \sinh 2\xi_1 - \\ & 3\alpha_1\alpha_2^2 \sin 2\xi_2 - \alpha_2^3 \sinh 2\xi_1) \cos \eta_1 \cos \eta_2 = 0, \end{aligned} \quad (9b)$$

missä

$$\xi_1 = \alpha_1 c (\lambda/b), \quad (10a)$$

$$\xi_2 = \alpha_2 c (\lambda/b), \quad (10b)$$

$$\eta_1 = \beta_1(1-c)(\lambda/b) \text{ ja} \quad (10c)$$

$$\eta_2 = \beta_2(1-c)(\lambda/b). \quad (10d)$$

Yhtälöt (9) toteuttavat arvot tuntemattomille parametreille (λ/b) ja c on haettu Newtonin menetelmää käyttäen. Kriittisen lommahduskuorman arvo on saatu etsimällä pienin lommahduskertoimen k arvo, jolla yhtälöt (9) vielä toteutuvat (taulukko 1, kuvat 2 ja 3). Lommahduskerrointa k voidaan homogeenisen alustan tapaukselle löydetyn ratkaisun (1)

$$k = 2 (1 + (1+\gamma)^{1/2}), \quad (11a)$$

$$\lambda/b = 1/(1+\gamma)^{1/4} \text{ ja} \quad (11b)$$

$$c = 0,5 \quad (11c)$$

perusteella hakea alueelta

$$2 (1 + (1+\gamma_2)^{1/2}) < k < 2 (1 + (1+\gamma_1)^{1/2}). \quad (12)$$

3 EPÄLINEAARINEN ANALYYSI ADINA-OHJELMALLA

Ominaisarvona saatua kriittistä aallonpituutta hyväksikäyttäen on suoritettu geometrisesti epälineaarinen analyysi ADINA-ohjelmalla alustatapauksille $\gamma_2/\gamma_1 = 1,0$ ja $\gamma_2/\gamma_1 = 0$. Alustakertoimen $\bar{k}_1 = 0,01 \text{ N/mm}^3$ arvolla saadaan 100 mm leveälle ja 0,8 mm paksulle laatalle kriittiseksi puolიაallon pituudeksi edellisessä tapauksessa $\lambda = 54,4 \text{ mm}$ ja jälkimmäisessä 84,8 mm. Kriittiseksi lommahdusjännitykseksi saadaan edelliselle tapaukselle 106,4 MPa ja jälkimmäiselle tapaukselle 60,0 MPa. Ilman alustaa olevan vastaavan laatan kriittiseksi jännitykseksi muodostuu 48,6 MPa.

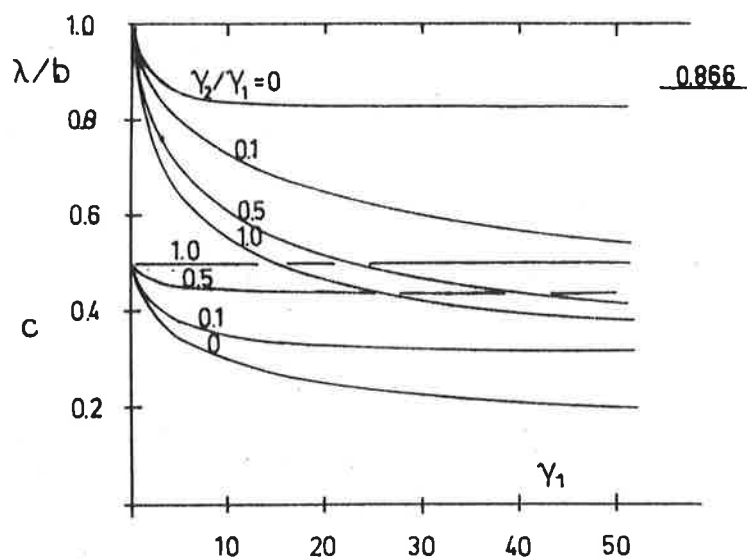
Laatassa olevalle alkuhäiriölle on valittu muoto

$$w_0(x,y) = 0,1 \cdot t \cdot \cos \frac{\pi x}{\lambda} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (13)$$

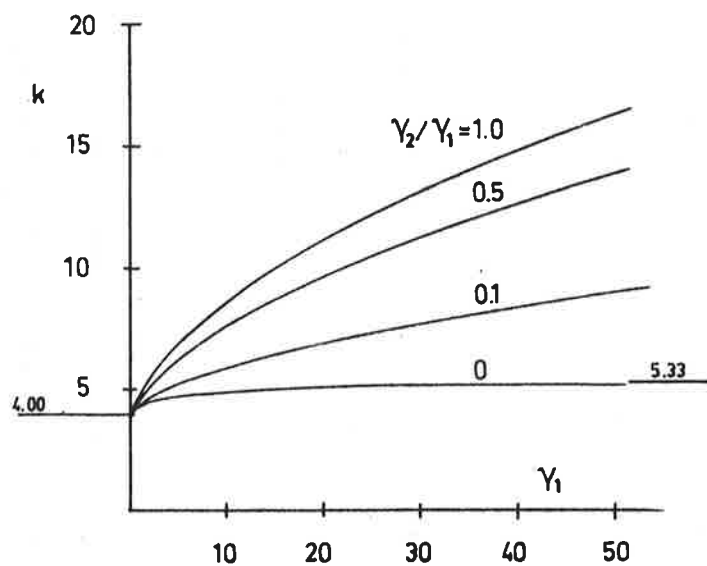
Laskennassa laatta on kuvattu kuudella 16-solmuisella kuorielementillä ja kimmoinen alusta 70:llä sauvaelementillä.

Taulukko 1. Bilineaarisesti kimmoisella alustalla tuetun laatan lommahdus-
kertoimia ja aallonpituusparametrejä.

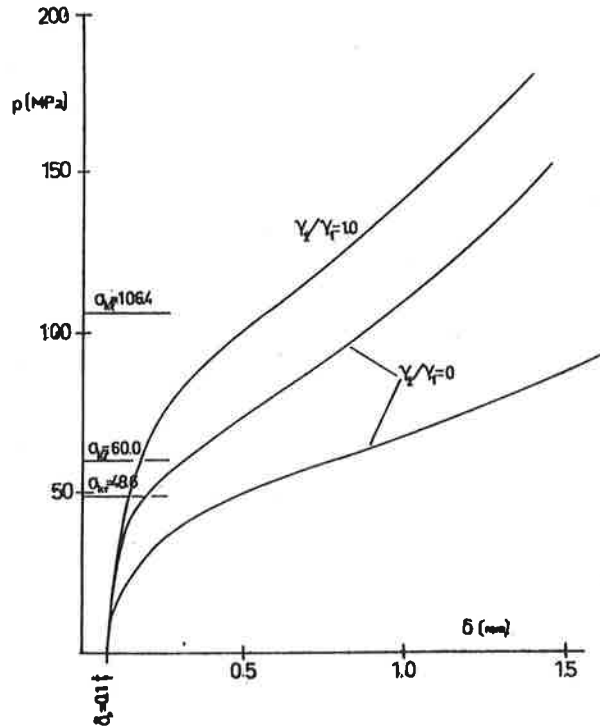
γ_1	γ_2	k	λ/b	c
1	0	4,332	0,928	0,436
1	0,1	4,400	0,914	0,444
1	0,5	4,623	0,874	0,473
1	1	4,828	0,841	0,50
3	0	4,619	0,878	0,374
3	0,3	4,870	0,838	0,397
3	1,5	5,524	0,754	0,456
3	1	6,00	0,707	0,50
5	0	4,760	0,859	0,340
5	0,5	5,208	0,794	0,374
5	2,5	6,231	0,688	0,450
5	5	6,899	0,639	0,50
10	0	4,931	0,838	0,293
10	1	5,862	0,726	0,347
10	5	7,615	0,597	0,444
10	10	8,633	0,549	0,50
20	0	5,065	0,827	0,249
20	2	6,863	0,650	0,328
20	10	9,664	0,512	0,440
20	20	11,17	0,467	0,50
30	0	5,126	0,824	0,225
30	3	7,675	0,601	0,320
30	15	11,27	0,468	0,438
30	30	13,14	0,424	0,50
40	0	5,161	0,823	0,209
40	4	8,381	0,568	0,315
40	20	12,64	0,434	0,438
40	40	14,80	0,395	0,50
50	0	5,185	0,822	0,197
50	5	9,014	0,541	0,312
50	25	13,85	0,411	0,437
50	50	16,28	0,374	0,50



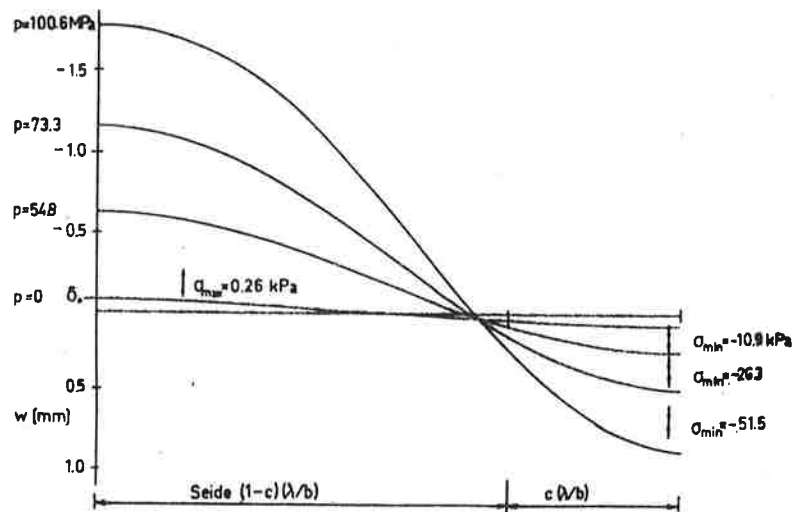
Kuva 2. Lommahdusaallon muotoa kuvaavien parametrien λ/b ja c arvoja alustan jäykkyyksien funktiona.



Kuva 3. Lommahduskertoimen k arvoja alustan jäykkyyksien funktiona.



Kuva 4. Geometrisesti epälineaarisen analyysin tuottamat maksimisiirtymät laatan tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Puristava voima on $N = p \cdot t$.



Kuva 5. Laatan keskiviivan siirtymätila tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa muutamilla puristavan kuorman arvoilla tapaukselle $\gamma_2 / \gamma_1 = 0$. Kuvaan on merkitty myös Seiden ratkaisun antama puoliallon pituus alustan veto- ja puristusalueille. $q_{\max}$ - ja $q_{\min}$ -arvot ovat ko. puristavan kuorman arvolla alustaan kohdistuvia suurimpia veto- ja puristusjännityksiä.

Kimmoisan alustan stabiloivan vaikutuksen vuoksi laatan tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa syntyvien siirtymien kuvaajissa ei kriittisen lommahdusjännityksen kohta näy niin terävänä portaana kuin vailla alustaa olevan laatan tapauksessa (kuva 4). Vetoa kestävämmällä alustalla olevan laatan sivuttaissiirtymät ns. vetoaallon puolella alkavat kasvaa jo huomattavasti ennen vailla alustaa olevan laatan kriittistä jännitystä. Tulosten mukaan laatan ns. vetoaallon pituus pyrkii kasvamaan puristavan voiman mukana. Kokonaisuudessaan se jää kuitenkin pienemmäksi Seiden ratkaisun antamaa kriittistä aallonpituutta $(1-c) (\lambda/b)$. Osa-syynä tähän saattaa olla se, että laskentateknisistä syistä alustan vetojännityksen suurimmaksi arvoksi ns. myötöjännitykseksi on valittu 0,26 kPa jännityksen 0 kPa sijasta.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Seide, P., Compressive buckling of a long simply supported plate on an elastic foundation. J. Aero. Sci. Vol. 25. June 1958, pp. 382 - 384.
- [2] Timoshenko, S. & Gere, J., Theory of elastic stability. McGraw-Hill, 1961.
- [3] ADINA, Users manual. Report AE 81-1. ADINA Engineering AB, 1981.

KOKEELLINEN ESIKÄSITTELIJÄ JÄYKISTETTYJEN OHUTKUORIMALLIEN LUOMISEEN

Jorma Köliö

Hewlett-Packard Oy

1 JOHDANTO

Kiinnostus ohjelman kehittämiseen heräsi lähteessä 4 esitetyn ns. Semiloof kuorielementin testaamisen yhteydessä. Aluksi oli tarkoitus kirjoittaa pieni ohjelma lähinnä solmujen ja elementtien syöttämiseksi testitapauksia varten. Tässä vaiheessa syntyi kuitenkin ajatuksia erilaisista geometrian, reunaehto- ja pinta-kuormien syöttö- ja tarkistustavoista, joita halusin kokeilla. Tästä myös nimitys kokeellinen esikäsittelijä.

2 TAVOITTEET

Usein rakenteen muoto on epäsäännöllinen, jolloin on vaikeaa hallita solmujen sijainti ja elementtien muotovaatimukset budjetin ja halutun tarkkuuden rajoissa. Joskus myös kuormien ja tukien epäsäännöllinen sijainti vaikeuttaa harmonisen verkon laatimista. Jälkimmäinen tapaus helpottuu merkittävästi, mikäli pintakuormat kyetään antamaan elementtijaosta riippumatta, mitä erityisesti halusin kokeilla.

Esikäsittelijän tulisi geometrian luontiin liittyvien toimintojen lisäksi sisältää monipuolisia mallin muuntelu- ja visualisointimahdollisuuksia. Olisi kyettävä tarkistamaan levyvahvuudet, materiaaliominaisuudet, palkkikoordinaatistot ja -poikkileikkaukset, reunaehdot ja kuormitukset. Ohjelman pitäisi varoittaa epäsäännöllisen muotoisista ja teorian voimassaoloalueen ohittavista elementeistä sekä laskea erilaisia tarkistussuureita.

Esikäsittelijä ei kuitenkaan saisi kahlita käyttäjänsä. Esim. generointien jälkeen olisi sallittava yksittäiset modifioinnit, eivätkä ohjelman varoitukset saisi estää halutun lähtötiedon antoa.

3 LAITEYMPÄRISTÖ

Tehokasta fem mallinnusta voitaneen tehdä hieman vaatimattomammallakin työasemalla, kuin on yleistä CAD suunnittelun ja piirron yhteydessä. Tätä ohjelmaa on ajettu vain pääteyhteydellä HP9000/540 tietokoneeseen, jonka kokoonpano oli seuraava:

- 1 CPU
- 2.5 MB keskusmuisti
- 132 MB massamuisti
- graafinen pääte, erotuskyky n. 500 x 400 pistettä

Vaihtelevia muita sovellutuksia ajavia käyttäjiä on ollut n. 2 - 8, milloin ohjelman käytettävyyys on vielä hyvä. Pääteyhteys 9600 bit/s sensijaan ei aina ole riittävä.

Kehityspääte on mustavalkoinen. Kuitenkin käytännön mallinnuksessa värit ovat tärkeitä esim. reunaehtovektoreiden erottamiseen allaolevasta geometriasta. Päätteen erillistä alfanumerista ja graafista näyttömuistia hyödynnettiin käytetyn menutekniikan yhteydessä. Cursorivalintoja näytöltä tehdään paljon, joten nopea cursorin ohjaus (grafiikkalevy tai hiiri) on välttämätön.

Fem mallinnus ei pääosaltaan edellytä paljon laskentatehoa, sen sijaan keskusmuistia ja nopeaa levyliikennettä sekä graafisen näytön hallintaa. Näinollen ihanneympäristö voisi olla henkilökohtainen tehokas työasematietokone. Tällöin kaikki mallinnus ja myös pie-, nehköjen tehtävien ratkaisu tapahtuisi paikallisesti kyseisessä koneessa.

4 OHJELMAN OMINAISUUDET

Ohjelmaa on kirjoitettu harrastuksena ja koodia on tällä hetkellä

ylli 6000 riviä kommentteineen. Pääosaltaan se on Fortran 77 standardin mukaista sisältäen myös joitain C funktiokutsuja. Graafisia laitteita ohjataan DGL kutsuilla (2D perusgrafiikkakirjasto). Projisioinnit, zoomaukset ja panoroinnit on rakennettu itse ohjelmaan DGL rutiineja käyttäen.

4.1 KÄYTTÄJÄN JA OHJELMAN VÄLINEN KOMMUNIKOINTI

Ohjelman menurakenne on hierarkkinen. Kukin menu esitetään päätteen alfanumeeriselle näytölle vaihtoehdot numeroituna 1 - 10. Valinta tapahtuu joko painamalla vastaavaa numeronäppäintä tai ohjaamalla kursori halutulle riville ja painamalla kynällä grafiikkalevyä (ks. liite 2). Joitain valintoja seuraa 2 - 3 vaihtoehdon jatkokysymys, joka esitetään yhdelle riville, ja siihen vastataan numeronäppäimellä.

Tärkeä osa työskentelyä on geometriasuureiden valinta senhetkisestä projektiosta. Lähimmän pisteen haussa n. 1100 solmun mallissa ei ole inhimillisesti havaittavaa viivettä. Elementti valitaan osoittamalla sen sisäistä pistettä. Näytöllä n. 1 mm² kokoinen elementti kyetään erottamaan, mikäli toisensa peittäviä elementtejä ei ole useita. Myös tämä valinta on käytännöllisesti katsoen välitön.

Kesken ohjelman toteutuksen käyttäjä voi myös hetkellisesti siirtyä käyttöjärjestelmätasolle esim. editoimaan jotain ohjelmaan liittyvää tiedostoa, tai käynnistääkseen omia tämän ohjelman kanssa kommunikoiivia rutiinejaan.

4.2 PERUSGEOMETRIAN MÄÄRITTELY

Kaikkien työvaiheiden ei välttämättä tarvitse olla vuorovaikutteisia. Esim. perusgeometrian sisäänsyötön käyttäjä ehkä mielellään tekisi mietiskellen, "eräluonteisesti". Ennen mallinnusvaihetta joka tapauksessa tutustutaan rakenteen piirustuksiin, harkitaan mallinnettava alue, käytettävät elementtityypit ja tarkistetaan dimensiot. Tässä vaiheessa voitaisiin samalla koodata perustiedosto, joka ohjelmaan syötettynä antaisi hyvän lähtökohdan vuorovaikuttei-

selle jatkotyöskentelylle, mitä käyttäjä ei enää kykene ennalta määrittelemään (ks. liite 2).

Ohjelma sisältää liitteessä 1 esitettyjen analyttisten pintasegmenttien lisäksi myös käyttäjän omalla ohjelmalla määritellyn geometrian, mitä voidaan käyttää myös liitännä ulkopuolisiin CAD järjestelmiin. Kommunikointi ei tapahdu tavanomaisesti linkkaamalla käyttäjän kirjoittamat aliohjelmat esikäsittelijään. Lienee joustavampaa saattaa kaksi erillistä ohjelmaa "keskustelemaan" keskenään tiedostojen välityksellä. Tehokkuussyistä nämä tiedostot on hyvä avata keskusmuistiin eikä levyille.

Annettujen suhteellisten mittalukujen perusteella pintasegmenteille generoidaan säännöllinen solmu- ja elementtijako. Jäykistyspalkit sijoitetaan kuorielementtien reunaviivoille ja epäkeskisyydet, pääakseleiden suunnat ja poikkileikkausmäärittelyt lisätään.

Segmentit liitetään toisiinsa yhdistämällä toleranssin sisäiset solmut. Tämä on ohjelman raskain toimenpide, koska kaikkia solmuja verrataan toisiinsa. Työmäärää voitaisiin keventää käsittelemällä vain segmenttien reunasolmut. Samalla kuitenkin rajoitettaisiin segmenttien liitännämahdollisuuksia. Toimenpide kestää n. 1100 solmun mallissa n. 25 s, jolloin tehdään n. 25000 vertausta sekunnissa.

Elementtien muodostamisen jälkeen analyttistä pintaa ei enää käytetä, vaan kaikki geometriaan liittyvät suureet lasketaan elementtien muotofunktioista. Esim. elementin solmua voidaan siirtää kursorilla pitkin elementin pintaa.

Geometrian osalta jatkokehityksiä ovat esim. segmentin projisointi analyttiselle pinnalle, elementtien muodon korjaaminen iteratiivisella algoritmilla, eri segmenttien välisten leikkauskäyrien haku ja Semiloof elementtien liittäminen parabolisiin volyymielementteihin.

4.3 REUNA-EHDOT

Reunaehdot voidaan antaa pisteittäin, käyrittäin tai vapaastiväli-

tussa tasossa (tai "puolitasossa") sijaitseville pisteille. Tuenta visualisoidaan 1, 2 tai 3 kärkisellä nuolella siitä riippuen, onko vapausasteen suunnassa tuettu siirtymä, kiertymä vai molemmat.

Semiloof kuorielementti on herkkä pistevoimille, koska sen kulma- ja välisolmuista puuttuvat kiertymävapausasteet (ks. lähde 4). Tästä syystä myös piste- ja viivamaiset tuet lienee parasta antaa kimmoisana alustana. Jotta alusta ei vaikuttaisi elementtijakoon, sekin voitaneen määritellä aktiiviksi vain elementin osa-alueelle, hieman samaan tapaan kuin pintakuormatkin.

4.4 PINTAKUORMAT

Suunnan, intensiteetin tai vaikutusalueen suhteen epäsäännölliset pintakuormat ovat työläitä määritellä, varsinkin jos ne aiheuttavat muutoksia elementtijakoon.

Halusin kokeilla menettelyä, jossa elementin osa-alueelle jakautunut pintakuorma muunnetaan solmuvoimiksi integroimalla se osa-alueen yli allaolevan elementin muotofunktioita käyttäen. Osa-alueita voitaneen nimittää tässä pintakuormaelementiksi. Sen solmuissa määritellään pintakuorman intensiteettivektorit, jotka interpoloidaan komponenteittain sopivia muotofunktioita käyttäen.

Pintakuorman kokonaisvaikutusalue koostuu mallin projektiossa rajatun monikulmion (tai yleisemmässä tapauksessa tilan) sisällä sijaitsevista mallin solmupisteistä. Näissä solmuissa, ns. intensiteettipisteissä, annetaan pintakuorman vaikutussuunta ja arvo (intensiteettivektori). Pisteitä voidaan lisätä yksitellen sekä edellisiä poistaa. Lopuksi näistä pisteistä muodostetaan pinta-kuormaelementtiverkko.

Ohjelma sisältää liitteen 3 mukaiset pintakuormien esitysmahdollisuudet. Myöhemmin lisätään myös intensiteettipinnan piirto.

4.5 MUITA TARKISTUSMAHDOLLISUUKSIA

Visuaalinen tarkistus lienee tehokkain tapa geometrian lisäksi muidenkin suureiden tarkistamiseksi.

Materiaaliominaisuudet havainnollistetaan viivoittamalla tai värjäämällä ne elementit, joilla on kysytty ominaisuus.

Levyvahvuudet tarkistetaan esittämällä koko kuorirakenne volyymina, ehkä paksuuksia liioitellen erojen selvemmäksi havaitsemiseksi.

Sopivia elementtien geometrisia tarkistussuureita olisivat:

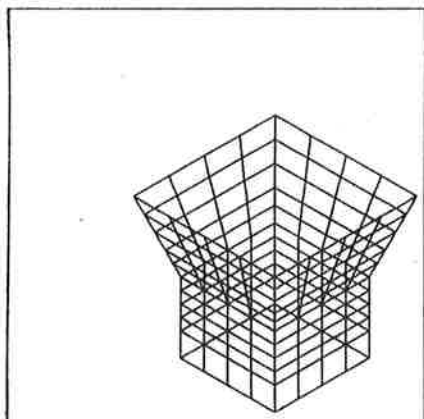
- levyvahvuus / minimikaarevuussäde
- elementin suurin "nuolisuhde"
- välisolmujen sijainti
- kärkikulmat

5 OHJELMAN TULEVAISUUS

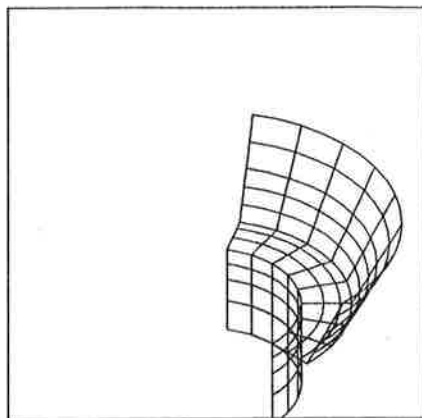
Suurin osa esitetyistä piirteistä on testaus- tai koodausvaiheessa, jotkut vielä suunnitteluasteella. Toistaiseksi ohjelma on ainoastaan henkilökohtaisessa käytössä. Lisäkehitysresurssit, koekäyttö tuotantoympäristössä ja siitä saatava palaute olisivat tarpeen, mikäli ohjelmasta haluttaisiin kehittää käytännön työkalu. Toisaalta ohjelma saattaisi soveltua myös opetus- ja tutkimuskäyttöön.

6 KIRJALLISUUSVIITTEET

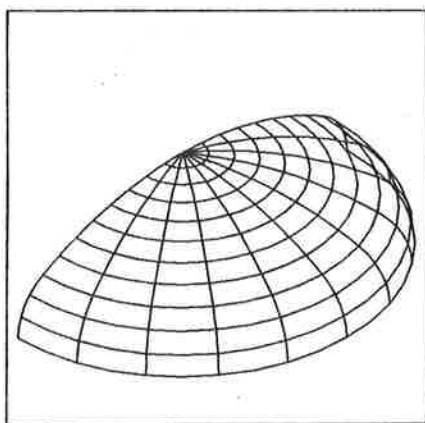
- /1/ Cook, R.D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, 1981.
- /2/ Faux, I.D. and Pratt, M.J., Computational Geometry for Design and Manufacture, Chichester, Ellis Horwood Ltd., 1979.
- /3/ Irons, B.M. and Ahmad, S., Techniques of Finite Elements, Chichester, Ellis Horwood Ltd., 1980.
- /4/ Irons, B.M., The Semiloof Shell Element, Chapter 11, Finite Elements for Thin Shells and Curved Membranes, eds. Ashwell D.G. and Gallagher R.H., Wiley, 1976, pp. 197 - 222.



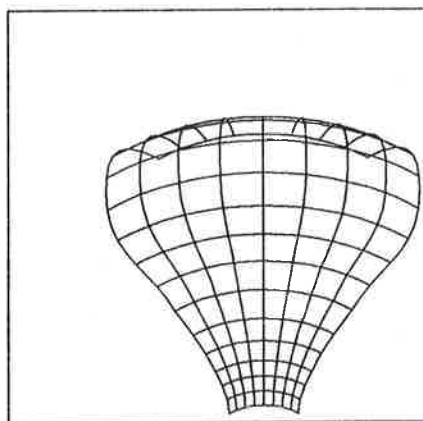
Tasot ja viivoituspinnat



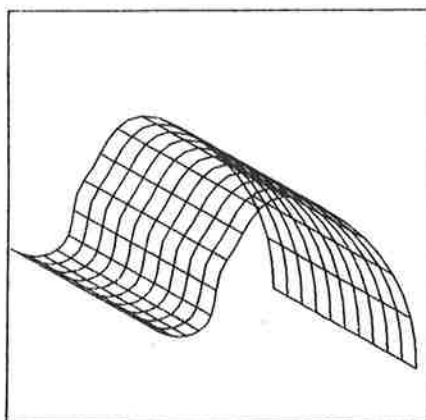
Lieriö- ja kartiopinnat



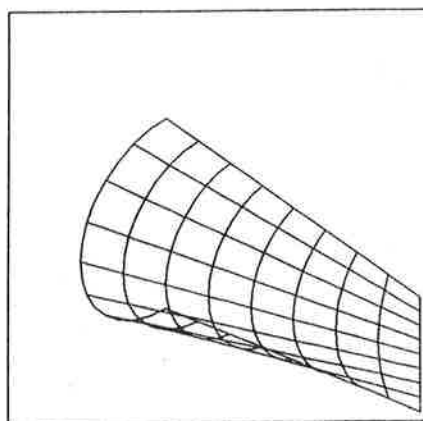
Pallo- ja toruspinnat



Spline pyörähdyspinnat



Spline siirtopinnat



Spline interpolaatiopinnat

Eräs ohjelman monivalintamenu

1 ZOOMAUS
 2 PANOROINTI
 3 UUSI PROJEKTIO
 4 SOLMUPIST. YHDIST.
 5 REUNAEHDOT
 6 ELEMENTIT
 7 PINTAKUORMAT
 8 LAHTOTIEDOSTO
 9 UUSI GEOM.TIEDOSTO
 0 LOPETUS
 Olemme rutiinissa: Pääohjelma

Tyypillinen geometriatiedosto (teksti- ja tyhjät rivit
 tulkitaan kommenteiksi)

Painesäiliön symmetrinen neljännes / DIM: mm

TORUS , pintatyyppi 7 , r jakoja 10 , s jakoja 3
 7 10 3

Paikalliskoordinaatiston määrittelypisteet A, B ja C sekä
 r1 ... r10 , s1 ... s3 , alf , bet1 , bet2 , r1 , r2
 0 0 500 1 0 0 0 0 600
 10*1 3*1 180 30 90 350 150

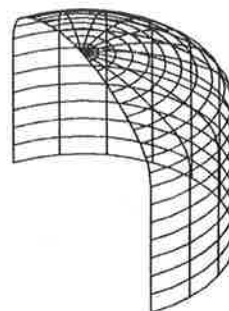
PALLO , pintatyyppi 6 , r jakoja 10 , s jakoja 8
 6 10 8

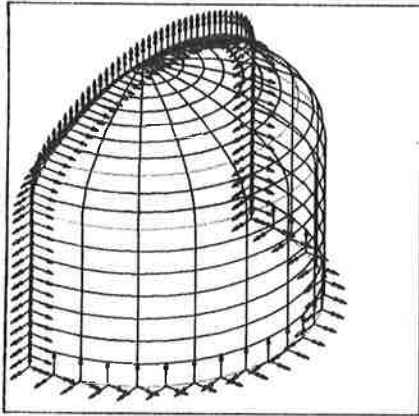
Paikalliskoordinaatiston määrittelypisteet A, B ja C sekä
 r1 ... r10 , s1 ... s8 , alf , bet1 , bet2 , r2
 0 0 -106.218 1 0 0 0 0 0
 10*1 8*1 180 0 30 850

SYLINTERI , pintatyyppi 4 , r jakoja 10 , s jakoja 7
 4 10 7

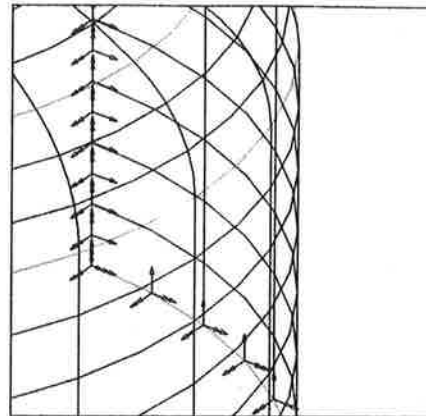
Paikalliskoordinaatiston määrittelypisteet A, B ja C sekä
 r1 ... r10 , s1 ... s7 , alf , r
 0 0 0 0 0 500 1 0 0
 10*1 7*1 180 500

Geometria annettu

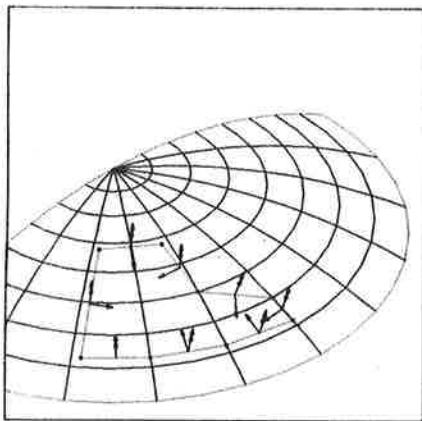




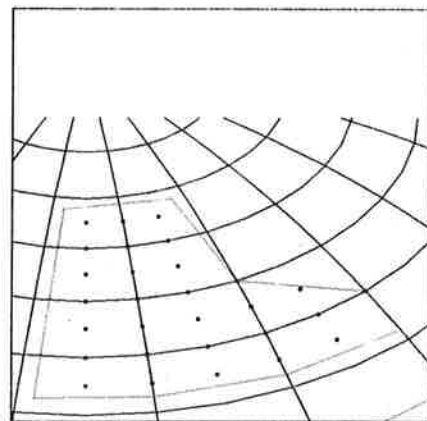
Rakenteen reunaehdot



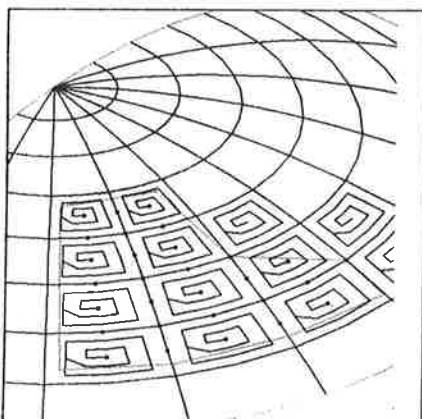
Yksityiskohdan reunaehdot



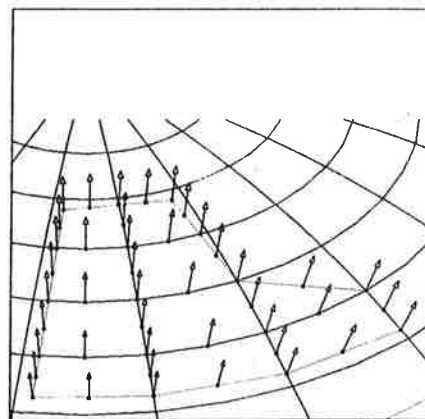
Pintakuorman vaikutusalue



Vaikutusaleen solmut



Kuormitetut elementit



Intensiteettivektorit

TASAISESSA JÄÄSSÄ KULKEVAAN ALUKSEEN KOHDISTUVAT KUORMAT JA ALUKSEN VASTEET

Jerzy Matusiak, erikoistutkija
Valtion teknillinen tutkimuskeskus
Laivatekniikan laboratorio

1. JOHDANTO

Jäissä kulkevat alukset kärsivät usein monitaajuisista värähtelyistä. Nämä värähtelyt ovat haitaksi miehistölle ja voivat aiheuttaa vahinkoja rakenteelle ja aluksen varustukselle.

Jotta jäissä kulkevan aluksen värähtely- ja jännitetaso voitaisiin ennustaa laivan suunnitteluvaiheessa, tieto dynaamisista jääkuormista ja muista merkittävistä tekijöistä on tarpeen.

Tämän työn päämääränä oli:

- Perämerellä talvella liikkuvan jäänmurtaja SISU:n värähtelytason ja -muotojen määrittäminen ja
- kehittää menetelmä tasaisessa jäässä kulkevaan alukseen kohdistuvien kuormien määrittämiseksi.

Tehtävistä jälkimmäinen on selvitetty mallittamalla laiva monen vapausasteen lineaarisella dynaamisella systeemillä, millä taivutusmuotojen lisäksi on myös jäykän kappaleen liikkeet. Tämän systeemin herätteenä on jakautunut satunnainen jääkuormitus.

JM SISU:n ekvivalentin jäävoiman spektritiheys ja tämän voiman sijainti taajuuden funktiona on saatu soveltamalla em. menetelmää.

2. MONEN VAPAUASTEEN LINEAARISEN DYNAAMISEN JÄRJESTELMÄN VASTEET SATUNNAISELLE KUORMITUKSELLE

Oletetaan, että lineaarisen systeemin dynaamiset ominaisuudet ovat tiedossa ja ne on annettu ominaistajuuksina ja -muotoina, joita on N kappaletta. Muut yleistetyt parametrit (massat ja vaimennuskertoimet) ovat myös tiedossa. Tämä täydellisesti systeemiä kuvaava tietomäärä on saatavissa kokeellisesti tai numeerisesti käyttämällä esimerkiksi elementtimenetelmää.

Ulkoista jakautunutta kuormitusta kuvaa spektritiheysfunktio $S_F(y, y'; \omega)$. Oletetaan, että tämä kuormitus on stationaarinen ja ergodinen. Käyttämällä yleistetyn voiman mallia saadaan yleistetyn kuormituksen spektritiheys $/1/$:

$$S_{Q_j Q_k}(\omega) = \{\phi_j\}^T [S_F(\omega)] \{\phi_k\} \quad (1)$$

missä $[S_F(\omega)]$ on hermitoitu matriisi, joka koostuu pistevoimien spektritiheysfunktioista ja $\{\phi_j\}$ on ominaisvektori numero j .

Monen vapausasteen lineaarisen systeemin vasteet yleistettyjen koordinaattien u_j muodossa on annettu kaavassa

$$S_{u_j u_k}(\omega) = \frac{S_{Q_j Q_k}(\omega)}{m_j m_k (\omega_j^2 - \omega^2 - 2i\zeta_j \omega_j \omega) (\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\zeta_k \omega_k \omega)} \quad (2)$$

missä m_j on yleistetty massa
 ω_j on ominaistajuuus
 ζ_j on yleistetty kriittisen vaimennuksen suhde
 $i = \sqrt{-1}$
 j on muodon numero

Kaava (2) voidaan kirjoittaa myös matriisimuodossa

$$[S_{uu}] = [S_{QQ}][H(\omega)] \quad (2a)$$

Vasteen x spektritiheys saadaan kaksoissummaamalla yleistetyt spektritiheydet, eli

$$S_x(y, y'; \omega) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N S_{u_j u_k}(\omega) \cdot \phi_j(y) \cdot \phi_k(y') \quad (3)$$

Vasteen keskihajonta taajuuskaistalla $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ saadaan integroimalla lauseke (3)

$$|x|^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_x(\omega) \cdot d\omega \quad (4)$$

Edellä annettuja kaavoja tarkastelemalla voidaan vetää seuraavat johtopäätökset :
Kun ulkoinen kuormitus $S_F(\omega)$ on valkoisen kohinan kaltainen, silloin yleistettyjen voimien spektritiheydet (1) ovat taajuudesta riippumattomat. Systeemin vaste on monitaajuuksinen ja sen määrittävät systeemin ominaistaajuudet. Jos systeemin ominaistaajuudet eivät ole lähellä toisiaan ja systeemin vaimennuskertoimet ovat selvästi kriittistä pienempiä, silloin usein diagonaalin ulkopuoleiset termit matriisista $[H(\omega)]$ jätetään pois eli ominaismuotojen välistä kytkentää ei oteta huomioon. Tämä olettaus oleellisesti yksinkertaistaa pakkovärähtelylaskelmia. Vastespektriin huippujen korkeudet ovat silloin käänteisesti verrannollisia vaimennuskertoimiin ja yhden yleistetyn koordinaatin keskihajonnan arvon määrittelee kaava /2/.

$$|\bar{u}_j|^2 = \frac{\pi S_{Q_j Q_j}(\omega)}{2 \zeta_j m_j^2 \omega_j^3} \quad (5)$$

3 SATUNNAISEN KUORMAN MÄÄRITTÄMINEN DYNAAMISEN JÄRJESTELMÄN VASTEESTA

Ulkoista kuormitusta edustavan spektritiheyden funktio $S_F(y, y'; \omega)$ voidaan määrittää seuraamalla kappaleessa 2 esitettyä menetelmää takaperin. Kaava (3) voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti

$$\{S_x(\omega)\} = [A]\{S_{uu}(\omega)\}$$

tai

$$\{S_{uu}(\omega)\} = [A]^{-1}\{S_x(\omega)\} \quad (6)$$

missä $[A]^{-1}$ on matriisin $[A]$ käänteismatriisi. Molempien matriisien koko on $N^2 \times N^2$ ja jälkimmäinen matriisi koostuu ominaismuotojen elementtien tuloista kaavan (3) mukaisesti. Vektori $\{S_x(\omega)\}$ koostuu mitatuista vasteista spektritiheyksien muodossa ja spektritiheyksien kompleksikonjugaatio-arvoista. Tämän vektorin pituus on N^2 .

Kaavan (6) käyttöönotto edellyttää, että vasteet x on mitattu vähintään N :ssä pisteessä, missä N on ominaismuotojen lukumäärä (sisältäen jäykän kappaleen ominaismuodot). Tämän lisäksi mittauspisteet ja pisteet, joissa tunnetaan ominaismuodot, ovat samat.

Matriisilaskun tuloksena saadaan mitattu vaste jaettua modaalikomponentteihin eli toisin sanoen saadaan yleistettyjen koordinaattien spektritiheydet. Yleistettyjen voimien spektritiheydet, jotka aiheuttavat mitatun vasteen $S_x(\omega)$, ovat

$$S_{Q_j Q_j}(\omega) = S_{u_j u_k}(\omega) \cdot m_j m_k \cdot (\omega_j^2 - \omega^2 - 2i\zeta_j \omega_j \omega) \cdot (\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\zeta_k \omega_k \omega) \quad (7)$$

Ulkoisen kuorman siirto yleistettyjen voimien tasolta N :ksi pistevaimaksi on periaatteessa mahdollista käyttämällä kaavaa (1). Menettely on samankaltainen kuin yleistettyjen koordinaattien määrittämisessä (6). Tämä menetelmä on osoittautunut kuitenkin käyttökelpottomaksi, koska se edellyttää, että kaikki N ominaismuotoa vaikuttavat vasteessa koko tutkittavan taajuuskaistan leveydellä.

Koska tämä ei pidä paikkaansa toinen malli on valittu kuvaamaan jääkuormia. Jakautunut, laivan runkoon vaikuttava jääkuorma on kuvattu yhdellä pistevoimalla. Tämän ekvivalenttivoiman spektritiheys ja vaikutuspisteen sijainti laivan pitkittäissuunnassa taajuuden ω funktiona määritellään kahden yleistetyn voiman spektritiheysarvoista. Yleistetty voimapari valitaan siten, että niiden vastaavat ominaisarvot ovat lähinnä taajuutta ω . Ekvivalenttivoiman keskihajontaa voidaan laskea kaavalla (4). Kuormituksen karakteristinen periodi voidaan laskea spektritiheysfunktion momenttien suhteena, eli:

$$T_c = 2\pi \frac{\int_0^{\omega_u} S_F(\omega) d\omega}{\int_0^{\omega_u} S_F(\omega) \omega d\omega} \quad (8)$$

4 CASE-STUDY - TASAISESSA JÄÄSSÄ KULKEVA JÄÄNMURTAJA SISU

Edellä esitettyä menetelmää on sovellettu JM SISU:un kohdistuvien jäävoimien määrittämiseen. Merenkulkuhallituksen JM SISU:n päätiedot on esitetty taulukossa 1.

4.1 Aluksen vasteiden mittaus

Mittaukset on tehty kahdella jään paksuuden ja laivan nopeuden arvojen yhdistelmällä. Molemmissa tilanteissa pääkoneiden teho oli n. 80 % maksimitehosta. Tasaisen jään paksuudet ja SISUn nopeudet olivat:

0.3 m ja 12 solmua ja

0.5 m ja 10 solmua.

Mittauksissa on käytetty induktiivisia Hottingerin värähtelyantureita. Mittauspisteet on valittu siten, että ne eivät sattuisi ominaismuotojen solmupisteisiin. Esimerkki vasteesta on esitetty kuvassa 1. Kuten kuvasta ilmenee jäykän kappaleen liikkeiden lisäksi neljä alinta taivutusmuotoa yhdistyy vasteessa. Ristispektritiheydet laskettiin kaksikanavaisella spektrianalyysaattorilla HP5423A ja näin vektori $\{S_x(\omega)\}$ kaavassa (6) oli muodostettu. Ristispektritiheyden esimerkki on annettu kuvassa 2. Ristispektrien avulla on myös ollut mahdollista piirtää aluksen värähtelykäyttäytymisen kaikilla resonanssitaajuuksilla. Kolmatta taivutusominaismuotoa vastaava värähtelymuoto on esitetty kuvassa 3.

4.2 Aluksen dynaamisten ominaisuuksien määrittäminen

JM SISU:n yleistetyt parametrit on määritetty kokeellisesti ja laskennallisesti. Jäykän kappaleen muodot (jyskintä ja kohoilu) on laskettu merikelpoisuusmenetelmällä. Neljä alinta taivutusmuotoa ja niihin kuuluvat yleistetyt parametrit on saatu kokeellisesti suorittamalla laivalla syvässä avovedessä tärastinkoe /3, 7, 8/. JM SISU:n ominaismuodot on esitetty kuvassa 4 ja niihin kuuluvat yleistetyt parametrit on annettu taulukossa 2.

Vaikka aluksen syväydet ovat olleet lähes samat molemmissa mittauksissa, rungon ominaistajuudet jäässä ja avovedessä olivat hieman erilaiset. Koska rungon jäykkyys ei voi riippua jään paksuudesta ja laivan nopeudesta, voidaan tehdä se johtopäätös, että laivaa ympäröivä jää lisää hitausvoimia. Tämä lisätty massa vaikuttaa ominaistajuuksiin ja myös ominaismuotojen skaalaukseen eli yleistettyihin massoihin. Jälkimmäisen vaikutus voidaan likimääräisesti arvioida ominaistajuuksien suhteesta:

$$m_{gi} = m_{gs} \sqrt{f_s/f_i}$$

missä

f on ominaistajuus

m_g on yleistetty massa

ja alaindeksi s viittaa avoveteen ja i jäähän. Toinen mielenkiintoinen ilmiö, mikä on havaittu vertaamalla avovedessä saatuja vaimennuskertoimien arvoja ja jäässä suoritettujen värähtelymittauksien tuloksia on se, että jääkenttä lisää myös huomattavasti rungon taivutusmuotojen vaimennuskertoimia. Tämä ilmiö ja vaimennuskertoimien määrittäminen vastespektritiheyskäyristä on esitetty kuvassa 5. Menetelmä perustuu olettamukseen, että vasteen resonanssihuipun alueella herätteitä kuvaava voiman spektritiheys on lähes vakio. Tämä olettamus tuntuu järkevältä, koska aluksen nopeus on huomattavasti suurempi kuin rungon värähtelyn nopeus eli toisin sanoen laivan värähtely ei vaikuta jääkuormiin.

Yhteenveto JM SISU:n yleistetyistä parametreista on esitetty taulukossa 3. Kuten tästä taulukosta ilmenee jään paksuudella on huomattava vaikutus vaimennukseen. Aluksen vaimennuskertoimet jäässä ovat selvästi isommat kuin avovedessä.

Yhteenvedona voidaan todeta, että jääkentällä on kahdenlainen vaikutus sitä murtavaan alukseen. Ennen kaikkea jääkenttä vaikuttaa laivaan ulkoisena kuormituksena. Tämä monitaajuksinen kuormitus on laajakaistainen ja sitä voidaan kuvata jatkuvalla spektritiheysfunktiolla. Toinen vaikutuksista on aluksen hitaus- ja vaimennusominaisuuksien kasvattaminen.

4.3 Dynaamiset jääkuormat määritettynä aluksen vasteista

Kahta jäänpaksuus-laivan nopeus arvoa vastaavat ulkoiset satunnaiset kuormitukset on laskettu käyttämällä aluksen yleistettyjä parametrejä ja vasteiden spektritiheyksiä. Menetelmää, joka on esitetty kappaleessa 3, on käytetty kuormituksen määrittämisessä. Jäänmurtajan vaste yleistettyjen koordinaattien spektritiheyden muodossa on esitetty kuvassa 6. Jäykän kappaleen liikkeet (kohoilu ja jyskintä) määrittävät vasteen pienillä taajuuksilla (0 - 2 Hz). Taivutusmuodot osallistuvat vasteeseen korkeammilla taajuuksilla.

Jääkuormien pystykomponenttien spektritiheyskäyrät on esitetty kuvassa 7. Ekvivalenttivoiman sijoitus taajuuden funktiona on annettu kuvassa 8. Tämä laivan pitkittäissuunnassa annettu sijoitus on tehty dimensiottomaksi siten, että nolla vastaa keskilaivaa ja ykkönen keulaluotiviivaa.

Mielenkiintoinen analyysin tulos on, että pienillä taajuuksilla jääkuorman pystysuora komponentti sijoittuu keskilaivan ja olkapään alueelle. Aluksen nopeuden kasvaessa tämä voima siirtyy keulaa kohti. Korkeammilla taajuuksilla jääkuormia kuvaava resultanttivoima sijaitsee keulaluotiviivalta taaksepäin. Jääkuormien jakautumien riippuvuuden taajuudesta selvittäminen kvantitatiivisesti vaatisi täysin erilaista lähestymistapaa kuin mikä on esitetty tässä työssä. Viite /6/, missä jääkentän ja laivan rungon vuorovaikutusta käsitellään jääkentän dynaamisena tapahtumana, on todennäköisesti oikea tapa lähestyä tätä ongelmaa. Kuitenkin kvalitatiivinen selitys ilmiölle, mikä on esitetty kuvassa 2, on suhteellisen yksinkertainen. Visuaaliset havainnot todistavat, että tasaisen jään murtamiseen laivalla kuuluu eri kokoisten jääpalojen irrottaminen jääkentästä. Pienimmät niistä murtuvat suhteellisen korkealla taajuudella hyvin lähellä keulaluotiviivaa. Suurimmat jääpaloista murtuvat harvemmin laivan olkapään alueella ja niiden irrottamiseen jääkentästä tarvitaan merkittävästi suuremmat voimat kuin pienten palojen murtamiseen. Tämä havainto on yhtäpitävä kuvissa 7 ja 8 esitettyjen tulosten kanssa.

Myös se, että laivan nopeuden kasvaessa ja jääpaksuuden pienenentyessä voiman spektri siirtyy korkeampiin taajuuksiin päin ja voiman keskihajonnan arvo pienenee voidaan selittää samalla tavalla.

Murtuvien jääpalojen karakteristinen pituus L_C projisoituna laivan pitkittäissuunnassa voidaan arvioida kaavan (8) avulla. Olettamalla, että kuormitus tapahtuu joka kerta kun jääpala irtaana jääkentästä, karakteristinen jääpalan pituus on sidottu karakteristiseen periodiin T ja aluksen nopeuteen V seuraavalla yksinkertaisella kaavalla

$$L_C = V T_C \quad (9)$$

Kaavat (8) ja (9) antavat murtuvien jääpalojen karakteristiseksi pituudeksi 4.0 m ja 3.7 m, kun JM SISU:n nopeudet ovat 10 ja 12 solmua.

5 YHTEENVETO

JM SISULLA suoritettut värähtelymittaukset osoittavat, että aluksen kulkiessa tasaisessa jäässä jäykän kappaleen liikkeiden lisäksi heräävät neljä alinta taivutusmuotoa. Jääkuormat voidaan mallittaa yhdellä pystysuoralla osoittavalla ekvivalenttivoimalla. Tämä laivakohtainen voima on riippuvainen jään paksuudesta ja aluksen nopeudesta. Matemaattisesti tämä voima voidaan kuvata laajakaistaisella jatkuvalla spektritiheysfunktioilla. Tämän ekvivalenttivoiman sijoitus laivan pituussuunnassa on taajuudesta riippuvainen.

Jääkuormien määrittämiseen tarkoitettu epäsuora menetelmä, joka on esitetty tässä työssä, on vaihtoehto suoralle kuormien mittaamenetelmälle. Jälkimmäinen menetelmä vaatii huomattavasti enemmän instrumentointityötä kuin edellinen. Epäsuoran menetelmän suurimpana puutteena on, että se ei anna tietoa paikalliskuormista.

KIRJALLISUUSVIITTEET.

1. Bolotin, V.V., Santunnaiset värähtelyt,
Nauka, 1979 (venäjänkielinen)
2. Newland, D.E., An Introduction to Random Vibrations
And Spectral Analysis, London 1975.
3. Hakala, M.K., A Practical Approach For the Estimation
Matusiak, J, and Verification of Ship Vibration Response,
The 2nd International Symposium on Practical
Design in Shippbuilding, Tokyo & Seoul, 1983.
4. Bendat, I.S., Random Data : Analysis and Measurement
Piersol, A.G., Procedures, New York, 1971.
5. Clough, R.W., Dynamics of Structures, New York, 1975.
Penzien, J.
6. Varsta, P. On the Mechanics of Ice Load on Ships in
Level Ice in The Baltic Sea
Technical Research Centre of Finland,
Publications 11, 1983.
7. Seminar on Ship Vibration, VTT Symposioum 24, Espoo 1982.
8. Laivojen värähtelyt ja niiden torjunta, VTT Seminarisarja
No. 22, Espoo 1980
9. Matusiak, J. Dynamic Loads and Response of Icebreaker SISU
during continuous icebreaking, Winter Navigation
Research Board, Research Report No 37

Taulukko 1. JM SISU:n päämittatiedot

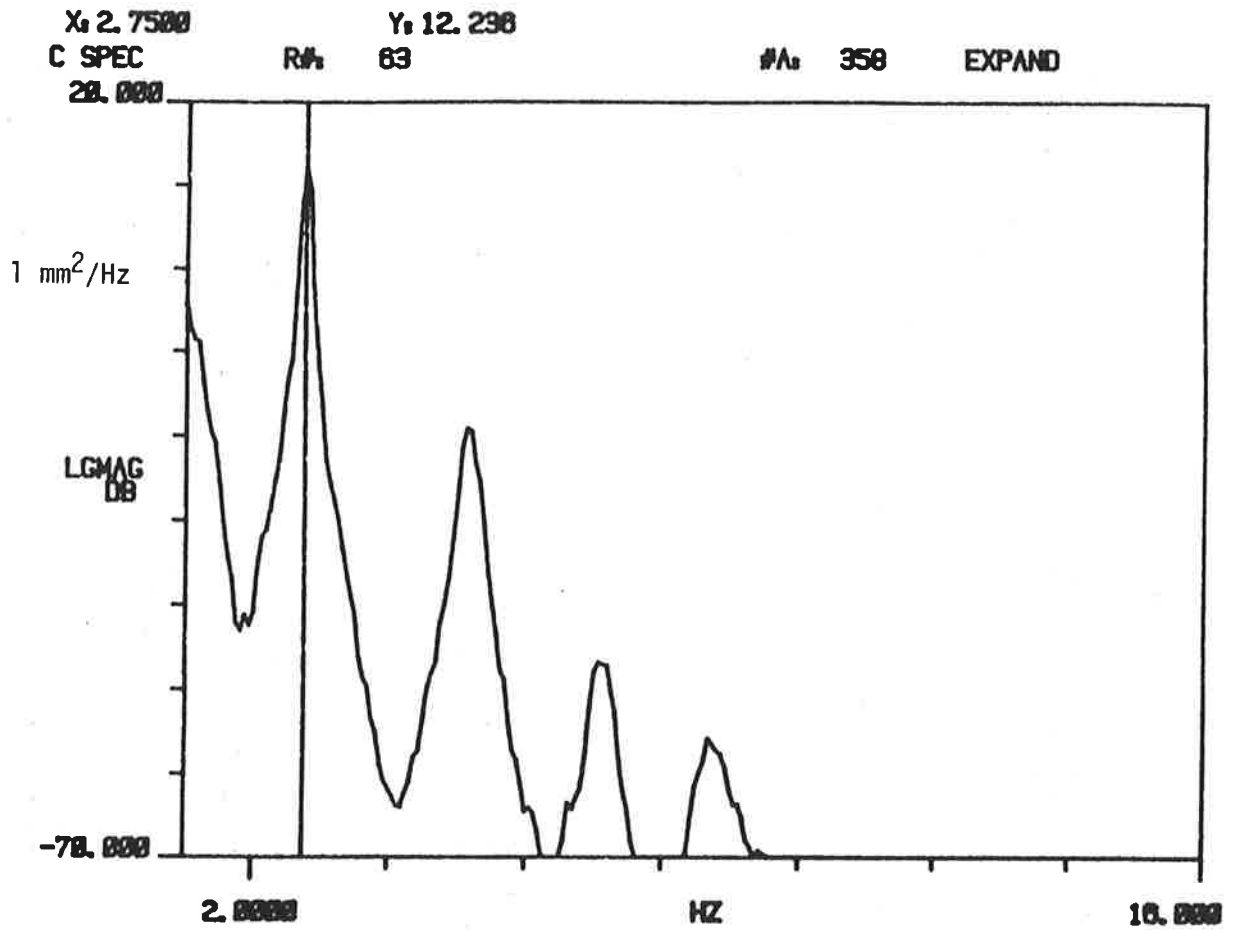
Maks. pituus	104.6 m
Vesiviivan pituus	96.0 m
Maks. leveys	23.8 m
Vesiviivan leveys	22.5 m
Syväys	8.3 m
Pääkannen korkeus	12.1 m

Taulukko 2. JM SISU:n ominaisparametrit avovedessä

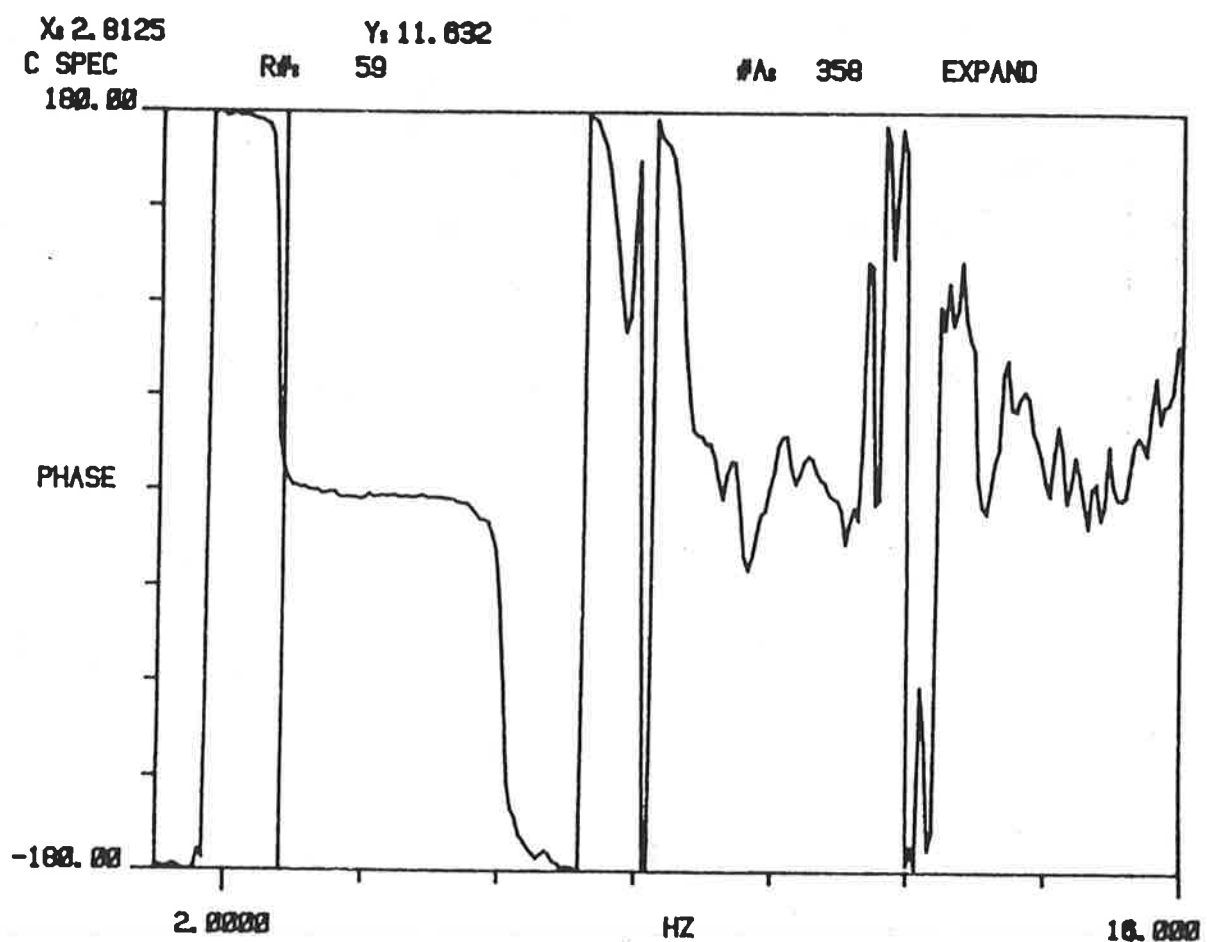
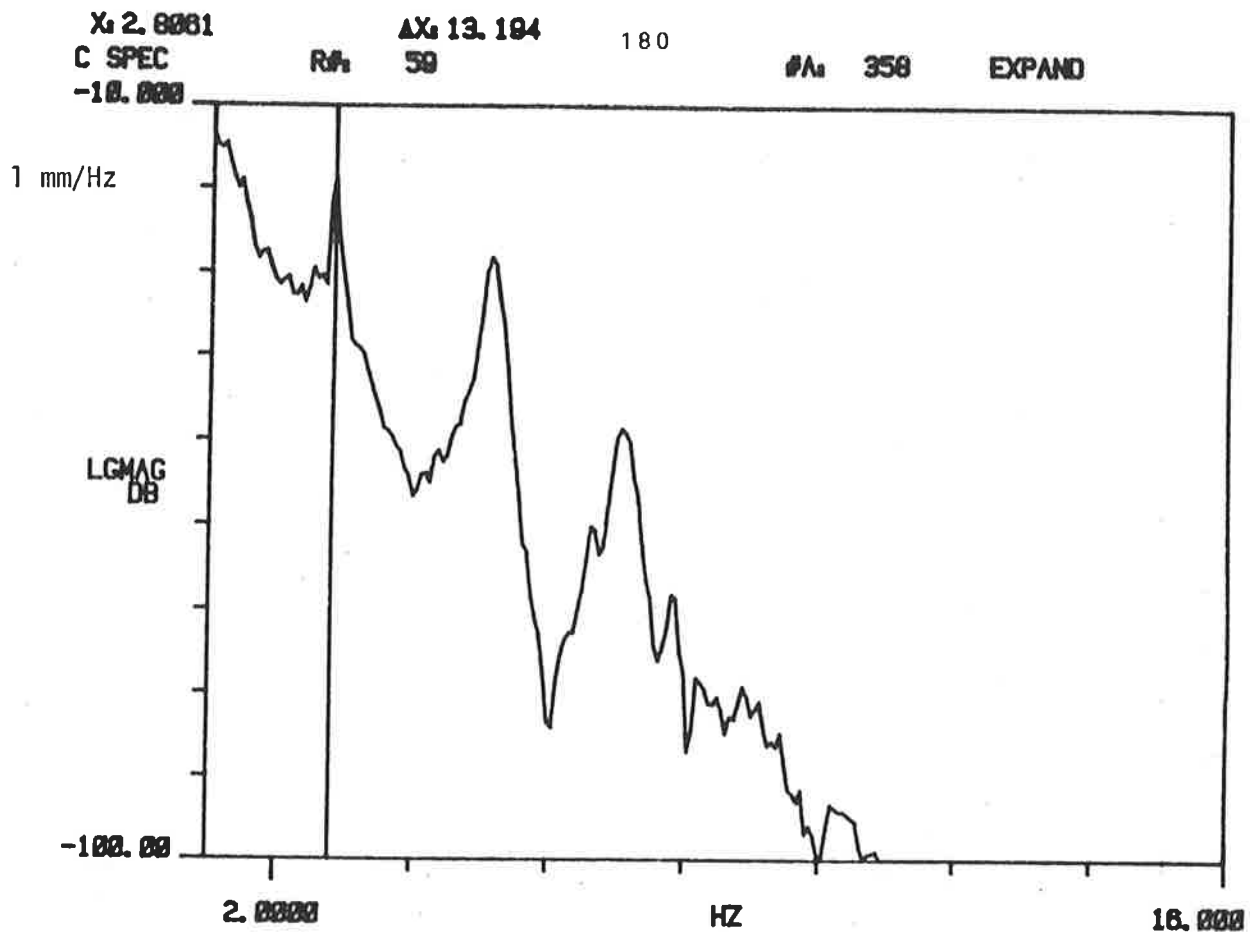
Muodon Numero j	Ominais- taajuus Hz	Yleistetty vaimennus ζ_j	Yleistetty massa kg.m ²	Modaalsiirtymä keulaluotiviivalla μm
3	2.916	0.00375	0.118	278
4	5.513	0.006	0.02012	196
5	7.550	0.0055	0.00486	40
6	9.000	0.00504	0.0036	26.5

Taulukko 3. JM SISU:n yleistetyt parametrit tasaisessa jäässä

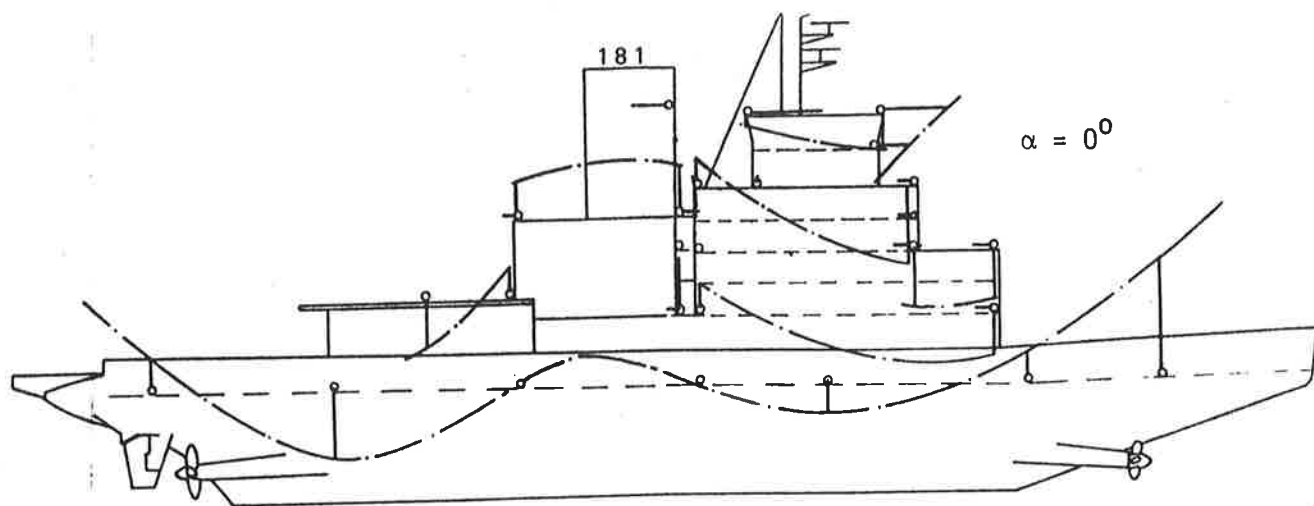
Muodon numero j	Jään paksuus m	Ominais- taajuus Hz	Yleistetty vaimennus ζ_j	Yleistetty massa kg.m ²	Modaalsiirtymä keulaluotiviivalla μm
1 (heave)	-	0.145	0.05	0.1871	100
2 (pitch)	-	0.160	0.05	0.172	222
3	0.3 0.5	2.760 2.703	0.026 0.0475	0.121 0.122	278
4	0.3 0.5	5.150 5.078	0.0270 0.056	0.021 0.021	196
5	0.3 0.5	7.067 6.594	0.023 0.042	0.0050 0.0052	40
6	0.3 0.5	8.700 8.312	0.022 0.038	0.0037 0.00375	26



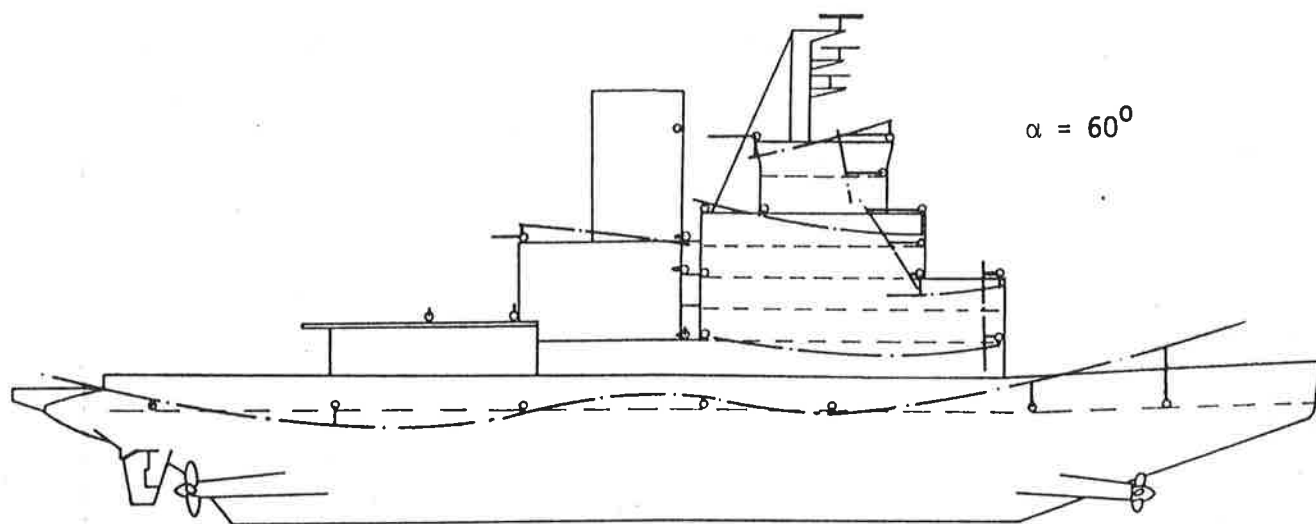
Kuva 1. JM SISUn keulassa mitatun vasteen spektritiheys.
 Nopeus 12 solmua. Jään paksuus 0.3 m.



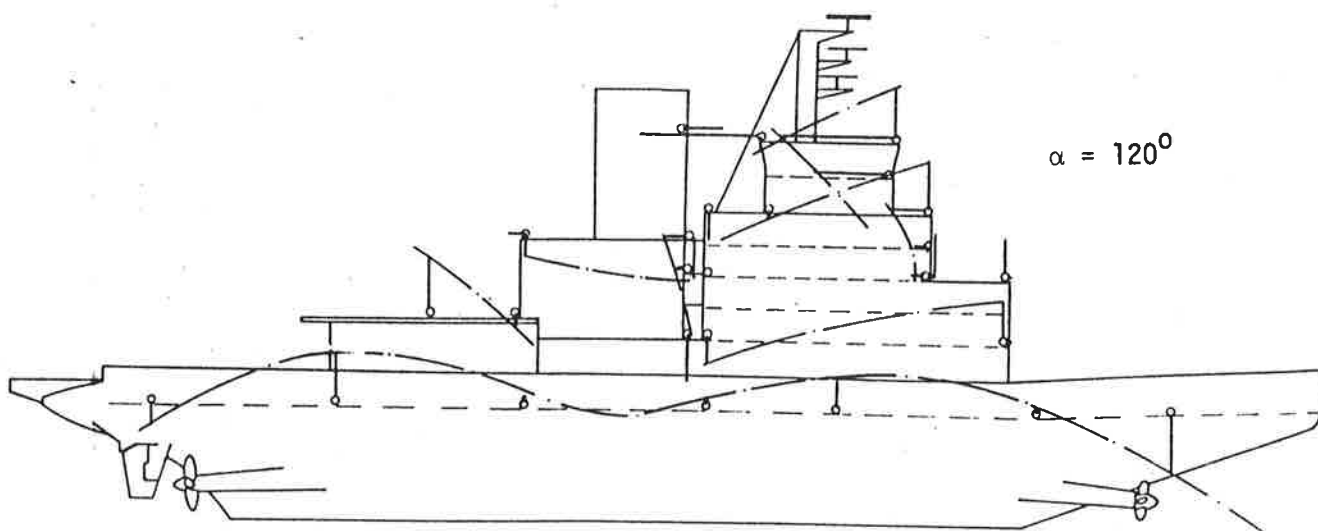
Kuva 2. Laivan perässä ja ohjaamon katolla mitatun vasteen risti-spektritiheys. Nopeus 12 solmua. Jään paksuus 0.3 m.



$\alpha = 0^\circ$

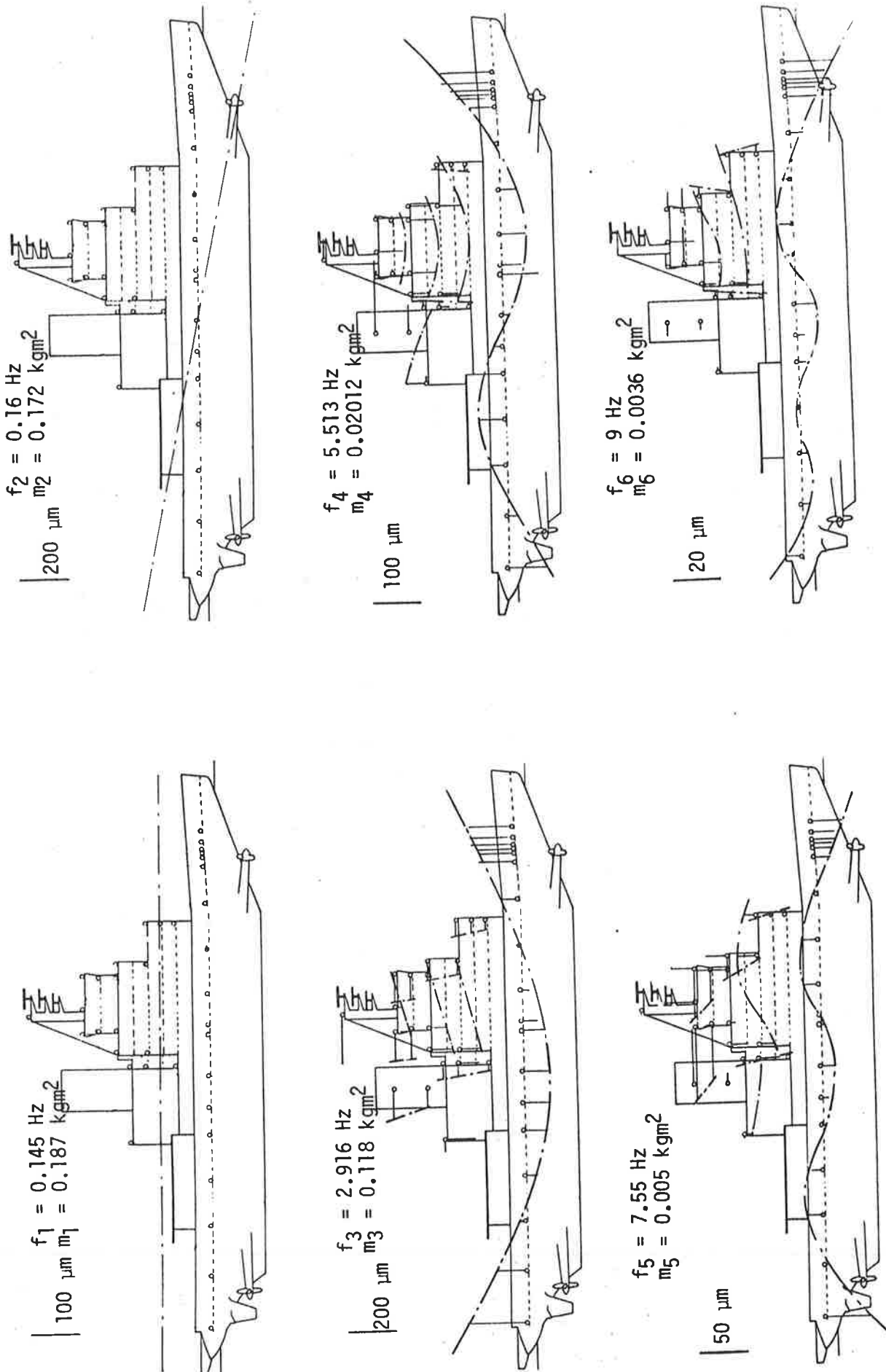


$\alpha = 60^\circ$

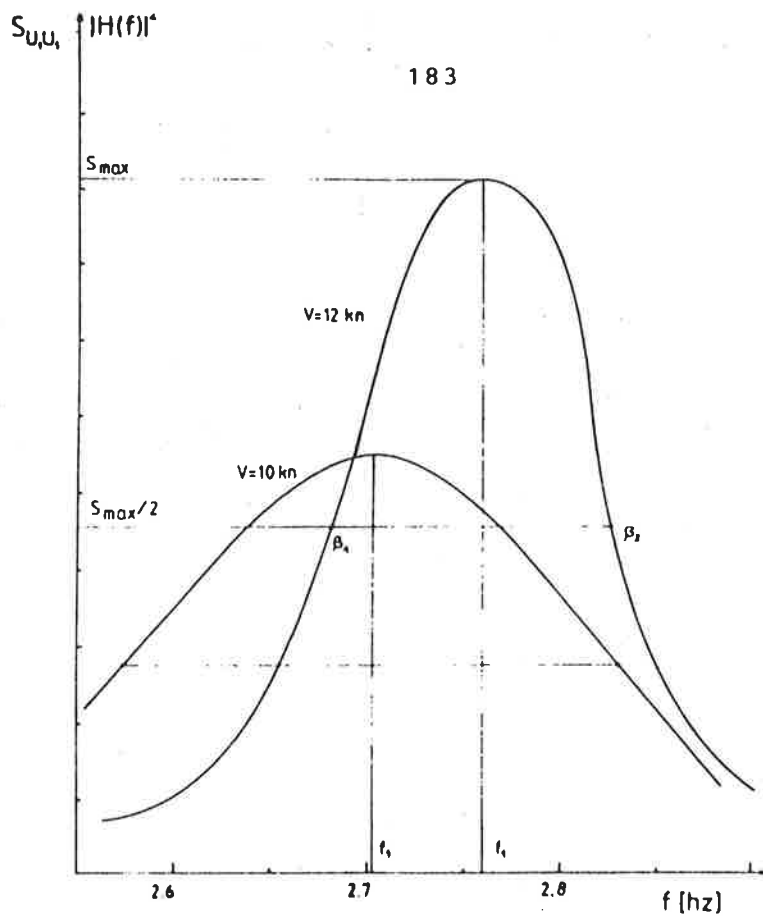


$\alpha = 120^\circ$

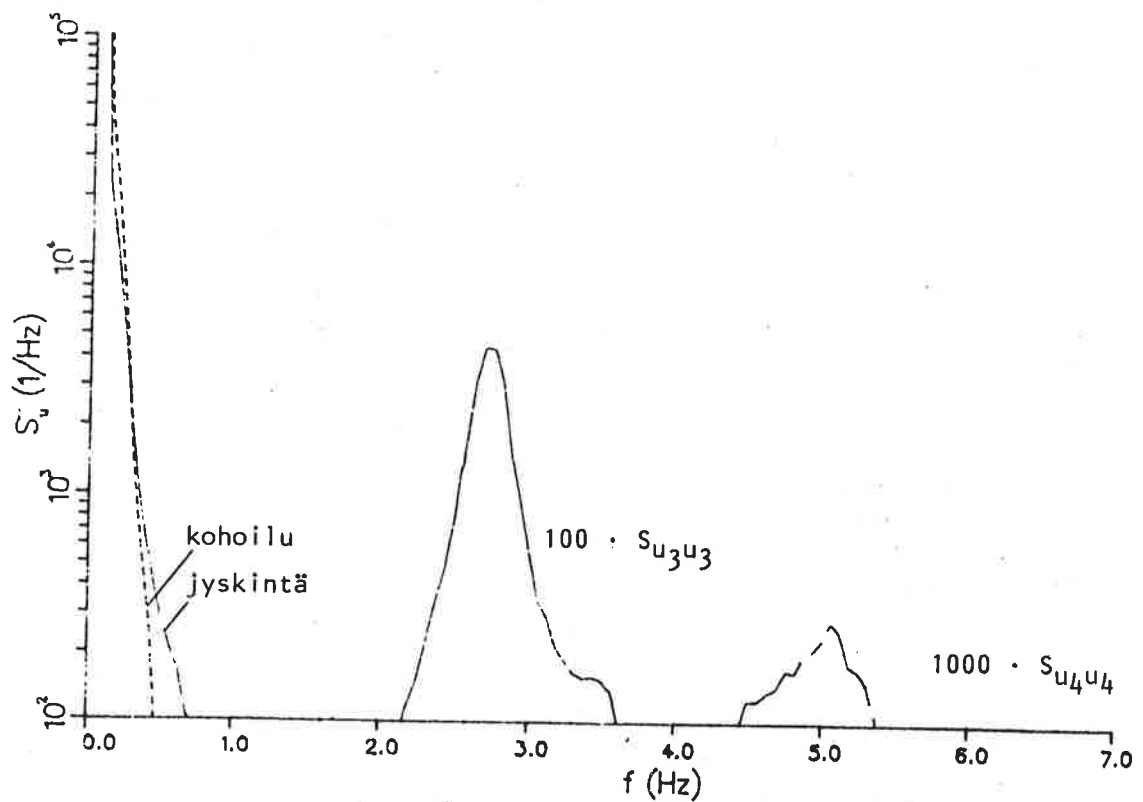
Kuva 3. Tasaisessa jäässä kulkevan JM SISUn värähtelymuoto taajuudella 7.07 Hz.



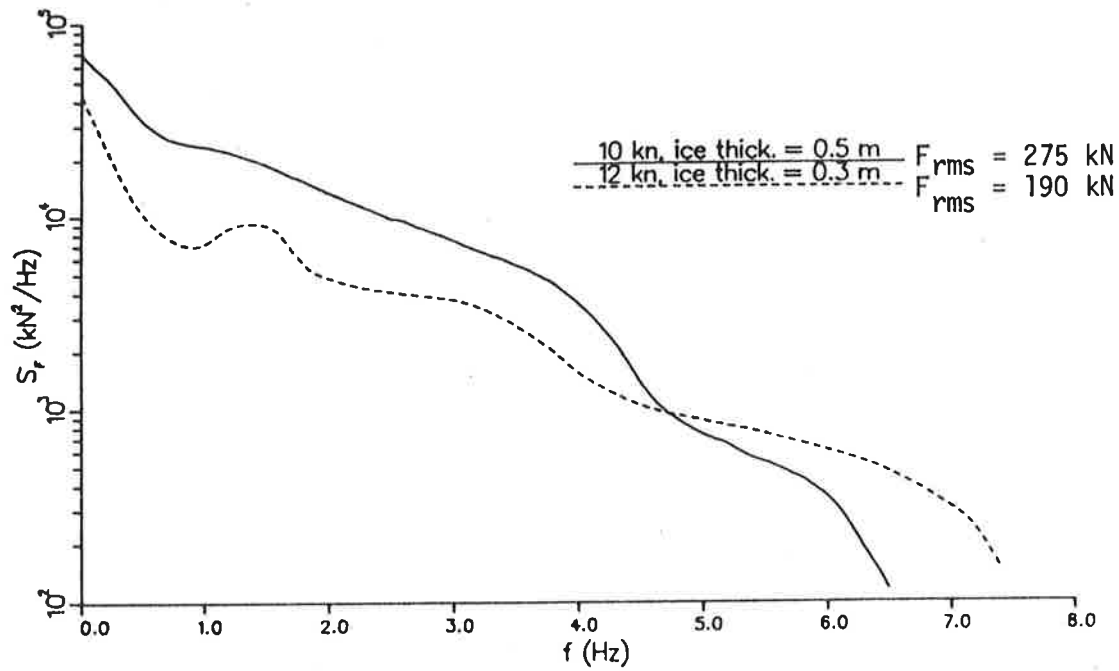
Kuva 4. JM SISUn ominaismuodot avovedessä.



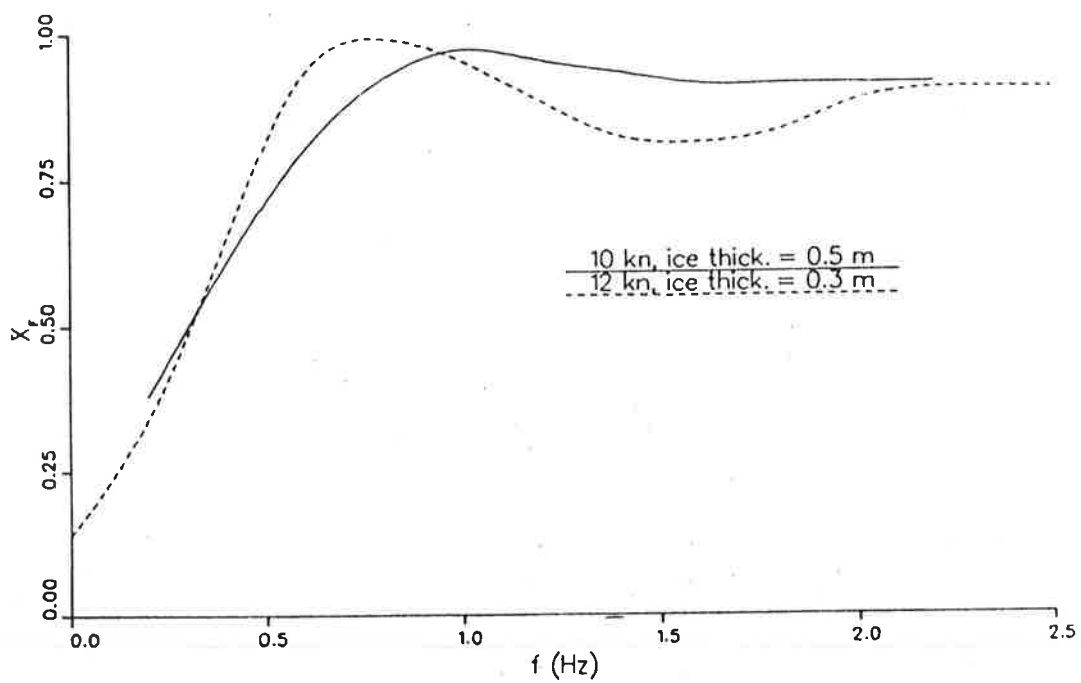
Kuva 5. Modaalivaimennuksen arviointi mitatusta vasteesta. Vaste on annettu yleistetyn koordinaatin spektritiheyden muodossa.



Kuva 6. Mitattu vaste yleistettyjen koordinaattien spektritiheyden muodossa. Nopeus 10 kn. Jään paksuus 0.5 m.



Kuva 7. Mitatuista laivan vasteista saadun tasaisen jään kuormituksen ekvivalentin pystyvoiman spektritiheys.



Kuva 8. Ekvivalenttivoiman sijoitus laivan pitkittäissuunnassa.

ITSEHERÄTTEISEN VÄRÄHTELYN MINIMOINTI PAPERIKONEEN KALANTERISSA

TkL Jorma Nevaranta

Oulun yliopisto, konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

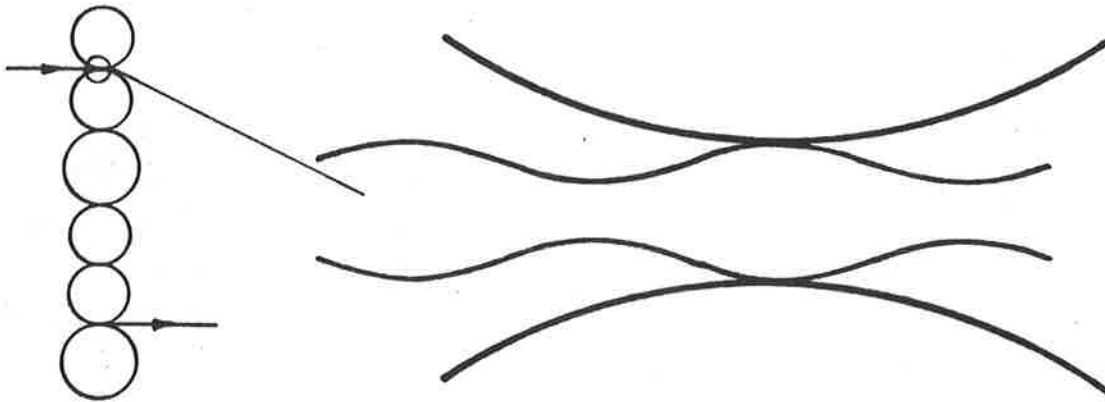
Erityisesti sanomalehtipaperin valmistuksessa ajonopeudet ovat viime aikoina voimakkaasti kasvaneet. Tämä on seurausta kiristyneestä hintakilpailusta maailmanmarkkinoilla. Suuremmista ajonopeuksista on puolestaan ollut seurauksena erilaisten värähtelyongelmien yleistyminen paperikoneen eri osissa. Nämä värähtelyt toisaalta heikentävät paperin laatua ja toisaalta lisäävät paperikoneen huolto- ja korjauskustannuksia.

Sanomalehtipaperin valmistuksen viimeisin vaihe prosessissa on paperirainan kalanterointi, jonka jälkeen valmis paperi menee rullaimelle. Kalanterointi on eräänlainen "mankelointitoimenpide", jolla saadaan paperille haluttu tasainen paksuus, sileys ja kiilto. Kalanteri muodostuu yleensä neljästä tai kuudesta päällekkäisestä telasta, joiden välissä paperi kulkee.

Tällainen telapinkka on hyvin herkkä värähtelemään pystytasossaan, mikäli se saa jostain sopivan herätteen. Kalanterin pystysuuntaisten värähtelyjen seurauksena tulee paperiin säännöllistä paksuusvaihtelua, joka heikentää paperin painettavuutta painomusteen tarttuessa eri tavalla paksuihin ja pehmeisiin kohtiin kuin ohuisiin ja koviin kohtiin.

Herätettä kalanterille voi tulla rainaa pitkin aina koneen märästä päästä asti joko säännöllisenä paksuus-, kosteuspitoisuus- tai neliömassavaihteluna. Kuitenkin kaikkein hankalin kalanterin värähtelyiden aiheuttaja on kalanterissa itsessään syntyvä ns. takaisin-kytkentäilmiö. Kun kalanteri jonkun pienen häiriön johdosta alkaa värähdellä ominaismuodoillaan ja -taajuuksillaan, aiheutuu tästä nippipaineen muutoksia ja paperiin paksuusvaihtelua. Normaalisti

tämä värähtely vaimenee nopeasti pois, mutta mikäli paperiin syntynyt paksuusvaihtelu saapuu alempiin nippeihin sopivassa vaiheessa nippien molemmiin puolin olevien telojen liikkeeseen nähden, vahvistaa tämä ominaisvärähtelyiden amplitudeja (kuva 1). Käyntiin lähdettyään tämä takaisinkytkentä ei tarvitse mitään ulkoista häiriötä, vaan nipeissä kulkeva paperi syöttää kalanterille värähtelyitä ylläpitävää energiaa.



Kuva 1. Takaisinkytkentä kuusitelaisessa kalanterissa.

Tämän itseherätteisen värähtelyn syntymekanismi on tunnettu jo 1960-luvun alkupuolelta asti [1], mutta sen eliminointiin ei ole esitetty mitään tieteellisesti perusteltua menetelmää. Seuraavassa esitetään pääpiirteissään perusteet takaisinkytkennällä tapahtuvan kalanterin värähtelyiden minimoimiseksi.

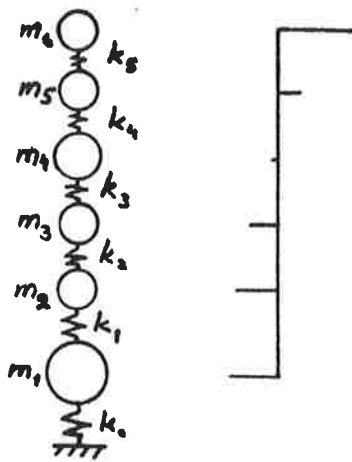
2 MINIMOITAVAN FUNKTION MUODOSTAMINEN

Kun ylimmässä nipissä paperiin syntynyt paksuusvaihtelu saapuu seuraaviin alempiin nippeihin, toimii se siellä herätteenä kalanterin pystyvärähtelyille. Kalanterin värähdelleessä ominaismuodoillaan syntyy paksuusvaihteluatietenkkin muissakin kuin ylimmässä nipissä ja näin myös herätteitä alanipeille tulee periaatteessa jokaisesta ylemmästä nipistä. Kuusitelaisella kalanterilla näitä ns. takaisinkytkentäreittejä on kaikkiaan kymmenen.

Tilanne kussakin nipissä erikseen vastaa yhden vapausasteen värähtelysysteemiä, missä paperi toimii joustavana elementtinä ja nipin

molemmiin puolin olevat telat massoina. Paperin paksuusvaihtelu kuvataan alustan liikkeenä. Massan ja alustan liikkeen vaihe-erosta riippuen alustan liike tekee systeemin liikkeeseen joko positiivista tai negatiivista työtä.

Kuvassa 2 on kuusitelaisen kalanterin värähtelymalli [3]. Tässä mallissa oletetaan telojen värähtelevän pystytasossa jäykkinä kapaleina. Telojen taipumat huomioon ottavalla mallilla [3] saadaan lasketuksi hiukan tarkemmin ominaismuodot ja -taajuuudet, mutta itse takaisinkytkentä voidaan käsitellä tällä ns. pistemassamallilla [2].



Kuva 2. Kuusitelaisen kalanterin värähtelymalli ja sillä määritetty toinen ominaismuoto [3].

Jäykkyyssvakiot $k_1 \dots k_6$ kuvaavat siis paperin puristusjäykkyyttä eri nipeissä ja k_0 alimman telan ja rungon kiinnityksen jäykkyyttä.

Tällä mallilla saadaan kuusitelaiselle kalanterille kuusi ominaismuotoa ja -taajuutta. Takaisinkytkennän kannalta näistä merkittävintä on toinen muoto, joka on myös esitetty kuvassa 2. Telojen pystyliikkeiden amplitudit on merkitty vaakavektorilla. Paksuusvaihtelua syntyy paperiin nipissä sitä enemmän mitä suurempi on peräkkäisten telojen amplitudi-erotus kyseisellä ominaismuodolla.

Toisaalta paperi on alemmissa nipeissä selvästi jähempää ja kimmoisempaa kuin ylemmissä, joten paksuusvaihtelua syntyy helpoimmin ylimmissä nipeissä. Paperin paksuusvaihtelun aikayksikössä syöttämä energia kalanterin ominaisvärähtelyille eli ns. takaisinkytkentäteho riippuu seuraavista tekijöistä [2]:

- paperin jäykkyys eri nipeissä
- paperin suhteellinen paksuuden muutos eri nipeissä
- kyseinen ominaismuoto
- paksuusvaihtelun aallonpituus paperirainalla (lasketaan ominaistaaajuudesta ja ajonopeudesta)
- nippien välinen etäisyys paperirainalla.

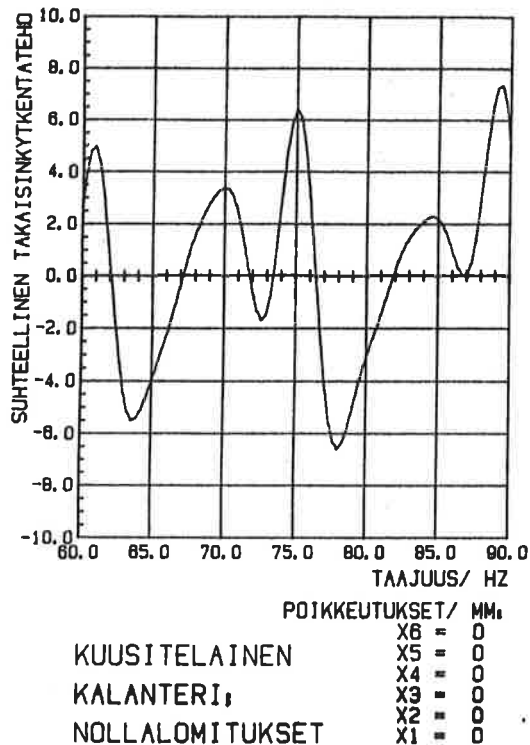
Näin saadaan takaisinkytkentäteholle lauseke [2, s. 28], jonka arvo pitäisi pystyä saamaan mahdollisimman pieneksi kullakin ominaismuodolla. Luetelluista tekijöistä helpoimmin voidaan vaikuttaa nippien väliseen etäisyyteen paperirainalla (ts. vaihe-eroon paksuusvaihtelun ja liikkeen välillä). Käytännössä tämä tehdään poikkeuttamalla teloja hiukan sivulle päin pystylinjastaan. Sopivien poikkeutusten määrittäminen johtaa epälineaariseen optimointitehtävään.

3 OPTIMOINTITEHTÄVÄN RATKAISU

Kuvassa 3 on erään sanomalehtipaperikoneen kalanterin takaisinkytkentäteho esitetty paksuusvaihtelun taajuuden funktiona (taajuus = ajonopeus/aallonpituus). Takaisinkytkennän on oletettu tapahtuvan kuvassa 2 esitetyllä pistemassamallin toisella ominaismuodolla. Takaisinkytkentään liittyvä ominaismuoto (tai -muodot) määritetään käytännössä siten, että valmiista paperista mitattuja paksuusvaihtelutaajuuksia verrataan laskennallisesti saatuihin ominaistaaajuuksiin [3].

Kuvassa teho on skaalattu niin, että se on välillä -10...10. Nollateho tarkoittaa sitä, että paksuusvaihtelu ei tee työtä kalanterin värähtelyihin ja negatiivinen teho sitä, että se vaimentaa eli tekee negatiivista työtä. Arvo +10 tarkoittaa, että takaisinkytkentä on samanaikaisesti maksimissaan jokaisella kymmenellä takaisinkytkentäreitillä. Tehoarvot ovat suhteellisia eikä niillä näin ollen ole yksikköä.

Jos nyt kalanterin ominaisvärähtelyn taajuus kyseisellä ominaismuodolla sattuu tehon huipun kohdalle, on takaisinkytkentä voimakasta ja paperiin tulee säännöllistä paksuusvaihtelua tällä taajuudella. Kun kalanterin teloille määritetään sellaiset lomitukset, että kyseinen tehohuippu laskee mahdollisimman alas (mieluimmin



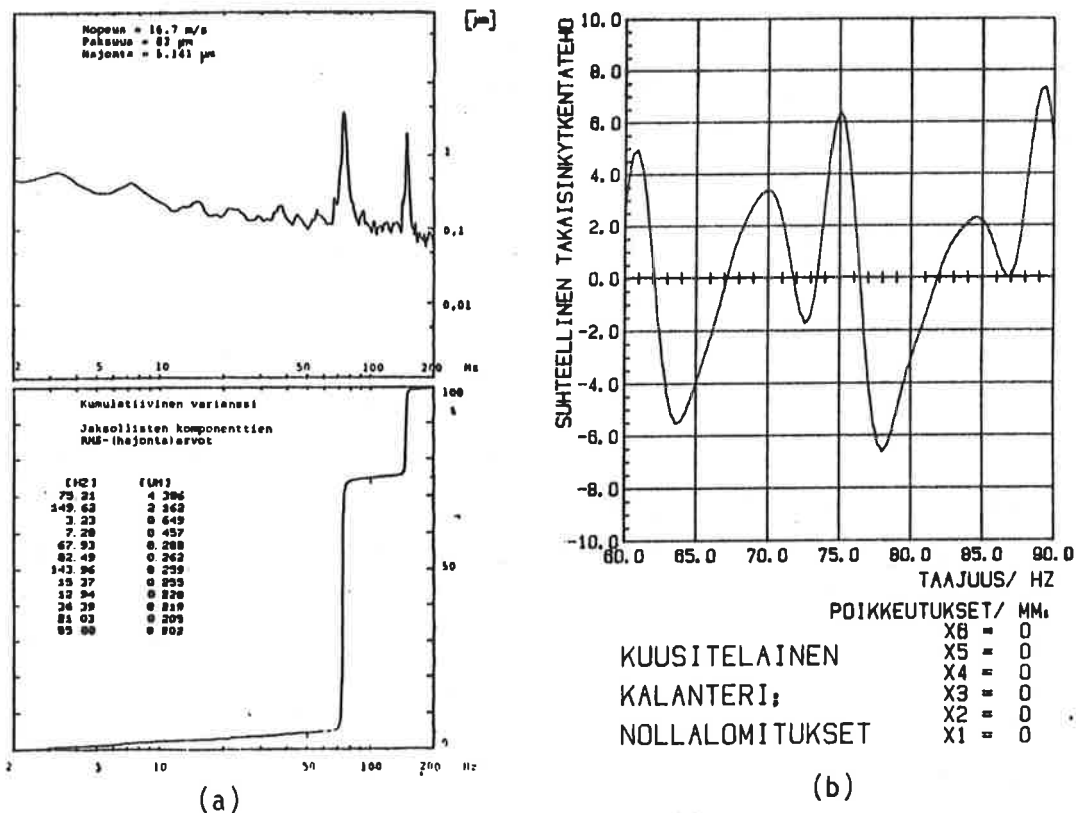
Kuva 3. Suhteellinen takaisinkytkentäteho eräällä kuusitelaisella kalanterilla pistemassamallin toisella ominaisuudella.

negatiiviseksi), saadaan takaisinkytkentä tällä taajuudella eliminoiduksi. Käytännössä tämä ei kuitenkaan riitä, vaan takaisinkytkentäteho on saatava mahdollisimman alas myös tämän huipun taajuuden ympäristössä. Voi nimittäin käydä niin, että takaisinkytkentätaajuus hyppää viereisen huipun kohdalle. Tämä johtuu siitä, että ajoarvot (ajonopeus, kosteuspitoisuus, neliömassa) paperikoneella saattavat muuttua jonkin verran ajan myötä ja näin myös ominaistajuudet muuttuvat.

Näin saatu epälineaarinen minimointiprobleema ratkaistaan tietokoneella gradienttimenetelmää käyttäen. Gradienttimenetelmä, jossa tarvittavat derivaatat lasketaan differenssimenetelmällä, osoittautui hyvin tehokkaaksi ratkaisijaksi tälle probleemalle. Ajoajat Oulun yliopiston Univac 1100/20 -tietokoneella olivat muutaman minuutin luokkaa.

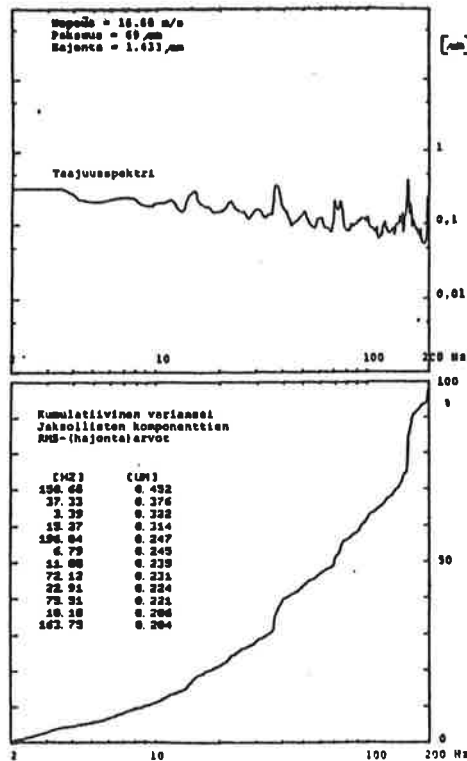
4 SOVELLUTUSESIMERKKI

Edellä esitettyä takaisinkytkennän eliminointimenetelmää on testattu usealla eri sanomalehtipaperikoneella. Kuvassa 4(a) on esitetty paperin konesuuntainen paksuusvaihtelun spektri eräällä paperikoneella. Tämän perusteella pääteltiin, että takaisinkytkentä tapahtuu 75 Hz:n taajuudella ominaismuodon vastatessa pistemassamallin toista muotoa [3]. Viereisessä kuvassa 4(b) on näillä oletuksilla laskettu takaisinkytkentäteho (kalanterilla nollalomitukset). Kuvasta näkyy, että 75 Hz:n kohdalla on myös tehon huippu.

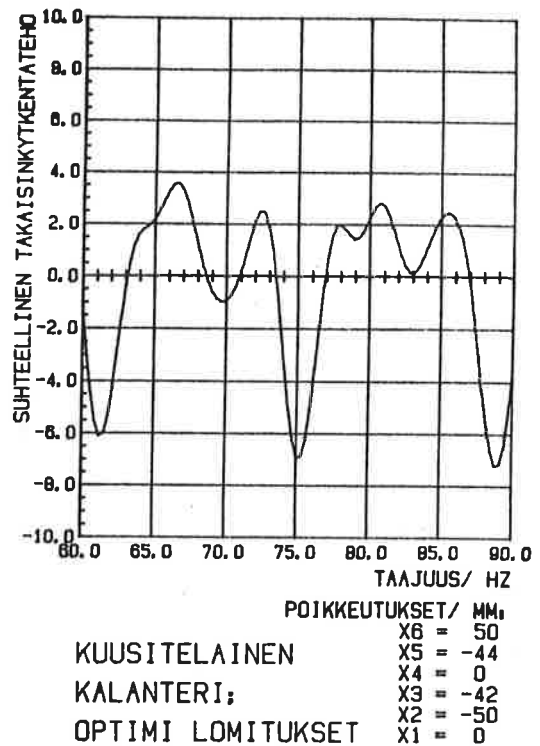


Kuva 4. Erään paperikoneen
 (a) paperin paksuusvaihtelu
 (b) takaisinkytkentäteho.
 Kalanterilla nollalomitukset.

Kuvassa 5(a) ja (b) on tilanne esitetty lasketuilla optimi lomituksilla. Takaisinkytkentätehon huiput putosivat noin kolmannekseen alkuperäisestä. Paksuusvaihtelu saatiin näin eliminoiduksi käytännössä merkityksettömälle tasolle ja ongelma tältä koneelta poistetuksi.



(a)



(b)

Kuva 5. (a) Paperin paksuusvaihtelu
(b) Takaisinkytkentäteho.
Kalanterilla optimi lomitukset.

5 KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Matomäki, T., Kalanteriraipointus sanomalehtipaperikoneilla. Paperi ja Puu 45 (1963) 1, s. 7...8.
- [2] Nevaranta, J., Sanomalehtipaperin raipoittuminen konekalante-
rissa - syyt ja eliminointi. Licensiaattityö, Oulun yliopisto,
konetekniikan osasto. Oulu 1984.
- [3] Tervonen, M., Sanomalehtipaperin raipoittuminen konekalanteris-
sa - kalanterin värähtelymallit. Licensiaattityö, Oulun yli-
opisto, konetekniikan osasto. Oulu 1984.

PAPERIKONEEN KONEKALANTERIN VÄRÄHTELYMALLEISTA

DI Matti Tervonen

Oulun yliopisto, konetekniikan osasto

TIIVISTELMÄ

Paperin raipoittuminen on ollut jo 20 vuotta vaikea ongelma suurella nopeudella käyvien sanomalehtipaperikoneiden kalanterissa. Telojen värähtelyiden pystykomponentti saa aikaan telojen välisen kuormituksen jaksollisen vaihtelun. Tuloksena on paperin raipoittuminen.

Telojen välisenä joustavana osana toimii pääasiassa paperi. Tunnetusta Colley'n ja Peelin paperin puristumamallista on nipin geometriaan yhdistämällä johdettu menetelmä ja ohjelmisto, jolla voidaan määrittää viivakuorman ja puristuman välinen yhteys kalanterin nipeissä. Yhteys on epälineaarinen, ja hallitseva epälineaarinen termi on toista astetta. Epälineaarisuuden vaikutuksista on esimerkkinä vapaiden värähtelyiden taajuuksien riippuvuus amplitudista. Vaikka epälineaarisuus tuo mukanaan muitakin ilmiöitä, voidaan analysoinnin perustana pitää linearisoitua mallia.

Kalanterin värähtelymallissa on otettu huomioon telojen taipuminen pystytasossa. Taipuminen ja vaimennuksen ortogonaalisuus todettiin mittauksilla. Taivutusmallilla saadaan kriittiselle 60...200 Hz:n alueelle useampia ominaistaajuuksia kuin aiemmin käytetyllä piste-massamallilla.

Käytännön sovellutusesimerkeissä todettiin laskettujen ominaistaajuuksien poikkeavan todellisista alle 10 %, mikä tavallisesti riittää raipoittumisen eliminoinnissa käytettävän ominaismuodon tunnistamiseen kaikkien laskettujen ominaismuotojen joukosta.

LAIVA- JA OFFSHORE-RAKENTEIDEN VÄSYMISLUOTETTAVUUDEN MÄÄRITTELYYN KÄYTETTYJEN MENETELMIEN VERTAILU

Kirsi Tikka
Oy Wärtsilä Ab Turun telakka

1 JOHDANTO

Suunniteltaessa offshore-rakenteita ja erikoislaivoja uudentyyppisiin tehtäviin ja kuormitusolosuhteisiin väsyminen on usein ratkaiseva rakenteen mitoituksessa ja sen vuoksi väsymismitoituskriteerien määrittäminen on tärkeää. Nykyisen mitoituskäytännön mukaan rakenne mitoitetaan siten, että väsymisikä on vähintään rakenteen käyttöikä. Mitoitus perustuu ennustettuun pitkäajan jännitysjakamaan ja rakenteen väsymiskäyttäytymisestä olevaan tietoon, useimmiten kokeellisiin jännitys-kuormituskertakäyriin eli SN-käyriin. Mitoitukseen liittyy kuitenkin runsaasti epävarmuustekijöitä ja uutena lähestymistapana on kehittää menetelmiä, joissa epävarmuustekijät voidaan ottaa huomioon ja joilla määritetään rakenteen väsymisluotettavuus sen käyttöikänsä.

Tässä työssä on verrattu kolmea laiva- ja offshore-rakenteiden väsymisluotettavuuden tutkimiseen kehitettyä menetelmää. Luotettavuusmalleissa otetaan huomioon väsymisilmiön tilastollinen luonne ja epävarmuustekijät, jotka liittyvät kuormitukseen, rakenteen väsymiskäyttäytymiseen ja ilmiön kuvaamiseen käytettyyn matemaattiseen malliin. Kaksi menetelmistä on kehitetty laivarakenteiden yksityiskohtien mitoitukseseen. Toisen on kehittänyt W.H. Munse ja toisen American Bureau of Shipping:in tutkijat Thayamballi, Chen ja Liu. Kolmas menetelmä on syntynyt American Petroleum Institute:n offshore-rakenteiden väsymismitoitusprojektissa kehittäjänä P.H. Wirsching.

Väsymisluotettavuusmalleja on verrattu työssä sekä kvalitatiivisesti että kvantitatiivisesti. On pyritty arvioimaan menetelmien soveltuvuutta mitoitusääntöjen perustaksi sekä vertaamaan mallien samalle rakenneyksityiskohdalle antamia luotettavuusarvoja. Esimerkkirakenteena on käytetty yksinkertaista poikittaisen jännityksen alaista päittäishitsiä.

Työssä on käytetty sanaa murtuma tarkoittaessa kriittistä vauriota (failure) erotuksena osittaisesta vauriosta (damage), vaikka kriittinen vaurio voi olla myös rakenteen tehokkuuden menetys ilman varsinaista murtumista.

2 VERTAILTAVIEN MENETELMIEN TARKASTELU

Yhteistä kaikille vertailtaville menetelmille on Minerin säännön (kumulatiivisen vaurion laki) soveltaminen kuvaamaan väsymisilmiötä. Munsen ja Wirschingin kehittämät menetelmät soveltavat SN-käyriä ja ABS:n menetelmä murtumismekaniikkaa kuvaamaan rakeneukeyksityiskohdan väsymiskäyttäytymistä. Väsymisluotettavuuden määrittämiseksi menetelmät esittävät erilaiset mallit. Seuraavassa menetelmät esitellään lyhyesti. Tarkempi esitys löytyy lähteistä [1], [2], [3] ja [4].

2.1 Yleistä SN-käyrien soveltamisesta

Munsen ja Wirschingin kehittämissä menetelmissä kuvataan väsymiskäyttäytyminen vakioamplitudisessa kuormituksessa SN-käyrällä

$$NS^m = K, \quad (1)$$

jossa N on väsymisvaurioon johtavien kuormituskertojen lukumäärä, S jännitysheilahdus ja m ja K määrättäviä parametrejä. Olettamalla, että Minerin sääntö on voimassa, saadaan kokonaisväsymisvaurio D superponoimalla kunkin jännitysheilahduksen aiheuttamat vauriot, jolloin

$$D = \frac{N}{K} E(S^m), \quad \text{jossa} \quad (2)$$

$$E(S^m) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^m. \quad (3)$$

Säännön mukaan väsymismurtuma tapahtuu, kun $D = 1$. Mallin epävarmuustekijät otetaan huomioon antamalla väsymisvaurioehto muodossa $D \geq \Delta$, jossa Δ on satunnaismuuttuja. Vaurioyhtälöksi saadaan tällöin

$$\Delta = \frac{N}{K} E(S^m). \quad (4)$$

2.2 W.H. Munsen kehittämä menetelmä [2]

Kehittämässään mallissa Munse soveltaa periaatteessa vaurioyhtälöä (4), vaikkei esitäkään sitä työssään tässä muodossa. Jännitysheilahdusten jakauma otetaan huomioon satunnaiskuormituskertoimella $\{$ (random load factor). Jännitysjakautuman maksimijännitysheilahdukselle $S_{\max}$ ja vakiojännitysheilahdukselle S_N , joka aiheuttaa väsymismurtuman keskimäärin N:llä kuormituskerralla, saadaan yhteys

$$(S_{\max})_N = S_N \cdot \zeta. \quad (5)$$

Olettamalla jakaumaksi Weibull saadaan

$$\zeta = (\ln N)^{1/h} [\Gamma(1 + \frac{m}{h})]^{-\frac{1}{m}}, \quad (6)$$

jossa h on jakauman muotoparametri.

Jos myös väsymisikä oletetaan Weibull-jakautuneeksi, luotettavuusfunktio (todennäköisyys, että rakenne ei murru n :llä kuormituskerralla) on muotoa:

$$L(n) = \exp \left\{ - \left[\frac{n}{N} \cdot \Gamma(1 + C_N^{1.08}) \right]^{C_N^{-1.08}} \right\} \quad (7)$$

Kokonaisepävarmuus C_N määritetään yhtälöllä

$$C_N^2 = C_\Delta^2 + m^2 C_B^2 + C_K^2 + (m \ln \bar{S})^2 C_m^2, \quad (8)$$

jossa C_Δ , C_B , C_K ovat alaindeksiä vastaavien satunnaissuureiden variaatiokertoimia (coefficient of variation = keskihajonta/keskiarvo). Muuttuja B kuvaa epävarmuutta ennustetussa jännityksen arvossa. Kun haluttu luotettavuus on määrätty rakenteen käyttöiälle, saadaan N kuormituskertaa vastaava sallittu vakiojännitysheilahdus S_D muodossa

$$S_D = S_N \cdot R_F, \text{ jossa} \quad (9)$$

$$R_F = \left\{ \frac{[1 - L(N)]^{C_N^{1.08}}}{\Gamma(1 + C_N^{1.08})} \right\}^{1/m} \quad (10)$$

Kerrointa R_F kutsutaan luotettavuuskertoimeksi.

Sijoittamalla $S_D = S_N$ yhtälöön (5) saadaan suunnitteluyhtälö,

$$(S_D)_{\max} = S_N \zeta R_F, \quad (11)$$

joka antaa sallitun maksimijännitysheilahduksen ennustetussa jännitysjakaumassa halutulla luotettavuudella.

2.3 P.H. Wirschingin kehittämä menetelmä [6]

Wirsching soveltaa menetelmässään vaurioyhtälöä (4). Hän antaa todellisen jännitysvaihtelun S_a ja ennustetun jännitysvaihtelun S

välisen yhteyden yhtälöllä

$$S_a = B \cdot S, \text{ jossa} \quad (12)$$

B on satunnaismuuttuja.

Menetelmässä määritellään jännitysparametri Ω , joka on muotoa

$$\Omega = \frac{N}{T} E(S^m) \quad (13)$$

Vaurioyhtälö voidaan tällöin esittää muodossa

$$T = \frac{\Delta K}{B^m \Omega}, \text{ jossa} \quad (14)$$

murtumaan kuluva aika T sekä suureet Δ , B ja K ovat satunnaismuuttujia. Suure m oletetaan vakioksi. Jännitysparametri Ω , jossa otetaan huomioon jännitysheilahdusten jakauma, voidaan määrittää (a) deterministisesti määrittämällä pitkänajan jännityshistogrammi, (b) määrittämällä jännitysspektrit, kuormitustaajuudet ja spektrejä vastaavat esiintymistiheydet, (c) olettamalla pitkänajan jännitysheilahdukset Weibull-jakautuneiksi tai (d) soveltamalla Nolte-Hansford-mallia.

Jos satunnaissuureet Δ , K ja B oletetaan log-normaalisti jakautuneiksi, myös väsymisikä T on log-normaalisti jakautunut, ja murtumatodennäköisyys saadaan normaali jakauman kertymäfunktion Φ avulla seuraavien yhtälöiden mukaan:

$$p_f = \Phi(-\beta), \text{ jossa} \quad (15)$$

$$\beta = \frac{\ln(\tilde{T}/T_s)}{b_{\ln T}}, \quad (16)$$

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{\Delta} \tilde{K}}{\tilde{B}^m \Omega}, \quad (17)$$

$$b_{\ln T} = \left\{ \ln \left[(1 + C_\Delta^2)(1 + C_K^2)(1 + C_B^2)^{m^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

Suuretta β kutsutaan turvallisuusindeksiksi (safety index), ja sen arvon määräävät haluttu käyttöikä T_s sekä väsymisiän mediaaniarvo $\tilde{T}$ ja keskihajonta $b_{\ln T}$. Merkintä $\tilde{X}$ tarkoittaa muuttujan X mediaaniarvoa.

Koska oletukset jakaumista eivät välttämättä vastaa todellisuutta, murtumatodennäköisyyttä ei voida pitää absoluuttisena arvona, vaan sitä tulisi käyttää suhteellisessa tarkastelussa.

2.4 ABS:n kehittämä menetelmä [5]

Thayamballin et.al. esittämässä menetelmässä sovelletaan lineaaris-elastista murtumismekaniikkaa kuvaamaan rakenteen väsymiskäyttäytymistä. Lineaarisen elastisen murtumismekaniikan soveltaminen perustuu jännitysintensiteettiin K_s , jonka suuruus määrää sekä epästabiilin särökoon että särönkasvunopeuden. Soveltamiseen liittyviä rajoituksia ei käsitellä tässä yhteydessä, vaan viitataan lähteeseen [3].

Lähteessä [3] on käsitelty tarkemmin särön ydintymistä, särön alkukokoa, jännitysintensiteettitekijää ja väsymissärön kasvua. Asian laajuuden vuoksi tässä esitetään vain muutamia aiheisiin liittyviä kommentteja.

- Usein tehdään konservatiivinen oletus, että rakenteessa on heti alkusäröjä ja näin jätetään särön ydintymisvaihe pois väsymisikää tutkittaessa.
- Alkusärön koon valinta perustuu usein kokemuksiin vastaavista rakenteista löydettyistä säröko'oista tai tarkastusmenetelmällä havaittaviin pienempiin särökokoihin. Voidaan myös käyttää ekvivalenttista alkusäröä, jonka on laskettu vastaavan väsymiskäyttäytymistä vastaavassa yhteydessä.
- Jännitysintensiteettikerroin voidaan määrittää soveltamalla olemassa olevia kaavoja, elementtimenetelmää tai influence function -menetelmää.

Särön pituuden määrittäminen kuormituskertojen funktiona perustuu Paris'n kaavan ja Minerin säännön soveltamiseen. Mikäli kuormitushistoriaa ei tunneta, voidaan soveltaa efektiivistä jännitystä, joka määritetään siten, että sen ja ennustetun jännitysjakauksen aiheuttama vaurio on yhtä suuri.

Luotettavuuden laskeminen perustuu "ensimmäisen kertaluvun toisen momentin" -menetelmään (Advanced First Order Second Moment method). Siinä murtuma kuvataan rajatilafunktiolla G , joka riippuu kuormitukseen ja lujuuteen liittyvistä satunnaissuureista X_i . Rajatila (rakenteen lujuus = kuormitus) annetaan muodossa

$$G(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0. \quad (19)$$

Kyseisessä menetelmässä murtumapinta approksimoidaan lineaarisuomalla se suunnittelupisteessä, so pisteessä, josta etäisyys normeerattujen muuttujien origoon on minimi. Tämä etäisyys on luotettavuusindeksi β . Ainoastaan muuttujien keskiarvot ja variaatiokertoimet tarvitaan määrittämään luotettavuusindeksi. Suunnittelupiste ja luotettavuusindeksi löydetään iteroimalla.

Jos muuttujat ovat normaalijakautuneita, murtumistodennäköisyys

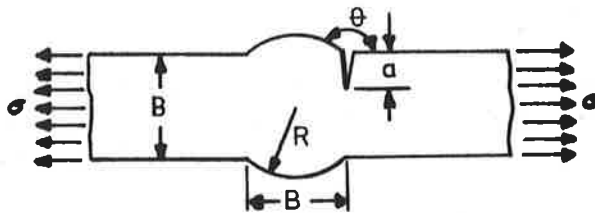
saadaan yhteydestä

$$p_f = \Phi(-\beta). \quad (20)$$

Jos muuttujat eivät ole normaalijakautuneita, luotettavuusindeksi antaa suhteellisen mitan luotettavuudelle. Voidaan myös soveltaa ekvivalentteja normaali jakaumia, jotka määritetään siten, että todellinen ja ekvivalentti kertymä- ja tiheysfunktio ovat ekvivalentit suunnittelupisteessä.

3 MENETELMIEN LASKENNALLINEN VERTAILU

Vertailtavia menetelmiä sovellettiin yhden rakenneyksityiskohdan väsymislautettavuuden tutkimiseen. Vertailun pohjaksi otettiin Thayamballin et al. esittämä luotettavuusanalyysi. Rakenneyksityiskohta, joka oli poikittainen päittäishitsi, ja jännitysintensiteettikertoimen K_s määrittämiseen liittyvät kaavat on esitetty kuvassa 1. Analyysissä käytetyt alkuarvot on annettu taulukossa 1.



$$K_s = M_k M_f K_t \sqrt{\pi a}$$

$$M_k = \left(5 \frac{a}{B}\right)^{-q}$$

$$q = \frac{\log(11.584 - 0.0588 \theta)}{\log(200)}$$

$$\theta \in (135^\circ, 180^\circ)$$

$$M_f = 1,12 \quad K_t = 1,2.$$

Kuva 1. Vertailun pohjana oleva rakenneyksityiskohta ja jännitysintensiteetin määrittämiseen liittyvät kaavat [3]

Taulukko 1. Luotettavuusanalyysin alkuarvot [3]

Muuttuja X	Keskiarvo	C _x	Jakauma
Kuormitus			
- Tehollinen jännitys-heilahdus, Δb_{eff} (N)	21	0,25	normaali
- Jännitysheilahdusten lkm vuodessa, N	$2,5 \times 10^6$	0,15	normaali
Rakenneyksityiskohta			
- Alkusärö, a_0 (mm)	1	1,00	exponentiaalinen
- Reunakulma, θ (aste)	150	0,06	normaali
- K_t , eksentrisyys	1,2	-	-
- Levynpaksuus, B (mm)	50	0,04	normaali
Paris'n kaavan parametrit			
- C, ilmassa ($K/MPa\sqrt{m}$, $\frac{da}{dN} / \frac{m}{sykli}$)	$5,0 \times 10^{-12}$	0,30	log-normaali
- m, ilmassa	3,15	-	-

Vertailun pohjana käytettiin viiden vuoden käyttöikää vastaavaa luotettavuusindeksin arvoa $\beta = 2$, jolloin nimellinen murtumistodennäköisyys on 2,3 %. Vastaavat luotettavuusarvot laskettiin soveltaen Munsen ja Wirschingin menetelmiä, joissa alkuarvot pyrittiin valitsemaan siten, että ne parhaiten vastaisivat edellä mainittuja alkuarvoja. Koska Munsen menetelmä antaa sallitun maksimijännityksen annetulla luotettavuudella, sitä jouduttiin soveltamaan käänteisesti, ts. laskettiin luotettavuus, joka vastaa ennustettua maksimijännitystä.

3.1 Kuormitukset

Munsen ja Wirschingin menetelmien soveltamiseksi tarvitaan jännitysheilahdusjakauman maksimiarvoa, joka vastaa annettua efektiivistä jännitystä. Valittu arvo $S_{max} = 157 \frac{N}{mm^2}$ perustuu oletuk-

seen, että jännitysheilahdukset ovat Weibull-jakautuneita ja yhtälöihin

$$\Delta b_{eff}^m = k^m \Gamma \left[\frac{m}{h} + 1 \right] \quad (21)$$

ja

$$S_{max} = k [\ln(N)]^{1/h} \quad (22)$$

Yhtälöä (22) voidaan soveltaa, jos jakauma perustuu havaintoihin, jotka vastaavat kaikkia jännitysheilahduksia. Jos taas jakauma perustuu esim. mittaustuloksiin kerran tiettynä ajanjaksona, jolloin havaintojen lukumäärä N on pienempi kuin todellinen heilahdusten lukumäärä, tulisi soveltaa Gumbellin asympotoottista jakaumaa [5].

3.2 SN-käyrä

Munsen ja Wirschingin menetelmät edellyttävät SN-käyrät eri muodossa. Munse soveltaa murtumaan johtavien kuormituskertojen keskiarvoa ja Wirsching vastaavaa mediaaniarvoa. SN-käyrän parametrit saatiin viitteestä [6]. Parametrit ovat $\log K = 12,18$ ($S/N/mm^2$), $m = 3,0$.

Viitteessä [6] ei spesifioida, ovatko arvot keskiarvoja vai mediaaniarvoja, mutta K :n arvoa on sovellettu laskuihin keskiarvona. Muuttuja m on oletettu vakioksi.

3.3 Epävarmuustekijät

Jotta eri menetelmien antamia luotettavuusarvoja voitaisiin verrata, olisi kussakin menetelmässä otettava huomioon samat epävarmuustekijät. On kuitenkin vaikea verrata murtumismekaniikkaa soveltavan menetelmän epävarmuustekijöitä SN-käyriä soveltavien menetelmien arvoihin. Tässä yhteydessä tyydyttiin antamaan arvoja, jotka ovat järkeviä, mutta joita ei kvantitatiivisesti pystytty vertaamaan keskenään muuta kuin SN-käyriä soveltavissa menetelmissä (taulukko 2). Tämä puutteellisuus samoin kuin kuormitusten ja SN-käyrien valintaan liittyvät vaikeudet johtivat näkemykseen, että valittu käsittelytapa ei ollut paras mahdollinen. Muita mahdollisia käsittelytapoja olisi (a) laatia rakenteen SN-käyrä käyttäen murtumismekaniikkaa ja verrata sitä kokeelliseen SN-käyrään, (b) määrittää alkusärö, joka antaisi saman väsymisiän sovellettaessa SN-käyrää ja murtumismekaniikkaa.

Taulukko 2. Satunnaismuuttujien keski/mediaaniarvoja sekä variaatiokertoimia (mediaaniarvon ja keskiarvon yhteys perustuu log-normaaliin jakaumaan)

Mediaani	Keskiarvo	C_X
$\Delta = 1,0$	1,044	$C_\Delta = 0,30$
$B = 1,072$	1,093	$C_B = 0,20$
$K = 1,4684 \times 10^{12}$	$1,5136 \times 10^{12}$	$C_K = 0,25$

Taulukossa 2 esitetyt arvot on valittu siten, että väsymisiän keskiarvo on sama sovellettaessa Munsen ja Wirschingin menetelmiä.

3.4 Tulokset

Eri menetelmien antamat tulokset on annettu taulukossa 3.

Taulukko 3. Tulokset eri menetelmillä, käyttöikä 5 vuotta

Vertailtava muuttuja	Munse	Wirsching	Thayamballi
- Luotettavuusindeksi	-	3,54	2
- Luotettavuus	0,98	1,00	0,98
- Väsymisiän mediaaniarvo/N	$1,340 \times 10^8$	$1,225 \times 10^8$	$4,866 \times 10^7$

Murtumismekaniikkaa soveltavalla menetelmällä saadaan noin 60 % pienempi väsymisiän arvo kuin muilla menetelmillä. Taulukon luotettavuusarvoja ei siis voida verrata Thayamballin et al. menetelmän ja kahden muun menetelmän välillä. Munsen ja Wirschingin menetelmien luotettavuusarvot ovat vertailukelpoisia, koska alkuarvot oli valittu siten, että väsymisiän keskiarvot olivat samat. Eri mediaaniarvot johtuvat siitä, että menetelmissä sovelletaan eri jakaumia. Alkusärön koon valinta vaikuttaa huomattavasti saatavaan väsymisikään. Jos alkuarvot olisi valittu siten, että väsymisiät olisivat yhtä pitkät, Wirschingin menetelmä ja Thayamballin et al. menetelmä antaisivat samat luotettavuusarvot Munsen menetelmän antaessa alhaisemman luotettavuuden. Voidaan siis sanoa, että Munsen luotettavuusmalli antaa konservatiivisempia tuloksia kuin kaksi muuta mallia.

4 MENETELMIEN YLEINEN VERTAILU

SN-käyriä soveltavat menetelmät ovat yksinkertaisia käyttää ja soveltuvat suunnittelunormien perustaksi. Ne olisi kuitenkin kalibroitava käytännön tulosten ja/tai vanhojen sääntövaatimusten avulla ennen kuin niitä voidaan käyttää suunnittelussa. Eräänä ongelmana menetelmien soveltamisessa on oikean SN-käyrän valitseminen. Spesifien rakennetyyppien, kuten putkiliitosten kohdalla, tämä ei ole niinkään ongelmana, mutta esim. erikoisalusten rakenneyksityiskohdille on vaikea löytää vastaavia koetuloksia. Toinen huomioonotettava seikka on se, että SN-käyrän antaman ja laskettavan jännityksen on vastattava samaa jännitystä (vrt. hot spot -jännitys ja yleinen jännitystaso). Lisäksi vielä esitellyt menetelmät vaativat SN-käyrät eri muodossa, mikä on otettava huomioon SN-käyriä laadittaessa ja sovellettaessa.

Murtumismekaniikkaa soveltava menetelmä soveltuu paremmin rakenteen väsymiskäyttäytymisen tutkimiseen kuin yksinkertaiseksi suunnittelijan tarkistusmenetelmäksi. Esimerkiksi alkusärön tyy-

pin ja koon valinta, jännitysintensiteetin laskeminen ja särön kasvun riippuvuus ympäristöolosuhteista vaikeuttavat menetelmän soveltamista. Toisaalta murtumismekaniikan käyttö tekee mahdolliseksi eri tekijöiden, kuten tarkastusten ja korjausten, ympäristöolosuhteiden vaikutuksen, jäännösjännitysten ja keski-jännityksen huomioonottamisen. Murtumismekaniikan avulla voidaan myös laatia SN-käyriä halutuille rakenteille.

Munsen ja Wirschingin esittämät luotettavuusmallit ovat matemaattisesti hyvin yksinkertaisia. Munsen malli perustuu oletukseen, että väsymisikä on Weibull-jakautunut. Määriteltäessä väsymisiän hajontakerrointa korkeamman asteen termit jätetään huomioonottamatta. Tämän vaikutus olisi tutkittava suurilla hajonnan arvoilla. Wirsching soveltaa log-normaalia jakaumaa, jolloin tuloksena on yksinkertainen matemaattinen muoto, jossa ei tarvita enempää approksimaatioita. Luotettavuusarvojen oikeellisuus riippuu tietenkin valittujen jakaumien soveltuvuudesta.

Thayamballin et al. soveltama "ensimmäisen kertaluvun toisen momentin" menetelmä vaatii tietokoneen käyttöä, mutta on sellaisenaan yksinkertainen soveltaa. Myös tämä menetelmä antaa nimellisiä luotettavuusarvoja.

Luotettavuusmallien soveltamisen suurimpana ongelmana on riittävien lähtötietojen saanti. Jotta niitä voitaisiin käyttää käytännön suunnittelutyössä, olisi vaikuttavien muuttujien statistiikka määritettävä.

MUUTTUJALUETTELO

N	- väsymisvaurion aiheuttavien kuormituskertojen lukumäärä
S	- jännitysheilahdus
m, K	- parametrit SN-käyrässä
D	- vaurio
E(X)	- muuttujan X odotusarvo
Δ	- muuttujaa D vastaava satunnaismuuttuja
S _{max}	- jännitysheilahduksen maksimi-arvo jännitys-jakaumassa
ρ	- satunnaiskuormituskerroin
Γ	- gamma-funktio
h, k	- Weibull-jakauman parametrit
S _N	- vakiojännitysheilahdus, joka aiheuttaa väsymismurtuman N:llä kuormituskerralla
L(·)	- luotettavuusfunktio
n	- rakenteeseen kohdistuvien kuormituskertojen lukumäärä
C _X	- satunnaismuuttujan X variaatiokerroin (keskihajonta/keskiarvo)
B	- satunnaismuuttuja, joka ottaa huomioon epävarmuuden jännitysvaihtelussa
S _a	- todellinen jännitysheilahdus
S _D	- vakiojännitysheilahdus, joka vastaa tiettyä luotettavuutta

R_F	- luotettavuuskerroin
Ω	- jännitysparametri
T	- väsymismurtumaan kuluva aika
p_f	- murtumistodennäköisyys = $1 - L(\cdot)$
Φ	- standardisoidun normaali jakauman kertymäfunktio
β	- turvallisuus/luotettavuusindeksi
$\bar{X}$	- muuttujan X mediaaniarvo
$\bar{X}$	- muuttujan X keskiarvo
b_X	- muuttujan X keskihajonta
K_S	- jännitysintensiteettikerroin
a	- särön koko
B	- levyn paksuus
G	- rajatilafunktio
b	- jännitys
Δb_{eff}	- efektiivinen jännitysheilahdus

LÄHDELUETTELO

- [1] Comparison between methods for fatigue reliability assessment of ship and offshore structures.
Tikka, K., University of California, Berkeley, CA, 1985, 77 s.
- [2] Fatigue criteria for ship structure details.
Munse, W.H., SNAME Extreme Loads Response Symposium, Arlington, VA., October 1981, 17 s.
- [3] Fracture mechanics based assessment of fatigue reliability in ship structures.
Thayamballi, A., Chen, Y-K., Liu, D., SNAME Ship Structure Symposium, Arlington, VA., October 1984, 28 s.
- [4] Probability-based fatigue design criteria for offshore structures.
Wirsching, P.H., prepared for API, Final Project Report, API-PRAC Project # 81 - 15, January 1983, VI + 93 s.
- [5] Principles of extreme value statistics and their application.
Ochi, M.K., SNAME Extreme Loads Response Symposium, Arlington, VA., October 1981, 16 s.
- [6] DnV Rules for classification of mobile offshore units.
1981, Appendix 2.

LIITOKSEN TOIMINNAN VAIKUTUS MASTOJÄYKISTETYN TERÄSBETONIKEHÄN MUODONMUUTOKSIIN JA RASITUKSIIN

Ralf Lindberg

Tampereen teknillinen korkeakoulu

1. JOHDANTO

Suomessa käytössä olevien suunnitteluohjeiden mukaisesti hoikat pilarit mitoitetaan käyttäen ns. toisen kertaluvun teoriaa. Tällä tarkoitetaan sitä, että normaalivoiman ja ulkoisten kuormien aiheuttaman taivutusmomentin lisäksi arvioidaan pilarin taipuma. Pilarin mitoituksessa otetaan huomioon taipumasta ja normaalivoimasta aiheutuvan taivutusmomentin lisäys.

Kun tarkastellaan yksittäistä mastopilaria, eo. toisen kertaluvun teoria tarkoittaa sitä, että normaalivoimaa kasvattamalla pilarin yläpään sivusiirtymä kasvaa ja lopulta normaalivoiman ja taipumasta aiheutuvan momentin yhteisvaikutus murtaa pilarin. Voidaan ajatella myös, että löytyy sellainen kuormitus, jonka pilari hyvin kestää lyhytaikaisesti, mutta puristettujen osien viruman aiheuttama pilarin yläpään lisätaipuma saa yhdessä normaalivoiman kanssa pilarin murtumaan pitkäaikaisessa kuormituksessa.

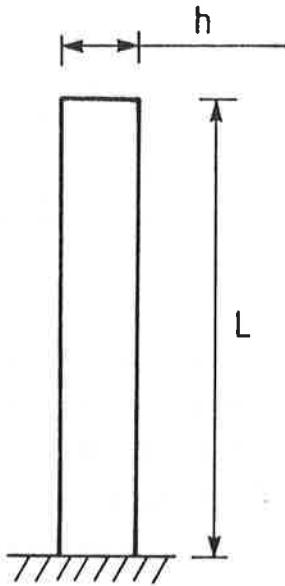
Suomessa on teollisuusrakennusten staattiseksi systeemiksi yleistynyt kehärakenne, jossa mastopilarit jäykistävät rakennuksen vaakakuormille. Pilareiden varaan tuetaan elementtipalkit esim. neopreenista valmistettujen tasauslevyjen välityksellä ja palkkien varaan tuetaan vesikattoa kannattavat laatat. Pilarin ja palkin liitoksen otaksutaan toimivan ideaalisen nivelen tavoin. Tällöin pilareiden yläpäät kytkevä palkki siirtää ainoastaan osan vaakakuormituksesta muille jäykistäville pilareille. Useassa tapauksessa tasauslevy on kuitenkin niin suuri, että liitospinta käsittää koko pilarin poikkileikkauksen. Tällöin palkin tukireaktio, joka aiheuttaa pilarin normaalivoiman ei välttämättä siirry pilariin ideaalisen nivelen toiminnan mukaisesti. Tukireaktion vaikutuspiste voi vaihdella periaatteessa lähes koko tukipinnan mitalla riippuen siitä kulmasta, joka jää pilarin yläpään kiertymän ja palkin pään kiertymän eroksi.

Kun vaakasiirtymä on riittävän suuri, syntyy pilareiden yläpäihin stabiloivat momentit, jotka pyrkivät pienentämään sivusiirtymää. Voidaan vielä todeta, että stabiloivat momentit ovat sitä suuremmat, mitä suuremmat ovat palkin tukireaktiot.

Tästä seuraa, että kehän vaakasiirtymän ollessa riittävän suuri, normaalivoima ei välttämättä lisää pilareiden yläpäiden taipumia, kuten yksittäisen pilarin tapauksessa kävisi, vaan päinvastoin pystykuorman kasvattaminen voi vähentää jo syntynyttä taipumaa.

2. MASTOPILARIN MITOITUS

Mastojäykistetyssä kehässä pilareita käsitellään yksittäisinä mastoina. Suomalaiset suunnitteluohjeet [5] perustuvat eurooppalaisiin suosituksiin [1], [2]. Kuvan 1 mukainen mastopilari voidaan näiden ohjeiden mukaisesti mitoittaa eri rasituksille seuraavasti.



Kuva 1. Mastopilarin mitat.

Aluksi lasketaan pilarin nurjahduspituus L_0

$$L_0 = 2,2 \cdot L, \quad (1)$$

L mastopilarin teoreettinen pituus

Pilarin hoikkuus nurjahdussuuntaan saadaan

$$\lambda = \frac{L_0}{i} \leq 140, \quad (2)$$

i pilarin neliösäde nurjahdussuuntaan

Normaalivoiman perusepäkeskisyys e_a saadaan

$$e_a = \frac{h}{20} + \frac{L_o}{500} \quad (3)$$

h pilarin sivumitta nurjahdussuunnassa.

Kaavan (3) ensimmäinen termi kuvaa normaalivoiman sijainnin epätarkkuutta teoreettiseen asemaansa nähden. Toinen termi kuvaa pilarin alkukäyryyden suurinta mahdollista arvoa.

Ellei tarkempia menetelmiä käytetä, lasketaan pilarin yläpään taipuma murtotilanteessa kaavalla (4). Taipumasta käytetään yleisesti nimitystä lisäepäkeskisyyttä e_2 .

$$e_2 = \left(\frac{\lambda}{145}\right)^2 \cdot h \quad (4)$$

Kaavan (4) mukainen taipuma-arvo saadaan olettamalla taipumaviiva sinimuotoiseksi ja vastaavasti poikkileikkauksen suurin käyryys siten, että tasapainoraidoitettujen rakenteiden myötäminen alkaa. Tämä merkitsee puristuspuolella 3,5 o/oo:n puristumaa ja vetoteträksissä 2,0 o/oo:n venymää. Kaavan (4) mukaisesti murtotila määritetään rakenteen muodonmuutosten kautta, eikä kuormituksen suuruudella ole merkitystä.

Pilarin mitoituksessa otetaan huomioon ulkoisista kuormituksista aiheutuvien rasitusten lisäksi ns. toisen kertaluvun momentti M

$$M = N \cdot (e_a + e_2) \quad (5)$$

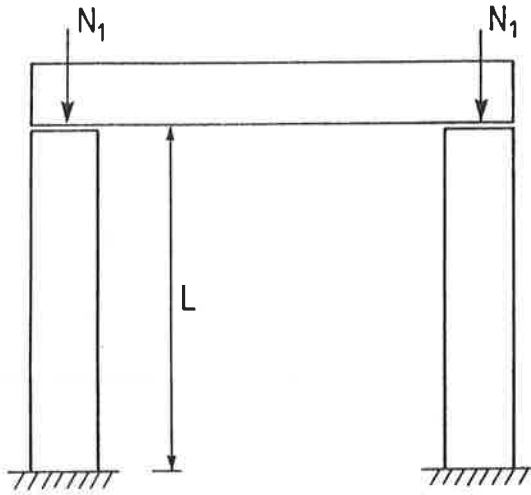
Jos pilarin hoikkuus on kaavan (2) mukaisesti maksimiarvossaan 140, saadaan

$$M \approx N \cdot h \quad (6)$$

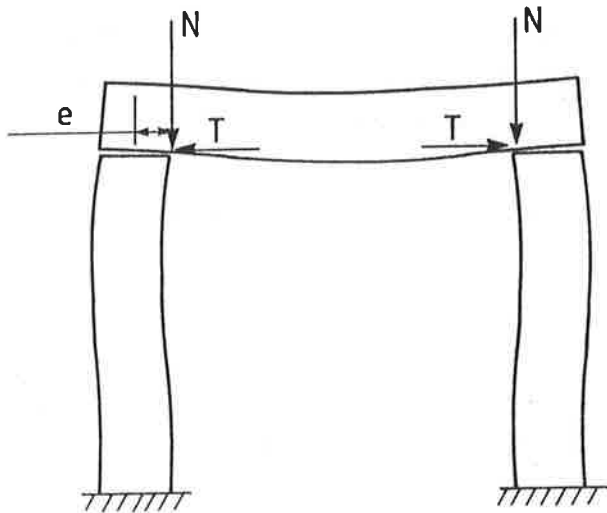
Suurimman hoikkuuden omaavan pilarin mitoituksessa lisätään rasitussuureisiin taivutusmomentti, joka on suuruudeltaan normaalivoiman ja pilarin sivumitan tulo. Koska taivutusmomentin kasvattaminen lisää poikkileikkauksen teräsmäärää lähes suoraviivaisesti, on pilarin taipuman laskenta perusteltua suorittaa tarkemmalla menetelmällä.

3. MASTOJÄYKISTETYN KEHÄN TOIMINTA

Kuvassa 2 on esitetty mastojäykistetty, kytketty kehä ideaalisessa alkutilanteessa. Tällöin kuvaan piirretty voima N_1 edustaa palkin omasta painosta aiheutuvaa tukireaktiota. Palkin omasta painosta aiheutuva taipuma voidaan tässä yhteydessä jättää huomiotta ja tukireaktioiden vaikutuskohdat sijaitsevat pilareiden teoreettisissa keskikohdissa. Mastopilareiden pituus on L .



Kuva 2. Ideaalinen alkutilanne.



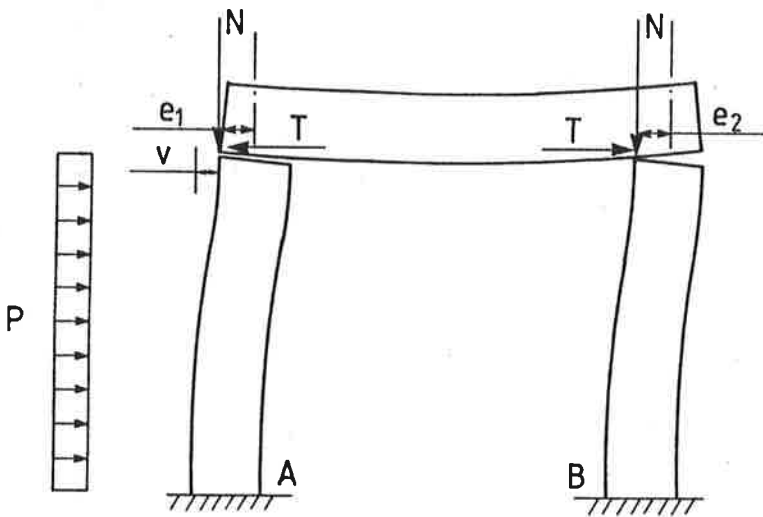
Kuva 3. Palkkia kuormitetaan symmetrisesti.

Kuormitettaessa palkkia symmetrisesti kuvan 3 mukaisesti syntyy pilarin yläpäähän ja palkin päähän välille kiertymäero, josta aiheutuu palkin tukireaktion vaikutuspisteen siirtyminen lähelle pilarin reunaa. Ideaalisessa tapauksessa alkuhäiriöitä ei esiinny ja ilmiöt tapahtuvat samansuuruisina, mutta vastakkais-suuntaisina eri pillareissa. Tästä on seurauksena palkkiin puristava voima T , koska symmetrisessä tapauksessa pilareiden yläpäät eivät siirry vaakasuunnassa. Palkin voima T voidaan laskea seuraavasti.

$$T = \frac{3e}{2L} N, \quad (7)$$

- e tukireaktioiden siirtymät (epäkeskisyydet)
 L mastopillareiden pituus
 N palkin tukireaktio

Seuraavassa vaiheessa kuvan 3 mukaisesti rasitettua kehää kuormitetaan vaakakuormituksella. Tämä on esitetty kuvassa 4.



Kuva 4. Kehään vaikuttaa vaakakuormitus.

Vaakakuormituksen ansiosta, kun muodonmuutos on riittävän suuri, tapahtuu vasemmanpuoleisessa pilarissa palkin tukireaktion siirtyminen pilarin toiselle reunalle. Oikeanpuoleisessa pilarissa siirtymä kuvan 3 tapaukseen nähden on pieni. Jos kuvaan merkittävät epäkeskisyyksien e_1 ja e_2 arvoja pidetään positiivisina ja taivutusmomentti on positiivinen sen aiheuttaessa vetoa kehän sisäpuolelle, voidaan mastopillareiden tukimomenteille M_A ja M_B johtaa arvot

$$M_A = -\frac{5}{16} pL^2 - N \cdot v + \frac{1}{4} N (e_1 + 3e_2) \quad (8)$$

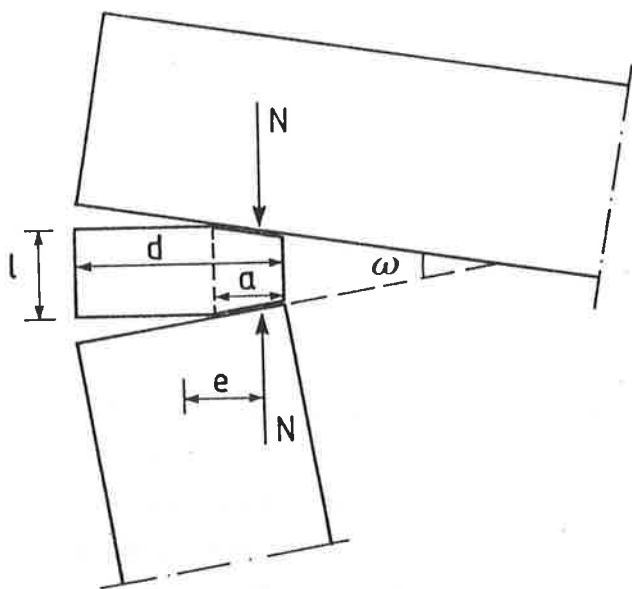
$$M_B = \frac{3}{16} pL^2 + N \cdot v - \frac{1}{4} N (3e_1 + e_2), \quad (9)$$

- p tasan jakautunut vaakakuormitus
 v pillareiden yläpäiden vaakasiirtymä
 e_1 vasemman pilarin epäkeskisyyks
 e_2 oikean pilarin epäkeskisyyks

Kaavoissa (8) ja (9) ensimmäiset termit ovat kytketyn kehän teorian mukaiset tukimomentit pilareiden juurissa. Toiset termit ovat toisen kertaluvun teorian mukaiset momentit ja viimeiset termit kuvaavat tukireaktioiden siirtymistä syntyviä stabiloivia momentteja. Nämä ovat sitä suurempia, mitä suurempia ovat palkin tukireaktiot. Lopputuloksista voidaan todeta, että kehään vaikuttavien stabiloivien momenttien vaikutus on samaa suuruusluokkaa, kuin vaakakuormituksista ja toisen kertaluvun termeistä aiheutuva vaikutus.

4. TUKIREAKTION VAIKUTUSKOHDAN MÄÄRITTÄMINEN

Betonin ja tasauslevynä käytetyn neopreenin kimmokertoimien suhde on noin 300. Tällöin kaikki liitoksessa tapahtuvat muodonmuutokset ilmenevät riittävällä tarkkuudella ainoastaan neopreenissa. Kuvassa 6 on esitetty palkin ja pilarin välinen liitos, kun tukireaktion siirtymisestä tapahtuu muodonmuutoksia ainoastaan tasauslevyssä.



Kuva 6. Tukireaktion vaikutuskohta.

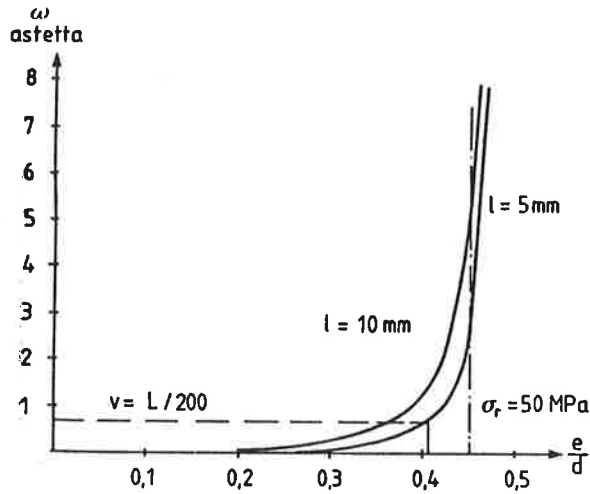
Jos kosketuspinnassa oletetaan olevan lineaarisen jännitysjakautuman, saadaan kuvan 6 merkinnöin suorakaidepoikkileikkaukselle

$$\epsilon = \frac{6 \cdot N \cdot L}{E \cdot A \cdot d} \cdot \frac{2e}{d} \quad 0 \leq e \leq \frac{d}{6}, \quad (10)$$

$$\epsilon = \frac{6 \cdot N \cdot L}{E \cdot A \cdot d} \cdot \frac{4}{3(3 - 6e/d)^2} \quad e > \frac{d}{6}, \quad (11)$$

E tasauslevyn kimmokerroin

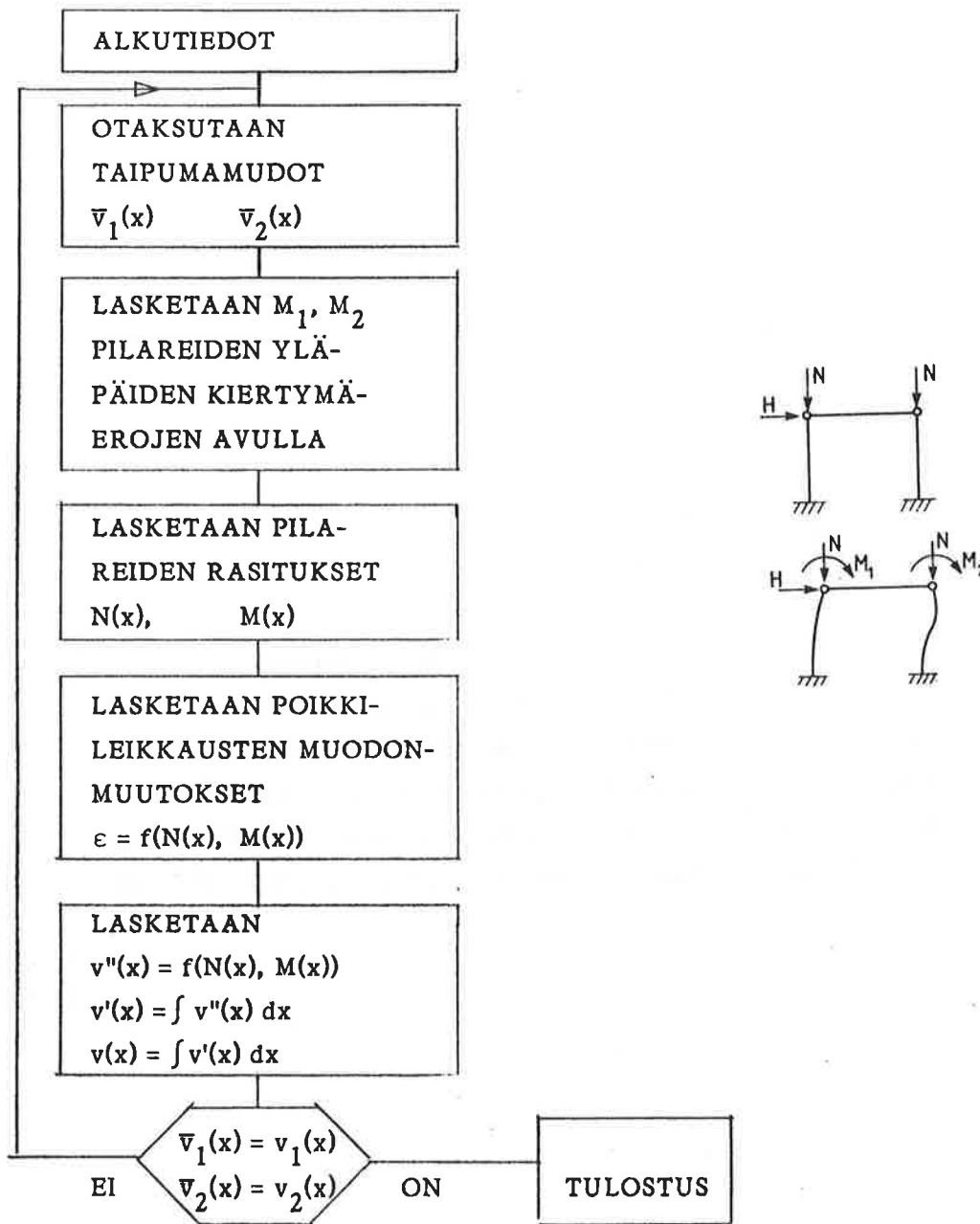
A tasauslevyn pinta-ala



Kuva 7. Epäkeskisyyden ja kiertymäeron välinen yhteys.

Kuvassa 7 on esitetty kaavat (10) ja (11) graafisesti tyypillisillä laskentaarvoilla, $N = 500 \text{ kN}$, $E = 80 \text{ MPa}$ ja $A = 400 \times 400 \text{ mm}^2$. Kuvaan on merkitty vaakasuoralla katkoviivalla suurinta sallittua kimmoista taipumaa vastaava kulmanmuutos tuella. Havaitaan, että tukireaktion vaikutuskohta vaihtelee jo pienillä kulmanmuutoksilla varsin laajalla alueella tukipinnalla. Pystysuora pistekatkoviiva kuvaa reunajännityksen 50 MPa aiheuttamia kiertymiä. Tehdyissä kokeissa todettiin neopreenin säilyttävän kimmoisuutensa aina 50 MPa :iin asti.

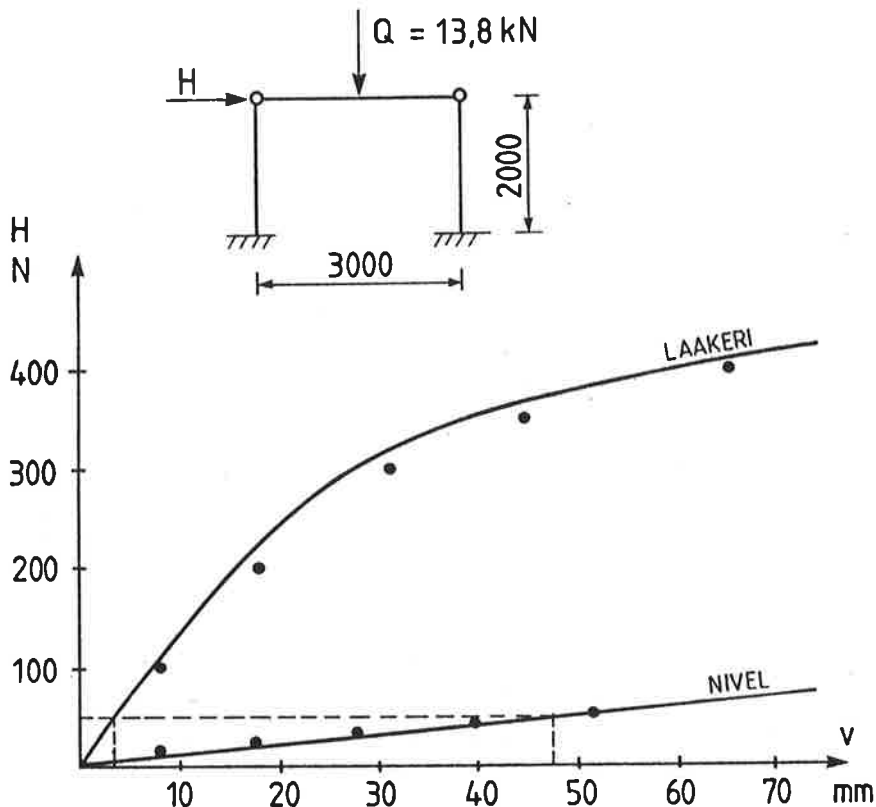
5. TIETOKONEOHJELMA



Kuva 8. Tietokoneohjelman lohkokaavio.

Kuvassa 8 on esitetty lohkokaavio laaditusta tietokoneohjelmasta. Siinä otaksutaan pilareiden taipumamuodot ja lasketaan tukireaktioiden siirtymät. Tämän jälkeen tunnetaan eri poikkileikkausten rasitukset ja poikkileikkausmuodonmuutokset voidaan laskea materiaaliominaisuuksien avulla. Poikkileikkausmuodonmuutoksista voidaan integroida numeerisesti taipumamuodot. Tasapainotilanteessa nämä yhtyvät otaksuttuihin taipumamuotoihin. Ohjelmassa on otettu huomioon myös halkeilun, viruman ja alkuhäiriöiden vaikutukset.

6. TEORIAN KOKEBELLINEN VARMISTAMINEN



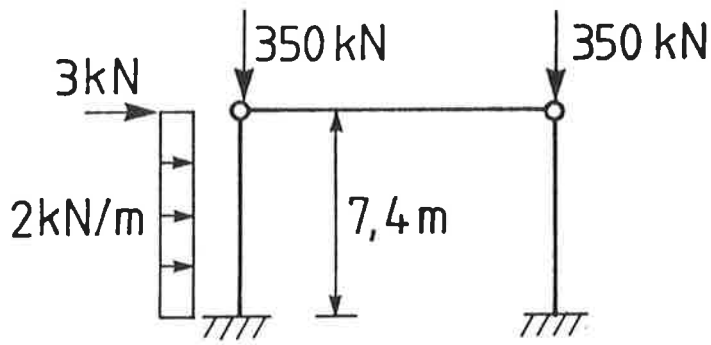
Kuva 9. Koekuormitustuloksia.

Teorian paikkansapitävyyden varmistamiseksi valmistettiin teräsrakenteinen kuvan 9 mukainen kehä. Pilarit olivat RHS $50 \cdot 30 \cdot 2,1$, palkki RHS $80 \cdot 120 \cdot 6,3$ ja liitoksen tukipinta $80 \times 80 \text{ mm}^2$, mikä vastaa hoikkuutta 190.

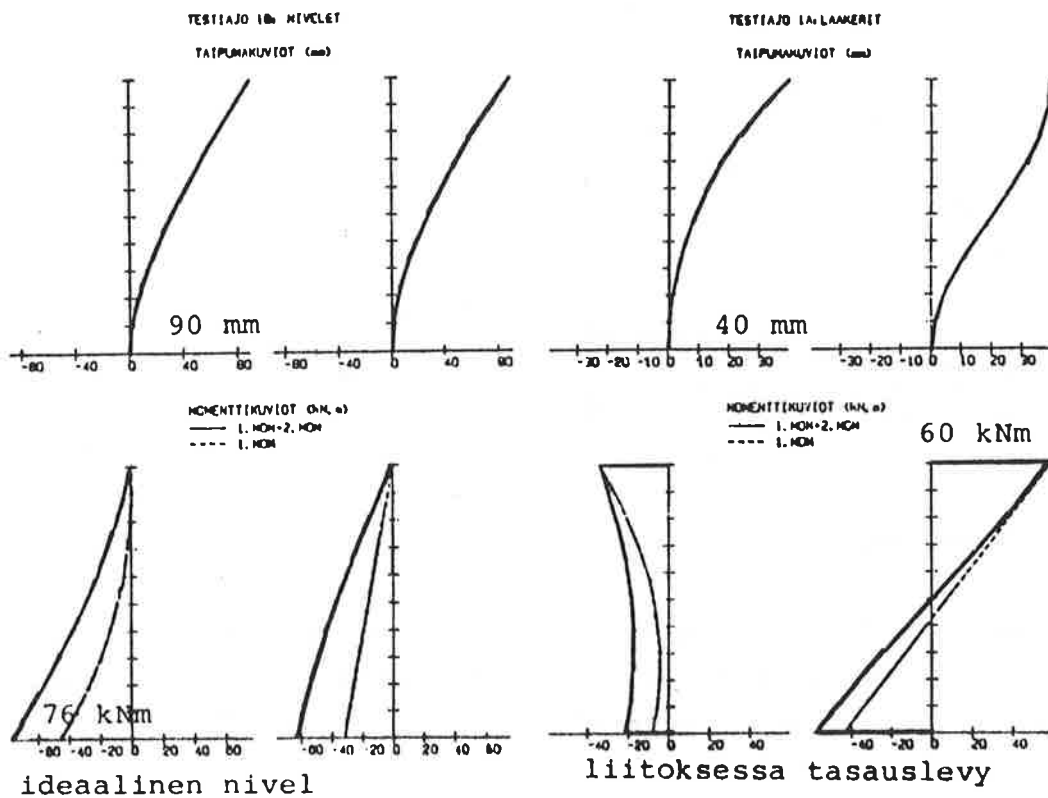
Kuvaan on piirretty kehän yläpään taipumat vaakakuorman funktiona. Yhtenäinen viiva kuvaa teorian mukaista laskettua tulosta ja pisteet mittaustuloksia. "Nivel" tarkoittaa ideaalisen nivelen mukaista toimintaa ja "laakeri" koko tukipinnalla olevaa 5 mm:n neopreenitasauslevyä.

7. LASKENTATULOKSIA

Kuvassa 10 on esitetty kehä, jossa kaksi mastopilaria on kytketty elementtipalkilla. Palkin tukireaktion suuruus on 350 kN sekä systeemin vaakakuormitus kuvan mukainen. Pilareiden hoikkuus on 140.



Kuva 10. Esimerkkirakenne.



Kuva 11. Pilareiden taipumusmuodot sekä taivutusmomenttipinnat.

Kuvassa 11 on laskettu tutkimuksen yhteydessä kehitetyllä tietokoneohjelmalla rakenteen sivusiirtymät ja taivutusmomenttipinnat sellaisissa tapauksissa kun pilarin ja palkin liitos on toiminnoiltaan ideaalisen nivelen kaltainen ja toisaalta liitoksessa on pilarin poikkileikkauksen kokoinen tasauslevy. Pilareiden poikkileikkaus on neliö ($400 \times 400 \text{ mm}^2$), tasauslevyn paksuus 5 mm ja pilarin teräsmäärä yhteensä 1640 mm^2 jaettuna symmetrisesti. Palkin kiertymä tuella on $0,8^\circ$, joka vastaa kimmoisen esijännittämättömän palkin taipumaa

L/200. Hiipumaluvun (virumaluvun) on oletettu olevan $\phi = 3,0$ ja se vaikuttaa 70 %:iin kokonaiskuormasta. Laskelmat on suoritettu murtorajatilan materiaaliarvoilla, kun betonin luokka on K25-2 ja teräksen luokka on A400H.

Tuloksista voidaan todeta, että äärellinen tukipinta pienentää vaakasiirtymää tässä tapauksessa noin puoleen verrattuna ideaalisten nivelten tapaukseen. Merkittävä tulos on myös se, että pilareiden rasitetuin paikka ei välttämättä olekaan vaakakuormituksen puoleisen pilarin alapää, vaan vastakkaisen pilarin yläpää.

Käytännön mitoituksessa on ymmärrettävästi vaikea laskea toisen kertaluvun momentteja tarkasti. Tämän vuoksi betoninormeissa annetaan taipuman ja muiden häiriöiden vaikutusten arvioimiseksi lausekkeet. Normin laskentamallilla saadaan tämän esimerkkitapauksen pilarin alapään mitoittaviksi rasituksiksi $N = 350 \text{ kN}$ ja $M = 185 \text{ kNm}$.

8. KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] CEB-FIP Model Code for Concrete Structures. Comité Euro-International du Béton 1978.
- [2] CEB-FIP Manual of Buckling and Instability. The Construction Press Ltd, Lancaster, England, 1978.
- [3] Aas-Jakobsen, K., Design of Slender Reinforced Concrete Frames. Technische Hochschule Zürich, 1974.
- [4] Sarja, A., Betoni- ja teräsbetonipilarin stabiilius. VTT, betoniteknikan laboratorio. Tiedonanto 19. Otanlempi 1972.
- [5] Suomen rakentamismääräyskokoelma B4: Betonirakenteet. Ohjeet 1981. Sisäasiainministeriö. Helsinki 1980.

JATKUVAN HAURAAAN AINEEN MURTUMISMALLI JA SEN SOVELTAMINEN BETONIIN

Petri Piila

TKK, Rakennusinsinööri-osasto

1 JOHDANTO

Tutkittaessa materiaalin mekaanista käyttäytymistä termomekaniikan pohjalta määritellään potentiaali

$$U = U(\epsilon_{ij}, \theta, \alpha_k) \quad (1)$$

Kinemaattiset muuttujat ϵ_{ij} ja lämpötila θ ovat n.s. havaittavia tilanmuuttujia ja termit α_k ovat sisäisiä muuttujia jotka määrätään kussakin tapauksessa materiaalin fysikaalisen käyttäytymisen perusteella. Ne voivat olla tensorin tai vektorin komponentteja tai skalaareja. Seuraavassa tarkastelussa kinemaattiset muuttujat ovat pieniä muodonmuutoksia. Jos potentiaali U määritellään Helmholtzin vapaaksi energiaksi yksikkötilavuutta kohti ja jos jännitysten β_{ij} oletetaan muodostuvan pelkästään n.s. kvasikonservatiivisesta osasta, voidaan osoittaa, että

$$\beta_{ij} = \partial U / \partial \epsilon_{ij} \quad (2)$$

ja että

$$X_k \dot{\alpha}_k - \frac{1}{\theta} \bar{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (3)$$

jossa suureet

$$X_i = - \partial U / \partial \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

ovat sisäisiä muuttujia α_i vastaavat dissipatiiviset voimat ja vektori $\bar{q}$ on lämpövirran tiheys. Johto on suoritettu lähteessä [1]. Epäyhtälö (3) on termodynamiikan 2. pääsäännön eräs esitysmuoto. Seuraavassa tarkastelussa jätetään lämpötilan vaikutus huomioon ottamatta. Tällöin yh-

ytälöt (2) ja (4) ovat edelleen voimassa ja yhtälön (3) erikoistapauksena saadaan

$$X_k d\alpha_k \geq 0. \quad (5)$$

Konstitutiivisilla yhtälöillä tarkoitetaan seuraavassa yhtälöitä, jotka määräävät inkrementit $d\alpha_i$ kullakin askeleella. Epäyhtälö (5) asettaa rajoituksia konstitutiivisille yhtälöille ja sen perusteella tuntuu luonnolliselta asettaa inkrementit $d\alpha_i$ riippumaan dissipatiivisista voimista ja niiden inkrementeistä. Epäyhtälö (5) toteutuu ilman muuta jos konstitutiiviset yhtälöt muodostetaan analogisesti plastisuusteorian myötöehdon ja myötösäännön kanssa. Voidaankin osoittaa, että jos sisäiseksi muuttujiksi valitaan plastiset muodonmuutokset ϵ_{ij}^p ja Helmholtzin vapaan energian lausekkeessa muodonmuutokset korvataan elastisilla muodonmuutoksilla

$$\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p \quad (6)$$

niin sisäisiä muuttujia ϵ_{ij}^p vastaavat dissipatiiviset voimat ovat jännitykset δ_{ij} .

Edellisen perusteella kolme tärkeintä työvaihetta materiaalimallin muodostamisessa ovat

- 1) Materiaalin fysikaalisen käyttäytymisen arviointi ja sisäisten muuttujien valinta sen mukaisesti
- 2) Helmholtzin vapaan energian lausekkeen määrittäminen
- 3) Konstitutiivisten yhtälöiden muodostaminen

2 SISÄISET MUUTTUJAT JA HELMHOLTZIN VAPAA ENERGIA HAURAA MALLIN TAPAUKSESSA

Helmholtzin vapaalle energialle on seuraavassa valittu lauseke, joka on 1. astetta sisäisten muuttujien suhteen ja muotoa

$$U = U_e - X_k \alpha_k \quad (7)$$

jossa

$$U_e = \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{kk}^2 + \mu \epsilon_{kl} \epsilon_{kl}, \quad (8)$$

$$X_k = X_k(\epsilon_{ij}) \quad (9)$$

ja λ, μ ovat Lamen parametrit. Jos dissipatiiviset voimat ovat vähintään toista astetta muodonmuutosten suhteen saadaan hauraalle materiaalille ominainen muodonmuutosten häviäminen kun jännitykset häviävät. Lähteen [2] mukaisen mallin lineaarinen palautuminen saadaan jos dissipatiiviset voimat ovat toista astetta muodonmuutosten suhteen ja jos sisäiset muuttujat eivät kehity palautumisvaiheessa.

2.1 Liukuminen

Jos oletetaan, että materiaaliin syntyy liukupinta, niin pinnan ori puolilla olevien osien välistä liukumaa voidaan kuvata muodonmuutosvektorin

$$\bar{\epsilon} = n_j \epsilon_{ji} i_i \quad (10)$$

pintaa vastaan kohtisuoran komponentin

$$\epsilon_L = \bar{\epsilon} \cdot \hat{n} = n_k \epsilon_{kl} n_l \quad (11)$$

ja pinnan suuntaisen komponentin

$$\epsilon_u = (|\bar{\epsilon}|^2 - \epsilon_L^2)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

avulla, jossa

$$\hat{n} = n_k i_k \quad (13)$$

on pinnan yksikkönormaali. Liukumisen aiheuttaa varsinaisesti pinnan suuntainen komponentti ja pintaa vastaan kohtisuora komponentti nopeuttaa tai hidastaa liukumista riippuen siitä onko se positiivinen vai ne-

gatiivinen. Laskelmien yksinkertaistamiseksi esitetään kaikkien liukupintojen yhteisvaikutus yhden sisäisen muuttujan, skalaarin $p = \alpha_1$ ja tätä vastaavan dissipatiivisen voiman

$$X_p = X_1 = \left\langle C_1 (e_{kl} e_{kl})^{\frac{1}{2}} + C_2 \epsilon_{mn} \right\rangle^2 \quad (14)$$

avulla, jossa

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (15)$$

on muodonmuutosdeviaattori ja C_1 ja C_2 ovat ei - negatiivisia vakioita. Muodonmuutosinvariantit kuvaavat "keskimäärin" muodonmuutosvektorin komponentteja ϵ_1 ja ϵ_n . Yhtälössä (14) esiintyvillä suluilla on seuraava merkitys:

$$\langle X \rangle = \begin{cases} X, & \text{kun } X \geq 0 \\ 0, & \text{kun } X \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

2.2 Mikrohalkeilu

Halkeamia oletetaan syntyvän kolmeen toisiaan vastaan kohtisuoraan suuntaan siten, että ensiksi syntyvän halkeaman normaali on suurimman päävenymän suunnassa. Kuvatkoon halkeamakenttää i vektori

$$\vec{D}^i = D_{j1}^i \vec{e}_j \quad (17)$$

joka on halkeaman normaalin suuntainen ja jonka suuruus ilmoittaa halkeaman pinta - alan kuten lähteessä [3]. Helmholtzin vapaan energian lausekkeeseen valitaan invariantit

$$D_k^{(i)} \epsilon_{kl} D_l^{(i)} \epsilon_{mn} = \epsilon_1^{(i)} \epsilon_{mn} w_{(i)} \quad (18)$$

$$[D_k^{(i)} \epsilon_{kl} D_l^{(i)}]^2 / D_m^{(i)} D_m^{(i)} = \epsilon_1^{(i)2} w_{(i)}$$

jossa

$$\epsilon_l^{(i)} = D_k^{(i)} \epsilon_{kl} D_l^{(i)} / D_m^{(i)} D_m^{(i)} = n_k^{(i)} \epsilon_{kl} n_l^{(i)} \quad (19)$$

ja

$$w_i = D_k^{(i)} D_k^{(i)} \quad (20)$$

Kutakin halkeamakenttää vastaava sisäinen muuttuja on siis halkeamavektorin pituutta kuvaava skalaari w_i . Invariantit (18) yhdistetään vapaan energian lausekkeessa siten, että sisäistä muuttujaa $w_i = \alpha_{i+1}$ vastaava dissipatiivinen voima on

$$X_{i+1} = \langle \epsilon_l^{(i)} \rangle \langle c_3 \epsilon_l^{(i)} + c_4 \epsilon_{mm} \rangle, \quad i = 1, 2, 3 \quad (21)$$

jossa c_3 ja c_4 ovat ei - negatiivisia vakioita.

2.3 Tiiveysasteen muutos

Betonin joutuessa voimakkaan hydrostaattisen puristuksen alaiseksi paineen ja tilavuudenmuutoksen välinen tangenttimoduuli pienenee. Paineen edelleen kasvaessa tangenttimoduuli alkaa kasvaa tiivistymisen johdosta. Tiivistymistä edellyttävät tilavuudenmuutokset esiintyvät kuitenkin harvoin tavanomaisissa kuormitustapauksissa. Tilavuudenmuutoksen aiheuttama epälineaarisuutta on kuvattu sisäisellä muuttujalla $q = \alpha_5$ ja sitä vastaava dissipatiivinen voima on

$$X_q = X_5 = c_5 \epsilon_{kk}^2 + c_6 \epsilon_{kk}^3 \quad (22)$$

jossa c_5 ja c_6 ovat ei - negatiivisia vakioita. Kolmannen asteen termi kuvaa tiivistymistä itseisarvoltaan suurilla, negatiivisilla tilavuudenmuutoksilla.

3 KONSTITUTIIVISET YHTÄLÖT

Konstitutiiviset yhtälöt on muodostettu samalla periaatteella kuin plastisuusteorian myötöehto ja myötösääntö ja ne ovat siten ajasta riippu-

mattoja. Tämän tapaisia yhtälöitä on esitetty lähteessä [4].

Dissipatiivisten voimien muodostamassa avaruudessa esitetään vahingoittumispinta

$$f(X_1, D) = F(X_1) - G(D) = 0, \quad F, G \geq 0 \quad (23)$$

Sisäiset muuttujat kehittyvät, kun

$$\partial F / \partial X_k dX_k > 0 \quad \text{ja} \quad f = 0$$

Sisäiset muuttujat eivät kehity, kun

$$\partial F / \partial X_k dX_k \leq 0 \quad \text{tai} \quad f < 0.$$

Dissipation mittana D on käytetty dissipaatioenergiaa

$$D = \int X_k d\alpha_k \quad (24)$$

Funktioille F ja G on käytetty lausekkeita

$$F = \frac{1}{2} X_k X_k \quad (25)$$

$$G = a(D + b)^{\alpha} \quad (26)$$

Myötösääntöä vastaava vahingoittumissääntö on muotoa

$$d\alpha_i = d\lambda \partial F / \partial X_i \quad (27)$$

Kerroin $d\lambda$ saadaan differentioimalla yhtälön (23) molemmat puolet sekä huomioimalla yhtälöt (24) ja (27).

4 SOVELLUTUSESIMERKKI

Sovellutusesimerkkinä tarkastellaan tasojaännitystilaa, jossa

$$\delta_{11} \neq 0, \delta_{22} \neq 0, \epsilon_{11} \neq 0, \epsilon_{22} \neq 0, \epsilon_{33} \neq 0 \quad (28)$$

Muita jännitys - ja muodonmuutoskomponentteja ei esiinny. Lisäksi jännitys - ja muodonmuutoskomponentit ovat paikkakoordinaateista riippumattomia. Pääjännitysten suhde on pidetty vakiona kunkin laskelman aikana.

Mallissa esiintyvät vakiot on pyritty valitsemaan siten, että saadaan betonille ominainen murtokäyrä pääjännityskoordinaatistossa. Myös jännitysten ja muodonmuutosten välisiä yhteyksiä eri kuormitustapauksissa on verrattu koetuloksiin. Koetulokset on otettu lähteestä [5]. Niissä käytetty betoni on lujuusluokaltaan noin K30 jossa esiintyy huomattavia pysyviä muodonmuutoksia. Näin ollen täysin hauraan mallin muodonmuutokset jäivät huomattavasti kokeesta mitattuja pienemmiksi. Mallin vakiot on valittu seuraavasti :

$$E = 30000 \text{ N/mm}^2, \nu = 0.2, \bar{c}_1 = 1, \bar{c}_2 = 0.2, \bar{c}_3 = 4, \bar{c}_4 = 2,$$

$$\bar{c}_5 = 0.2, \bar{c}_6 = 3, a = 1, b = 0, \alpha = 4/3, \text{ jossa}$$

$$\bar{c}_i = 2c_i / (\lambda + 2\mu) = 2c_i / E_k, k = (1 - \nu) / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)].$$

Laskenta - ja koetuloksia on esitetty kuvaliitteessä.

5 MALLIN SOVELTAMINEN FEM - LASKENTAAN

Sovellettaessa edellä esitettyä mallia FEM - laskentaan tarvitaan jännitys - ja muodonmuutosinkrementtien välinen yhteys matriisimuodossa :

$$\begin{matrix} \{d\delta\} & = & [C]_t & \{d\epsilon\} \\ 6 \times 1 & & 6 \times 6 & 6 \times 1 \end{matrix} \quad (29)$$

Voidaan osoittaa, että matriisi $[C]_t$ voidaan esittää muodossa

$$\begin{matrix} [C]_t & = & [C] & - & P\{u\}\{u\}^T, & c_{ij} & = & \partial^2 U / \partial \epsilon_i \partial \epsilon_j \\ 6 \times 6 & & 6 \times 6 & & 6 \times 1 \quad 1 \times 6 \end{matrix} \quad (30)$$

$$\begin{matrix} \{u\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [M] \\ 6 \times 5 \end{matrix} \begin{matrix} \{X\} \\ 5 \times 1 \end{matrix}, \quad M_{ij} = \partial^2 U / \partial \epsilon_i \partial \alpha_j \quad (31)$$

$$P = (D + b) / (2\alpha F^2) \quad (32)$$

Kussakin integroimispaikassa on säilytettävä sitä askelta vastaavat muodonmuutostensorin pötsuunnat, jolla ensimmäinen halkeama syntyy. Lisäksi on säilytettävä sisäiset muuttujat yhdeltä askelolta. Sisäisten muuttujien inkrementit voidaan laskea kaavasta

$$\begin{matrix} \{d\alpha\} \\ 5 \times 1 \end{matrix} = -P \begin{matrix} \{X\} \\ 5 \times 1 \end{matrix} \begin{matrix} \{u\} \\ 1 \times 6 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{d\epsilon\} \\ 6 \times 1 \end{matrix}. \quad (33)$$

6 KIMMOPLASTINEN - HAURAS MATERIAALI

Edellä esitettyä haurasta mallia voidaan laajentaa lisäämällä sisäisten muuttujien joukkoon plastiset muodonmuutokset kuten luvun 1 lopussa on esitetty. Tällaista menettelyä on käytetty lähteessä [4]. Tällöin yhtälön (23) on lisättävä jokin jännitysten funktio H siten, että

$$H(\delta_{ij}) + F(X_k) - G(D) = 0 \quad (34)$$

ja yhtälön (27) lisäksi

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \partial H / \partial \delta_{ij} \quad (35)$$

7 KIRJALLISUUSVIITTEET

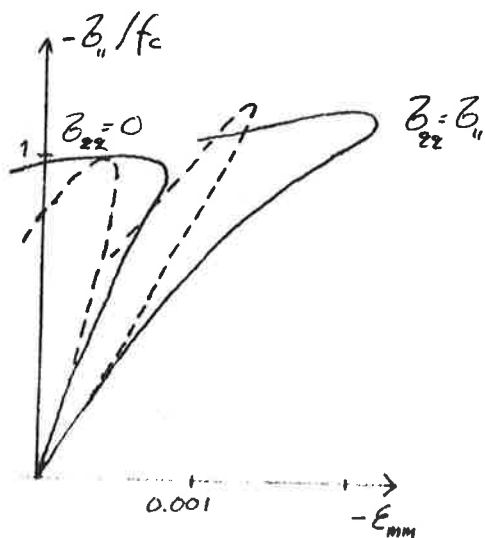
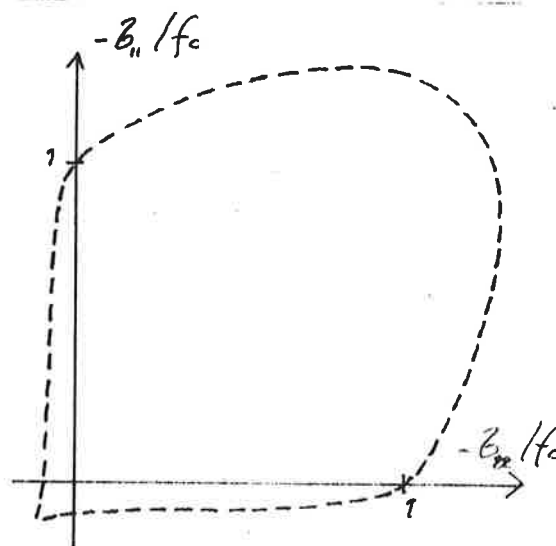
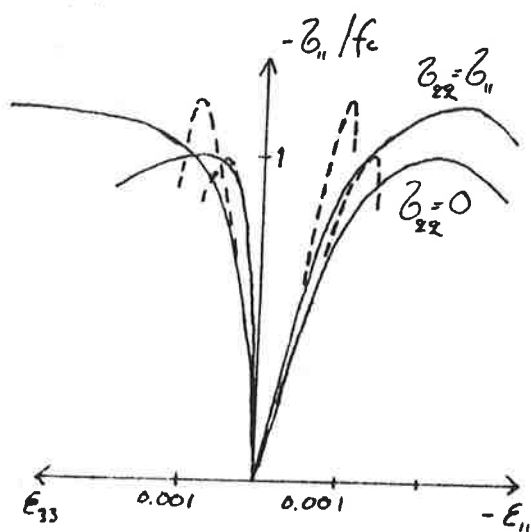
- [1] ZIEGLER, H., An introduction to thermomechanics. North - Holland Publishing Company, 1983.
- [2] DOUGILL, JOHN W., On stable progressively fracturing solids. Journal of Applied mathematics and physics 27(1976), s. 423 - 437.
- [3] DAVISON, L., STEVENS, A. L., Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies. Journal of Applied Physics 44(1973), s. 667 - 674.
- [4] KRAJCINOVIC, D., Constitutive equations for damaging materials.

Journal of Applied Mechanics 50(1983) June, s. 355 - 360.

- [5] KUPFER, H., HILSDORF, H.K., RÜSCH, H., Behavior of concrete under biaxial stresses. ACI - Journal 1969 : August, s. 656 - 666.

KUVALIITE, SOVELLUTUSESIMERKIN LASKENTATULOKSIA

Jännitys - muodonmuutos yhteyksiä (katkoviiva laskettu, yhtenäinen viiva koetulos) ja murtokäyrä (laskettu).



TARTUNTAJÄNNEBETONIRAKENTEEN PITKÄAIKAISKÄYTTÄYTYMINEN

Ralf Lindberg, Timo Turunen

Tampereen teknillinen korkeakoulu

1. JOHDANTO

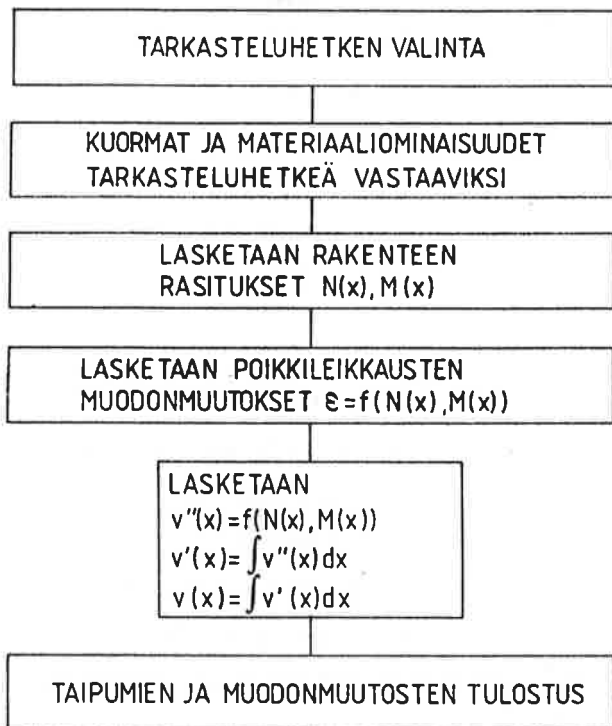
Betonin pitkäaikaisia muodonmuutoksia, virumaa ja kutistumaa, on tutkittu "puhtaina" ilmiöinä runsaasti. Tulosten soveltaminen todellisten rakenteiden tarkasteluun on kuitenkin ollut suppeahkoa. Esimerkiksi palkin pitkäaikaismuodonmuutosten tutkiminen on usein rajoittunut jännevälän keskikohdan taipuman arviointiin. Seuraavassa esitetään laskentamalli, joka soveltuu kaikkentyyppisten jännebetonirakenteiden tarkasteluun ja jonka avulla voidaan selvittää koko rakenteen taipumamuoto. Mallissa otetaan huomioon betonin lujuuden kasvu, viruminen ja kutistuminen sekä jänneteräksen relaksaatio.

2. JÄNNITYS-MUODONMUUTOSMENETELMÄ

2.1 Menetelmän perusvaiheet

Kuvassa 1 on esitetty laskennan kulku kaavamaisesti, kun tarkastellaan taipumia. Laskentamalli perustuu poikkileikkauksen reunamuodonmuutosten iteroimiseen siten, että niiden perusteella lasketut sisäiset voimat ovat tasapainossa poikkileikkaukseen kohdistuvien ulkoisten rasitusten kanssa. Sisäiset voimat lasketaan materiaalien tarkasteluhetken mukaisia jännitys-muodonmuutoskuvioita käyttäen; betonin jännitys-muodonmuutosyhteyden otaksutaan olevan epälineaarinen. Bernoullin otaksuman oletetaan olevan voimassa eli poikkileikkaustasot säilyvät tasoina viruneessakin tilassa. Reunamuodonmuutosten perusteella lasketaan poikkileikkauksen käyrästys ja edelleen numeerisen integroinnin avulla koko rakenteen taipumaviiva.

Koska poikkileikkausten muodonmuutosten laskenta perustuu iterointiin ja laskennan edetessä tarvitaan edellisen tarkasteluhetken tuloksia laskennan nopeuttamiseksi, taipumien ja muiden muodonmuutosten määrittämiseksi laadittiin BASIC-kielinen tietokoneohjelma. Se perustuu kuvassa 1 esitettyyn prosessiin.



Kuva 1. Laskentamalli kaavamaisesti esitettynä.

2.2 Materiaalien jännitys-muodonmuutoskuviot

2.2.1 Betoni

Betonin jännitys-muodonmuutoskuvaajan otaksutaan olevan muotoa

$$\sigma(\epsilon) = \begin{cases} A\epsilon^3 + B\epsilon^2 + C\epsilon + D, & \text{kun } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{cy} \\ f_c, & \text{kun } \epsilon_{cy} < \epsilon \leq \epsilon_{cu} \end{cases} \quad (1)$$

Vakiot A, B, C ja D määritetään seuraavista reunaehdoista:

- 1) $\sigma(0) = 0$
 - 2) $\sigma'(0) = E_c$
 - 3) $\sigma(\epsilon_{cy}) = f_c$
 - 4) $\sigma'(\epsilon_{cy}) = 0$
- (2)

Ratkaisemalla näistä ehdoista vakiot A, B, C ja D sekä sijoittamalla nämä yhtälöön (1) saadaan jännityksen lausekkeeksi välillä $[0, \epsilon_{cy}]$

$$\sigma(\epsilon) = E_c \epsilon \left[\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{cy}} \right)^2 \left(1 - 2 \frac{f_c}{E_c \epsilon_{cy}} \right) + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{cy}} \right) \left(3 \frac{f_c}{E_c \epsilon_{cy}} - 2 \right) + 1 \right] \quad (3)$$

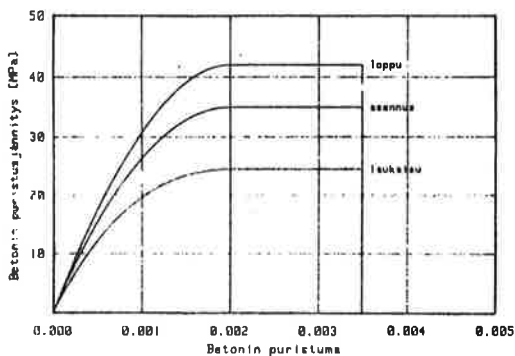
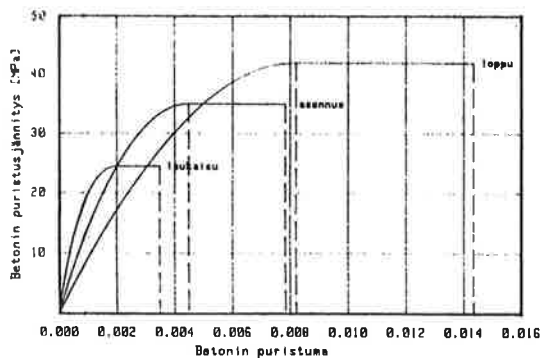
missä

E_c betonin alkukimmomoduuli

f_c betonin puristuslujuus

ϵ_{cy} betonin myötöpuristuma

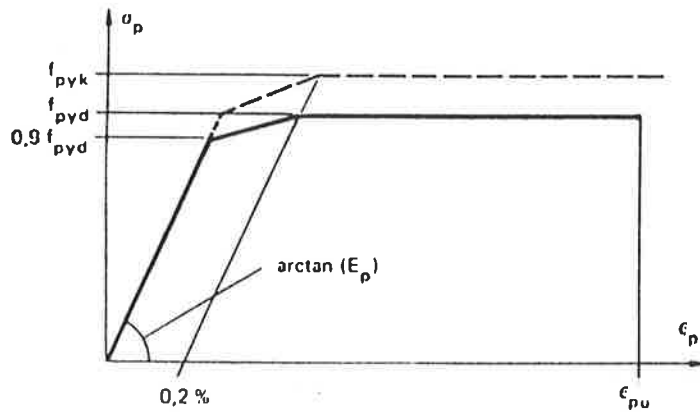
Betonin viruma otetaan huomioon kertomalla sekä myötö- että murtopuristuma luvulla $1 + \phi$ (ϕ on virumaluku) ja jakamalla betonin alkukimmomoduuli myös luvulla $1 + \phi$. Kuvassa 2 on esitetty betonin jännitys-muodonmuutoskuvio sekä pitkä- että lyhytaikaisille kuormituksille eri ajanhetkinä.



Kuva 2. Betonin jännitys-muodonmuutoskuvio pitkäaikaisille (ylempi kuva) ja lyhytaikaisille (alempi kuva) kuormituksille. Betonin lujuusluokka on K50 ja virumaluku $\phi \approx 3$.

2.2.2 Jänneteräs

Jänneteräksen jännitys-muodonmuutoskuvion otaksutaan olevan kuvan 3 mukainen.



Kuva 3 [1]. Jänneteräksen jännitys-muodonmuutoskuvio.

Jänneteräksen relaksaatio otetaan huomioon pienentämällä sen kimmomoduulia kertoimella

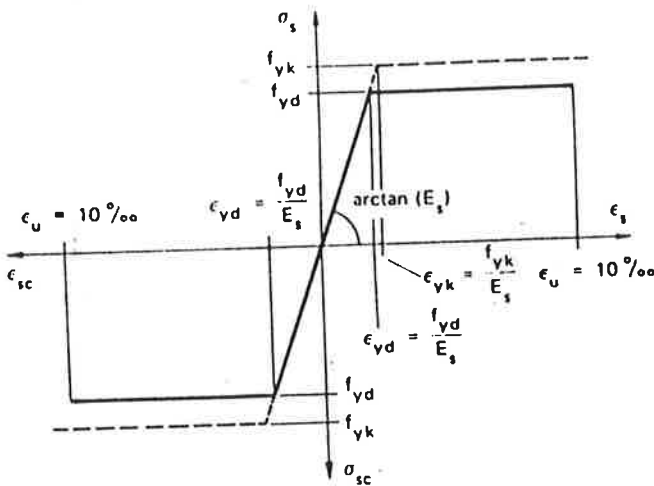
$$k = 1 - \frac{a}{100} \quad (4)$$

missä

a relaksaatioprosentti

2.2.3 Betoniteräs

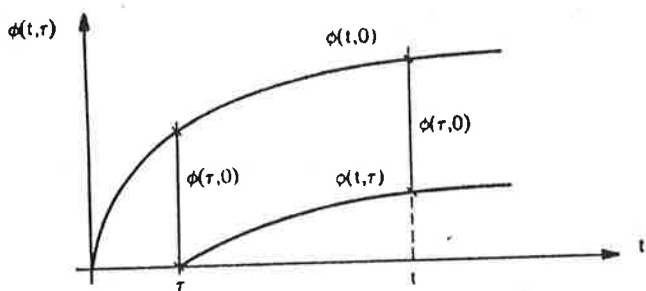
Betoniteräksen jännitys-muodonmuutoskuvion otaksutaan olevan kuvan 4 mukainen.



Kuva 4 [1]. Betoniteräksen jännitys-muodonmuutoskuvio.

2.3 Rakenteen kuormituksen muuttuminen

Jännebetonirakenteen pitkäaikaiskäyttäytymisen analysoinnissa tuottaa usein ongelmia pitkäaikaisen kuormituksen muuttuminen, koska viruman kehityksessä tapahtuvaa muutosta ei ole helppo selvittää. Suomalaisten ohjeiden [1] mukainen menettely perustuu Dischingerin menetelmään, jossa myöhempää kuormitushetkeä τ vastaava virumiskäyrä saadaan alkupe-
räiskäyrästä suorittamalla pystysuuntainen yhdensuuntaissiirto (kuva 5). Neville [2] pitää tätä menetelmää vanhentuneena alkuperäisessä muodossaan, koska se aliarvioi huomattavas-
ti virumaa, kun kuormitetaan kovettunutta betonia. Kun betoni on hyvin vanhaa, pitkäaikais-
kuormituksen muutos ei vaikuta lainkaan viruman kehitykseen!



Kuva 5 [3]. Dischingerin virumisfunktio.

Neville [2] ja Scordelis [4] ehdottavat, että eri kuormitushetkiä vastaavat virumiskäyrät lasketaan yhteen superpositioperiaatteella. Tämä merkitsee sitä, että hetkellä $t' < t$ tapahtuneesta kuormituksen muutoksesta syntyneet muodonmuutokset ovat hetkellä t riippumattomia sekä myöhemmin syntyvistä että varhemmin syntyneistä muodonmuutoksista. Menettely antaa hyviä tuloksia tehtyjen kokeiden perusteella.

Tässä esityksessä tarkasteltavassa laskentamallissa sovelletaan superpositioperiaatetta ottaen huomioon betonin jännitys-muodonmuutosyhteyden epälineaarisuus.

Tarkastellaan betonin virumismuodonmuutosten kehitystä ajan funktiona. Hetkellä t_0 kuormitus synnyttää betoniin muodonmuutoksen $\epsilon_{ce}(t_0)$, jota laskettaessa betonin alkukimmokertoimena käytetään arvoa $E_c(t_0)$. Hetkeen t mennessä tämä muodonmuutos on kasvanut arvoon $\epsilon_c(t)$, jos oletetaan, ettei rakenteen kuormitus tänä aikana muutu. Samanaikaisesti betonin jännitys alenee.

Oletetaan, että rakenteen pitkäaikainen kuormitus kasvaa hetkellä t_1 . Kuormituksen kasvun vaikutus muodonmuutoksiin hetkellä $t > t_1$ otetaan huomioon "pysyvien" muodonmuutosten avulla. Ensiksi on laskettava hetkellä t_0 tulleista kuormituksista aiheutuva muodonmuutos $\epsilon_c(t)$, jota laskettaessa betonin alkukimmomoduulina käytetään arvoa

$$E_c = \frac{E_c(t)}{1 + \phi(t, t_0)} \quad (5)$$

missä

$\phi(t, t_0)$ kuormitushetkeä t_0 vastaava virumaluku hetkellä t

Tästä muodonmuutoksesta "palataan" ϵ -akselille (kuva 6) käyttäen kimmomoduulia

$$E_c = \frac{E_c(t)}{1 + \phi(t, t_1)} \quad (6)$$

Eri ajanhetkiä vastaavien jännitys-muodonmuutoskäyrien yhdenmuotoisuuden perusteella ehto

$$\frac{E_c(t)}{1 + \phi(t, t_0)} \epsilon_c(t) = \frac{E_c(t)}{1 + \phi(t, t_1)} \epsilon_c^1(t) \quad (7)$$

Ratkaisemalla yhtälöstä (7) $\epsilon_c^1(t)$ ja ottamalla huomioon yhteys

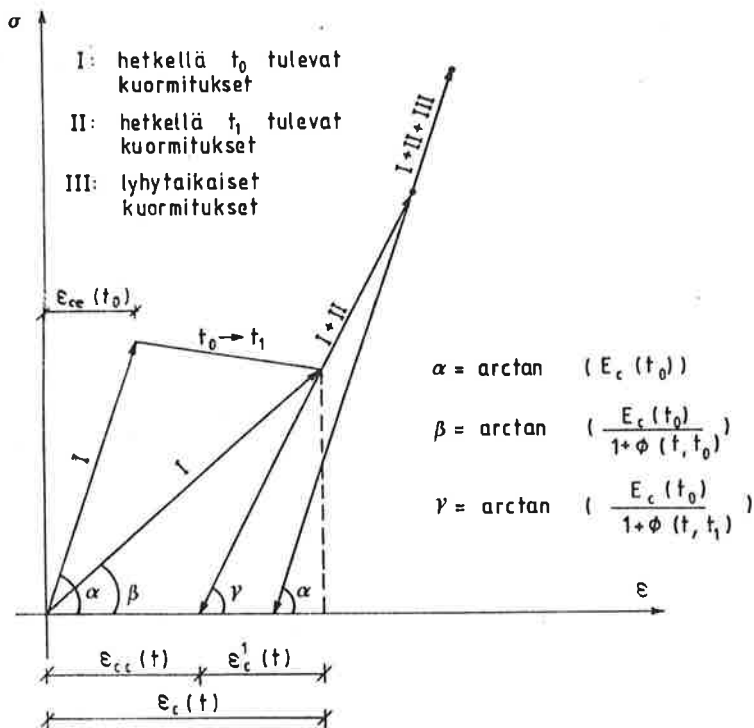
$$\epsilon_c(t) = \epsilon_c^1(t) + \epsilon_{cc}(t) \quad (8)$$

saadaan "pysyvä" muodonmuutokselle lauseke

$$\epsilon_{cc}(t) = \frac{\phi(t, t_0) - \phi(t, t_1)}{1 + \phi(t, t_0)} \epsilon_c(t) \quad (9)$$

Tästä arvosta lähtien lasketaan kaikkien pitkäaikaikuormitusten aiheuttama muodonmuutos käyttäen alkukimmomoduulille arvoa (6).

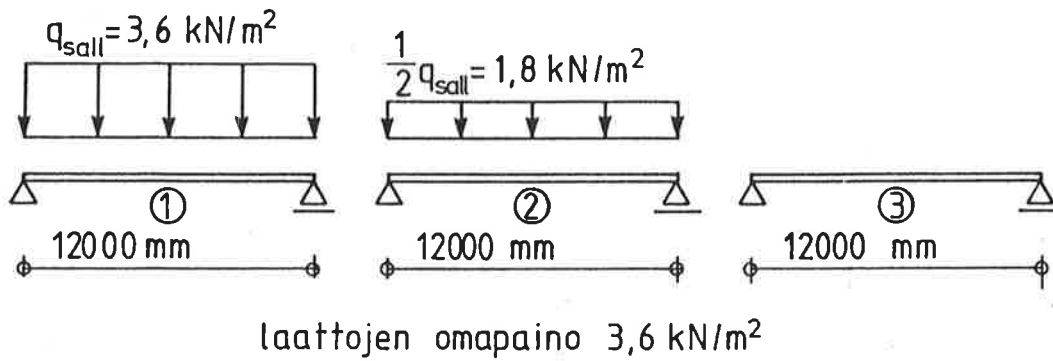
Lyhytaikaisten kuormien vaikutus muodonmuutoksiin otetaan huomioon täysin analogisesti.



Kuva 6. Virumismuodonmuutosten laskenta. (Kuvassa oletettu, että betonin jännitys-muodonmuutosyhteys on lineaarinen ja ettei betonin kimmomoduuli muutu ajan mukana.)

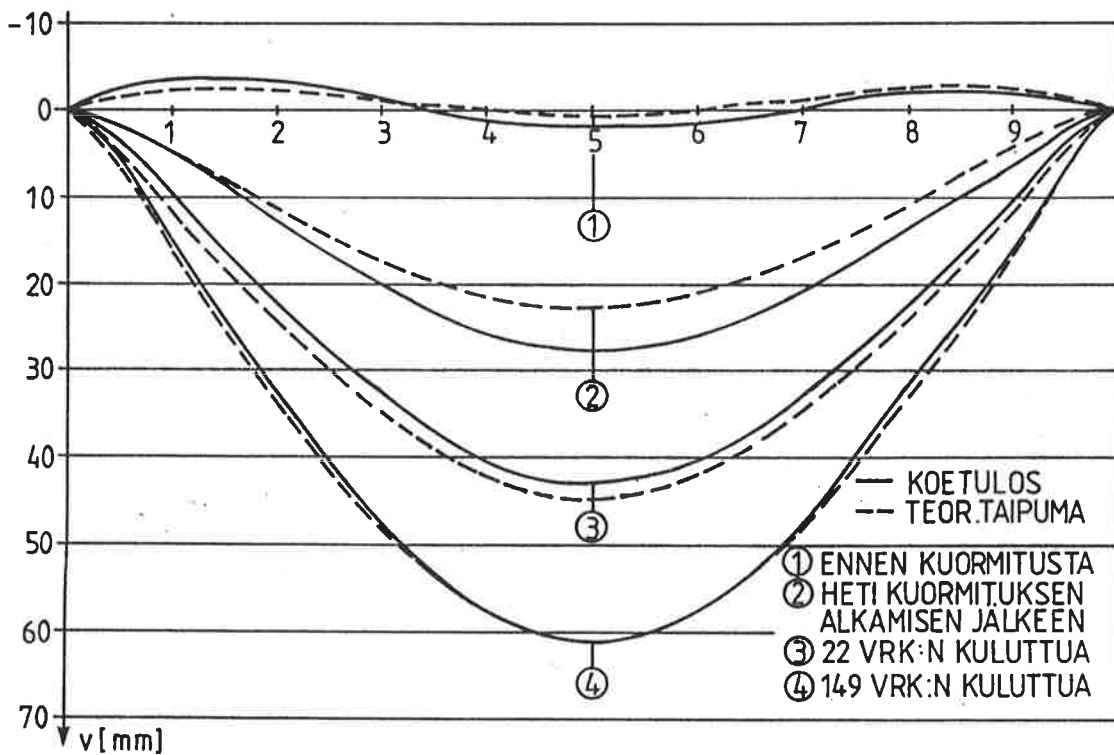
4. PITKÄAIKAISET TAIPUMAKOKEET

Kokeiden tarkoituksena oli tutkia tartuntajännebetonirakenteen taipumamuodon kehitystä ajan funktiona. Koekappaleina käytettiin kolmea 12 metrin pituista 8-punoksista Variax 5-ontelolaattaa. Laattojen kuormat, jotka kaikki olivat pitkäaikaisia, selviävät kuvasta 7.

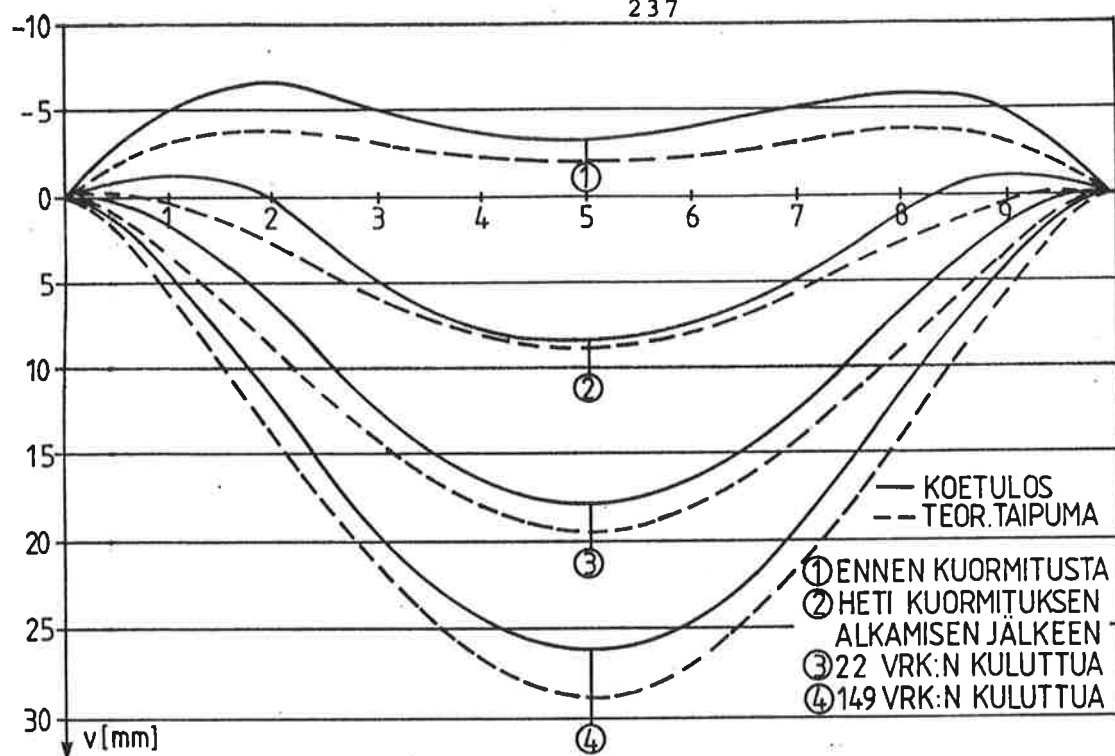


Kuva 7. Koelaattojen kuormat.

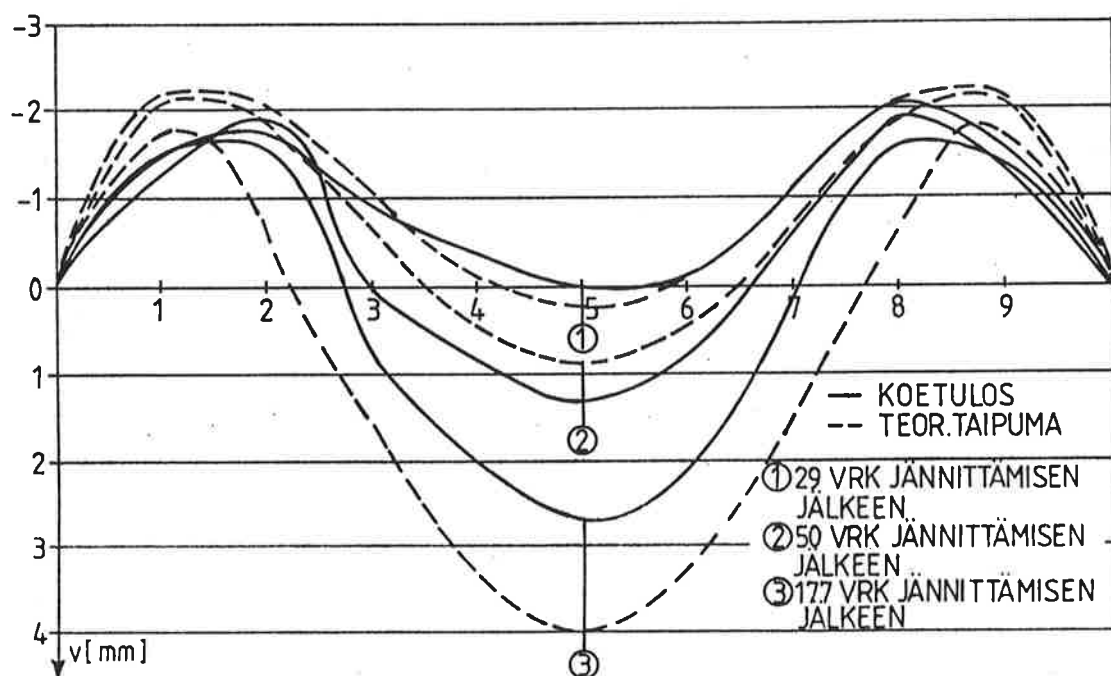
Kuvassa 8 on esitetty koelaattojen kokeelliset taipumamuodot kokeen eri vaiheissa ja tietokoneohjelmalla lasketut teoreettiset taipumamuodot. Laskennassa on käytetty kaikille laatoille samoja materiaali- ja ympäristötietoja.



Kuva 8a. Koelaatan 1 taipumamuoto.



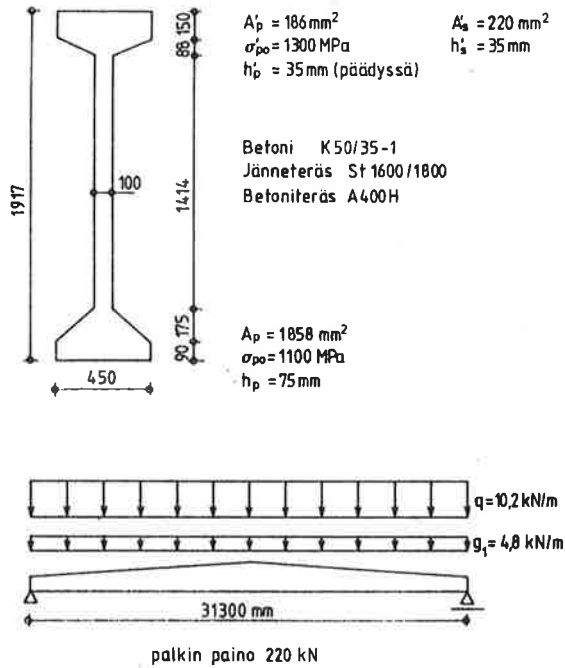
Kuva 8b. Koelaatan 2 taipumamuoto.



Kuva 8c. Koelaatan 3 taipumamuoto.

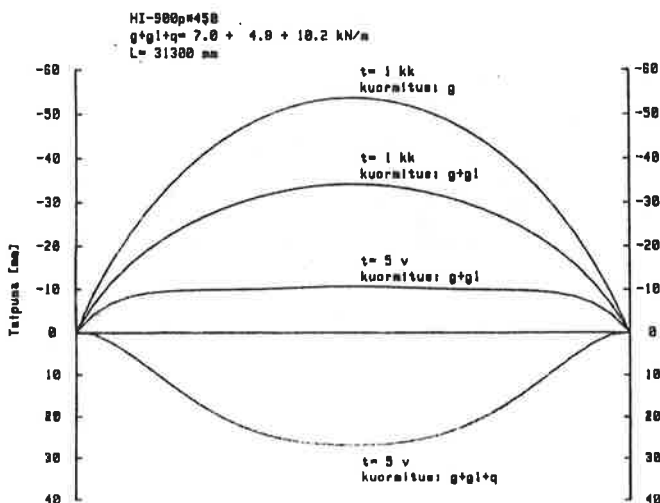
5. SOVELLUSESIMERKKI

Tarkastellaan tietokoneohjelman avulla HI-palkin taipumamuotoa eri kuormitustilanteissa. Palkin poikkileikkausmitat ja kuormitukset selviävät kuvasta 9.



Kuva 9. Esimerkkipalkin poikkileikkausmitat (harjan kohdalla) ja kuormitukset.

Kuvasta 10 selviää tarkasteltavan palkin taipumamuoto eri kuormitustilanteissa. Pitkäaikaisen kuormien aiheuttama taipuma on aina ylöspäin; vasta lyhytaikaiset kuormat saavat palkin taipumaan alaspäin. Tällöinkin palkin tukikiertymä on lähes nolla.



Kuva 10. Esimerkkipalkin taipumamuoto eri kuormitustilanteissa. Ympäristönä kuiva ilma.

6. KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Suomen rakentamismääräyskokoelma B4: Betonirakenteet. Ohjeet 1981. Sisäasiainministeriö, Helsinki 1980.
- [2] Neville, A.M., Dilger, W.H., Brooks, J.J., Creep of plain and structural concrete. Singapore 1983.
- [3] Paasikallio, K., Kanerva, P., Betonirakenteiden mitoitustehtäviä ratkaisulleen. BY 204. Suomen Betonlyhdistys r.y. Espoo 1982.
- [4] Scordelis, A.C., Computer Models for Nonlinear Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures. PCI Journal 6/1984.

BETONIN MURTOEHDOT JA EPÄLINEAARISEEN KIMMOISUUTEEN PERUSTUVAT JÄNNITYS-MUODONMUUTOS-MALLIT

Matti Leskelä
Suomen akatemia

1 JOHDANTO

Betonirakenteiden käyttö moniaksiaalisesti rasitetuissa rakenteissa on lisännyt tarvetta ottaa betonin materiaaliominaisuudet huomioon siten, että soveltaminen elementtimenetelmään tuottaisi mahdollisimman todenmukaisia tuloksia. Epälineaarisen käyttäytymisen kuvaamiseen käytettäviä konstitutiivisia malleja on kehitetty monin eri perustein. Näistä yhden osan muodostavat epälineaariseen kimmoisuuteen perustuvat isotrooppiset ja ortotrooppiset mallit, jotka ovat toistaiseksi olleet suosituimpia helposti elementtimenetelmään sovellettavuutensa vuoksi. Mallien käyttötavasta riippuu, mitä kaikkia ominaisuuksia laskennassa voidaan huomioida. Yksinkertaisimmillaan tarkastellaan lisääntyvän rasituksen aiheuttamia muodonmuutoksia, mutta myös vähenevän rasituksen jättämät pysyvät muodonmuutokset kyetään huomioimaan.

Lähtökohtana on pystyä kuvaamaan kokonaisjännitysten $\{\sigma\}$ ja muodonmuutosten $\{\epsilon\}$ yhteys sekanttimatriisina $[D_S]$, kun $\{\sigma\} = [D_S]\{\epsilon\}$ tai tangenttimatriisina, kun $\{d\sigma\} = [D_T]\{d\epsilon\}$. Ortotropiamallit, esimerkiksi (9) tarkastelevat materiaaliäykykyksiä ortotropian pääsuunnissa, jotka oletetaan samoiksi kuin jännitysten pääsuunnat. Tämä on aiheuttanut arvostelua, jolle on sekä fysikaalisia että matemaattisia perusteita (12). Isotropiamallit ovat helpoimmin hahmotettavia sekanttimuotoisina, koska niiden sisältämät teoreettiset perusteet ovat yleisimmin tunnettuja ja ohjelmointitekniikka muodostuu yksinkertaisimmaksi. Jännitysmallin rakentaminen perustuu matriisien $[D_S]$ ja $[D_T]$ esittämiseen jännitys- tai muodonmuutostilan funktiona, $[D] = [D(\sigma, \epsilon)]$. Tässä esityksessä tarkastellaan eräitä mahdollisuuksia näiden matriisien muodostamiseksi ja esitetään yksi monipuolinen murtoehtofunktio (Ottosen (5)).

2 KIMMOISUUTEEN PERUSTUVA KONSTITUTIIVINEN MALLI

Betonia voidaan tarkastella isotrooppisena materiaalina, jonka materiaaliominaisuuksien tunnuslukuina toimivat kimmomoduuli E_c ja suppeumaluku ν_c . Konstitutiivinen yhtälö yleisessä muodossa on

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = E_n \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & & & \\ & D_{22} & D_{23} & & & \\ & & D_{33} & & & \\ & & & D_{44} & & \\ \text{symm.} & & & & D_{55} & \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

$$E_n = E_c / (1 + \nu_c)(1 - 2\nu_c), \quad D_{ii} = 1 - \nu_c, \quad i=1,2,3$$

$$D_{ii} = (1 - 2\nu_c)/2, \quad i=4,5,6, \quad D_{ij} = \nu_c.$$

Lineaaraisella aineella E ja ν ovat vakioita. Betonilla myös pienillä muodonmuutoksilla materiaaliominaisuudet ovat kohtalaisen muuttumattomia. Rasitustilan kasvaessa epälineaarinen yhteys muodostuu sekanttiyhtälöksi, kun (1):ssä kertoimet D_{ij} asetetaan jännitys- tai muodonmuutostilan funktioksi. Tämä tapahtuu joko muodostamalla E_c :lle ja ν_c :lle sopivat funktiot tai käyttämällä tilavuusmoduulin $K = E/3(1-2\nu)$ ja leikkausmoduulin $G = E/2(1+\nu)$ sekanttiarvoja K_s ja G_s ja tarkastelemalla rasitustilaa oktaedriesityksen (esim. (4,10)) mukaisesti, jolloin yhtälöstä (1) voidaan kirjoittaa

$$\sigma_o = 3K_s \epsilon_o, \quad \tau_o = G_s \gamma_o, \quad (2)$$

missä σ_o, τ_o ovat oktaedrijännitykset ja ϵ_o, γ_o niitä vastaavat oktaedrimuodonmuutokset. Oletetaan, että yhtälöön (1) liittyvät pääjännitykset ja -muodonmuutokset $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ja $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ ovat tunnetut. Näiden avulla lyhimmin

$$\sigma_o = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3, \quad \epsilon_o = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)/3$$

$$\tau_o = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (3)$$

$$\gamma_o = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}.$$

Tilavuusmoduulin ja leikkausmoduulin määritelmistä seuraa, että sekanttiarvot kimmomodulille ja suppeumaluvulle voidaan esittää helposti ensinmainittujen moduulien sekanttiarvoina

$$E_c = 9K_s G_s / (3K_s + G_s), \quad \nu_c = (3K_s - 2G_s) / (3K_s + G_s). \quad (4)$$

3 MURTOEHDOT

Betonille on ominaista suppeumaluvun kasvu lähestyessä murtotilaa. Tämä aiheutuu sisäisestä halkeilusta ja materiaalin uudelleen järjestäytymisestä. Dilaation suuruus riippuu vaikuttavien jännityskomponenttien suunnasta ja keskinäisestä suuruudesta. Suunnat ajatellaan tässä yhteydessä siten, että veto on positiivinen ja puristus negatiivinen, lisäksi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Murtoehdot perustuvat jännitystilaan ja ne esitetään jännitystilan invarianttisuureiden funktiona. Jossakin muodossa ehdoissa esiintyviä invariantteja ovat (a) oktaedrisuureet σ_o, τ_o, θ ja (b) pääinvariantit I_1, I_2, I_3, J_2, J_3 ,

$$\begin{aligned} I_1 &= 3\sigma_o, \quad I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \\ J_2 &= 1,5\tau_o^2, \quad J_3 = (\sigma_1 - \sigma_o)(\sigma_2 - \sigma_o)(\sigma_3 - \sigma_o) \\ \cos 3\theta &= \sqrt{2}J_3/\tau_o^3, \quad -60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ. \end{aligned} \quad (5)$$

Tanskalaisen N.S. Ottosenin (5) murtoehtofunktio on muotoa

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = A \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + B \frac{I_1}{f_c} = 1, \quad (6)$$

$$\lambda = K_1 \cos\left\{\frac{1}{3} \arccos(K_2 \cos 3\theta)\right\}, \quad \text{kun } \cos 3\theta \geq 0,$$

$$\lambda = K_1 \cos\left\{\frac{\pi}{3} - \arccos(-K_2 \cos 3\theta)\right\}, \quad \text{kun } \cos 3\theta \leq 0.$$

A, B, K_1, K_2 ovat materiaalisovitusparametrejä ja f_c on yksiakselinen puristuslujuus. Ehto (6) toteutuu, kun $F \geq 0$.

Ottosenin murtoehtofunktio on yleinen ja muihinkin materiaaleihin kuin betoniin soveltuva. Sen erikoistapauksia ovat Drucker-Prager myötöehto ($A = K_2 = 0$) ja von Mises'n myötöehto ($A = B = K_2 = 0$) (1,2). Kulma θ on oktaedrileikkausjännityksen τ_o suuntakulma poikkeamatasossa. Siitä on huomattava, että kun (a) $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, $\theta = 0^\circ$, (b) $\sigma_1 > \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 > \sigma_3$, $\theta = 30^\circ$, (c) $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$, $\theta = 60^\circ$.

Koetuloksia eri tutkimuksissa on olemassa eniten tapaukselle (c), jotka ovat betonisylinteri- ja kolmiakσιαalikokeita, joissa jännitykset σ_1 , σ_2 on tuotettu nesteen paineella. Murtoehdon tarkkoja pisteitä pitäisi olla yksiakσιαalinen veto (a) ja puristus (c) sekä kaksiakσιαalinen puristus (a). Suomalaisille betoneille ei ole olemassa kalibrointi-arvoja, koska toistaiseksi maassa ei ole harjoitettu tutkimustoimintaa asiassa. Lisäksi on olemassa erilaisia tulkintoja siitä, mitä yksiakσιαalisella puristuslujuudella tarkoitetaan. Eurooppalaisessa ja amerikkalaisessa käytännössä f_c perustuu sylinterilujuuteen S_{28} , suomalaisessa puolestaan kuutiolujuuteen K_{28} (150 mm kuutio). Näiden lujuuksien suhde ei ole vakio, mutta tässä yhteydessä oletetaan, että $K_{28}/S_{28} = 1/0,85$. Seuraavien kertoimien arvot on laskettu lähteessä (4) esitettyjen kertoimien perusteella käyttäen Betoninormien ehtoa $f_c = 0,7K_{28}$. Murtoehto (6) toteutuu silloin yksiakσιαalisessa puristuksessa, kun $|\sigma_3| \leq K_{28}$.

Taulukko 1. Murtoehdon (6) vakiot

f_{ct}/f_c	A	B	K_1	K_2	
0,121	2,1868	2,8460	9,1854	0,9962	(13)
0,121	1,4426	2,7148	9,4710	0,9900	(14)

4 TILAVUUS- JA LEIKKAUSMODUULIMALLEJA

Suosittu epälineaarisuuden tarkastelutapa on ollut K_s :n ja G_s :n riippuvuuksien etsiminen muodonmuutoksista tai jännityksistä tai molemmista. Yleisesti tunnustetaan, että G_s voidaan esittää yksikäsitteisesti oktaedrisuureiden τ_o tai γ_o funktiona. K_s :lle on tarjottu vastaavaa riippuvuutta σ_o :sta tai ϵ_o :sta, mutta myös γ_o :sta (7, 8, 16).

Cedolin, ym. (7) esittävät tilavuusmoduulille $K_s = K_s(\epsilon_o)$ ja leikkausmoduulille $G_s = G_s(\gamma_o)$ yksinkertaisia eksponenttilausekkeita

$$K_s = K_o(ab^{-|\epsilon_o|/c} + d), \quad G_s = G_o(pq^{-\gamma_o/r} - s\gamma_o + t), \quad (7)$$

jotka ovat koetuloksiin sovitettuja parametrien a, b, c, d ja p, q, r, s, t avulla. Käytetyt koetulokset ovat osin kaksiakselialisia (tasojännitystila) ja lisäksi vakiosuhtein aikaansaatuja. Funktiot ovat keskiarvoesityksiä, joiden vastaavuus eri tapauksiin ei ole yhtenäinen. Parametreilla on arvot

$$a = 0,85, \quad b = 2,5, \quad c = 0,0014, \quad d = 0,15, \\ p = 0,81, \quad q = 2,0, \quad r = 0,002, \quad s = 2,0, \quad t = 0,19.$$

Kotsovos (6) esittää konstitutiivisen jännitys-muodonmuutos-yhteyden oktaedrisuureiden avulla siten, että

$$\epsilon_o = (\sigma_o + \sigma_{int})/3K_s, \quad \sigma_{int}/f_c = k(\tau_o/f_c)^n / (1 + \lambda(|\sigma_o|/f_c)^m). \quad (8)$$

Parametrit k, λ, m, n ovat betoniluokasta riippuvia

$$k = 4/(1 + 1,137(f_c - 12,35)^{0,23}), \\ \lambda = 0,222 + 0,01319f_c - 0,00018f_c^2, \\ m = -2,415 \text{ ja } n = 1, \quad \text{kun } f_c \leq 26 \text{ N/mm}^2, \\ m = -3,5308 + 0,0428f_c, \quad n = 0,314 + 0,0264f_c, \\ \text{kun } f_c > 26 \text{ N/mm}^2.$$

Moduulien alkuarvot K_{e1} ja G_{e1} ovat f_c :n funktiona

$$K_{e1} = 11000 + 4,72f_c, \quad G_{e1} = 9224 + 165f_c + 3,374 \times 10^{-12} f_c^{8,273}.$$

Nämä alkujäykkyudet ennustavat suppeumaluvulle alkuarvon $v_{co} \leq 0,15$. Vastaavasti kaavoihin (4) sijoitettuna saadaan kimmomodulille totuttua arvoa $E_c = 5000\sqrt{K_{28}}$ suurempi tulos. Ero ei ole kuitenkaan ratkaisevan suuri.

Tilavuusmoduulin sekanttisuhteelle Kotsovos esittää lausekkeet

$$K_s/K_{e1} = 1/(1+A_K(|\sigma_o|/f_c)^{b-1}), \text{ kun } |\sigma_o|/f_c \leq 2,43$$

$$K_s/K_{e1} = 1/(1+2^{b-1}A_K b^{-2} A_K^{(b-1)}(f_c/|\sigma_o|)), \text{ kun } |\sigma_o|/f_c > 2,43.$$

(1)

Sekanttimuodulille vastaavasti

$$G_s/G_{e1} = 1/(1+C_K(\tau_o/f_c)^{d-1}). \quad (10)$$

Parametrit A_K , b , C_K , d ovat puristuslujuuden f_c funktioita,

$$A_K = 0,516, \text{ kun } f_c < 26 \text{ N/mm}^2,$$

$$A_K = 0,516/(1+0,0043(f_c-26)^{2,397}), \text{ kun } f_c \geq 26 \text{ N/mm}^2,$$

$$b = 2,0 + 4,3 \times 10^{-8} f_c^{4,461}$$

$$C_K = 3,573, \quad d = 2,12 + 0,0222 f_c, \text{ kun } f_c \leq 26 \text{ N/mm}^2$$

$$C_K = 3,573/(1+0,0176(f_c-26)^{1,414}), \quad d = 2,7, \text{ kun } f_c > 26 \text{ N/mm}^2.$$

Muodonmuutokset ϵ_{ij} kokonaisjännityksistä σ_{ij} saadaan yhtälön (1) perusteella kääntämällä se muotoon

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij}(\sigma_o + \sigma_{int})/3K_s + (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_o)/2G_s, \quad (11)$$

missä δ_{ij} on Kroneckerin deltasymboli. Muodonmuutoksien lisäykset $\Delta\epsilon_{ij}$ saadaan lisäksistä $\Delta\sigma_{ij}$ samaa yhtälöä käyttäen muuttamalla kokonaissuureet lisäyksiksi. Tällöin on mahdollista huomioida myös vähenevän kuorman vaikutukset, kun määritellään seuraavat kuormitusolosuhteet

- (i) lisääntyvä deviatoorinen kuormitus merkitsee, että hetkellinen τ_o on suurempi kuin aikaisempi arvo
- (ii) lisääntyvä hydrostaattinen kuormitus merkitsee, että $|\sigma_o|$ on suurempi kuin aikaisempi arvo.

Väheneviä ovat kaikki muut kuin (i) ja (ii). Väheneville kuormituksille sekä tangenttimoduulit K_t ja G_t että K_s ja G_s ovat samoja kuin kimmoiset alkuarvot K_{el} , G_{el} . Lisäsyhtälöt ovat

$$\Delta \epsilon_{ij} = \delta_{ij}(\Delta \sigma_o + \Delta \sigma_{int})/3K_t + (\Delta \sigma_{ij} - \delta_{ij}\Delta \sigma_o)/2G_t, \quad (12)$$

missä sisäisen jännityksen muutos $\Delta \sigma_{int}$ saadaan (8):sta asettamalla lausekkeeseen muutokset $\Delta \sigma_o$, $\Delta \tau_o$. Deviatoorisesti vähenevässä kuormituksessa ($\Delta \tau_o < 0$) asetetaan $\Delta \sigma_{int} = 0$.

Tangenttimoduulit lisääntyvälle kuormitukselle ovat

$$\begin{aligned} K_t/K_{el} &= 1/((1+bA_K(|\sigma_o|/f_c)^{b-1}), \text{ kun } |\sigma_o|/f_c < 2,43 \\ K_t/K_{el} &= 1/((1+2^{b-1}bA_K), \text{ kun } |\sigma_o|/f_c \geq 2,43. \\ G_t/G_{el} &= 1/((1+C_K d(\tau_o/f_c)^{d-1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Cedolinin sekanttilausekkeista (7) saadaan tangenttimoduulit tarkastelemalla yhtälöitä (2) lisäys- ja sekanttilausekkeina

$$K_t = K_s + \epsilon_o dK_s/d\epsilon_o, \quad G_t = G_s + \gamma_o dG_s/d\gamma_o. \quad (14)$$

Tämän jälkeen sovelletaan samoja periaatteita kuin lisäysten suhteen on kuvattu.

5 YHTEENVETO

Esitetyt mallit kuvaavat betonin käyttäytymistä moniakselisesti kuormitettuna riippumatta kuormituksen suunnasta. Yleensä betonia voidaan hyödyntää parhaiten puristusjännityksien vaikuttaessa. Murtoehtofunktio (6) toteutuu pienimmillä jännitystasoilla silloin kun kuormitus on huomattavan deviatoorista (suuri τ_o) ja toisaalta, jos jännityksiin sisältyy vetäviä komponentteja, jolloin hydrostaattinen komponentti pyrkii tulemaan kohti positiivista arvoa. Lisäksi funktio osoittaa, että murtoehto ei toteudu lainkaan hydrostaattisessa puristuksessa, kun $\tau_o = 0$.

Tilavuus- ja leikkausmoduulien käyttö konstitutiivisen mallin rakentamisessa ei ole välttämätöntä. Epälineaarista kimmoisuutta on hyödynnetty myös mm. ekvivalenttien yksiakselisten muodonmuutosten avulla. Tällöin lähdetään siitä, että betonin yksiakselisia jännitys-muodonmuutos-käyriä voidaan soveltaa myös moniakselisissa jännitystapauksissa määrittelemällä ekvivalentit muodonmuutokset todellisten arvojen funktiona. Tähän perustuu mm. ortotropiamalli (3). Myös (6):ssa ja (15):ssa on käytetty lähtökohtana yksiakselista funktiota. Ottosen rakentaa mallinsa murtoehtofunktioon perustuen käyttäen epälineaarisuuden mittana sitä, kuinka lähellä tarkasteltava jännitystila on murtoon johtavaa. Tätä varten hän määrittelee epälineaarisuusindeksin β , jolla on ennen murtumista arvo $\beta < 1$ ja murtumisen jälkeen $\beta > 1$. Materiaaliominaisuudet asetetaan β :n funktioksi, $E_c = E_c(\beta)$, $v_c = v_c(\beta)$. Tällainen periaate, vaikka onkin osittain intuitiivinen, kuvaa betonin käyttäytymistä periaatteiltaan oikein. Se saattaa silti erota jäykkyydeltään muista malleista, sillä v_c :lle on asetettu vakioarvo murtotilassa. Joka tapauksessa kaikkien mallien tulee olla sellaisia, että $v_c < 0,5$, mikä on fysikaalinen vaatimus.

Cedolinin mallin käyttö elementtimenetelmässä on helpointa, kun käytetään siirtymäelementtejä. Malli tuottaa stabiilin suppenevuuden, koska verrannollisuusmoduulit saadaan suoraan siirtymätilan funktiona. Kotsovosin malli on esitetty jännityksien funktiona, mikä merkitsee, että moduulien korjaus on aina yhden laskentakierroksen jäljessä siirtymiin nähden. Lisäksi malli sisältää huomattavan joukon erilaisia parametrejä. Tämä on yleinen piirre monille muillekin malleille ja kuvastaa betonin kompleksista luonnetta. Materiaalin jatkuva pehmeneminen rasitustilan kasvaessa johtuu sisäisestä mikrohalkeilusta kohtisuoraan suurimman puristusjännityksen suuntaa vastaan. Jos jännityksien suunta muuttuu niin, että halkeamat joutuvat puristetuiksi, betoni toimii jälleen kuten "ehyt" materiaali.

Yleisiä jännitys-muodonmuutos-yhteyksiä betonille ei vielä liene pystytty rakentamaan, vaikka monissa kirjoituksissa niin väitetäänkin. Murrayn kirjoituksessa (10) tarkastellaan yleisempiä mahdollisuuksia matriisien $[D_S]$ ja $[D_T]$ muodostamiseksi ja osoitetaan varkuuttavasti että tehtävä muodostuu välttämättä kompleksiseksi.

KIRJALLISUUSVIITTEET

- (1) S. Valliappan:
Continuum Mechanics Fundamentals
A.A. Balkema Rotterdam 1981
- (2) O. Hoffman, G. Sachs:
Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers
McGraw-Hill Book Company 1953
- (3) State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of
Reinforced Concrete
American Society of Civil Engineers (ASCE) 1982
- (4) CEB Bulletin d' Information No 156, June 1983:
Concrete under Multiaxial States of Stress
Constitutive Equations for Practical Design
- (5) N.S. Ottosen:
A Failure Criterion for Concrete
ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division
Vol 103 No EM4 1977
- (6) N.S. Ottosen:
Constitutive Model for Short Time Loading of Concrete
ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division
Vol 105 No EM1 1979
- (7) L. Cedolin, Y.J.R. Crutzen, S. Dei Poli:
Triaxial Stress-Strain Relationship for Concrete
ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division
Vol 103 No EM3 1977
- (8) M.D. Kotsovos:
A Mathematical Model of the Deformational Behavior of
Concrete under Generalized Stress Based on Fundamental
Material Properties
Materials and Structures RILEM, Vol 13 No 76, July-Aug. 1980
- (9) A.A. Elwi, D.W. Murray:
A 3D Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship
ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division
Vol 105 No EM4 1979
- (10) D.W. Murray:
Octahedral Based Incremental Stress-Strain Matrices
ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division
Vol 105 No EM4 1979

- (11) A.C.T. Chen, W-F. Chen:
Constitutive Relations for Concrete
ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division
Vol 101 No EM4 1975
- (12) Z.P. Bazant:
Comment on Orthotropic Models for Concrete and Geomaterials
ASCE Journal of the Engineering Mechanics Vol 109 No 3 1983
- (13) G. Schickert, H. Winkler:
Versuchsergebnisse zur Festigkeit von Beton bei mehraxialer
Druckbeanspruchung
DAfStb Heft 277, Wilhelm Ernst & Sohn Berlin 1977
- (14) D. Linse, H. Aschl:
Versuche zum Verhalten von Beton unter mehrachsiger
Beanspruchung
Technische Universität München, Lehrstuhl für Massivbau
München, März 1976
- (15) S.H. Ahmad, S.P. Shah:
Complete Triaxial Stress-Strain Curves for Concrete
ASCE Journal of the Structural Division
Vol 108 No ST4 1982
- (16) H.B. Kupfer, K.H. Gerstle:
Behavior of Concrete under Biaxial Stress
ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division
Vol 99 No EM4 1973

MEASUREMENTS OF GUYED MAST DYNAMIC PROPERTIES AT YLLÄS, FINLAND

Risto Turunen

Finnish Acoustics Centre Ltd

1 BACKGROUND

The Ylläs radio mast shown in figure 1 is situated in Northern Finland; it stands on top of a bare hill rising some 500 m above the surrounding countryside. The weather conditions at this exposed position are quite severe; wind induced vibration amplitudes of up to 18 m/s^2 have been observed at the mast top. A dynamic vibration absorber was installed on the mast in 1983. The absorber was constructed as a pendulum suspended with vertical steel wires and connected with horizontal shock absorbers to its housing at the mast top.

This paper describes the verification of the damping effect of the vibration absorber by full scale field tests of mast behaviour before and after absorber installation. These tests were conducted jointly by the Finnish Broadcasting Corporation and the Instrument laboratory of the Technical Research Centre of Finland, employer of the author at that time.

2 MEASUREMENTS

The mast's modal parameters were estimated using its step responses, which were determined by applying a step force input to the structure and measuring the resultant vibration responses. The step input was effected by tightening a rope between the mast top and a guy anchor and releasing the rope by opening a hook at the lower end of the rope.

Instrumentation used for data acquisition and processing is shown in figure 2. The excitation force was measured by a transducer at

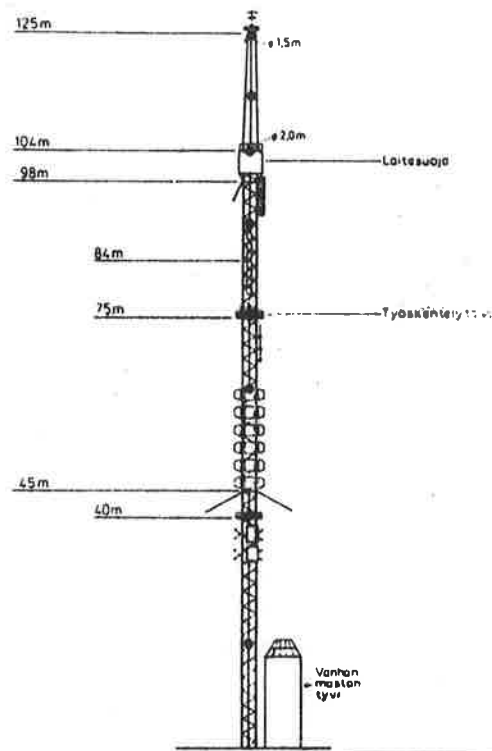


Figure 1. Ylläs radio mast

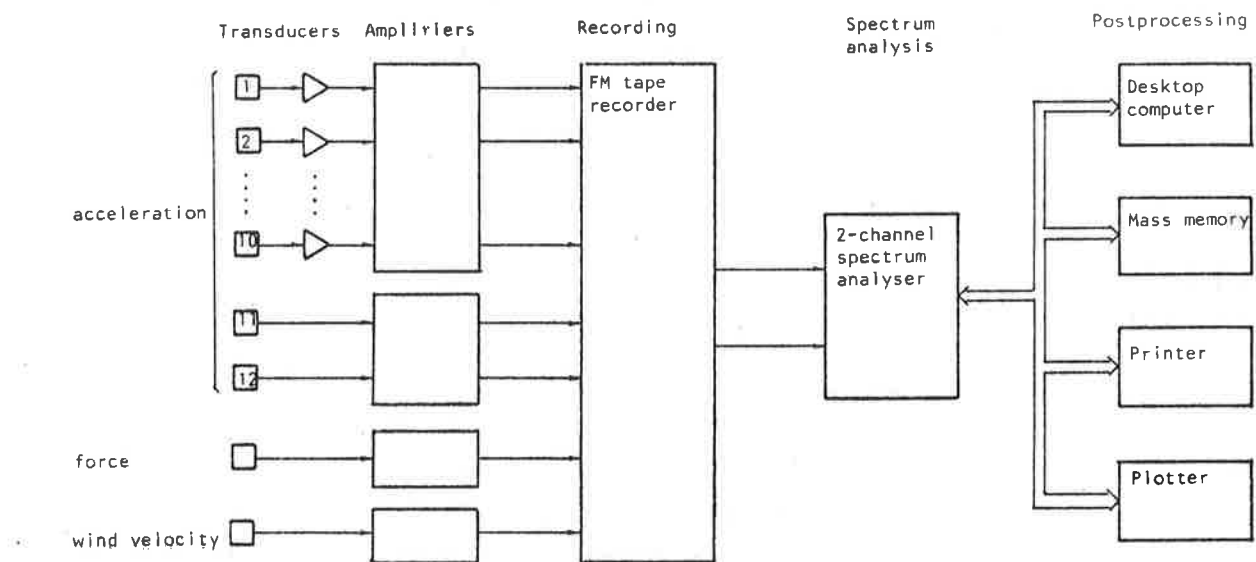


Figure 2. Instruments used for data acquisition and analysis

the mast top. Vibrations were measured with 12 accelerometers attached to the legs of the mast at eight different levels and to the absorber mass. Typical excitation and response signals are shown in figure 3. All transducer signals were registered with an FM tape recorder. Each time record lasted 10 minutes; the total number of recorded force steps was about 100.

Combinations of various parameters (force amplitudes, accelerometer orientations, absorber adjustments) were examined during field measurements. Linearity of mast behaviour was tested by using different excitation levels. No nonlinear effects could be observed in the undamped mast. However, damped mast behaviour was clearly dependent on input force level.

3 ANALYSIS OF MEASURED DATA

3.1 Undamped mast

As the first data processing step, a two channel spectrum analyser was used to compute frequency response functions between the excitation force and response at each accelerometer position and direction. A typical result is shown in figure 4.

The mast structure behaved unsymmetrically due to differences in guy lengths and forces. Consequently, eigenmodes of the mast appeared in pairs with slightly differing eigenfrequencies. These pairs could be observed as double peaks in the frequency response functions.

Because of close eigenfrequencies, each modal contribution was separated from frequency response data by a modal enhancement procedure (i.e. weighted summation of frequency responses) before estimation of final modal parameters with a special purpose regression analysis algorithm. The lowest eigenfrequencies and damping factors of the mast are shown in table 1. The corresponding modal vectors are shown in figure 5.

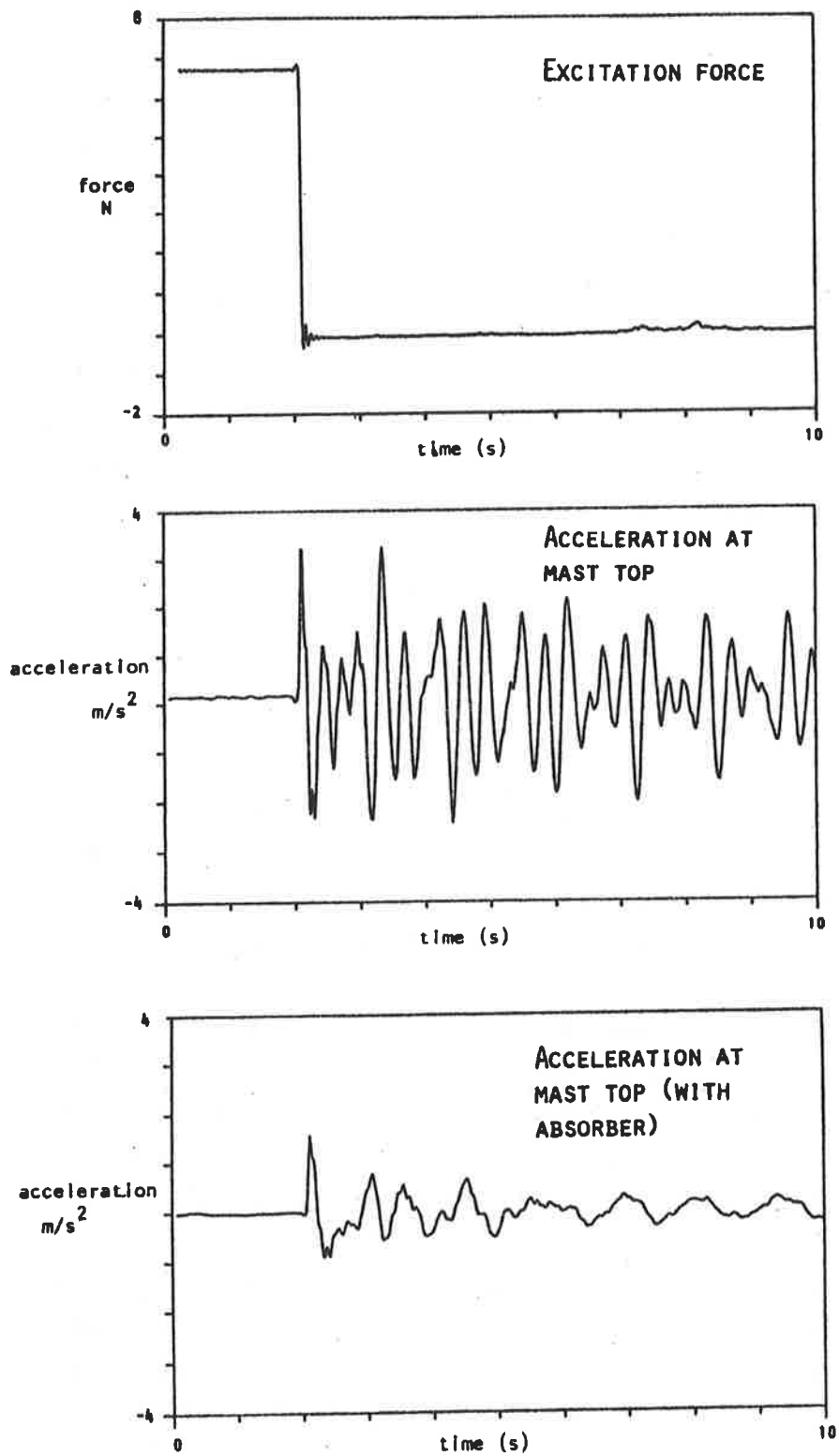


Figure 3. Excitation and response signals

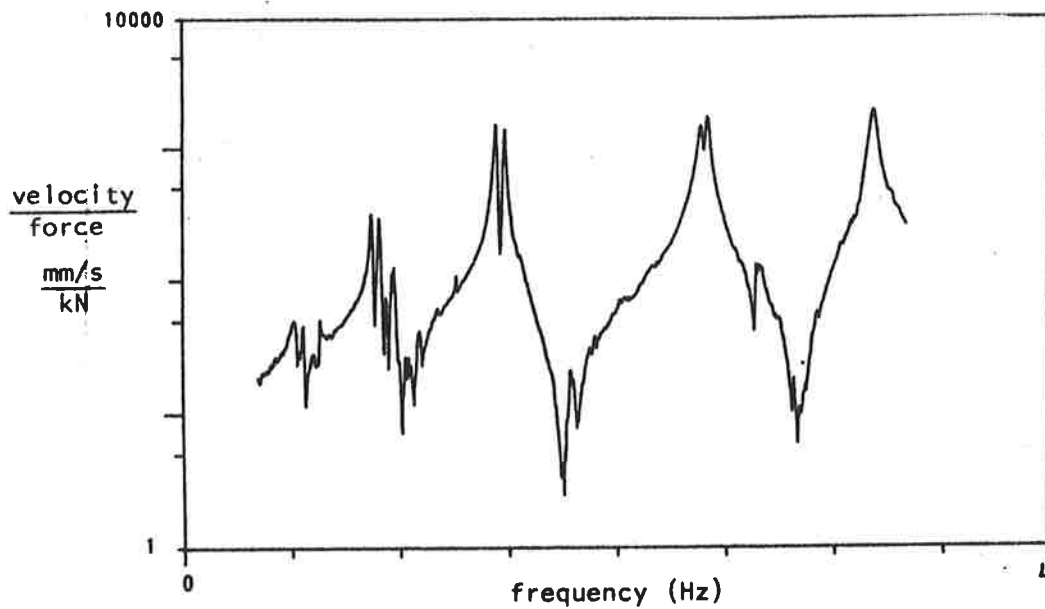


Figure 4. Frequency response of mast top

Table 1. Modal parameters of the Ylläs mast

Mode	Undamped		Small amplitudes		Large amplitudes	
	freq	relative	freq	relative	freq	relative
	Hz	damping %	Hz	damping %	Hz	damping %
1	0.88/0.91	0.22	0.82	0.20	0.83	2.1
2	1.45/1.49	0.19	1.19	0.18	1.22	6.1
3	2.40/2.43	0.36	1.90	0.27	1.94	4.6
4	3.20	0.45	2.89	0.41	2.91	1.3

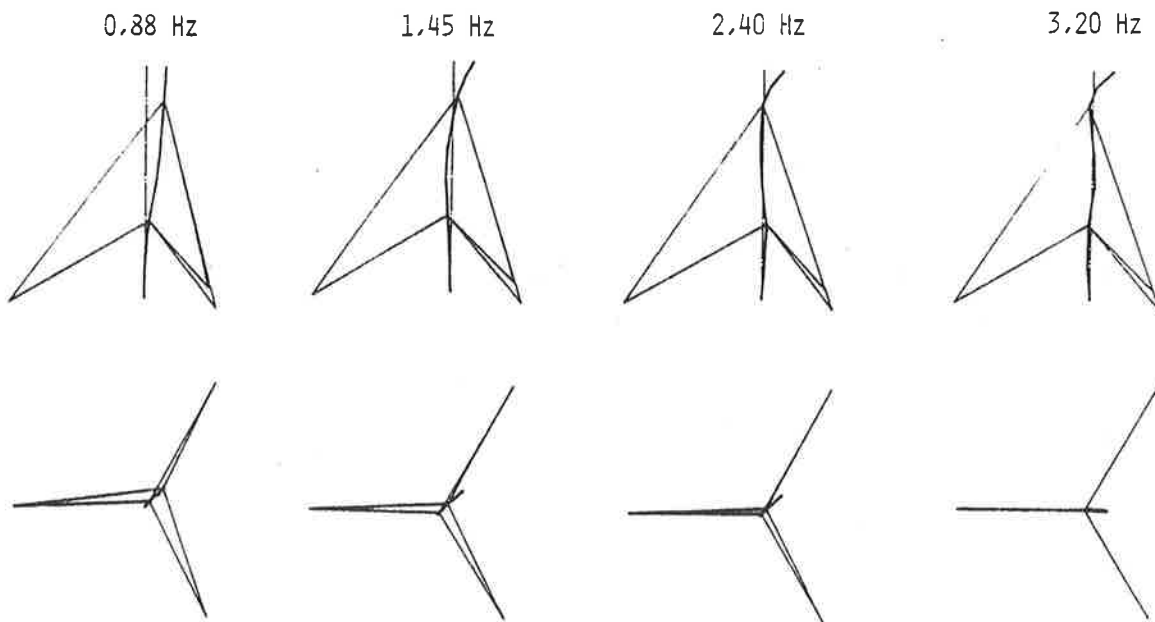


Figure 5. Vibration modes without absorber

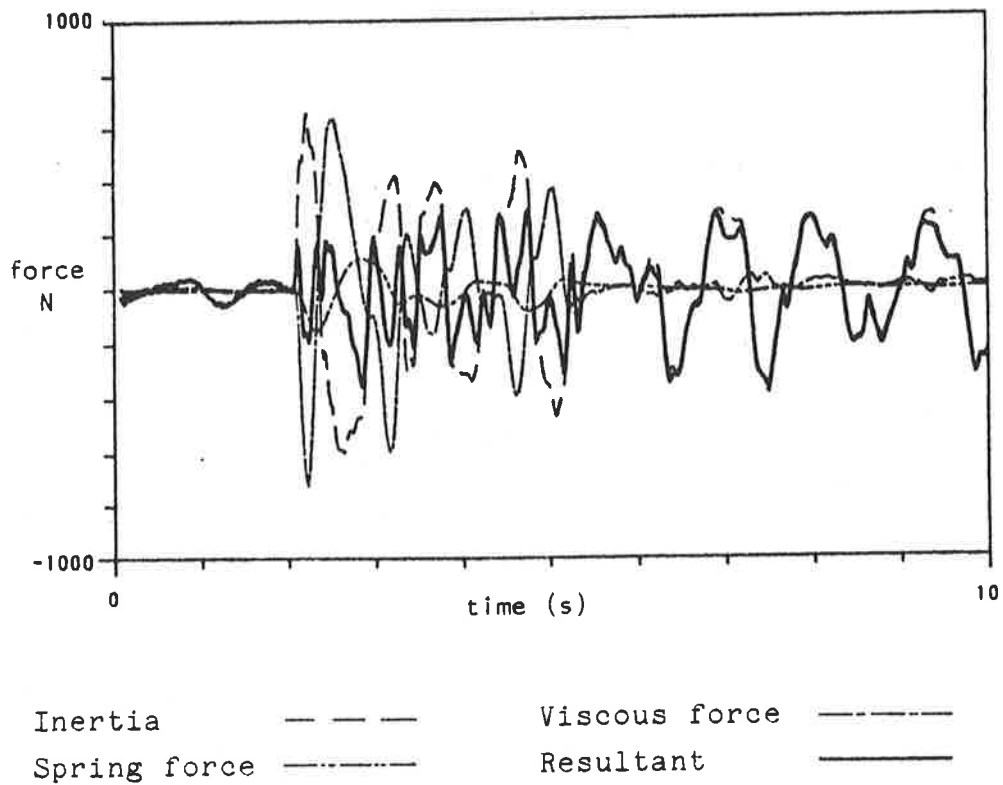


Figure 6. Forces acting on the absorber mass after an excitation step

3.2 Mast with vibration absorber

The observed nonlinear behaviour was found to be due to dry friction in the shock absorbers. At low vibration levels the absorber mass was effectively clamped to its housing and acted like a pure additional mass. The vibration absorber was operating only when a certain vibration level was exceeded.

The approximate magnitude of frictional forces in shock absorbers was estimated from time domain force equilibrium equations: unknown (frictional) forces should balance the resultant of other forces. Measured movements of the mast top and the absorber mass were used to calculate inertia, viscous damping and spring forces acting on the absorber mass as shown in figure 6. Inertia and spring forces could be calculated quite accurately from the geometry of the structure. Viscous damping and frictional forces were then estimated by a trial and error procedure.

An approximate estimate of the significance of friction was made by comparing frictional and viscous energy losses. At peak accelerations exceeding 1 m/s^2 most energy dissipation in shock absorbers was found to be caused by viscous damping. Consequently, the behaviour of the damped mast was described with two linearized modal models:

- At small mast top vibration amplitudes (below 0.4 m/s^2) the absorber acted like an added mass at the mast top.
- At large mast top amplitudes (over 1 m/s^2) the absorber mass was moving relative to the mast top. The relatively small effect of friction could be modelled by equivalent viscous damping with reasonable accuracy.

Modal parameters of the two models were estimated indirectly by adding the effects of an absorber model to an experimental modal model describing the undamped mast top. Unknown quantities (mainly absorber damping) were adjusted until good compatibility between the combined model and experimental data was obtained. Modal parameters estimated from the combined model are shown in

table 1.

The mast top model was calculated in the direction of smaller principal stiffness, so that only the lower frequency component of each eigenfrequency pair was used in computations. Vibration modes mostly due to guys were left out of the model. Effects of geometric changes in the mast due to the attachment of the absorber housing were included. The synthesised frequency response of this model is shown superimposed on the experimental frequency response of the top of the original mast in figure 7A.

The frequency response model describing the modified mast at small vibration amplitudes was computed by adding the sum of absorber housing mass and pendulum mass to the mast top. This combined model could be verified by comparing it with test results at low excitation force levels as in figure 7B.

In the large vibration amplitude model the pendulum mass was assumed to be attached to the mast top with a spring and a viscous absorber element. Comparison of the model with test results (figure 7C) was more difficult than in the case of small amplitudes. Clean, large amplitude frequency response functions could not be acquired with step excitation, because towards the end of each time record the amplitude of the mast top diminished so much that the absorber mass was clamped to the mast top by friction. Consequently, all experimental frequency responses showed some vestiges of sharp, weakly damped resonance peaks.

The absorber mass actually increased the number of vibration modes in the large amplitude model from four to five. However, the damping of the lowest mode at 0.7 Hz was so high that this mode had no real significance and was not included in table 1.

The vibration absorber could not damp the fourth mode of the mast efficiently because the mass of the absorber housing almost created a node at the mast top in that mode shape. This result was later confirmed by an observed wind excited mast top vibration amplitude of 3 to 4 m/s² at about 2.7 Hz.

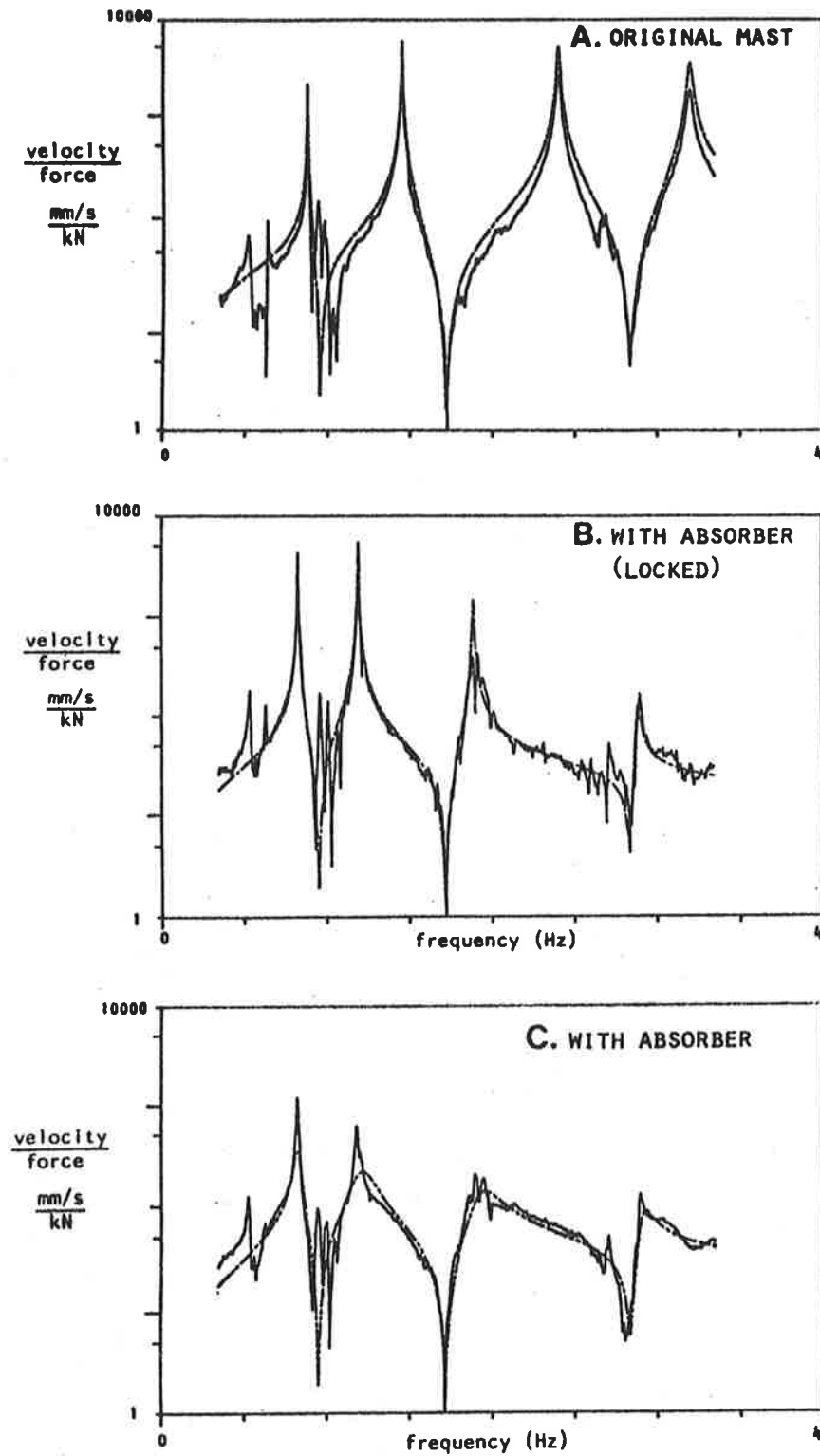


Figure 7. Experimental (solid lines) and analytical (broken lines) frequency responses

4 SHOCK ABSORBER PERFORMANCE

According to the field experiments, the damping constant of the shock absorbers used at Ylläs was actually considerably higher than indicated by the manufacturer. To check this result, a similar shock absorber was later tested in an environmental chamber in a temperature range of +21 to -19 C. The results were consistent with previous field test data.

However, ambient temperature had a considerable effect on the damping constant: its value varied between 2.6 and 6.6 kN/m/s in the temperature range considered. Analytic models of the mast were used to study the effect of this variation. Maximum relative changes in modal damping coefficients were found to be about 10 to 30 %.

5 DISCUSSION

The original damping coefficients of the lowest modes at Ylläs were between 0.19% and 0.45%. The vibration absorber was found to increase the damping factors of the three lowest modes by a factor of ten or more and eliminated the possibility of dangerous vibration amplitudes. The absorber was less efficient in damping the fourth vibration mode because of its position.

The choice of testing method and excitation type was a compromise between economy and completeness of results. In this case, more economy (i.e. using only responses of wind induced vibrations) would have resulted in experimental data almost impossible to interpret because of nonlinearities in the structure. On the other hand, heavier equipment, e.g. unbalance shakers, could have been used to excite the mast to overcome the effects of friction. However, sufficient results could be obtained in spite of complex structural behaviour by processing experimental data with advanced algorithms.

CHAOTIC MOTION OF A DAMPED CLASSICAL OSCILLATOR DRIVEN BY AN AMPLITUDE-MODULATED PERIODIC IMPULSIVE FORCE

R. Rätty, J. von Boehm and H.M. Isomäki
Institute of Mechanics, Department of General Sciences,
Helsinki University of Technology, SF-02150 Espoo,
Finland

Nonlinear oscillators having piecewise exactly solvable equations of motions are widely used in engineering and science to describe nonlinear phenomena. In this paper we consider the intrinsic chaotic motion of the damped classical oscillator driven by an amplitude-modulated periodic impulsive force. The dimensionless equation of motion reads

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x = f(x) \sum_n \delta(t-n\tau) ,$$

where δ is Dirac's δ -function and $f(x) = A(-x+x^3)$. A and τ are system parameters. This system has the advantage that it can be cast exactly in the form of a second order difference equation:

$$x_{n+1} = E(2C-SA/a)x_n - E^2x_{n-1} + Ax_n^3 ,$$

where $E = \exp(-\gamma\tau)$, $C = \cos(a\tau)$, $S = \sin(a\tau)$ and $a = (1-\gamma^2)^{1/2}$. Special attention is given to the universality of the chaotic motion. The chaotic motion is discussed using the renormalization procedure by Helleman [1].

- [1] R.H.G. Helleman, in Fundamental Problems in Statistical Mechanics V, edited by E.G.D. Cohen (North-Holland, Amsterdam 1980) p. 165.

CHAOTIC OSCILLATIONS OF AN IMPACTING BODY

H.M. Isomäki, J. von Boehm and R. Rätty

Institute of Mechanics, Department of General Sciences,
Helsinki University of Technology, SF-02150 Espoo, Finland

1 INTRODUCTION

The response of systems to impacts is an important and timely subject of engineering inquiries. As a result international journals [1] fully devoted to research works concerning the impact events or related topics are being published. One of the basic models in studying the impact responses is the oscillating and impacting body. The applications of this simple model are abundant in engineering and consist, e.g., of dampers, rock drills, ploughs, rammers and conveyors [2]. The impact oscillator has recently been used in analysing the dynamics of the off-shore structures, the buckling of structures [3], the bounce and chaotic motion in impact print hammers, and the periodic and chaotic motion of a drill in the drilling of thin plates [4]. In this paper we study the damped fully elastic sinusoidally-driven impact oscillator. Between the impacts [$x(t) > 0$] its dimensionless equation of motion is

$$\ddot{x}(t) + 0.4\dot{x}(t) + x(t) = \cos(\omega t) \quad (1)$$

When $x(t_i) = 0$ an elastic impact occurs reversing the velocity $\dot{x}(t_i^+) = -\dot{x}(t_i^-)$. The impact is responsible for the nonlinearity. Despite of the simple equations the motion of the impact oscillator is very complex displaying chaos [3,5-8]. ω serves for the system parameter. The forcing amplitude, unlike, e.g., in Duffing's oscillator [9], does not appear in Eq. (1) explicitly and has therefore, via the scaling of x , only an indirect effect on the oscillator dynamics.

(i,p) denotes the attractor with i impacts during the period p

(given in the units $2\pi/\omega$). The fundamental attractor (1,1) associated with the largest amplitude resonance appears around $\omega \approx 2$ followed by the subharmonic attractors (1,m) at $\omega \approx 2m$ ($m = 2, 3, \dots$) [3,5,6,8]. The period-doubling bifurcations start at high- ω flanks of (1,m) leading to chaos between the periodic attractors (1,m) and (1,m+1) [3,5,6,8]. In this paper we study the motions around the first main resonances $m = 1$ and $m = 2$.

2 PERIOD DOUBLINGS AND CHAOS

The detailed amplitude response diagram $X = X(\omega)$ (X is the maximum displacement of the particle) between (1,1) and (1,2) (i.e., $2.6 < \omega < 3.3$) is shown in Fig. 1. $X(\omega)$ first decreases when ω is increased from 2 to $\omega_1 = 2.64914$. The period-doubling bifurcations of the May-Grossmann-Thomae-Feigenbaum scenario [10,11]

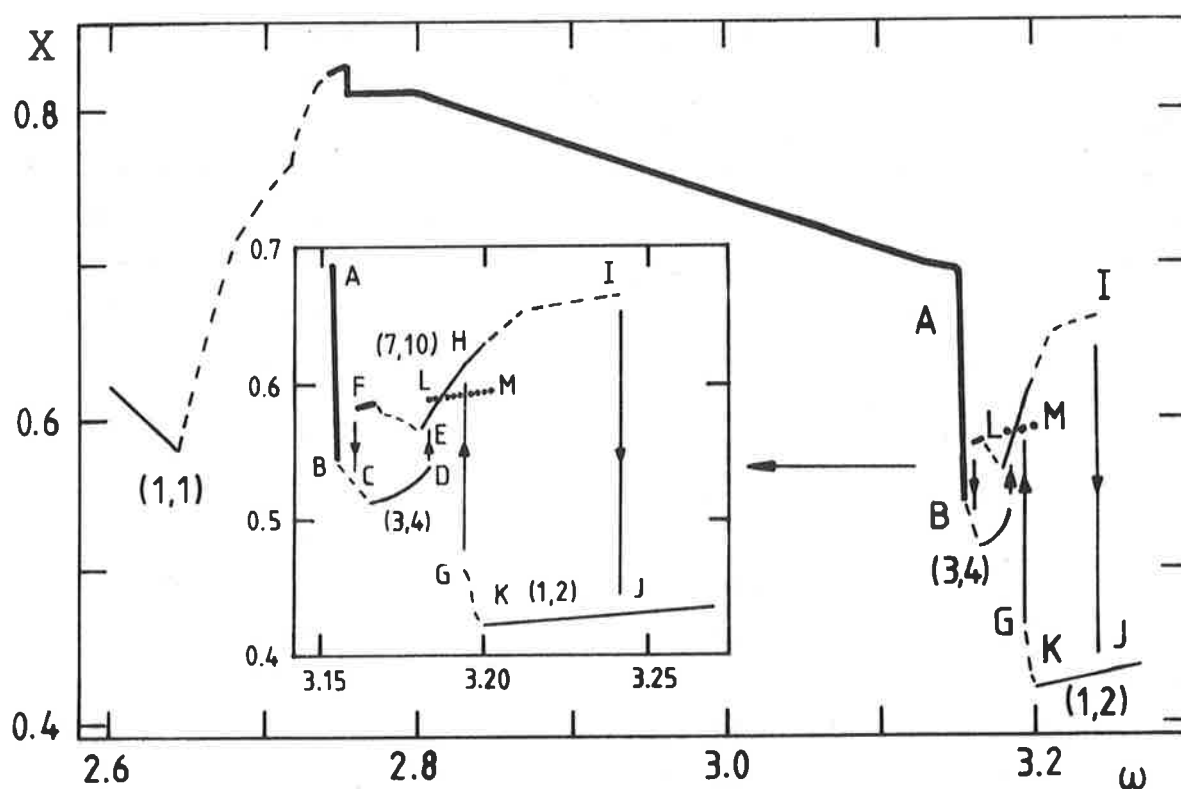


Figure 1. Amplitude response diagram. The thick solid, thin solid and broken lines denote chaotic attractors, periodic attractors and period-doubling sequences, respectively. The chain of dots $L \rightarrow M$ denotes the devil's attractors. The thin vertical lines with arrows denote hysteresis jumps. (i,p) denotes the attractor with i impacts during the period p.

with the attractors $(2^n, 2^n)$ in the ranges $\omega_n < \omega < \omega_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ start at ω_1 . $(4, 4)$ is shown in Fig. 2a. Chaos is reached at $\omega_\infty = 2.739144$. The chaotic attractor slightly beyond this at $\omega = 2.75$ is shown in Fig. 3a. These results agree with Refs

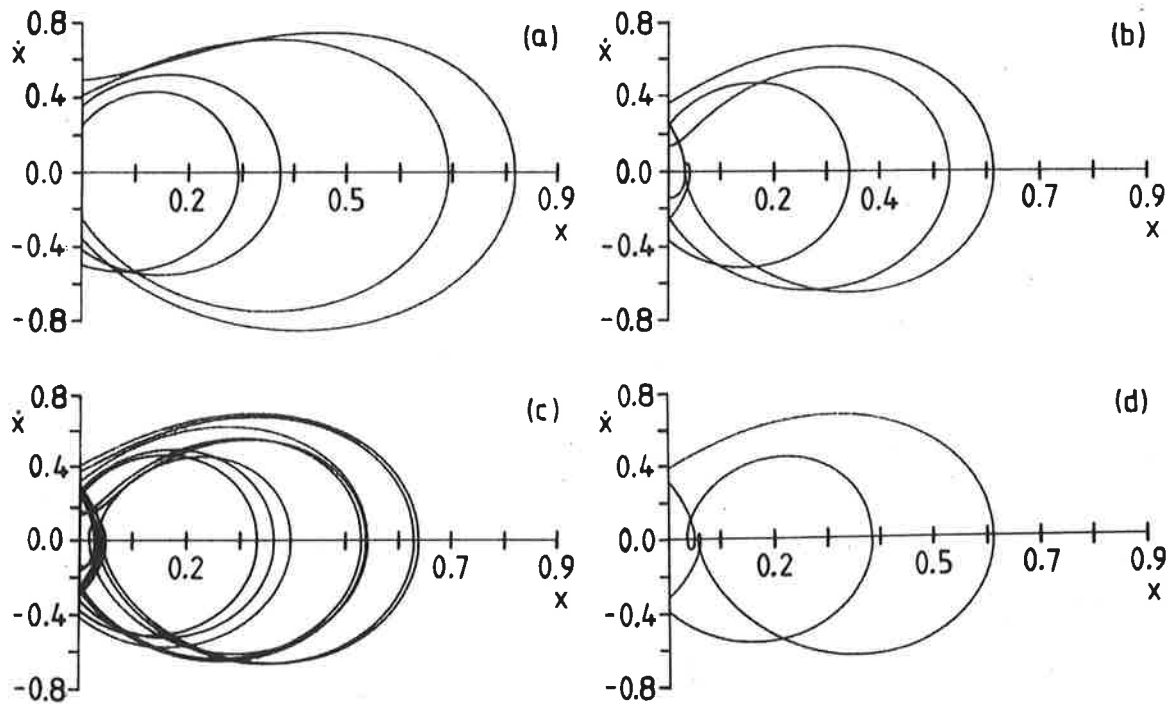


Figure 2. Periodic attractors at the high- ω flank of $(1, 1)$.
 (a) $(4, 4)$ at $\omega = 2.735$. (b) $(4, 4)$ at $\omega = 2.887$.
 (c) $(10, 11)$ at $\omega = 2.887$. (d) $(2, 3)$ at $\omega = 2.930$.

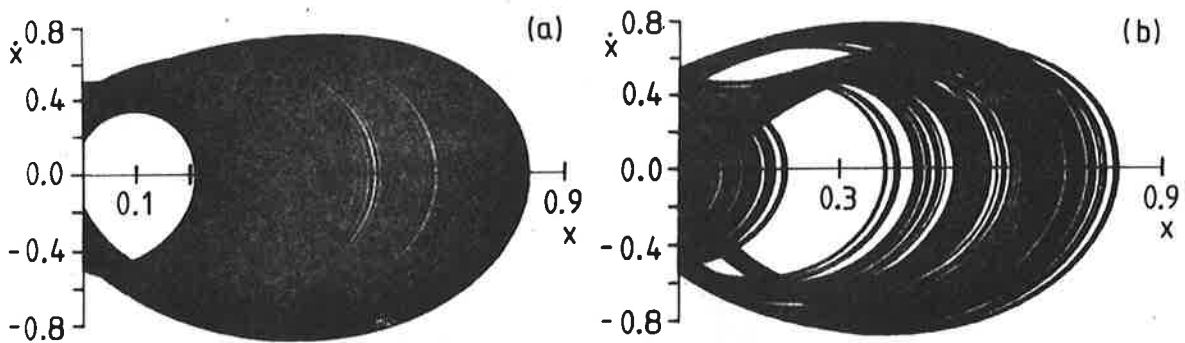


Figure 3. Chaotic attractors below (a) and beyond (b) the crisis.
 (a) $\omega = 2.75$. (b) $\omega = 2.754$.

[3,5,6]. The calculated $(\omega_7 - \omega_6)/(\omega_8 - \omega_7) \approx 4.70$ agrees closely with Feigenbaum's universal $\delta = 4.669\dots$ for unimodal one-dimensional ($z = 2$) maps [11] indicating close similarity between the behaviour of the oscillator and the ($z = 2$) -map. At $\omega \approx 2.754$ a sudden jump (crisis [12]) appears in the chaotic attractor (Fig. 3b). In the crisis the size of the attractor diminishes and the xx -phase-plane around the origin is filled (Figs 1 and 3). The same behaviour is seen also in the periodic attractors in Figs 2a and 2b which show the two attractors (4,4) found below and beyond this crisis, respectively. Between the first and the second ($\omega \approx 3.154$) crises chaos is interrupted by a few periodic windows [8]. We find hysteresis caused by the coexistence of some windows, e.g., (4,4) and (10,11) in Figs 2b and 2c, respectively. We also find period-doubling bifurcations leading to chaos within some windows [8]. (2,3) in Fig. 2d has the widest stability region of the observed attractors. $X(\omega)$ in the insert of Fig. 1 consists of a sudden jump $A \rightarrow B$ in the chaotic attractor at $\omega \approx 3.154$ (the second crisis) followed by a period-halving sequence to the attractor (3,4), two opposite hysteresis loops ($C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C$ and $G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow G$), one period-doubling $(1,2) \rightarrow (2,4)$ at $J \rightarrow K \rightarrow G$ and a complete period-doubling sequence leading to chaos from (7,10) ($H \rightarrow E \rightarrow F$) with decreasing ω , as well as an incomplete period-doubling - period-halving sequence $(7,10) \rightarrow (14,20) \rightarrow (28,40) \rightarrow (14,20)$ at $H \rightarrow I$. The final attractor at $K \rightarrow J$ is (1,2). $X(\omega)$ of (1,2) increases monotonously above $\omega = 3.3$ towards the second main resonance.

3 PHASE LOCKINGS AND STAIRCASES

We define [8] for the periodic attractors - in analogy with the definition of the winding number - the reduced impact/period ratio

$$q = \frac{i}{p} \quad (2)$$

q versus ω at the low- ω flank of (1,1) is shown in Fig. 4. The steps are due to the phase-locking phenomenon [13,14]. q^{-1} locks at rational numbers between 0/1 and 1/1 forming a part of a complete Farey tree [14-16] shown in Fig. 5 up to the order 5. In the Farey tree the adjacent fractions p_1/i_1 and p_2/i_2 satisfy the

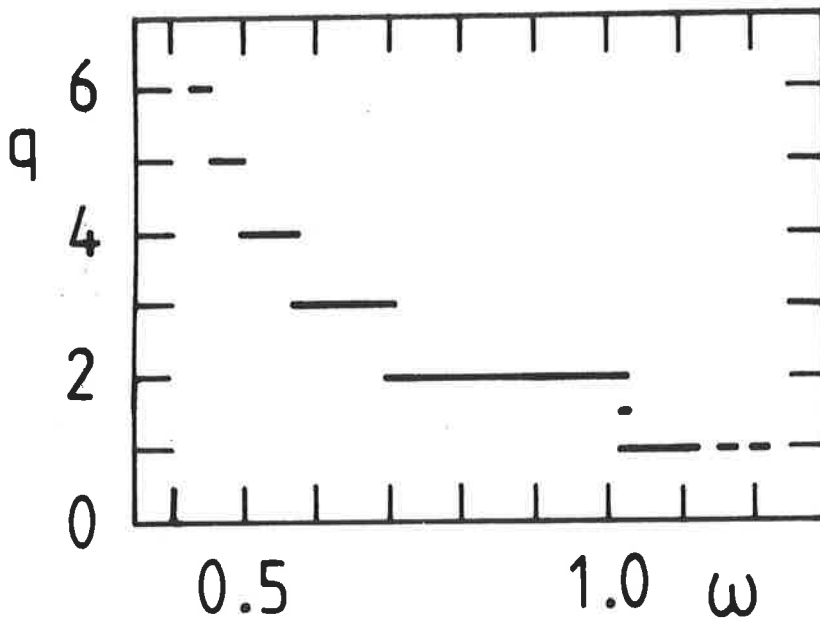


Figure 4. Reduced impact/period ratio q . The step with $q = 1/1$ continues with increasing ω .

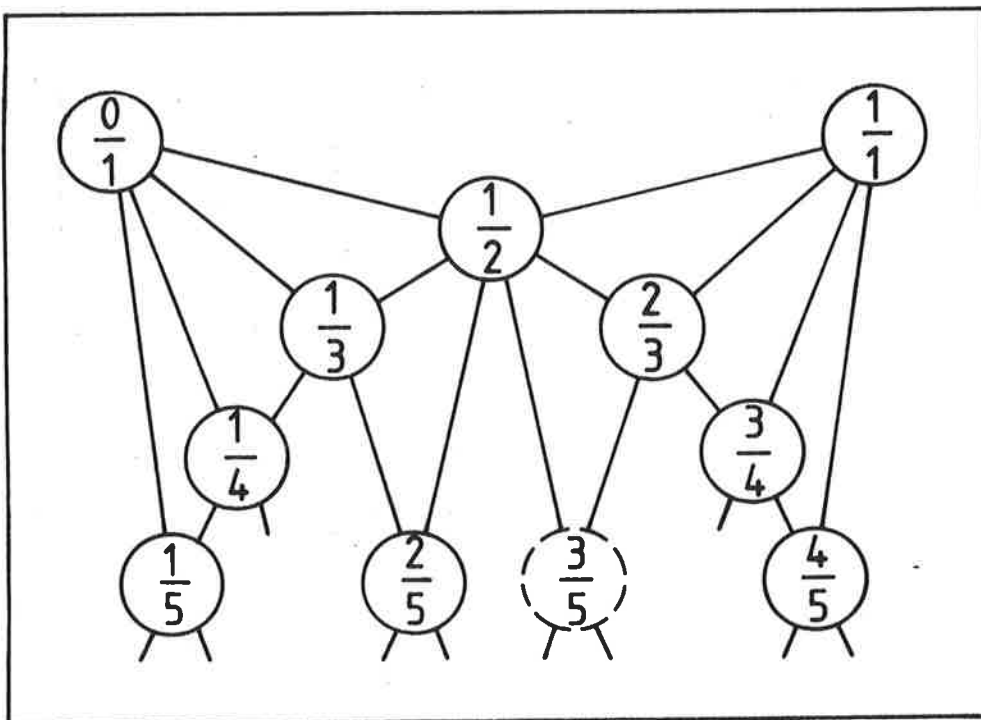


Figure 5. Farey tree of q^{-1} or $\rho = 3q^{-1}-4$ between $0/1$ and $1/1$ up to the order 5. The fractions encircled with the solid line represent the first observed attractors of the devil's staircase.

unimodularity condition $|p_1 i_2 - i_1 p_2| = 1$. Most of the steps (Fig. 4) originate from the attractors of the form $(i, 1)$, the lowest step with $q = 1/1$ corresponding to the fundamental attractor $(1, 1)$. Therefore the staircase of Fig. 4 is of the harmless type [17, 18].

q versus ω of the group of the attractors $L \rightarrow M$ (denoted by dots in Fig. 1) is shown in Fig. 6. q locks at rational numbers between $3/5$ and $3/4$. We find that the general form of all observed attractors (i, p) in the $x\dot{x}$ -phase-plane is

$$(i, p) = (3m+3n, 4m+5n) \cong m \cdot (3, 4) + n \cdot (3, 5) \quad (3)$$

where $m = \frac{5}{3} \cdot i - p$ and $n = p - \frac{4}{3} \cdot i$ are integers (≥ 0). Between two steps we can find numerically very often further steps and there-

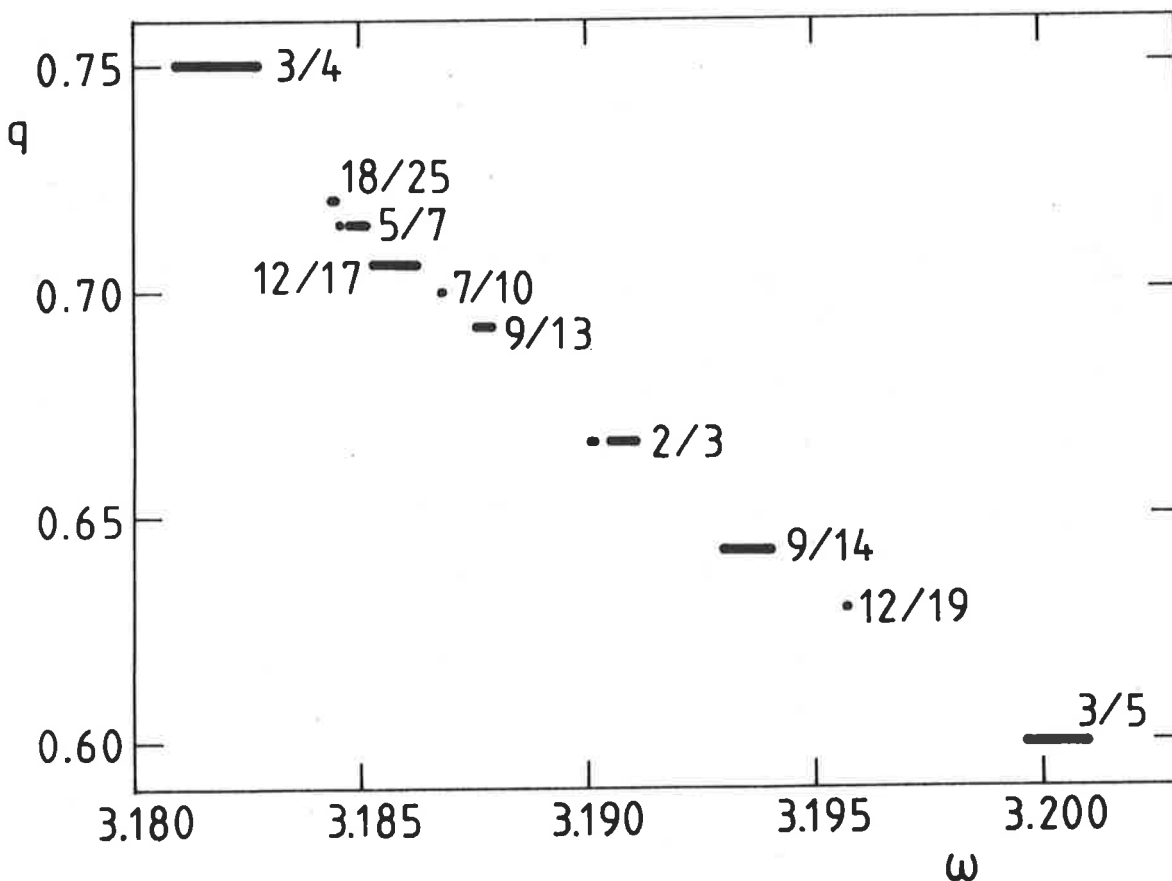


Figure 6. Devil's staircase of the attractors $L \rightarrow M$. q denotes the reduced impact/period ratio. Only the widest plateaus are shown.

fore q seems to exhibit the devil's staircase behaviour [16-19]. The ratio ρ of the number of the attractors (3,5) to the total number of the attractors (3,4) and (3,5) in the devil's attractor (1,p) is [see Eqs (2) and (3)]

$$\rho = 3q^{-1} - 4. \quad (4)$$

ρ locks at rational numbers between 0/1 and 1/1 and forms the Farey tree of Fig. 5 where the observed values up to the order 5 are encircled with the solid line ($\rho = 3/5$, however, is missing). The Farey sequence of Fig. 5, 0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1, corresponds [Eq. (4)] to the attractors (3,4), (15,21), (12,17), (9,13), (15,22), (6,9), (15,23), (9,14), (12,19), (15,24), (3,5), respectively. The staircase of Fig. 6 is denser and thus more devilish than the harmless staircase of Fig. 4 [18].

4 REFERENCES

- [1] International Journal of Impact Engineering, ed. by W. Johnson, Pergamon Press.
- [2] A.L. Paget, Vibration in steam turbine buckets and damping by impact, Engineering (London) 143 (1937) p. 305; C.C. Fu, Dynamic stability of an impact system connected with rock drilling, J. Appl. Mech. 36E (1969) p. 743; M. Senator, Existence and stability of periodic motions of a harmonically forced impacting system, J. Acoust. Soc. Am. 47 (1969) p. 1390; Wen Bangchun and Duan Zhishan, Studies on the nonlinear dynamics of self-propelled vibrating machines with rocked impact, in: Proc. Tenth Intern. Conf. on Nonlinear Oscillations, Varna, Bulgaria 1984, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia 1985, p. 789; I. Yokomichi, Y. Araki, and Y. Jinnouchi, Forced oscillations of the system with impact of a particle bed, in: Proc. Tenth Intern. Conf. on Nonlinear Oscillations, Varna, Bulgaria 1984, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia 1985, p. 810.

- [3] J.M.T. Thompson, Complex dynamics of compliant off-shore structures, *Proc. R. Soc. Lond.* A387 (1983) p. 407;
J.M.T. Thompson and R. Ghaffari, Complex dynamics of bilinear systems: bifurcational instabilities leading to chaos, in: *Collapse: the Buckling of Structures in Theory and Practice*, IUTAM Symposium, London, England 1982, ed. by J.M.T. Thompson and G.W. Hunt, Cambridge University Press, Cambridge 1983, p. 161.
- [4] F. Hendriks, Bounce and chaotic motion in impact print hammers, *IBM J. Res. Develop.* 27 (1983) p. 273; P.G. Reinhall and D.W. Storti, Periodic and chaotic motion of a drill in the drilling of thin plates, *IUTAM 16th Intern. Congress Theor. Appl. Mech.*, Lyngby, Denmark 1984, p. 647.
- [5] J.M.T. Thompson and R. Ghaffari, Chaos after period-doubling bifurcations in the resonance of an impact oscillator, *Phys. Lett.* 91A (1982) p. 5; J.M.T. Thompson and R. Ghaffari, Chaotic dynamics of an impact oscillator, *Phys. Rev.* A27 (1983) p. 1741; J.M.T. Thompson, A.R. Bokaian and R. Ghaffari, Subharmonic resonances and chaotic motions of a bilinear oscillator, *IMA J. Appl. Math.* 31 (1983) p. 207.
- [6] S.W. Shaw and P.J. Holmes, A periodically forced piecewise linear oscillator, *J. Sound. Vibr.* 90 (1983) p. 129.
- [7] M.B. Hindmarsh and D.J. Jefferies, On the motions of the offset impact oscillator, *J. Phys. A: Math. Gen.* 17 (1984) p. 1791; H. Frosch and H. Büttner, Two coupled impact oscillators, *Univ. of Bayreuth, Fed. Rep. of Germany* (unpublished).
- [8] H.M. Isomäki, J. von Boehm and R. Rätty, Intrinsically stochastic motion of a driven oscillator with impacts, in: *Proc. Tenth Intern. Conf. on Nonlinear Oscillations*, Varna, Bulgaria 1984, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia 1985, p. 623; H.M. Isomäki, J. von Boehm and R. Rätty, Devil's attractors and chaos of a driven impact oscillator, *Phys. Lett.* 107A (1985) p. 343; H.M. Isomäki, J. von Boehm and R. Rätty, Chaotic motion of an impact oscillator, *Festkörperprobleme XXV*, Vieweg, Braunschweig 1985, in press.
- [9] J. von Boehm, R. Rätty and H.M. Isomäki, About the chaotic motion of the classical periodically driven damped Duffing's oscillator, these proceedings.

- [10] R.M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* 261 (1976) p. 459; S. Grossmann and S. Thomae, Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes, *Z. Naturforsch.* 32a (1977) p. 1353.
- [11] M.J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* 19 (1978) p. 25; M.J. Feigenbaum, The universal metric properties of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* 21 (1979) p. 669.
- [12] C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, Chaotic attractor in crisis, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) p. 1507.
- [13] L.Glass, M.R. Guevara, J. Belair and A. Shrier, Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator, *Phys. Rev. A* 29 (1984) p. 1384; V. Franceschini, Bifurcations of tori and phase locking in a dissipative system of differential equations, *Physica* 6D (1983) p. 285.
- [14] D.G. Aronson, M.A. Chory, G.R. Hall and R.P. McGehee, Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: a computer-assisted study, *Commun. Math. Phys.* 83 (1982) p. 303; T. Allen, On the arithmetic of phase locking: coupled neurons as a lattice on $\mathbb{R}^2$, *Physica* 6D (1983) p. 305.
- [15] P. Cvitanović, Farey organization of the fractional Hall effect, *Physica Scripta* T9 (1985) p. 202; P. Cvitanović and J. Myrheim, Complex Universality, *Nordita Preprint* 84/5 (1984); S. Ostlund and S. Kim, Renormalization of quasiperiodic mappings, *Physica Scripta* T9 (1985) p. 193.
- [16] T. Horiguchi and T. Morita, Devil's staircase in a one-dimensional mapping, *Physica* 126A (1984) p. 328; T. Horiguchi and T. Morita, Fractal dimension related to devil's staircase for a family of piecewise linear mappings, *Physica* 128A (1984) p. 289.
- [17] J. Villain and M.B. Gordon, The devil's staircase and harmless staircase: I. Oscillating interactions through elastic strains or other harmonic fields, *J. Phys. C: Solid St. Phys.* 13 (1980) p. 3117; K. Shinjo and T. Sasada, Crossover from harmless to devil's staircase in the one-dimensional lattice

gas model, J. Phys. C: Solid St. Phys. 18 (1985) p. L261.

- [18] P. Bak, Commensurate phases, incommensurate phases and the devil's staircase, Rep. Prog. Phys. 45 (1982) p. 587.
- [19] B.B. Mandelbrot, Fractals — Form, Chance, and Dimension, Freeman, San Francisco 1977; S. Aubry, The new concept of transitions by breaking of analyticity in a crystallographic model, in: Solitons and Condensed Matter Physics, Springer Series in Solid-State Sciences vol 8, ed. by A.R. Bishop and T. Schneider, Springer, Berlin 1978, p. 264; S. Aubry, Exact models with a complete devil's staircase, J. Phys. C: Solid St. Phys. 16 (1983) p. 2497; S. Aubry, The twist map, the extended Frenkel-Kontorova model and the devil's staircase, Physica 7D (1983) p. 240; J. von Boehm and P. Bak, Devil's stairs and the commensurate-commensurate transitions in CeSb, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) p. 122; P. Bak and J. von Boehm, Ising model with solitons, phasons and the devil's staircase, Phys. Rev. B 21 (1980) p. 5297; M.H. Jensen, P. Bak, and T. Bohr, Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of mode-locking structure in the circle map, Phys. Rev. Lett. 50 (1983) p. 1637; K. Kaneko, Fates of three-torus. I. — Double devil's staircase in locking, Progr. Theor. Phys. 71 (1984) p. 282.

BENDING WAVE GENERATION IN THE DRILL ROD

Juha Kaski, Jukka Kinnunen and Veli Siekkinen
Tampere University of Technology
Department of Mechanical Engineering

1 INTRODUCTION

Greater efficiency has long been the ultimate aim in the development of rock drilling machines, and accordingly studies of the percussive rock drilling process have mainly been concerned with energy transfer problems. It is only recently that manufacturers and researchers have started to probe into other aspects of the rock drilling process, such as bending waves in the drill rod and the noise generated in the process.

One of the earliest theoretical works concerning bending wave generation in the drill rod is the excellent paper of Shimizu and Takata [1], in which the authors derive an analytical solution to the problem where a rigid piston eccentrically impacts a slightly curved rod. Carlvik [2] has investigated the bending effect caused by an eccentric reaction force resultant at the rod/rock interface.

In the experimental part of [1], the authors investigate how the impact velocity, the mass of the piston and the eccentricity of impact affect the bending wave amplitudes. Experimental investigations of drill rod stresses have also been done by Roberts et al. [3] and Hawkes et al. [4], [5]. A very interesting procedure is shown in the paper of Ögren [6], in which the generation mechanism of bending waves is studied by using high speed photography and stress optics.

Excepting the works of Carlvik and Ögren, none of the authors of [1], [3 - 5] analyze in depth the possibility that the rock end of the rod could be the origin of the bending effect. Carlvik and Ögren

do in turn point to this possibility, but on the other hand only qualitative conclusions can be drawn from their studies; that is, they do not explain the wave phenomenon in its entirety.

This paper presents both theoretical and experimental results for the bending wave generation problem. By calculations and experiments it is shown that the rod/rock interface is the major source of bending waves. The generation mechanism at the interface is as yet unknown, and it deserves further study.

2 FORMULATION OF THE PROBLEM

We simulate the percussive rock drilling process with two slender bodies impacting each other. Only a single blow will be considered. The governing equations of motion, as well as the boundary and initial conditions are drawn from [7], and they are reprinted below; the equations of motion read

$$A_p \ddot{u}_p = c_p^2 (A_p u_{p,x})_{,x}, \quad x \in R_1 \quad (1a)$$

$$\ddot{u} = c^2 u_{,xx}, \quad x \in R_2 \quad (1b)$$

$$a^2 \ddot{w} + w_{,xxxx} = 0, \quad x \in R_2 \quad (a^2 = \rho A / (EI)) \quad (1c)$$

where

- u axial displacement
- w transverse displacement
- A cross-sectional area
- c wave propagation velocity
- ρ mass density
- E Young's modulus
- I area moment of inertia
- R_1 $\{x | 0 < x < L_p\}$
- R_2 $\{x | L_p < x < L_p + L\}$.

Subscript p is used for piston entities, L denotes length.

The boundary conditions are

at $x = 0$,

$$u_{p,x} = 0 \quad \text{for } t \geq 0, \quad (2)$$

at $x = L_p$,

$$q u_{p,x} = u_{,x} \quad \text{for } 0 < t \leq T_{c1} \quad (q = E_p A_p / (EA)) \quad (3a)$$

$$u_{p,x} = u_{,x} = 0 \quad \text{for } t > T_{c1}, \quad (3b)$$

at $x = L_p + L_1$ and $x = L_p + L_2$

$$w = 0 \quad \text{for } t \geq 0, \quad (4)$$

and at $x = L_p + L$,

$$EA u_{,x} - ku - \gamma \dot{u} = 0 \quad \text{for } T_{c2} < t \leq T_{c3} \quad (5a)$$

$$r^2 w_{,xx} + e u_{,x} = 0 \quad \text{for } T_{c2} < t \leq T_{c3} \quad (r^2 = I/A) \quad (5b)$$

$$u_{,x} = w_{,xx} = 0 \quad \text{for } 0 < t \leq T_{c2}, \quad \text{or } t > T_{c3}, \quad (5c)$$

where

T_{c1} piston/rod contact time

T_{c2} L/c

T_{c3} time, when rod and rock rebound

k spring coefficient

γ damping coefficient

e eccentricity

L_i vertical support locations.

Initially, the piston moves towards the rod with velocity v_0 ,

while the rod is assumed to be at rest. This gives rise to the following initial conditions at $t = 0$,

$$u_p = 0, \quad x \in R_1 \cup \{0, L_p\} \quad (6a)$$

$$u = w = 0, \quad x \in R_2 \cup \{L_p, L_p + L\} \quad (6b)$$

$$\dot{u}_p = v_0, \quad x \in R_1 \cup \{0, L_p\} \quad (6c)$$

$$\dot{u} = \dot{w} = 0, \quad x \in R_2 \cup \{L_p, L_p + L\} \quad (6d)$$

3 RESULTS

Equations (1) - (6) were numerically solved by employing a general purpose finite element analysis program ANSYS. Table 1 summarizes the values of the essential parameters chosen in the numerical solution of the bending wave problem. In our study, the initial velocity of the piston is 5 m/s. This is lower than in an actual machine, where velocities may exceed 10 m/s.

Table 1. Values of parameters.

	Piston	Rod	Piston/rod interface	Rod/rock interface
Young's modulus E/GPa	210	204		
Mass density $\rho/\text{kg/m}^3$	7890	7800		
Length L/mm	412	3468		
Cross-sectional area A/mm ²		508		
Area moment of inertia I/mm ⁴		24831		
Beam height h/mm		25.4		
Stiffness coefficient k/kN/mm			600	350
Damping coefficient $\gamma/\text{kNs/mm}$				420
Eccentricity e/mm				11
Initial (axial) velocity $v_0/\text{m/s}$	5			

The finite element model consists of 80 beam elements and of two interface-elements. The latter possess a gap capability which makes it possible to take into account the impact and rebound phenomena. The time-integration is carried out allowing the integration step vary from 5 to 10 microseconds. The smaller step length is used during the contact period expected, while it is decreased after the rebound has been occurred. The rod is supported vertically at points located at $L_1 = 159$ mm from the piston/rod interface, and at 40 mm (the corresponding value of L_2 is 3428 mm) from the rod/rock interface.

The experimental setup is presented in figure 1.

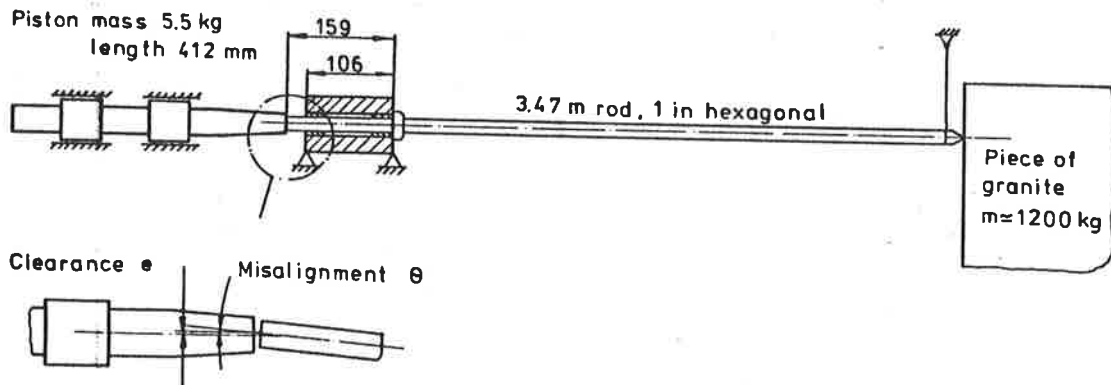


Figure 1. Diagram of experimental setup. The piston is located in a cylinder driven by compressed air. Stroke length 0.5 m.

Figure 2 shows calculated and measured bending wave in the middle of the rod. The disturbance (eccentricity) is assumed to exist at the rod/rock interface in computational implementation. Figures 2.b - d show results from repeated impacts.

The measured bending wave with the rock end free is plotted in figure 3.

4 DISCUSSION AND CONCLUSIONS

The two different assumptions made in the numerical bending wave analysis were that when idealizing the wave generation mechanism, the excitation was given either through an eccentricity of piston blow or through an eccentricity of rock end reaction force resultant.

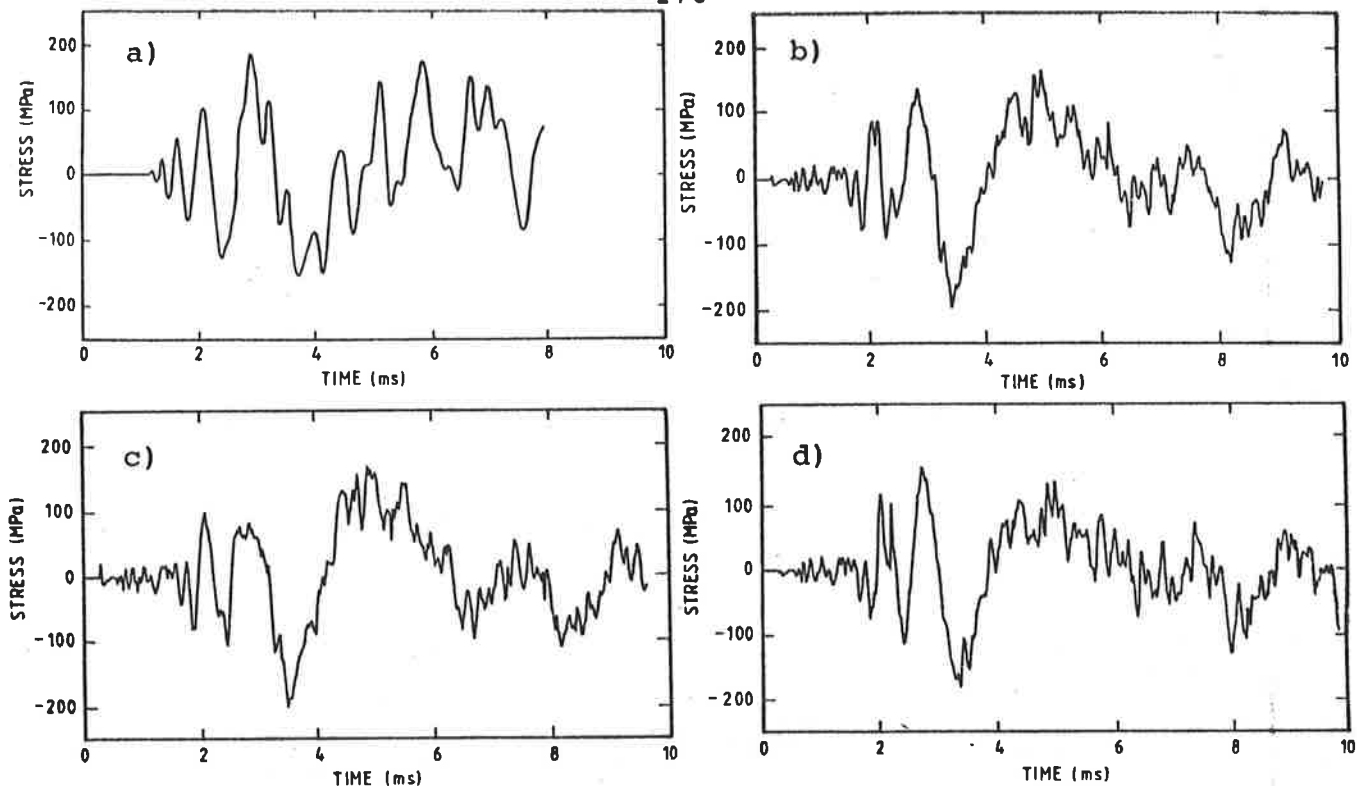


Figure 2. Bending waves (rock supported rod end) at $L/2$ from the impact point. (a): calculated, (b) - (d): measured. Spring and damping coefficient values: $k = 350 \text{ kN/mm}$, $\gamma = 420 \text{ kNs/mm}$.

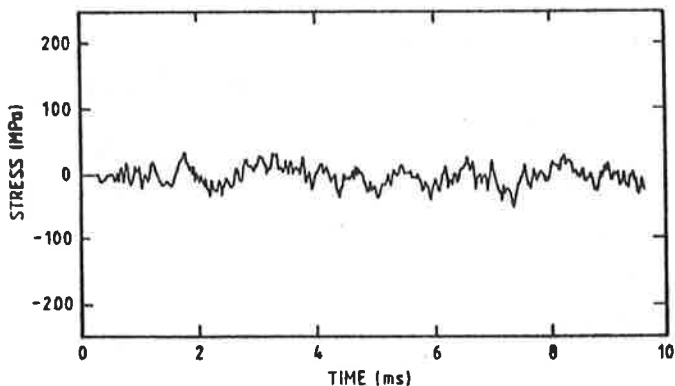


Figure 3. Bending wave with free end.

Due to the nature of wave motion, it is clear that in the former case the bending may occur independent of the rock end boundary condition, while in the latter one no bending is distinguished before the first reflection from the rod/rock interface. This was verified by calculations; the results are not reprinted here. Our working hypothesis was that it is the disturbance at the

piston/rod interface which causes the bending effect. Therefore, the ultimate differences between the calculated and the measured results were rather confusing. Then, after a great deal of "wasted" work, we happened to compare the calculations with the rod/rock end eccentricity with the measured results (figure 2). Ignoring the time period during which the calculated wave appears as a straight horizontal line, the results obtained show notable similarity between

calculations and measurements. The early part of the measured wave can be explained by comparing figures 2.b and 3 with each other. The former shows the wave behaviour with a rock supported end, while the latter corresponds to the free-end case. They agree almost completely during at least the first 1100 microseconds. The bending wave propagation velocity ranges from around 3200 to 3400 m/s which means that during the first 1100 microseconds, the wave has travelled about 3.6 meters, thus, the first reflection of waves from the rod/rock interface has taken place within this time period. Now, if the eccentricity of the piston impact were the major cause of bending waves, a considerable rise in stress amplitude should follow after the first 1100 microseconds - and even earlier - also for the free-end rod. The maximum stress-level, however, does not exceed 40 MPa, while for the rock supported rod, stress-levels up to 200 MPa can be read.

From the above discussion we may conclude that the disturbances at the rod/rock interface are the major source of bending waves.

To explain the bending wave generation mechanism, a further study will be needed. There are at least three possible factors that may participate in producing the bending effect. 1. The stochastic nature of the breakage of rock causes an eccentric reaction force resultant, however ideal the initial settings. 2. The rock end of the rod as a whole is more rigid (with respect to bending) than the rest of the rod, and it can be thought to rotate as a rigid body. This rotation may be more essential factor in producing bending excitation than the elastic wave motion. 3. The rod end consists of two different materials, the drill bit mounted in the end of the rod is made from a very hard metal, being more rigid than the rod material. This may cause an effect similar to that described under the previous item.

As to the use of ANSYS with these kinds of problems, we would like to point out that the program runs relatively slowly because of its generality. Therefore, the development of a more problem-orientated program would be a more rational way to solve the problem.

The bending wave problem was considered in relation to in-plane

motion only, although the displacement field of rod is actually three-dimensional. This can be established by the experimental setup, which is such that in-plane motion is most likely expectable: only slight imperfections in the impact point, which could produce bending in more than one plane, can be perceived, and the bit form is such that it effectively prevents all transverse motion except the vertical in-plane motion.

The model presented here offers a good basis for further analysis of bending waves in the drill rod, and it can also be used as a starting point in the analysis of noise radiating from the rod.

5 ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to express their gratitude to the Academy of Finland for the financial support of this study, and to Tampella Ltd. Tamrock Group for supplying the drilling equipment. O.D. Alimov from the Institute of Automation of Kirghiz SSR Academy of Sciences deserves commendation for taking the initiative in this study.

6 REFERENCES

- [1] Shimizu, H. and Takata, M., Dynamic stresses in the drilling rod. *Memoires of the Faculty of Engineering (Kyushu University)* 19 (1960), pp. 191 - 228.
- [2] Carlvik, I., The generation of bending vibrations in drill rods. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanical Abstracts* 18 (1981), pp. 167 - 172.
- [3] Roberts, A., Hawkes, I. and Furby, J., Transmission of energy in percussive drilling. *Mine & Quarry Engineering* 28 (1962), pp. 447 - 458.
- [4] Hawkes, I., Wright, D.D. and Dutta, P.K., Development of a quiet rock drill, Vol. 2: Sources of drill rod noise. Bureau

of Mines Open File Report 132 - 78, Springfield 1977, 77 p.

- [5] Hawkes, I. and Burks, J.A., Investigation of noise and vibration in percussive drill rods. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanical Abstracts 16 (1979) pp. 363 - 376.
- [6] Ögren, J.E., A dynamic photoelastic study of flexural wave generation in a model of percussive drilling. Journal of Sound and Vibration 86 (1983), pp. 243 - 252.
- [7] Kaski, J., Kinnunen, J. and Siekkinen, V., Stress waves in percussive rock drilling. Submitted for publication in the Journal of Sound and Vibration.

GEODEETTISET JA FOTOGRAMMETRISET MENETELMÄT MUODON JA MUODONMUUTOSTEN MITTAUKSESSA

Hannu Salmenperä

Tampereen teknillinen korkeakoulu

1 JOHDANTO

Mittauksilla hankitaan tietoa suunnittelua ja päätöksentekoa varten. Mittausten avulla ohjataan tuotantoa talonrakennuksessa, koneenrakennuksessa, laivanrakennuksessa jne. Mittausten avulla valvotaan rakenteiden käyttäytymistä käytön tai koekuormituksen aikana.

Geodeettiset menetelmät ovat alkujaan kehittyneet laaja-alaiseen mittaukseen. Nykyisin on kuitenkin tapahtunut selvää eriytymistä. Toisaalta on kehitetty laaja-alaiseen mittaukseen kokonaan uusia menetelmiä, esim. satelliitti- ja inertiaapaikantaminen. Toisaalta on kehitetty järjestelmiä, joiden avulla voidaan suorittaa tosiaikaista kolmiulotteista mittaus- ta esim. konepajaympäristössä.

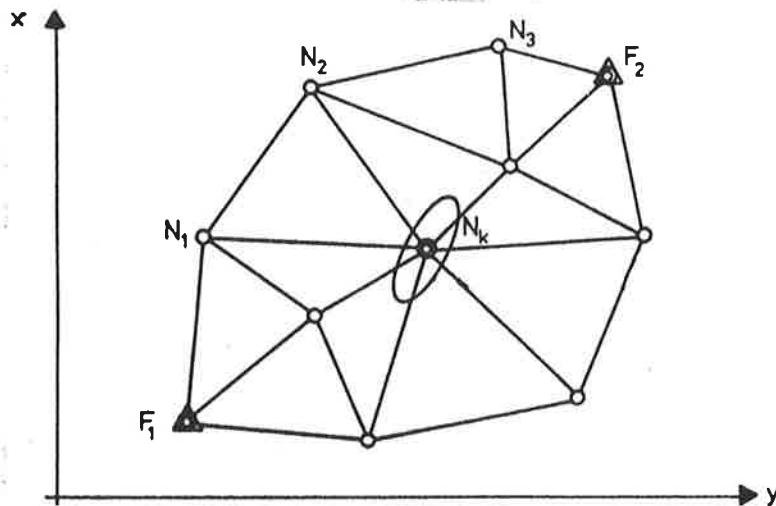
Fotogrammetrian (kuvamittauksen) piirissä on tapahtunut samankaltaista eriytymistä. Tekniikka, jonka merkittävin sovellutus on kolmiulotteinen kartoitusmittaus ilmakuvien avulla, on laajentanut toimialaansa huomattavasti. Toisaalta etsitään luonnonvaroja ja seurataan ympäristön tilan kehitystä ns. kaukokartoitusmenetelmien avulla, toisaalta mitataan rakenteita ja muita kohteita tekniikan, lääketieteen yms. parissa. Myös tosiaikainen kolmiulotteinen fotogrammetrinen mittaus on nykyisin mahdollista.

Tässä yhteydessä ei pyritä aihepiirin kattavaan käsittelyyn. Tarkoituksena on ottaa esille eräitä tyypillisiä mittaustapoja, niiden tarkkuuksia ja sovellutuksia.

2 GEODEETTISET MENETELMÄT RAKENTEIDEN MITTAUKSESSA

Tässä yhteydessä käsiteltävien geodeettisten mittausmenetelmien havainnot muodostuvat kulmista, välimatkoista ja korkeuseroista. Kulmat mitataan teodoliitilla (kuva 1). Tällöin tietty suunta jaetaan kahteen komponenttiin eli suunnan projektioon vaakatasolle (vaaka-suunta, vaakakulma) sekä suunnan ja vaakatason väliseen kulmaan (pystykulma). Nykyaikaisessa teodoliitissa on digitaalinen näyttö ja siinä on mahdollisuus automaattiseen

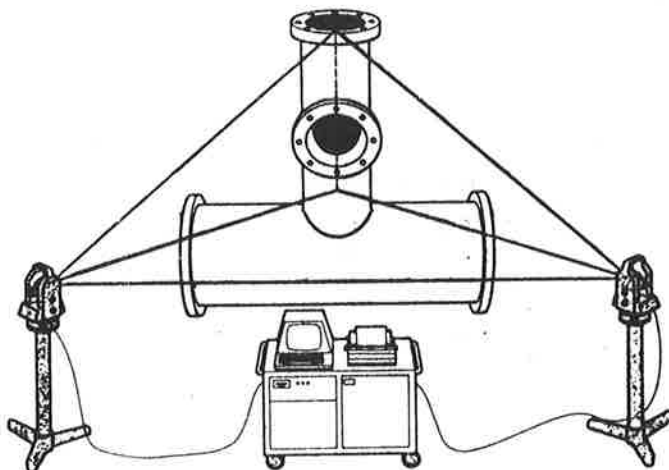
korkeudessa. Yhä enemmän käytetään kuitenkin kolmiulotteista kokonaistasoitusta, jossa kaikkia havaintoja käsitellään tasapuolisesti.



Kuva 2. Esimerkki mittausverkosta.

Tällaisella mittaustavalla saavutettava tarkkuus riippuu luonnollisesti monesta tekijästä, mutta suhteellinen tarkkuus 1:100 000...1:200 000 on melko helposti saavutettavissa eli koordinaattihajonta on yhden millimetrin kertaluokkaa muutaman sadan metrin laajuisessa verkossa.

Teollisuusmittauksissa ja muissa samankaltaisissa tehtävissä on yleistymässä digitaalisten teodoliittien avulla tapahtuva kolmiulotteinen suuntaleikkaus (kuva 3).



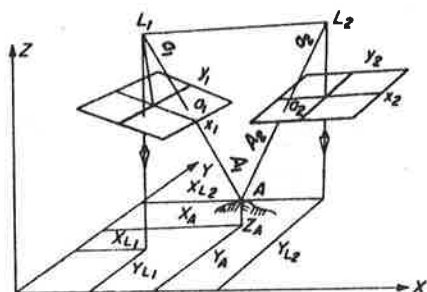
Kuva 3. Suuntaleikkaus.

Kun teodoliitit on kytketty laskentayksikköön, jossa on sopiva ohjelmisto, saadaan nopeasti kolmiulotteista koordinaattitietoa. Tämän lisäksi voidaan tutkia esim. yhteensopivuutta, suoruutta, tasomaisuutta, ympyrämuotoisuutta jne. Tarkkuus on parhaimmillaan luokkaa 1:100 000...1:200 000, mikä merkitsee 0,1...0,2 mm 20 m matkalla.

3 FOTOGRAMMETRISET MENETELMÄT

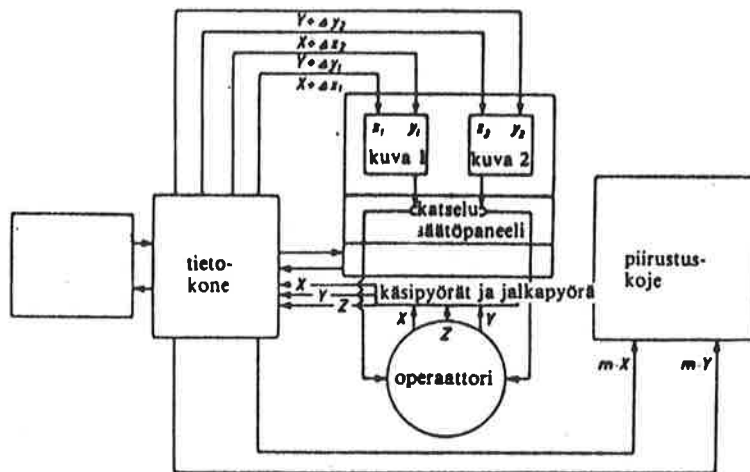
Sellaista kameraa, jonka kuvanmuodostuksen geometria tunnetaan, voidaan käyttää mittakamerana. Varsinaiset mittakamerat ovat kalliita, hinta vaihtelee yleensä välillä 50 000...500 000 mk. Kalibroituja amatöörikameroitakin voidaan joissain tapauksissa käyttää mittauksiin.

Mittakamera toimii verraten tarkasti geometrisen keskusprojektion mukaisesti. Kuvaushetkellä kukin kohdepiste, projektiokeskus ja vastaava kuvapiste ovat samalla suoralla. Jos kukin kohdepiste näkyy ainakin kahdella kuvalla, voidaan kuvilta mitattujen koordinaattien perusteella muodostaa yhtälöryhmä, jonka perusteella mm. tuntemattomat kohdekoordinaatit voidaan ratkaista (kuva 4).



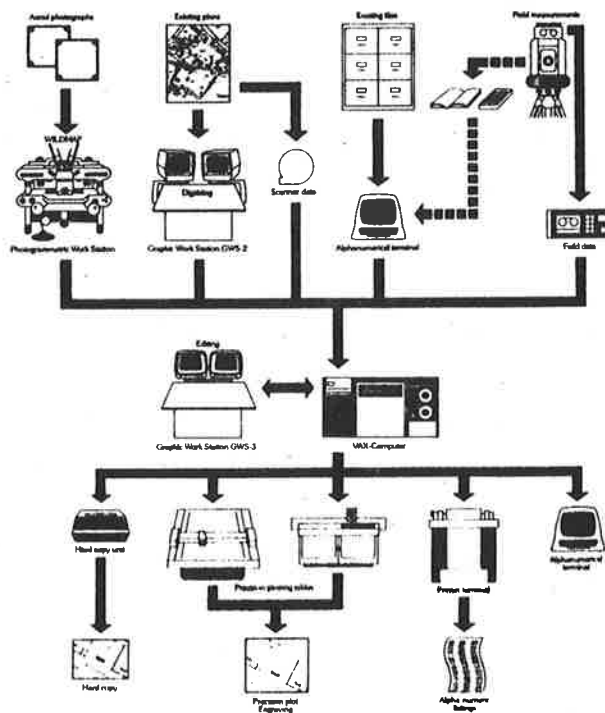
Kuva 4. Kolmiulotteisen kuvamittauksen periaate.

Kuvamittausta toteutetaan ns. analyttisenä fotogrammetriana, jolloin samanaikaisesti käsiteltävien kuvien ja pisteiden lukumäärällä ei ole varsinaisia rajoituksia. Ns. stereomitauksessa (kuva 5) käsitellään kerrallaan kahta kuvaa. Lopputulos on tällöin usein graafinen (muotoviivat, profiilit yms.).



Kuva 5. Analyttisen stereomittauskojeen toimintaperiaate.

Fotogrammetrisen mittauksen tarkkuus vaihtelee yleensä välillä 1:10 000...1:100 000. Suhteellinen tarkkuus 1:100 000 asettaa mittauksen suoritukselle suuria vaatimuksia, mutta se on saavutettavissa.



Kuva 6. Esimerkki geodeettis-fotogrammetrisesta mittaus- ja tietojenkäsittelyjärjestelmästä.

Eräänä oleellisena fotogrammetrisen mittauksen haittapuolena on usein aikaviive itse kuvauksen ja mittaustulosten valmistumisen välillä. Tosiainen kolmiulotteinen kuvamittaus on uutta tekniikka, joka on vasta kehittymässä. Kaupallisia mittausjärjestelmiä ei ole vielä saatavissa. Kuitenkin näitä järjestelmiä jo ilmeisesti käytetään esim. tehdasautomaation osana.

Suomessa VTT:n maankäytön laboratorio on rakentanut järjestelmän, jonka avulla tätä tekniikkaa voidaan käytännössä tutkia ja kehittää. Tällaiseen järjestelmään kuuluu vähintään kaksi puolijohdekameraa, jotka on kytketty tarkoitusta varten kehitettyyn prosessoriin. Prosessori tulkitsee kohteen yksityiskohtia ja laskee niiden kolmiulotteisen sijainnin. Koko aihepiiri on voimakkaan kehityksen alasta niin kameratekniikan, hahmotunnistuksen kuin varsinaisen laskentatekniikan osalta.

4 MITTAUSHAVAINTOJEN KÄSITTELY JA MITTAUSTULOSTEN TARKKUUS

Mittaustulos on arvoton, ellei sen tarkkuutta ja luotettavuutta tunneta. Kun mittausalan ammattilaiset ja mittaustulosten hyödyntäjät eivät aina ymmärrä toistensa käsitteitä, otetaan seuraavassa esille eräitä perusasioita.

Luotettavuus merkitsee mittaustekniikassa mittausjärjestelyn kykyä paljastaa karkea virhe. Mittaus voi olla hyvin tarkka olematta luotettava tai se voi olla luotettava olematta erityisen tarkka. Luotettavuutta voidaan parantaa esim. tekemällä ylimää räisiä mittauksia sekä suunnittelemalla mittauksen geometrinen rakenne sopivaksi.

Lopputuloksen tarkkuus riippuu havaintojen tarkkuudesta ja määrästä sekä mittauksen geometriasta. Yksittäisten havaintojen tarkkuus selviää parhaiten varsinaisten kalibrointi-mittausten avulla, mutta usein voidaan järjestää mittaus ainakin osin itsekalibroivaksi. Tämä tarkoittaa sitä, että suunnitellaan mittaus niin, että itse päätuntemattomien (esim. koordinaattien) lisäksi kyetään määrittämään myös kalibrointiparametreja.

Kuten edellä on tullut ilmi, käytetään metrisessä mittaustekniikassa aina ylimää räisiä havaintoja. Tarkoituksena on parantaa mittauksen luotettavuutta ja tarkkuutta. Luonnollisesti kaikkien havaintojen antamaa informaatiota tulee käyttää tasapuolisesti. Laskenta suoritetaan nykyisin usein ns. virheyhtälötasoitukse n. Jokainen havainto antaa yhden yhtälön. Ratkaisu haetaan pienimmän neliösumman periaatteen mukaisesti eli havaintoihin liittyvien ristiriitojen neliösumma minimoidaan. Havaintoja on luonnollisesti painotettava niiden tarkkuuden mukaan. Tämä on toisinaan ongelmallista jo siitäkin syystä, että samassa tasoituksessa voi olla mukana hyvin erilaisia havaintoja, esim. kulmia, välimatkoja, valokuvilta mitattuja koordinaatteja jne.

Jos virheyhtälöitä merkitään

$$Ax + l = v \quad (1)$$

missä

A on kerroinmatriisi

x on tuntemattomien muodostama vektori

l on havaintovektori

v on havaintoihin liittyvien virheiden vektori

niin ns. normaaliyhtälöt ovat muotoa

$$A^T P A x + A^T P l = N x + b = 0 \quad (2)$$

missä

P on painomatriisi.

Normaaliyhtälöiden lukumäärä on sama kuin tuntemattomien lukumäärä. Niiden ratkaisuna saadaan tuntemattomien arvot. Normaaliyhtälöiden kerroinmatriisi kuvaa mittauksen rakennetta. Sen käänteismatriisi on ns. painokerroinmatriisi, jonka avulla saadaan selville tuntemattomien hajonnat ja tuntemattomien väliset korrelaatiot.

Normaalijakautuneessa suureessa hajonnan s määrittelemien rajojen $\pm s$ sisälle sattuu vain 68 % tapauksista. Hajonta ei siis ole mikään mittaustoleranssi. Rajojen $\pm 3s$ sisälle sattuu 99,7 % tapauksista. On kuitenkin huomattava, että hajonta kuvaa lähinnä mittauksen sisäistä tarkkuutta. Erilaiset kompensoimattomat systemaattiset virheet saavat aikaan sen, että ns. ulkoinen tarkkuus eli todellinen tarkkuus on hajonnan antamaa arvoa heikompi. Ulkoista tarkkuutta on usein vaikeaa arvioida. Sen arviointi perustuu paljolti kalibrointimittauksiin ja kokemukseen.

Mittaustulosten ilmoittamisessa tulisi aina esittää arvio tarkkuudesta. Tällöin olisi hyvä arvioida erikseen ulkoista ja sisäistä tarkkuutta. Ellei erityisiä tarkkuuslukuja anneta, saa virhe olla korkeintaan puolet viimeisestä merkitsevästä numerosta. Täten esim. ilmaisut 1,00 m ja 1251 m tarkoittavat, että pituuden virhe korkeintaan 5 mm ja vastaavasti 0,5 m. Esim. ilmaisu 1200 m on epämääräinen. Se tulisi esittää muodossa 1,200 km edellyttäen, että loppunollat ovat merkitseviä.

KIMMOAALLON ETENEMISEN SEURAAMINEN HOLOGRAFIAA SOVELTAEN

Vesa Karppinen
Joensuun yliopisto
Fysiikan laitos

1 JOHDANTO

Holografia on kuvantallennusmuoto, jossa kohteesta tulevan aaltorintaman vaihe ja intensiteetti tallentuu filmilevyllä. Tämä perustuu koherentin valon ja vertailuaallon käyttöön. Rekonstruoinnissa nähdään kohteen kolmiulotteinen virtuaalikuva.

Holografisessa interferometriassa tallennetaan samalle filmilevyllä kohteesta tuleva aaltorintama kahdesti (kaksoisvalotusholografia), jolloin kohteen tila muuttuu valotusten välillä tai tallennetaan kohteesta tulevan aaltorintaman aikakeskiarvo (aikakeskiarvoholografia). Tällöin saadaan informaatiota tutkittavan esineen värähdysominaisuuksista. Kun tällaisia interferogrammeja rekonstruoidaan, nähdään kuvassa tummia ja kirkkaita interferenssiviivoja. Näiden avulla voidaan analysoida tapahtuneita muutoksia.

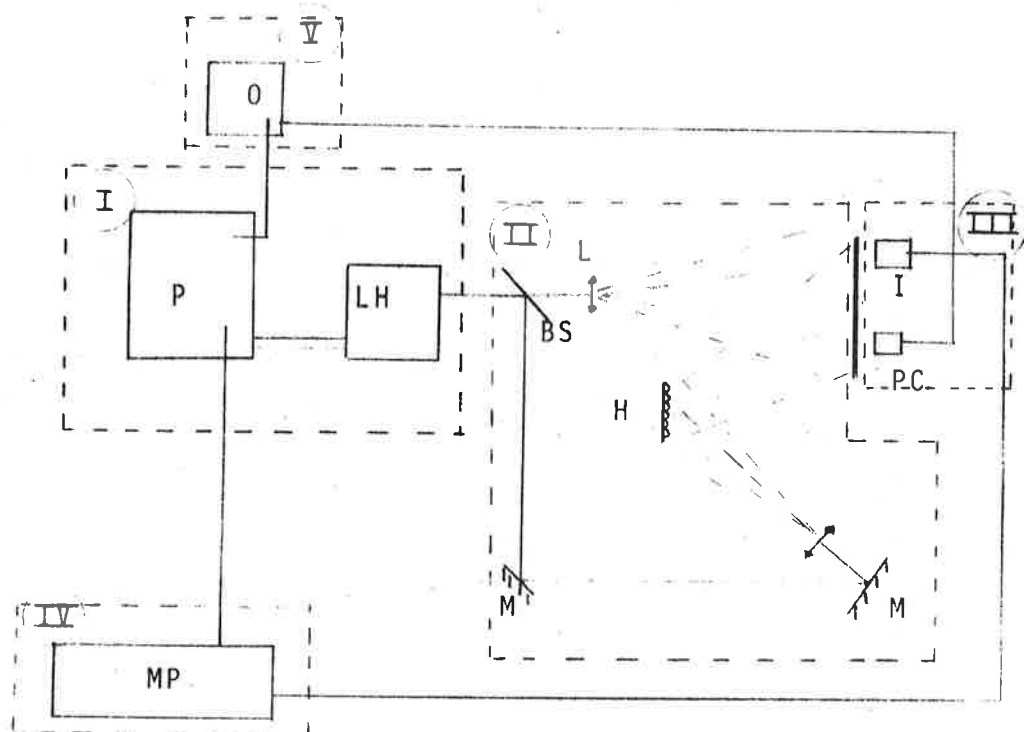
Tutkittaessa häiriön, esimerkiksi kimmoaallon etenemistä käytetään kaksoisvalotusholografiaa. Koherentti valo saadaan suuritehoisesta pulssilaserista. Tämän pulssin kesto on suhteellisen lyhyt ja se voidaan jakaa kahteen yhtäsuureen osaan. Pulssien välinen aika on säädettävissä tietyissä rajoissa.

Koska kaksoisvalotushologrammista saadaan selville vain valotusten välillä tapahtuneet muutokset, on aallon etenemistä seurattaessa tunnettava tarkoin tapahtuman ajoitukset ja toisaalta ajoitukselta vaaditaan säädettävyyttä. Tämä tapahtuu parhaiten mikroprosessorilla. Tällainen laitteisto on rakennettu ja sitä kuvataan seuraavassa lyhyesti.

2 KUVAUSJÄRJESTELY JA - LAITTEISTO

Häiriön etenemisen seuraamiseen pystytetty laitteisto ja sen osat on esitetty kuvassa 1. Siitä voidaan erottaa seuraavat pääosat:

- rubiinilaser virtalähteineen I
- hologrammin tallennuksen komponentit II
- iskulaitteisto ja anturi III
- mikroprosessori oheislaitteineen IV
- muistioskilloskooppi (välttämätön aina käytettäessä pulssilaseria) V



L	linssi	P	laserin virtalähde
M	peili	LH	laserpää
H	hologrammilevy	MP	mikroprosessori
BS	säteenjakaja	I	iskuri
O	sokilloskooppi	PC	anturi

Kuva 1. Kuvausjärjestelyn periaatekaavio komponentteineen.
Kohde on piirretty viivana iskurin eteen.

Kuvaustapahtumaa ohjataan mikroprosessorilla. Tämä antaa liipaisun laserin virtalähteelle, liipaisee iskurin sekä ajoittaa tarvittavat viiveet. Valopulssi viivästyy 0.8 - 1.2 millisekuntia riippuen käytetystä energiasta, koska rubiinisauvojen ympärillä olevien salama-putkien virittyminen vie oman aikansa. Pulssien välisen ajoituksen huolehtii itse laserin virtalähde. Yhden valopulssin kesto on 25 nanosekuntia, joten se kykenee pysäyttämään suhteellisen nopeatkin liikkeit.

Mikäli halutaan seurata aallon etenemistä lähtien staattisesta tilanteesta ensimmäinen valopulssi tulee samanaikaisesti, kun iskuri osuu esineen pintaan. Muistioskilloskoopin kuvaputkelta voidaan kuvauksen jälkeen lukea tapahtumien ajoitukset. Siltä nähdään myös hetki, jolloin häiriö saapuu anturille. Tämä voidaan luonnollisesti sijoittaa haluttuun kohtaan. Anturina toimii piezokide.

3 KUVIEN ANALYSOINNISTA

Kaksoisvalotushologrammista rekonstruoituva intensiteettijakautuma on verrannollinen lausekkeeseen

$$\cos^2\left(\frac{1}{2} \vec{k} \cdot \vec{L}\right), \quad (1)$$

missä

$\vec{L}$ siirrosvektori (valotusten välillä tapahtunut liike)
 $\vec{k}$ herkkyysvektori.

Tälle on voimassa yhtälö (2)

$$\vec{k} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1, \quad (2)$$

missä

$\vec{k}_1$ valaisun aaltovektori
 $\vec{k}_2$ havaintosuunnan aaltovektori.

Lisäksi näille on voimassa yhtälö (3).

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3)$$

missä

λ laservalon aallonpituus (rubiinilaserilla 692 nm).

Puuttumatta siihen miten saadaan analysoitua absoluuttinen siirrosvektori suuntinen voidaan kuitenkin sanoa: Kahden peräkkäisen tumman tai kirkkaan viivan välillä on siirroksessa aallonpituuden puolikkaan suuruinen ero. Tarkkaan ottaen tämä ei pidä paikkaansa, sillä esimerkiksi kiinteän kappaleen liikkeessä kohteen päällä nähdään tasaväliset yhdensuuntaiset viivat ja jokainen näistä edustaa täsmälleen yhtä suurta siirrosta. Tutkittaessa kimmoaallon etenemistä ei tämä efekti vaikuta tai se voidaan eliminoida.

Sopiva viivatiheys saadaan oikealla pulssierolla. Mikäli tämä on liian pitkä pakkautuvat viivat niin lähekkäin, ettei niitä voida erottaa toisistaan.

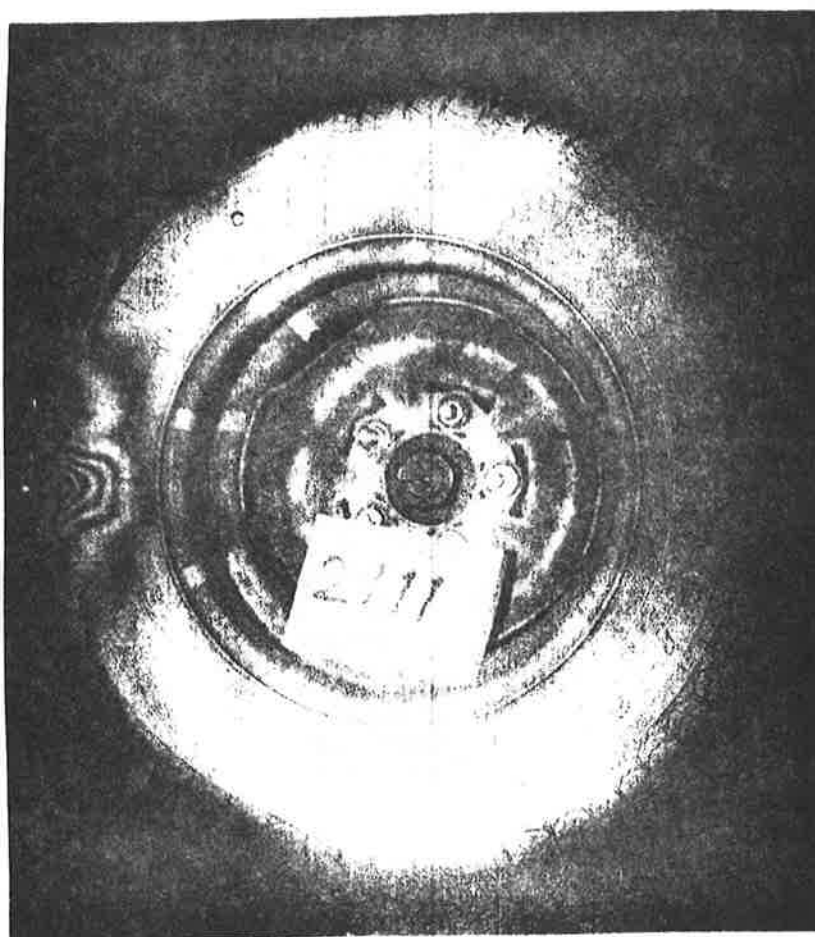
4 ERÄITÄ ESIMERKKIKUVIA

Seuraavassa esitetään lyhyesti eräitä mittaustuloksia. Mittaukset on suoritettu Joensuun yliopiston Väisälä laboratoriossa interferometrian tutkimusryhmän toimesta artikkelin kirjoittajan johdolla. Yksityiskohtaisia mittaustuloksia ei ole mahdollista julkaista, koska useimmat mittaukset on suoritettu teollisuuslaitoksille. Sopimuksissa ei ole annettu tulosten julkaisulupaa.

Kuvassa 2 on iskun vaikutuksesta syntyneet interferenssiviivat auton renkaassa. Kuvaustapahtuma oli seuraava:

isku + 20 μ s + I valopulssi + 100 μ s + II valopulssi.

Iskun antavan teräskuulan kylki näkyy kuvassa vasemmalla kirkkaana pisteenä. Aallon maksimikohta on edennyt ensimmäisen viiveen aikana renkaan sivuun. Kuvasta näkyy selvästi kuinka sivussa kulkevat teräsvaijerit muuttavat kimmoaallon kulkua. Deformaatio ei etene säteittäisesti vaan muuttuu tasomaiseksi vaijereiden suuntaiseksi.

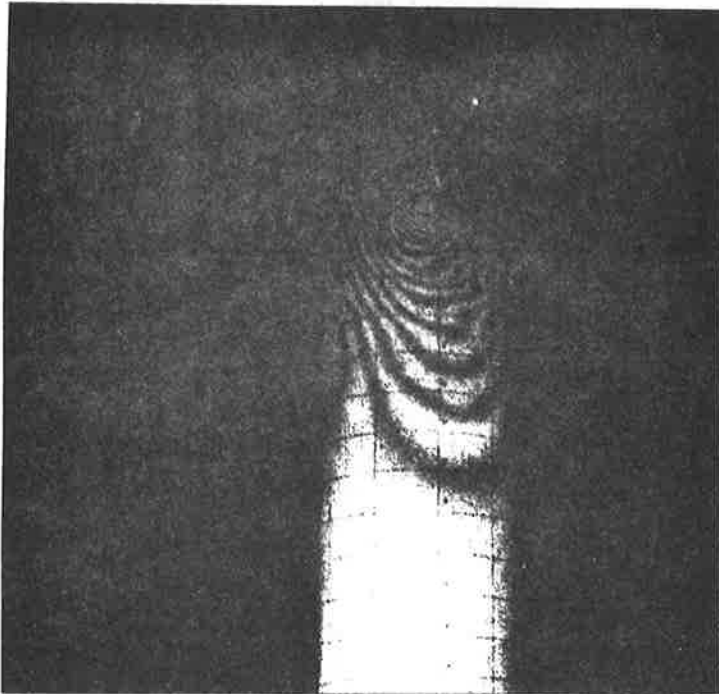


Kuva 2. Kimmoaallon eteneminen autonrenkaassa

Kuvassa 3 on esitetty valokuvatut interferenssijuovat teräsputken kyljessä. Teräskuula on iskenyt putken päähän hitsatun laipan reunaan. Kuulan kylki näkyy jälleen kirkkaana pisteenä. Kuvaustapahtuman ajoitus on seuraava:

isku $\rightarrow$ 15 μ s $\rightarrow$ I valopulssi $\rightarrow$ 50 μ s $\rightarrow$ II valopulssi.

Kyseinen teräsputki on käytöstä poistettu korroosioaurioiden vuoksi. Putken seinämän ohenemat vaikuttavat aallon etenemisnopeuteen ja paikallisiin amplitudeihin. Seuraamalla viivatiheyksiä ja poikemia niissä voidaan paikallistaa alueet, jotka poikkeavat ympäristöstään. Seinämän ohenemat voidaan tämän jälkeen mitata esimerkiksi ultraäänimittareilla.



Kuva 3. Kimmoaallon eteneminen teräsputkessa.

Putkistomittauksissa paljastui varsin mielenkiintoinen ilmiö, jonka aiheuttaja on toistaiseksi selvittämättä. Kun häiriö on ehtinyt edetä läpi koko putken, havaitaan viivakuvioissa alueita, joissa viivojen kontrasti putoaa nopeasti. Tämä ei selity aina ylisuurella deformaatiolla. Toisin sanoen pulssien välinen aika olisi ollut deformaatioon nähden liian pitkä. Eräs mahdollisuus on se, että näissä alueissa summautuvat eri puolilta tulevat aallot. Toinen mahdollisuus on, että kyseiset alueet värähtelevät erittäin suurella taajuudella. Viimeisenä esitetty vaihtoehto voisi johtua paikallisista rakennevirheistä. Ilmiön todellinen luonne on kuitenkin selvittämättä. Varmaa kuitenkin on, ettei kyseessä ole kuvausvirhe tai muu mittauslaitteiston toimintahäiriö.

5 SOVELLUSMAHDOLLISUUKSISTA

Mittausmenetelmää voidaan soveltaa mitä erilaisimmille kohteille. Ainoana vaatimuksena on, että kohteeseen on voitava viedä laservalo ja saada siitä osa takaisin heijastuksena. Läpinäkyviä kohteita on myös mahdollista tutkia. Tällöin kohteessa on tapahduttava taitertoimen muutoksia aallon vaikutuksesta.

Valonlähteenä käytetään pulssilaseria, joten mittausolosuhteiden ei tarvitse olla laboratorio-olosuhteet. Kesällä 1986 on tarkoitus suorittaa putkistomittauksia rakennevirheiden paljastamiseksi kenttäolosuhteissa.

KOSKETUSONGELMAN VARIAATIOPERIAATE SIIRTYMÄMENETELMÄLLE

Matti Lähteenmäki

Tampereen teknillinen korkeakoulu

Konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Kantavat rakenteet ja koneenelimet suunnitellaan niin, että niissä kuormitustilanteessa vallitsevat jännitykset eivät ylitä sallittuja arvoja. Mitoituksen perustana olevassa laskentamallissa on todelliset pintakuormitukset ja tukilaitteet useimmiten suuresti idealisoitu, ja niiden läheisyyteen syntyvät jännityshuiput jätetään huomiotta Saint Venant'in periaatteeseen vedoten. Tällainen menettely on perusteltua tapauksissa, joissa vaurioitumisen kannalta selvästi ratkaisevampia ovat rasitukset rakenteen tai koneenelimen muissa osissa. Toisinaan vaurioitumisen aiheuttavat juuri pintakuormitusten ja tukien läheisyyteen syntyvät jännityshuiput, eikä niiden tarkastelua voi mitoituksessa sivuuttaa. Laskentamallin tulee näissä tapauksissa sisältää pintakuormitukset ja tukilaitteet paremmin todellisuutta vastaavina.

Laajasti tulkiten voidaan sanoa kappaleen pintakuormituksen tai tuennan syntyvän siten, että se kuormitustilanteessa joutuu kosketukseen muiden kappaleiden kanssa. Tarkempi käsittely johtaa näin ollen kappaleiden välisen kosketusongelman tarkasteluun. Tällä tarkoitetaan kappaleiden jännitystila- ja siirtymäkentän ratkaisemista kosketustilanteessa ottaen huomioon kosketuspinnan muoto ja kuormituksen jakaantuminen sillä. Monissa kosketusongelmissa ei kosketuspintaa ja sen kuormitusjakautumaa etukäteen tunneta, vaan niiden määrittäminen kuuluu kosketusongelman ratkaisemiseen. Kosketuspinnan lähiympäristön pisteiden jännityskomponentteja sanotaan kosketusjännityksiksi.

Kosketusongelman ratkaiseminen on oleellisesti vaikeampaa kuin

sellaisen tehtävän käsittely, jossa ennalta tunnetaan kappaleen pintakuormitukset ja tuenta. Tästä syystä suunnittelijan on tarkoin harkittava, milloin kosketusjännitysten tarkastelu on aiheellinen. Erityisesti tapauksissa, joissa kosketuspinta on pieni verrattuna kappaleen pintaan, ja sen kautta kappaleeseen tuleva kuormitus on suuri, voivat kosketusjännitykset näytellä keskeistä osaa vaurioitumisessa. Dynaamisesti kuormitetuissa kappaleissa ovat kosketusjännitykset usein luonteeltaan vaihtelevia. Kosketuspintojen läheisyydessä olevat jännityshuiput voivat tällöin aiheuttaa väsymismurtuman syntymisen.

Konetekniikan piiristä voidaan löytää monia esimerkkujä, joissa kosketusjännityksillä on huomattava merkitys. Tällaisia ovat muun muassa seuraavat tapaukset:

- Veturin pyörästä ratakiskoon kohdistuva kuormitus aiheuttaa sen yläosiin suuria kosketusjännityksiä, joiden ansiosta kisko saattaa vaurioitua. Vaurio alkaa tavallisesti hieman kiskon yläpinnan alapuolelle tulevasta kiskon suuntaa vastaan kohtisuorasta halkeamasta ja leviää siitä lopulta kiskon yläpinnalle.
- Hammaspyöräparin rynnöissä oleviin hampaisiin syntyy kosketusjännitystilakenttä, joka voi aiheuttaa hampaan pinnalle kuoppia. Kuoppien pohjat sijaitsevat usein leikkausjännityksen maksimikohdassa.
- Vierintälaakereiden vierintäelimen ja -radan välisestä kosketuksesta aiheutuu samantapaisia vaurioita kuin hammaspyörien tapauksessa.
- Holkin ja akselin välisessä kutistusliitoksessa muodostuu holkin päiden kohdalle jännityshuippu, joka on otettava huomioon akselin mitoituksessa.
- Ruuviliitoksessa siirtyy usein 30 - 40 % ruuvivoimasta mutterin ensimmäisen kierteen kautta. Kierteen pieni pinta siirtää tällöin suuren voiman. Samantapainen tilanne on ruuvin kannan ja liitettävän osan välisessä kosketuksessa.

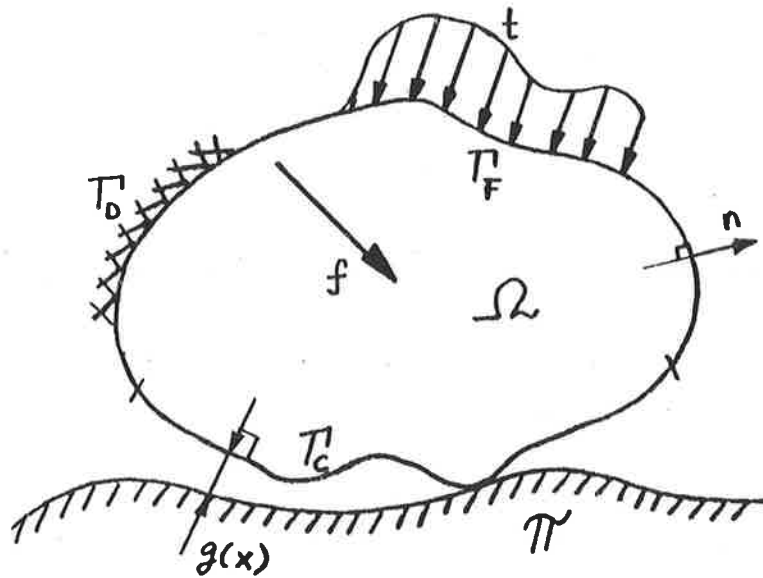
- Lävistyksessä meistin ja kappaleen tai valssauksessa valssaimen ja aineen välisen kosketusjännitystilakentän tunteminen on hyödyllistä tarvittavien työstövoimien arvioimisessa.

Edellä esitetyn perusteella on selvää, että suunnittelutyössä esiintyy usein tilanteita, joissa on tarpeellista ratkaista kappaleiden välinen kosketusongelma. Joissakin geometrialtaan melko yksinkertaisissa tapauksissa on mahdollista löytää tehtävälle analyttinen ratkaisu. Useimmissa käytännön suunnittelutehtävissä on kappaleiden geometria kuitenkin niin mutkikas, että laskennassa on pakko siirtyä numeerisiin menetelmiin. Lujuusopillisissa ongelmissa on elementtimenetelmä osoittautunut ehdottomasti tehokkaimmaksi numeeriseksi ratkaisumenetelmäksi, ja siihen perustuvia laskentaohjelmistoja on nykyisin laajassa käytössä. Näiden ohjelmistojen sisältämät kosketusongelmien käsittelymahdollisuudet ovat kuitenkin vaatimattomia tai niitä ei ole lainkaan. Erityisesti tämä koskee ns. kitkalista kosketusta, jossa otetaan huomioon kosketuspintojen väliset kitkavoimat. Kosketusongelmien ratkaisemisen tulo käytännön suunnitteluprosessin osaksi vaatii laskentaohjelmistojen täydentämistä tältä osin.

Tavanomaisten lujuusopin ongelmien elementtimenetelmän mukaisessa käsittelyssä ovat variaatioperiaatteet osoittautuneet hyödyllisiksi. Yleensä käsiteltävä ongelma voidaan formuloida jonkin funktionaalin stationaarisuustehtäväksi. Kosketusongelma on aina luonteeltaan epälineaarinen, koska kosketuspinta ja sen kuormitusjakauma ovat tuntemattomia kappaleen siirtymäkentän funktioita. Kun kitkavaikutukset otetaan huomioon, on kosketustapahtuma palautumaton prosessi. Nämä ominaisuudet tekevät kosketusongelman ratkaisemisen huomattavasti vaikeammaksi lineaarisen lujuusopin tehtävään verrattuna. Tämän kirjoituksen tarkoituksena on esittää kimmoisen kappaleen ja jäykän alustan välisen kosketusongelman variaatioperiaate ja tarkastella sen ominaisuuksia.

2 TEHTÄVÄN ASETTELU

Tarkastellaan kuvan 1 mukaista kimmoista kappaletta, jonka sisäpisteet muodostavat joukon Ω ja reunapisteen joukon Γ kolmiulotteisessa



Kuva 1. Tehtävän asettelu.

euklidisessa avaruudessa sekä sen kanssa kosketuksessa olevaa jäykkää alustaa π . Kappaleen reuna on jaettu kolmeen pistevieraaseen osaan Γ_D , Γ_F ja Γ_C . Osassa Γ_D on siirtymät u_i annettu ja osassa Γ_F tunnetaan pintavoimat t_i . Reunan osa Γ_C on mahdollinen kosketuspinta, joka sisältää todellisen kosketuspinnan, mutta voi olla sitä laajempikin. Jännityskomponentit σ_{ij} ja tilavuusvoimat f_i toteuttavat alueessa Ω lineaariset statiikan tasapainoyhtälöt

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1)$$

Reunan osalla Γ_D tunnetaan siirtymät

$$u_i = \bar{u}_i \quad (2)$$

Reunan osalla Γ_F tunnetaan pintavoimat, joita sitoo jännityskomponentteihin Cauchyn yhtälöt

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad (3)$$

missä n_i on pinnasta Γ ulospäin suunnattu ykkösnormaalivektori. Venymäkomponenttien ja siirtymien väliset kinemaattiset yhtälöt ovat lineaariset, ts.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

Kappaleen Ω materiaali oletetaan lineaarisesti kimmoiseksi, jolloin jännitys- ja venymäkomponentteja sitoo toisiinsa Hooken laki

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (5)$$

Konstitutiivisen tensorin komponenteilla oletetaan olevan seuraavat ominaisuudet alueessa Ω

$$E_{ijkl} \in L^\infty(\Omega) \quad , \quad \max_{1 \leq i,j,k,l \leq 3} \|E_{ijkl}\|_\infty \leq M$$

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij} \quad (\text{symmetria}) \quad (6)$$

$$E_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl} \geq m \alpha_{ij} \alpha_{ij} \quad \forall \alpha_{ij} \text{ s.e. } \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (\text{elliptisyys}),$$

missä $m, M > 0$ ovat vakioita.

Yhtälöiden (1), (4), (5) ja (6) perusteella voidaan kirjoittaa

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} u_{k,l} \quad (7)$$

$$(E_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + f_i = 0 \quad (8)$$

Tarkastellaan seuraavaksi kosketuspinnan Γ_C reunaehtoja. Jaetaan siirtymävektori pinnan normaalin ja tangenttitason suuntaisiin osiin u_n ja u_{Ti} , jolloin

$$u_n = u_i n_i \quad , \quad u_{Ti} = u_i - u_n n_i = u_i - u_j n_j n_i \quad (9)$$

Samalla tavoin jaetaan pinnan Γ_C jännitysvektori

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j \quad (10)$$

normaalin ja tangenttitason suuntaisiin osiin σ_n ja σ_{Ti} , missä

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j, \quad \sigma_{Ti} = \sigma_{ij} n_j = \sigma_n n_i = \sigma_{ij} n_j - \sigma_{kl} n_k n_l n_i. \quad (11)$$

Kappaleen ja alustan välisen välyksen kuormittamattomassa tilassa antava funktio g oletetaan jatkuvaksi reunalla Γ_C , ts. $g \in C^0(\Gamma_C)$. Siirtymän u_n on toteutettava ehto

$$u_n \leq g. \quad (12)$$

Jännityksen σ_n on toteutettava ehto

$$\sigma_n \leq 0, \quad (13)$$

mikä tarkoittaa sitä, että kosketuspinnalla ei voi olla normaalin suuntaista vetojännitystä. Selvästi on voimassa joko $u_n < g$ ja $\sigma_n = 0$ tai $u_n = g$ ja $\sigma_n \leq 0$. Siis joka tapauksessa on voimassa

$$\sigma_n (u_n - g) = 0. \quad (14)$$

Normaalin suuntaisista suureista σ_n ja u_n tunnetaan näin ollen toinen jokaisessa reunan Γ_C pisteessä, etukäteen ei vain tiedetä kumpi. Tämä on seuraus siitä, että todellista kosketuspintaa ei ennalta tunneta.

Yhtälön (12) mukaista reunaehtoa sanotaan unilateraaliseksi. Nimitys johtuu siitä, että virtuaalisten siirtymien periaatteessa tällaisessa tapauksessa kinemaattisesti luvallinen virtuaalisten siirtymien kenttä v_i toteuttaa ehdon $v_n \leq g$, mutta ei ehtoa $-v_n \leq g$, joten $-v_i$ ei ole kinemaattisesti luvallinen. Reunaehtoa, joka toteuttaa ehdon: v_i kinemaattisesti luvallinen $\Rightarrow -v_i$ kinemaattisesti luvallinen, sanotaan vastaavasti bilateraaliseksi. Edellä sanotun perusteella on ilmeistä, että unilateraalisen reunaehdon läsnäolo tuo kosketusongelman variaatioperiaatteisiin uusia piirteitä.

Kosketuspinnalle on vielä annettava kitkalaki, ts. on määriteltävä, miten tangenttitason suuntaiset jännitykset eli kitkajännitykset σ_{Ti} riippuvat kosketuspinnan muista suureista. On luonnollista

otaksua, että kosketuspinnan tietyn pisteen tangenttitason suuntainen jännitysvektori osoittaa vastakkaiseen suuntaan, kuin tämän pisteen tangenttitason suuntainen siirtymävektori. Kitkajännitysvektorin itseisarvon oletetaan riippuvan tarkastelupisteen tangenttitason suuntaisen siirtymävektorin itseisarvosta sekä sen jonkin ympäristön normaalin suuntaisen jännityksen σ_n jakautumasta.

Eräs mahdollisuus on käyttää Coulombin kitkalakia lokaalisti jännityskomponentteihin, jolloin saadaan

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{Ti} &= 0, & \text{kun } u_n < g \\ (\sigma_{Ti} \sigma_{Ti})^{\frac{1}{2}} &< \mu |\sigma_n| & \Rightarrow \dot{u}_{Ti} = 0 \\ (\sigma_{Ti} \sigma_{Ti})^{\frac{1}{2}} &= \mu |\sigma_n| & \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ s.e. } \dot{u}_{Ti} = -\lambda \sigma_{Ti} \end{aligned} \right\} \text{ kun } u_n = g \quad (15)$$

missä $\mu \geq 0$ on kitkakerroin. Tämän on kuitenkin havaittu kuvaavan huonosti metallipintojen kosketusta ja aiheuttavan matemaattisia ongelmia [5]. Paremmiin nykyistä käsitystä metallipintojen kosketuksesta vastaa Oden - Pires -kitkalaki [5], [6], [8], joka tapauksessa $u_n = g$ on

$$\sigma_{Ti} = -\mu S_p(\sigma_n) \phi_\epsilon \left((u_{Ti} u_{Ti})^{\frac{1}{2}} \right) \frac{u_{Ti}}{(u_{Ti} u_{Ti})^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

Yhtälössä (16) S_p on operaattori, joka antaa painotetun keskiarvon tarkastelupisteen p -säteisen palloympäristön normaalin suuntaisista jännityskomponenteista σ_n . ϕ_ϵ on parametrilla ϵ riippuva, jatkuva ei-vähenevä reaaliuuttujan funktio, joka toteuttaa tietyt ehdot.

Kimmoisen kappaleen ja jäykän alustan välistä kosketusongelmaa luonnehtiva yhtälöjärjestelmä on edellä esitetyn perusteella

tasapainoyhtälö alueessa Ω

$$(E_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + f_i = 0 \quad (17)$$

reunaehdot

(a) annetut siirtymät reunalla Γ_D

$$u_i = \bar{u}_i \quad (18)$$

(b) annetut pintavoimat reunalla Γ_F

$$E_{ijkl} u_{k,l} n_j = t_i \quad (19)$$

(c) unilateraalinen rajoitus reunalla Γ_C

$$u_n \leq g, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \sigma_n(u_n - g) = 0 \quad (20)$$

(d) kitkalaki reunalla Γ_C

$$\sigma_{Ti} = -\mu S_p(\sigma_n) \phi_\epsilon \left((u_{Ti} u_{Ti})^{\frac{1}{2}} \right) \frac{u_{Ti}}{\left(u_{Ti} u_{Ti} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (21)$$

Yhtälöjärjestelmä (17) - (21) on epälineaarinen, sillä unilateraalinen rajoitus ja kitkalaki ovat sitä.

3 VARIAATIOPERIAATTEEN FORMULOINTI

Yhtälöjärjestelmälle (17) - (21) voidaan löytää ekvivalenttinen variaatioperiaate, jota varten määritellään seuraavat käsitteet.

Luvallisten siirtymävektoreiden $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ joukko

$$V = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^3 \mid v_i = \bar{u}_i \text{ reunalla } \Gamma_D \right\},$$

missä $H^1(\Omega)$ on Sobolev avaruus ja silloin

$$\|v\|_1^2 = \int_{\Omega} (v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j}) dx < \infty.$$

Unilateraalisen rajoituksen toteuttavien luvallisten siirtymävektoreiden joukko

$$K = \left\{ v \in V \mid v_n \leq g \text{ reunalla } \Gamma_C \right\}.$$

Siirtymiä u_i vastaavien jännityskomponenttien σ_{ij} venymillä $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ tekemä virtuaalinen työ

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dx = \int_{\Omega} E_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx$$

Ulkoisten voimien f_i ja t_i siirtymillä v_i tekemä virtuaalinen työ

$$f(v) = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_F} t_i v_i ds$$

Siirtymiä u_i vastaavien kitkajännityskomponenttien σ_{Ti} siirtymillä v_i tekemä virtuaalinen työ

$$j_{\rho, \epsilon}(u, v) = \int_{\Gamma_C} \mu S_{\rho}(\sigma_n) \psi_{\epsilon} \left((v_{Ti} v_{Ti})^{\frac{1}{2}} \right) ds$$

missä ψ_{ϵ} on funktion ϕ_{ϵ} primitiivi, ts. $\phi_{\epsilon} = \psi'_{\epsilon}$.

Oletetaan vielä, että joukon Ω reuna Γ on Lipschitz-jatkuva ja $f_i \in L^2(\Omega)$, $t_i \in L^2(\Gamma_F)$.

Tarkastellaan seuraavaa variaatioepäyhtälön reuna-arvotehtävää

Etsittävä siirtymäkenttä $u \in K$ siten, että

$$a(u, v-u) + j_{\rho, \epsilon}(u, v) - j_{\rho, \epsilon}(u, u) \geq f(v-u) \quad (22)$$

$$\forall v \in K$$

ja näytetään todeksi seuraava lause.

Lause 1. Olkoon $u \in (H^2(\Omega))^3 \cap K$ yhtälöjärjestelmän (17) - (21) ratkaisu. Silloin u on myös variaatioepäyhtälön (22) ratkaisu. Kääntäen olkoon $u \in K$ variaatioepäyhtälön (22) ratkaisu. Silloin u on myös yhtälöjärjestelmän (17) - (21) heikko eli distributioratkaisu.

Todistus Oletetaan ensin, että $u \in (H^2(\Omega))^3 \cap K$ on yhtälöiden (17) - (21) ratkaisu. $\forall v \in K$ saadaan Greenin kaavan avulla

$$a(u, v-u) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} (v_{i,j} - u_{i,j}) dx = - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} (v_i - u_i) dx + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) ds .$$

Yhtälöiden (17), (18) ja (19) perusteella voidaan kirjoittaa

$$a(u, v-u) = \int_{\Omega} f_i (v_i - u_i) dx + \int_{\Gamma_F} t_i (v_i - u_i) ds + \int_{\Gamma_C} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) ds$$

eli

$$a(u, v-u) - f(v-u) = \int_{\Gamma_C} [\sigma_n (v_n - u_n) + \sigma_{Ti} (v_{Ti} - u_{Ti})] ds .$$

$\forall v \in K$ on näin ollen voimassa

$$a(u, v-u) + \int_{\Gamma_C} \mu S_{\rho}(\sigma_n) [\psi_{\epsilon}(|v_T|) - \psi_{\epsilon}(|u_T|)] ds - f(v-u) =$$

$$\int_{\Gamma_C} \{\sigma_n (v_n - u_n) + \sigma_{Ti} (v_{Ti} - u_{Ti}) + \mu S_{\rho}(\sigma_n) [\psi_{\epsilon}(|v_T|) - \psi_{\epsilon}(|u_T|)]\} ds ,$$

missä on merkitty $(v_{Ti} v_{Ti})^{\frac{1}{2}} = |v_T|$. Oletuksen mukaan ψ_{ϵ} on konvek-
si ja Gâteaux-differentoituva, joten

$$[\psi'_{\epsilon}(|u_T|)]_i (v_{Ti} - u_{Ti}) \leq \psi_{\epsilon}(|v_T|) - \psi_{\epsilon}(|u_T|)$$

eli

$$\phi_{\epsilon}(|u_T|) \frac{u_{Ti}}{|u_T|} (v_{Ti} - u_{Ti}) \leq \psi_{\epsilon}(|v_T|) - \psi_{\epsilon}(|u_T|) .$$

Tästä saadaan yhtälön (21) perusteella

$$\begin{aligned} \sigma_{Ti} (v_{Ti} - u_{Ti}) &= -\mu S_{\rho}(\sigma_n) \phi_{\epsilon}(|u_T|) \frac{u_{Ti}}{|u_T|} (v_{Ti} - u_{Ti}) \\ &\geq -\mu S_{\rho}(\sigma_n) [\psi_{\epsilon}(|v_T|) - \psi_{\epsilon}(|u_T|)] . \end{aligned}$$

Lisäksi yhtälön (20) nojalla

$$\sigma_n (v_n - u_n) = \sigma_n [v_n - g - (u_n - g)] = \sigma_n (v_n - g) \geq 0 .$$

Esitetyistä arvioista seuraa

$$a(u, v-u) + j_{\rho, \epsilon}(u, v) - j_{\rho, \epsilon}(u, u) \geq f(v-u) ,$$

joten u on variaatioepäyhtälön (22) ratkaisu. Kääntäen oletetaan, että $u \in K$ on variaatioepäyhtälön (22) ratkaisu. Valitaan $v = u \pm \varphi$, $\varphi \in (D(\Omega))^3$, jolloin $\varphi = 0$ reunalla Γ . Joukko $D(\Omega)$ sisältää funktiot, joilla on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat ja kompakti kantaja joukossa Ω . Sen duaaliavaruuden $D'(\Omega)$ alkiot ovat distributioita. Selvästi $v \in K$, ja variaatioepäyhtälöstä (22) seuraa

$$a(u, \varphi) = f(\varphi) \quad \text{eli} \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varphi_{i,j} dx = \int_{\Omega} f_i \varphi_i dx .$$

Koska σ_{ij} ja $f_i \in L^2(\Omega)$, määrittelevät injektiiviset kuvaukset

$$\varphi_{i,j} \mapsto \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varphi_{i,j} dx \quad \text{ja} \quad f_i \mapsto \int_{\Omega} f_i \varphi_i dx$$

distributiot $\tilde{\sigma}_{ij}$ ja $\tilde{f}_i$ siten, että

$$\langle \tilde{\sigma}_{ij}, \varphi_{i,j} \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varphi_{i,j} dx \quad \text{ja} \quad \langle \tilde{f}_i, \varphi_i \rangle = \int_{\Omega} f_i \varphi_i dx .$$

Distributioderivaatan määritelmän nojalla

$$\langle \tilde{\sigma}_{ij}, \varphi_{i,j} \rangle = -\langle \tilde{\sigma}_{ij,j}, \varphi_i \rangle ,$$

joten saadaan tulokseksi

$$\langle \tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{f}_i, \varphi_i \rangle = 0 .$$

Tasapainoyhtälöt $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ toteutuvat siis distributiomielessä ja u on niiden heikko eli distributioratkaisu. Greenin kaavaa voidaan soveltaa myös distributioderivaattoihin. Sen avulla saadaan tasapainoyhtälöistä tulos $\forall v \in K$

$$a(u, v-u) = \int_{\Omega} f_i(v_i - u_i) dx + \int_{r_F \cup r_C} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) ds.$$

Variaatioepäyhtälöstä (22) seuraa tämän perusteella

$$\begin{aligned} & \int_{r_F \cup r_C} \sigma_{ij} n_j (v_i - u_i) ds + \int_{r_C} \mu S_{\rho}(\sigma_n) [\psi_{\epsilon}(|v_T|) - \psi_{\epsilon}(|u_T|)] ds + \\ & - \int_{r_F} t_i (v_i - u_i) ds \geq 0 \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Valitaan $v_i = u_i$ reunalla r_C ja peräkkäin $v_i = 0$, $v_i = 2u_i$ reunalla r_F . Silloin saadaan

$$\int_{r_F} (\sigma_{ij} n_j - t_i) u_i ds = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} n_j = t_i,$$

mikä on reunaehto (19). Valitsemalla $v_{Ti} = u_{Ti}$ ja $v_n = g$ reunalla r_C saadaan $-\int_{r_C} \sigma_n (u_n - g) ds \geq 0$. Koska $u_n \leq g$, on $\sigma_n \leq 0$. Valinta

$v_n = 2u_n - g$ antaa $\int_{r_C} \sigma_n (u_n - g) ds \geq 0$, joten $\sigma_n (u_n - g) = 0$,

ja siis unilateraalinen reunaehto (20) toteutuu. Variaatioepäyhtälöstä on enää jäljellä ehto

$$\int_{r_C} \sigma_{Ti} (v_{Ti} - u_{Ti}) + \mu S_{\rho}(\sigma_n) [\psi_{\epsilon}(|v_T|) - \psi_{\epsilon}(|u_T|)] ds \geq 0$$

$\forall v \in K$. Olkoon v_{Ti} muotoa $v_{Ti} = u_{Ti} + \theta(w_{Ti} - u_{Ti})$, missä $\theta \in (0,1)$ ja $w \in K$. Silloin saadaan

$$\int_{r_C} \{\theta \sigma_{Ti} (w_{Ti} - u_{Ti}) + \mu S_{\rho}(\sigma_n) [\psi_{\epsilon}(|u_T + \theta(w_T - u_T)|) - \psi_{\epsilon}(|u_T|)]\} ds \geq 0.$$

Jakamalla tämä luvulla θ , ottamalla raja-arvo $\theta \rightarrow 0$ muistaen, että ψ on Gâteaux-differentoituva, saadaan

$$\int_{r_C} [\sigma_{Ti} (w_{Ti} - u_{Ti}) + \mu S_{\rho}(\sigma_n) \phi_{\epsilon}(|u_T|) \frac{u_{Ti}}{|u_T|} (w_{Ti} - u_{Ti})] ds \geq 0$$

$\forall w \in K$. Valitsemalla peräkkäin $w_{Ti} = 0$ ja $w_{Ti} = 2u_{Ti}$ saadaan reunalla Γ_C

$$\sigma_{Ti} u_{Ti} + \mu S_\rho(\sigma_n) \phi_\epsilon(|u_T|) |u_T| = 0,$$

mistä nähdään, että kitkalaki (21) toteutuu reunalla Γ_C . Nähdään, että u toteuttaa kaikki yhtälöt (17)...(21) distributiomielellä. $\square$

Jos käytetään Coulombin kitkalakia, on variaatioperiaate (22) voimassa, kun funktionaali $j_{\rho, \epsilon}$ korvataan funktionaalilla j , missä

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_C} \mu |\sigma_n| |v_T| ds \quad (23)$$

Kitkattoman kosketuksen variaatioperiaate saadaan jättämällä epäyhtälöstä (22) kitkafunktionaali pois.

Variaatioperiaatteen (22) epäyhtälömuoto johtuu unilateraalisesta rajoituksesta (20). Sitä ei myöskään voida laittaa funktionaalin stationaarisuustehtävän muotoon mukana olevien kitkavaikutusten takia. Jos kuitenkin kosketuspinnan normaali jännityskeskisarvo $S_\rho(\sigma_n)$ Oden-Pires kitkalaissa tai normaali jännitys σ_n Coulombin kitkalaisissa on tunnettu paikan funktio, voidaan tehtävälle muotoilla stationaarisuuslause. Olkoon siis $\tau = \mu S_\rho(\sigma_n)$ tai $\tau = \mu |\sigma_n|$ tunnettu ja merkitään

$$j_{O_\epsilon}(v) = \int_{\Gamma_C} \tau \psi_\epsilon(|v_T|) ds \quad (\text{Oden-Pires}) \quad (24)$$

$$j_O(v) = \int_{\Gamma_C} \tau |v_T| ds \quad (\text{Coulomb}) \quad (25)$$

Epäyhtälöstä (22) seuraa nyt $\forall v \in K$

$$a(u, v-u) + j_{O_\epsilon}(v) - j_{O_\epsilon}(u) \geq f(v-u) \quad (26)$$

Koska $f(v-u) = f(v) - f(u)$, $a(u, v-u) = a(u, v) - a(u, u)$ ja $0 \leq a(v-u, v-u) = a(v, v) - 2a(u, v) + a(u, u) \Rightarrow a(u, v) \leq \frac{1}{2}a(v, v) + \frac{1}{2}a(u, u)$, saadaan yhtälöstä (26)

$$\frac{1}{2} a(v, v) + j_{0_\epsilon}(v) - f(v) \geq \frac{1}{2} a(u, u) + j_{0_\epsilon}(u) - f(u) \quad (27)$$

$$\forall v \in K.$$

Nähdään, että u minimoi funktionaalin

$$I(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + j_{0_\epsilon}(v) - f(v) \quad (\text{Oden-Pires}) \quad (28)$$

joukossa K . Samanlainen tulos saadaan Coulombin kitkalaille.

4 RATKAISUN OLEMASSAOLO JA YKSIKÄSITTEISYYS

Variaatioperiaatteelle (26) voidaan todistaa seuraava tulos [2].

Lause 2 Epäyhtälöllä (26) on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $u \in K$.

Samankaltainen tulos on voimassa Coulombin kitkalain tapauksessa, kun τ on annettu. Variaatioperiaatteelle (22) on voimassa [5].

Lause 3 Epäyhtälöllä (22) on olemassa vähintään yksi ratkaisu $u \in K$.

Lause 3 saadaan todistettua lausetta 2 hyväksi käyttäen [5].

Ideana on konstruoida eräs operaattori, jonka kiintopiste on etsitty ratkaisu. Jos μ on 'riittävän pieni', on konstruoitu operaattori kontraktio, ja siis kiintopiste yksikäsitteinen. Näin saadaan tulokseksi

Lause 4 Jos kitkakerroin μ on riittävän pieni, on epäyhtälöllä (22) yksikäsitteinen ratkaisu $u \in K$.

Coulombin kitkalaille ei lauseiden 3 ja 4 mukaisia tuloksia ole voitu todistaa. Nähdään myös, että Oden-Pires -kitkalain tapauksessa yksikäsitteisyyskysymys on myös osittain avoin.

5 KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Campos, L.T., Oden, J.T., Kikuchi, N., A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 34 (1982), s. 821 - 845.
- [2] Duvaut, G., Lions, J.L., Inequalities in mechanics and physics. Springer-Verlag, Berlin 1976. 397 s.
- [3] Kravchuk, A.S., Formulation of the problem of contact between several deformable bodies as a nonlinear programming problem. PMM 42 (1978), s. 466 - 474.
- [4] Kravchuk, A.S., On the theory of contact problems taking account of friction on the contact surface. PMM 44 (1980), s. 83 - 88.
- [5] Oden, J.T., Pires, E.B., Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. Journal of Applied Mechanics 50 (1983), s. 67 - 76.
- [6] Oden, J.T., Pires, E.B., Numerical analysis of certain contact problems in elasticity with non-classical friction laws. Computers & Structures 16 (1983), s. 481 - 485.
- [7] Panagiotopoulos, P.D., On the unilateral contact problem of structures with a non quadratic strain energy density. International Journal of Solids and Structures 13 (1977), s. 253 - 261.
- [8] Pires, E.B., Oden, J.T., Analysis of contact problems with friction under oscillating loads. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 39 (1983), s. 337 - 362.
- [9] Ialaslidis, D., Panagiotopoulos, P.D., A linear finite element approach to the solution of the variational inequalities arising in contact problems of structural dynamics. International Journal for Numerical Methods in Engineering 18 (1982), s. 1505 - 1520.

LAATAN JA VETOAKESTÄMÄTTÖMIEN VIIVAMAISTEN TUKIEN KITKATON KOSKETUS

Markku Heinisuo, Antero Miettinen

Tampereen teknillinen korkeakoulu

1. JOHDANTO

Laattarakenteiden tuenta alusrakenteisiin on usein vetoakestämätön. Näin on asianlaita erityisesti rakennusten asennusaikana. Laattojen nurkat pyrkivät nousemaan kuormitettaessa poikittaiskuormituksella. Rakenteen käyttökelpoisuuden arvioimiseksi on tiedettävä paljonko nurkka nousee, jos sitä ei ankkuroida? Lisäksi alusrakenteita suunniteltaessa on tiedettävä, kuinka tukipaine jakautuu eri kuormitustapauksissa ja kuinka tukien kimmoisuus ja laatan muoto (tässä vahvuus) vaikuttaa laatan ja alustan kosketukseen. Mm. näihin lähinnä rakenteellisiin seikkoihin etsitään selvitystä tässä esityksessä. Laatta ja tuet käsitetään kimmoisiksi kappaleiksi ja kosketus oletetaan kitkattomaksi.

Vaikka nurkkien nousupyrkimys on tunnettu jo pitkään, niin kirjallisuudesta löytyy vain kaksi artikkelia (Keer [1], Dempsey [2]), jolissa on käsitelty tätä efektiä. Näissä molemmissa viilvatuet ovat äärettömän jäykät ja laatan ratkaisu on suoritettu klassisen laattateorian mukaan. Kosketusprobleema on redusoitu integraaliyhtälöiksi, jotka on ratkaistu numeerisesti. Käsikirjoissa (esim. [3]) on annettu nyrkkisäännöt: irtoamismatka on pienemmän sivumitan kahdeksas osa ja nurkan nousu on 20 % laatan keskipisteen taipumasta. Muita laatan ja kimmoisen alustan kosketustehtävien ratkaisuja on esitelty muualla [4]. Yleisempiä tehtäviä saadaan ratkaistua, kun käytetään numeerisia menetelmiä. Kosketustehtävissä käytettyjä numeerisia ratkaisumalleja on kuvattu mm. artikkelissa [4].

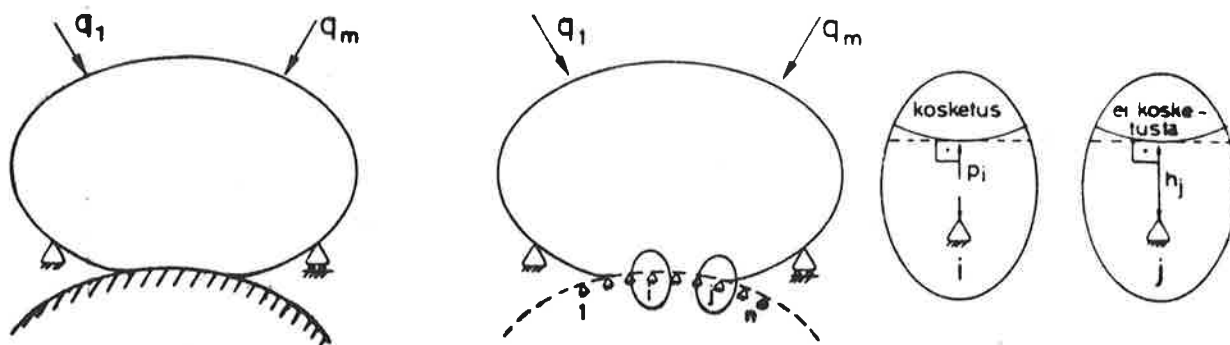
Kosketusprobleeman numeerisen ratkaisun tekee usein kiusalliseksi singulariteetit kosketusjännitysjakautumissa. Kiusaa lisää se, että etukäteen ei tiedetä missä kohtaa singulaarisuus on. Tässä kohdin kosketusprobleema ja halkeamatehtävä ovat samankaltaiset. Jos laatan tuki yht'äkkiä loppuu, niin singulaarisuus tukipalnessa käyttäytyy Williamsin [5] mukaan kuten funktio $r^{-3/2}$, missä r on etäisyys tuen loppumiskohdasta. Jos laatan leikkausmuodonmuutos otetaan laskennassa huomioon singulaarisuus on muotoa $r^{-1/2}$. Keerin [1] mukaan singulaarisuus on irtoavalla tuella muotoa $r^{-1/2}$, kun käytetään klassista laattateoriaa. Singulaarisuus häviää kun laatan leikkausmuodonmuutos otetaan huomioon ja/tai tuet oletetaan kimmoisiksi. Todellisissa rakenteissa nämä vaikutukset ovat aina olemassa, joten singulaarisuus on teoreettista.

Seuraavassa laatan statiikka ratkaistaan FEM-analyysillä, jossa käytetään AIZ-elementtiä (Ahmad-Iron-Zienkiewicz). AIZ-elementti ottaa laatan leikkausmuodonmuutoksen likimäärin huomioon ja lisäksi se on todettu muutenkin hyväksi laatan statiikan ratkaisussa (Kuusjärvi [6]). Tukirakenteita arvioidaan yksinkertaisina palkkeina ja Winkler-tyyppisinä viivatuksina. Näiden statiikka ratkaistaan analyyttisesti. Koskettavien kappaleiden statiikka voidaan tässä käytetyllä menetelmällä ratkaista itsenäisesti ja kosketusprobleema käsitellään erikseen. Kun laatta on ohut ja tuet suhteellisen jäykät, niin edellisen mukaan tukipaikassa on odotettavissa "piikki" irtoamiskohdan lähellä.

Itse kosketusprobleeman numeerisessa ratkaisussa käytetään komplementaarisen tehtävän redusointia optimointitehtäväksi. Kirjallisuudessa on käsitelty paljon kosketusprobleeman ratkaisua optimointitehtävänä. Menetelmien eroja ja lyhyet kuvaukset on esitetty artikkelissa [4]. Jos tuntemattomiksi valitaan kosketusjännitys on kyseessä voimamenetelmä. Mahdollinen kosketuspinta on yleensä pieni verrattuna koko kappaleeseen. Tällöin kannattaa käyttää ratkaisumenetelmää, jossa koko kappaleen statiikka ratkaistaan vain kerran. Tämä on mahdollista, jos jäykän kappaleen liike on tunnettu. Kosketuspintaan liittyvien iterointimatriisien dimensiot saadaan näin pieniksi ja iteroinneissa voidaan käyttää helposti ohjelmoitavia algoritmeja sekä pientä tietokonetta. Lisäksi voimamenetelmää käytettäessä tarpeelliset siirtymälausekkeet voidaan usein esittää analyyttisessä muodossa (nyt alusta). Tässä käsitellään alkuvälyksetöntä ja alkujännityksetöntä kosketusta (lineaarinen kosketustehtävä, Parland [7]). Samaa menetelmää on sovellettu aikaisemmin kosketustehtävään, jossa on alkuvälys [8] ja esijännitys [9].

2. TEORIA

Tarkastellaan aluksi kimmoisen kappaleen ja jäykän alustan kitkatonta kosketusta. Oletamme, että kimmoisen kappaleen jäykän kappaleen liike on nolla. Kimmoisen kappaleen reuna, jossa kosketus on mahdollinen, on nimeltään potentiaallinen kosketuspinta. Kimmoisen kappaleen ja jäykän alustan välinen alkuvälys on tällä pinnalla niin pieni ja sileä, että ajatellulla kuormituksella kappaleet saattavat koskettaa toisiaan. Alusta **diskretoidaan** n kpl pistetukia (kuva 1). Alusta voi olla diskreetti, jolloin teoria on tarkka. Deformoituneen tilan välys ja kosketusjännitys ovat n -pituisia vektoreita $\underline{h}$ ja $\underline{p}$.



Kuva 1. Alustan diskretointi.

Vällys $\tilde{h}$ ja kosketusjännitys $\tilde{p}$ mitataan kimmoisen kappaleen paikallisen normaalin suuntaan. Oletamme, että deformaatiot ovat niin pienet, ettei normaalin suunnan muuttumista kuormituksen vaikutuksesta tarvitse ottaa huomioon. Näin diskretoidulla kosketustehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu, jos

$$\begin{aligned} \tilde{p} &\geq 0 && \text{(ei vetoa),} \\ \tilde{h} &\geq 0 && \text{(läpitynäkemattomuus),} \\ \tilde{p}^T \tilde{h} &= 0 && \text{(lähivaikutus).} \end{aligned} \quad (1)$$

Kimmateoriassa vällys $\tilde{h}$ riippuu lineaarisesti kappaleeseen kohdistuvasta kuormituksesta. **Komplementaarinen tehtävä** (1) on siten lineaarinen (LCP). LCP toteutuu kolmella vaihtoehdolla

$$\begin{aligned} h_i &= 0, & p_i &= 0 && \text{(sivuaaminen),} \\ h_i &= 0, & p_i &> 0 && \text{(kosketus),} \\ h_i &> 0, & p_i &= 0 && \text{(ei kosketusta).} \end{aligned} \quad (2)$$

LCP voidaan ratkaista suoraan voima- tai siirtymämenetelmällä. Vällys $\tilde{h}$ on

$$\tilde{h} = \tilde{v} + \tilde{u}, \quad (3)$$

missä $\tilde{v}$ on kimmoisen kappaleen siirtymä voiman $\tilde{p}$ suuntaan ja $\tilde{u}$ on tunnettu alkuvällys. Siirtymä $\tilde{v}$ on

$$\tilde{v} = \tilde{C}\tilde{p} + \tilde{D}\tilde{q}, \quad (4)$$

missä $\tilde{C}$ on tunnettu symmetrinen positiividefiniitti $n \times n$ joustomatriisi ja $\tilde{D}$ on tunnettu $n \times m$ matriisi ja $\tilde{q}$ on m -pitäinen tunnettu kuormitusvektori (vrt. kuva 1). LCP on siten

$$\begin{aligned} \tilde{p} &\geq 0, \\ C\tilde{p} + D\tilde{q} + \tilde{u} &\geq 0, \\ \tilde{p}^T(C\tilde{p} + D\tilde{q} + \tilde{u}) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Tämä on **voimamenetelmään perustuva LCP:n perusyhtälö**.

Yhtälöistä (3) ja (4) voidaan ratkaista

$$\tilde{p} = C^{-1}\tilde{h} - C^{-1}\tilde{u} - C^{-1}D\tilde{q} = \tilde{K}\tilde{h} - \tilde{K}\tilde{u} - \tilde{K}D\tilde{q}, \quad (6)$$

missä $\tilde{K}$ on $n \times n$ jäykkyyismatriisi. Sijoitus yhtälöön (1) antaa **siirtymämenetelmän LCP:n**

$$\begin{aligned} \tilde{K}\tilde{h} - \tilde{K}\tilde{u} - \tilde{K}D\tilde{q} &\geq 0, \\ \tilde{h} &\geq 0, \\ (\tilde{K}\tilde{h} - \tilde{K}\tilde{u} - \tilde{K}D\tilde{q})^T \tilde{h} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

LCP:n ratkaisu johtaa yleensä **iterointiin**, joten ratkaisuaika on erittäin oleellisesti riippuvainen dimensiosta n . Edellä kuvatulla menetelmällä ratkaisu on tiivistetty potentiaaliselle kosketuspinnalle kuuluviin pisteisiin. Kosketusjännityksen diskretointi pistevoimiksi aiheuttaa virhettä ratkaisuun. Kuitenkin mm. palkki ja laattatehtävissä pistevoimien käsittely (matriisin C laskenta) on helpompaa kuin jakautuneiden kuormitusten käsittely. Usein voidaan käyttää jopa analyyttisiä lausekkeita, kuten jatkossa alustalla.

Optimointitehtävä saadan tarkastelemalla funktionaalia

$$\bar{\pi}(\tilde{p}) = \left[\frac{1}{2} \tilde{p}^T C \tilde{p} - \tilde{p}^T \tilde{b} \right], \quad (8)$$

missä vektori $\tilde{b}$ on muotoa

$$\tilde{b} = -D\tilde{q} - \tilde{u}. \quad (9)$$

Nyt on voimassa ehto

$$\bar{\pi}(\tilde{p} + \tilde{p}) \geq \bar{\pi}(\tilde{p}), \quad \forall \tilde{p} \geq 0, \quad (10)$$

jos vektori $\tilde{p}$ on LCP (5):n ratkaisu, koska matriisi C on symmetrinen. LCP (5):n ratkaisu minimoi näin komplementaarisen energian rajoitteena $\tilde{p} \geq 0$. Toisaalta vektori $\tilde{p}^k$ on optimointitehtävän

$$\min_{\substack{\underline{p} \geq 0 \\ \underline{p} \geq 0}} [\frac{1}{2} \underline{p}^T \underline{C} \underline{p} - \underline{p}^T \underline{b}] \quad (11)$$

ratkaisu jos ja vain jos gradientti $\underline{g}$ toteuttaa Kuhn-Tucker -ehdot

$$\begin{aligned} \underline{g}_i &\geq 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\ \underline{g}_j &= 0, & \forall j = \ell + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (12)$$

missä vektorin $\underline{p}^k$ aktiiviset ehdot on indeksoitu $i = 1, \dots, \ell$ ja muut $j = \ell + 1, \dots, n$ eli

$$\begin{aligned} \underline{p}_i^k &= 0, & \forall i = 1, \dots, \ell, \\ \underline{p}_j^k &> 0, & \forall j = \ell + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

Toisaalta gradientille $\underline{g}$ löytyy fysikaalinen tulkinta. Se on

$$\underline{g} = \underline{C} \underline{p} - \underline{b} = \underline{C} \underline{p} + \underline{D} \underline{q} + \underline{u} = \underline{h}. \quad (14)$$

Tehtävänä on ratkaista neliöllinen optimointitehtävä (11).

Siirtymämenetelmässä tarkastellaan funktionaalia

$$\pi(\underline{h}) = [\frac{1}{2} \underline{h}^T \underline{K} \underline{h} - \underline{h}^T \underline{c} + \text{vakio}], \quad (15)$$

missä vektori $\underline{c}$ on muotoa

$$\underline{c} = \underline{K} \underline{u} + \underline{K} \underline{D} \underline{q}. \quad (16)$$

Suorittamalla muuttujan vaihto yhtälön (3) mukaan todetaan, että kyseessä on potentiaalienergia. Kuten edellä niin nytkin todetaan, että on ratkaistava optimointitehtävä

$$\min_{\substack{\underline{h} \geq 0 \\ \underline{h} \geq 0}} [\frac{1}{2} \underline{h}^T \underline{K} \underline{h} - \underline{h}^T \underline{c}]. \quad (17)$$

Gradientti $\underline{g}$ on

$$\underline{g} = \underline{K} \underline{h} - \underline{K} \underline{u} - \underline{K} \underline{D} \underline{q} = \underline{p}. \quad (18)$$

Yhteenvedona edeltä havaitaan, että numeerisessa ratkaisussa tarvitaan potentiaaliselle kosketuspinnalle valittuihin diskreetointipisteisiin tiivistetyt jousto- tai jäykkyyssymmetriset C tai K sekä ulkoisen kuormituksen aiheuttamat siirtymät $\underline{u}$ sekä mahdollinen alkuväly $\underline{u}$.

Helposti ohjelmoitava **algoritmi** eo. minimointitehtävien ratkaisuun on

- 1° ratkaise $\underline{g} = 0$ (tai $\underline{g} \geq 0$)
- 2° jos $\underline{p} \geq 0$, niin loppu (tai $\underline{h} \geq 0$)
- 3° aseta $\min \{p_i | i = 1, \dots, n\} = 0$ (tai $\min h_i = 0$)
- 4° palaa kohtaan 1°.

Algoritmin ensimmäinen askel tulostaa voimamenetelmässä vetoakestävän tapauksen ratkaisun. Algoritmia voidaan nopeuttaa, jos kohta 3° voidaan korvata käskyllä 3°: aseta kaikki $p_i < 0$ nollassi. Näin voidaan menetellä ainakin, jos kosketus on vapaa alkuvälyksistä $\underline{u} = 0$ ja vapaa esijännityksistä. Esijännitys tarkoittaa, että joissakin voimista p_i on jokin positiivinen alkuarvo. Esijännitys voidaan tulkita vakion lisäämiseksi energian lausekkeeseen sekä alkuvälyksen muuntamiseksi tietyllä termillä. Viimeksi mainitun algoritmin suppenevuutta voidaan perustella murtomekaniikan mukaan, jossa on todettu (Carlsson [10]), että potentiaalienergia pienenee halkeaman kasvaessa. Alkuvälyksetön tilanne voidaan tulkita ehjäksi kappaleeksi, jota kuormitetaan ulkoisella kuormituksella. Vedetty alue halkaistaan ja potentiaalienergia pienenee joka asekeleellä. Em. algoritmia voidaan käyttää myös LCP:n ratkaisuun.

Edellä on todettu lineaarisen kosketustehtävän edullisuus numeerisessa ratkaisussa, joten herää kysymys: voiko **yleisen tehtävän** muuntaa lineaariseksi? Eräs vaihtoehto on muuntaa kuormitusta. Tällöin etsimme vektoria $\underline{x}$ joka toteuttaa yhtälön

$$\underline{D}\underline{x} = \underline{D}\underline{q} + \underline{u}. \quad (19)$$

Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuja, jos $m < n$. Jos $m > n$, niin ratkaisuja on ääretön määrä. Tärkeä erikoistapaus on se, kun $n = m$ ja kuormitus $\underline{q}$ annetaan (tai voidaan ajatella annetuksi) potentiaalisella kosketuspinnalla. Tällöin $\underline{D} = \underline{C}$ ja $\underline{x} = \underline{x}$ ja $\underline{q} = \underline{q}$. Yhtälön (19) ratkaisu on silloin

$$\underline{x} = \underline{q} + \underline{C}^{-1}\underline{u} \quad (20)$$

eli kuormitukseen $\underline{q}$ on lisättävä kuormitus, joka sulkee alkuvälyksen. Tämän jälkeen kosketusta voidaan käsitellä lineaarisena.

Edellä kuvatut tulokset voidaan helposti laajentaa koskemaan **kahden** kimmoisen **kappaleen kosketusta**, kun kappaleiden jäykän kappaleen liike on nolla. Diskretoidaan mahdollinen kosketuspinta äärelliseen määrään n pisteitä. Voimamenetelmän mukainen optimointitehtävä on

$$\min_{\substack{\underline{p} \geq 0 \\ \underline{p} \approx \underline{p}}} [\underline{p}^T (C_1 + C_2) \underline{p} - \underline{p}^T \underline{d}], \quad (21)$$

missä vektori $\underline{d}$ on muotoa

$$\underline{d} = -D_1 \underline{q}_1 - D_2 \underline{q}_2 - \underline{u}. \quad (22)$$

Matriisit D_1 ja D_2 ovat muotoa $n \times m_1$ ja $n \times m_2$, kun kappaletta 1 kuormitetaan m_1 kohdasta (q_1) ja kappaletta 2 kuormitetaan m_2 kohdasta (q_2). Vastaavasti voidaan rakentaa siirtymämenetelmän optimointitehtävä.

Jos toisen kappaleen jäykän kappaleen liike on tuntematon, mutta määrättävissä, niin edellisiin on liitettävä tämän kappaleen tasapainoyhtälöt. Yksi tapa on arvata etukäteen kosketuspinnalta niin monta kontaktipistettä, että jäykän kappaleen liike saadaan estettyä. Tutetun kappaleen arvauspisteiden siirtymät lisätään tukemattoman kappaleen joustomatriisiin ko. siirtymäsuuntaa vastaaviin alkioihin. Tukemattoman kappaleen joustomatriisi lasketaan tukemalla se arvauspisteistä. Koko rakennetta käsitellään yhtenä **haljenneena** kimmoisena kappaleena. Tämä menettely mahdollistaa sen, että tehtävän dimensiot saadaan pysymään koko iteroinnin ajan pienempänä kuin n . Jos jäykän kappaleen liike lasketaan, niin tehtävä on välillä palautettava globaaliin systeemiin. Toisaalta kontaktipisteiden arvaaminen ei etukäteen onnistu aina, mutta tässä lasketuissa tapauksissa arvaaminen oli helppoa.

Sovellutuksissa käytettiin voimamenetelmän mukaista optimointitehtävää, joka ratkaistiin lineaarisen kosketuksen algoritmilla.

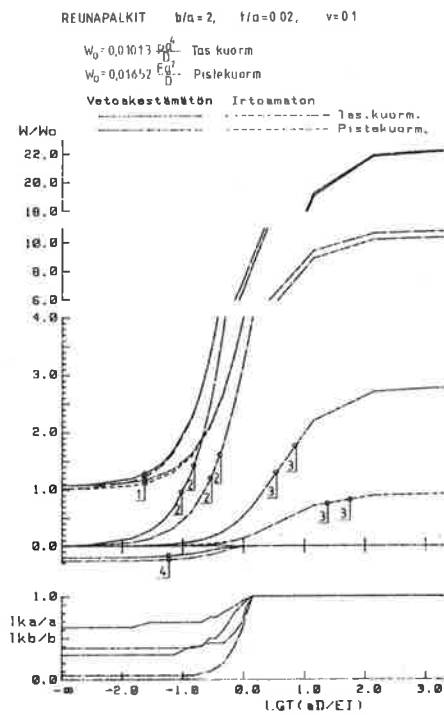
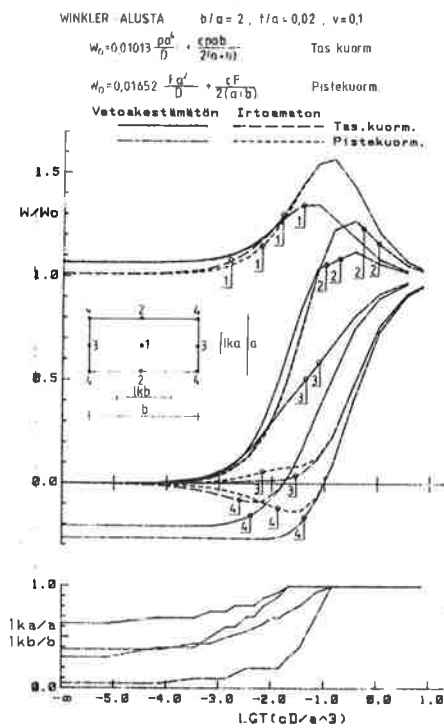
3. NUMEROSOVELLUTUKSET

Tässä yhteydessä tarkastellaan reunoiltaan vlivamaisesti Winkler-tyyppisellä alustalla tai yksinkertaisilla reunapalkeilla tuettua suorakaidelaattaa, jota kuormitetaan tasaisella kuormituksella tai pistevoimalla keskeltä. Alkutilanne on alkuvälyksetön ja alkujännityksetön ja kosketus säilyy ainakin pitkien sivujen keskipisteissä. Nämä voidaan valita em. arvaus-kontaktipisteiksi. Symmetriasyistä laskennassa käytetään laatan neljännessä. Matriisin C alkiot lasketaan tukemalla laatta pystysuunnassa pitkien sivujen keskipisteistä

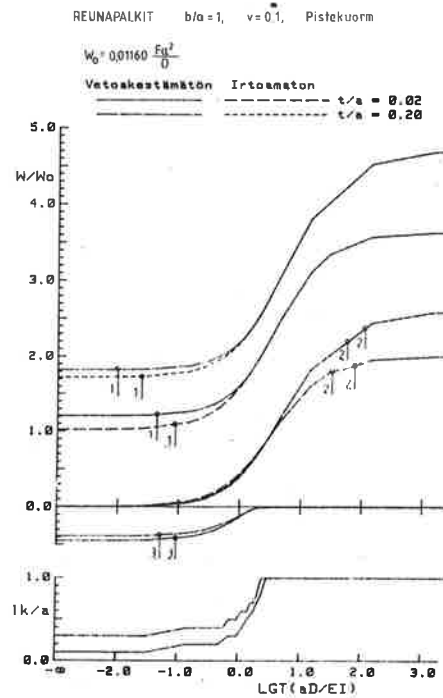
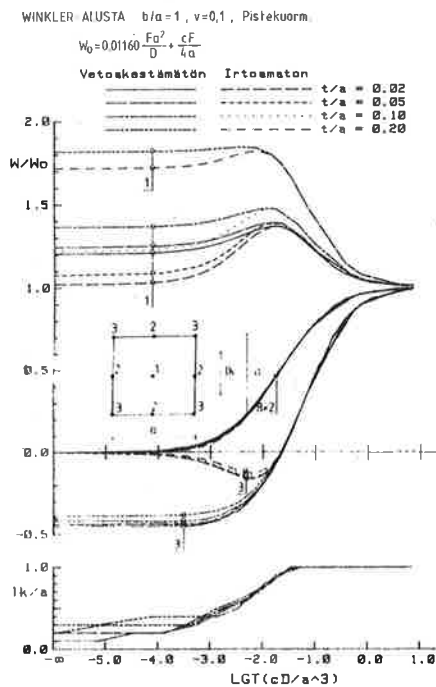
ja asettamalla 1-volma vuorotellen reunan solmuihin. Näihin siirtymiin lisätään vielä pitkien sivujen keskipisteiden siirtymä sekä tukilaitteiden vastinsolmujen siirtymät näissä vaikuttavista 1-voimista. Iteroinnissa tarvitaan lisäksi ulkoisesta kuormituksesta aiheutuvat siirtymät y . Laatan siirtymät lasketaan tukemalla laatta kuten edellä ja siirtymiin lisätään vielä alustan vastinsolmujen taipumat.

AIZ-elementti on 8-solmuinen kvadraattinen, isoparametrinen laattaelementti. Laatan elementtijakoa tihennettiin niin kauan, että Dempseyn [2] vertailuarvoihin nähden saavutettiin haluttu tarkkuus. Neliölaatatalla laatan neljännes jaettiin 25 neliöelementtiin ja pitemmän (sivusuhte 2) laatan verkko oli likimain kaksi neliölaattaa peräkkäin. Dempseyn [2] tulokset käsittivät tasaisesti kuormitetun neliölaatan jäykällä tuilla, muuttujana laatan Poissonin vakio ν . Dempseyn mukaan kosketuspituus on 38,6, 46,4 ja 55,2 %, kun Poissonin vakio on 0,1, 0,3 ja 0,5. Nurkan nousu prosentteina keskipisteen painumasta on Dempseyn mukaan 24,2, 19,23 ja 15,8 %, kun keskipisteen painuma on laskettu esitetyllä menetelmällä. Vastaavat luvut tällä menetelmällä laskettuna ovat: kosketuspituus 40, 50 ja 60 %, nurkan nousu 22,9, 16,8 ja 10,4 %. Arvot eivät ole aivan vertailukelpoisia, koska esitetyssä menetelmässä on laatan leikkausmuodonmuutos mukana. Laskennassa t/a (laatan vahvuus/sivun pituus) oli 0,02, jolloin leikkausmuodonmuutoksen aiheuttama lisätaipuma laatan keskellä on noin 2 %. Tähän tarkkuuteen tyydyttiin ja jatkossa on käytetty tätä elementtiverkkoa.

Kuvissa 2 - 5 on piirrettynä laatan taipumia ja kosketuspituuksia tuen jäykkyyden funktiona. Kuvissa D on laattajäykkyys, c on Winkler-tyyppisen alustan joustoluku ($c = 1/k$, [m^2/N]) ja EI on reunapalkkien taivutusjäykkyys. Vertailutaipumana w_0 on käytetty nivelisesti tuetun laatan klassisen laattateorian mukaan laskettua taipumaa. Kuormituksen absoluuttiarvolla ei ole merkitystä, koska kosketustehtävä on lineaarinen. Käyristä voidaan arvioida tuen jäykkyys, jolloin kosketus on koko sivun pituudella. Merkille on pantava ero kosketusmitassa, kun verrataan tasaisesti kuormitettua ja pistekuormitettua laattaa. Tasaisella kuormituksella kosketusmitat ovat 60 ja 30 %, kun alusta on ääretömän jäykkä. Pistekuormituksella mitat ovat noin 40 ja 5 %. Samoin pistekuormituksen aiheuttama nurkan nousu on suhteellisesti isompi kuin tasaisella kuormituksella. Kuvassa 3 on piirretty vastaavat tulokset reunapalkeilla tuetulle laatalle. Tuen löystyessä taipumat lähestyvät pilareilla nurkista tuetun laatan taipumia. Kuvissa 4 ja 5 on piirretty taipumia eri vahvuisille neliölaatoille. Näiden mukaan laatan vahvuudella on merkittävä vaikutus kosketuspituuteen. Ohuella pistekuormitetulla neliölaatatalla kosketuspituus on vain noin 10 % sivumitasta, kun alusta on suhteellisen jäykkä.



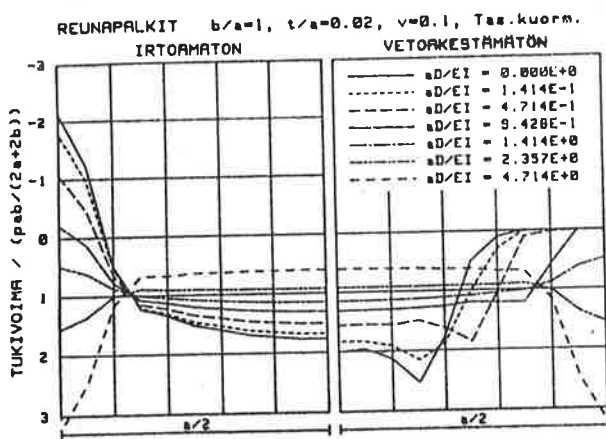
Kuvat 2 ja 3. Suorakaidelaatan taipumia ja kosketusmittoja.



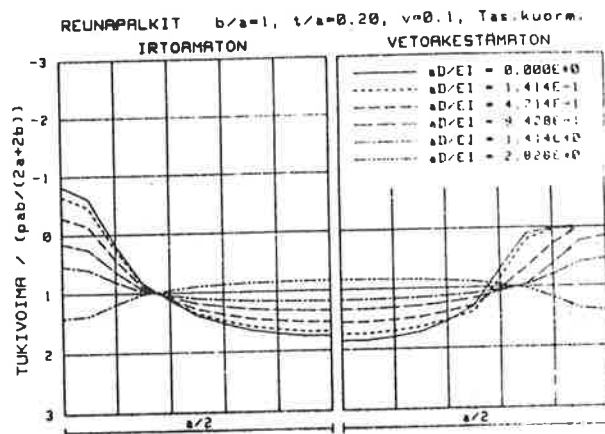
Kuvat 4 ja 5. Neliölaatan taipumia ja kosketusmittoja.

Kuvissa 6 - 9 on piirrettyä kosketusjännitysjakaumia eri tapauksille. Algoritmin tulostamat pistevoimat on muunnettu jatkuviksi trapetsikuormiksi siten, että elementin matkalla voima- ja momenttitasapaino säilyy. Kuvlin on piirretty vertailuksi vetoakestävän sauman mukaiset tulokset, jotka saadaan algoritmin ensimmäiseltä kierrokselta. Kuvista näkyy selvästi, että laatan vahvuuden kasvaessa ja/tai tuen löystyessä "piikki" tukivoimassa häviää. Samoin kuvista näkyy tasaisen kuormituksen ja pistekuormituksen oleellinen ero tukivoimajakaumissa. Tulokset olivat samansuuntaiset Winkler-alustalla.

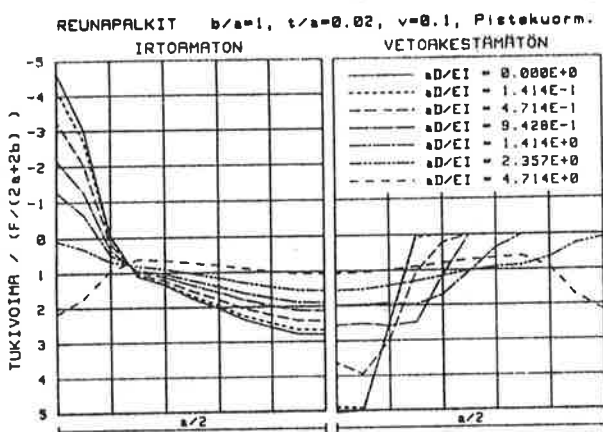
Tukivoiman maksimiarvo kasvaa poikkeuksetta, mutta palkin maksimitaivutusmomentti **pieneni** verrattaessa irtoamattoman tuen ratkaisuun. Suunnittelussa usein käytetty kolmiokuormitus palkilla antoi lähes oikean taivutusmomentin tasaisella kuormituksella neliölaatatalla, kun $aD/EI = \frac{1}{2}$. Neliölaatatalla tukivoima on lähes vakio jos $aD/EI = 2...3$.



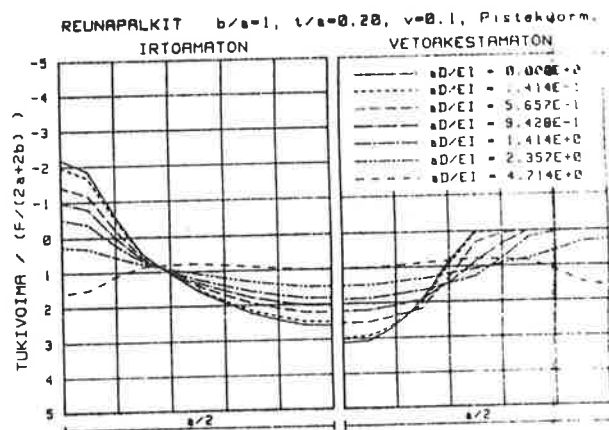
Kuva 6. Kosketusjännityksiä ohuelle laatalle (tas. kuorma).



Kuva 7. Kosketusjännityksiä paksulle laatalle (tas. kuorma).



Kuva 8. Kosketusjännityksiä ohuelle laatalle (pistekuorma).



Kuva 9. Kosketusjännityksiä paksulle laatalle (pistekuorma).

KIITOKSET

Tutkimusta on tukenut rahallisesti Suomen Akatemia, jolle kiitokset tuesta.

KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Keer, L.M., Mak, A.F., Loss of Contact in the Vicinity of a Right-Angle Corner for a Simply Supported, Laterally Loaded Plate, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, 1981, pp. 597 - 600.
- [2] Dempsey, J.P., Keer, L.M., Patel, N.B., Glasser, M.L., Contact Between Plates and Unilateral Supports, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, 1984, pp. 324 - 328.
- [3] Saarinen, E., Kähkönen, L., Betonirakenteiden suunnittelun oppikirja, Osa 2, Suomen Betoniyhdistys r.y., BY202, Jyväskylä, 1983.
- [4] Heinisuo, M.T., Miettinen, K.A., Linear Contact Between Plates and Unilateral Elastic Supports, Julkaisematon käsikirjoitus, 1985.
- [5] Williams, M.L., ~~Stress~~ Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, 1952.
- [6] Kuusjärvi, R., Staattisen laattatehtävän ratkaiseminen elementtimenetelmällä, Diplomityö, TTKK, 1978.
- [7] Parland, H., Miettinen, K.A., Linear and non-linear contact problems, International Conference on Non-linear Mechanics, Shanghai, 1985.
- [8] Heinisuo, M., Yksinkertainen palkki jäykällä epätasaisella alustalla, Rakenteiden Mekanikka, Vol. 17, No 1, 1984.
- [9] Heinisuo, M., Symmetrisen T-liitoksen statiikka, Teräsrakenne, 1, 1985.
- [10] Carlsson, J., Brottmekanik, Ingenjörsforlaget, Stockholm, 1976.

JÄÄVOIMIEN MÄÄRITTÄMISESTÄ ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

TkL Erkki Pulkkinen
Oulun yliopisto

1 JOHDANTO

Jäävoimien analyyttisessä määrittämisessä tarvitsemme kokeellisia tuloksia jään mekaanisista ominaisuuksista ja menetelmiä, miten nämä tekijät voidaan teoreettisesti ottaa huomioon. Viime vuosina jäävoimia on yritetty määrittää analyyttisesti kahdella toisistaan poikkeavalla menetelmällä. Silloin kun jää käyttäytyy hauraasti on käytetty plastisuusteoriaan perustuvia lähtökohtia, kuten plastista kantokykyteoriaa. Jään sitkeällä käyttäytymisalueella on vuorostaan käytetty virumisteoriaan perustuvia lähtökohtia, kuten referenssijännitysmenetelmää. Molemmilla menetelmillä saadaan sekä ylä- että alalikiarvot jäävoimista, mutta yleensä haarukka, millä välillä jäävoiman arvo vaihtelee, on suuri ja siten todellinen jäävoima voi olla vieläkin mitä sattuu. Yksi keino tilanteen korjaamiseksi on elementtimenetelmän käyttö todellisten jäävoimien määrittämiseksi.

Plastisuusteorian soveltaminen elementtimenetelmään on hyvin tunnettu asia. Saman menetelmän soveltaminen jäävoimien laskentaan on jo myös tunnettua /3,4,5/. Virumisteorian soveltaminen elementtimenetelmään on myös vanha asia, mutta sen käyttäminen jäävoimien laskemiseen ei ole. Tähän mennessä jään viruva käyttäytyminen on otettu huomioon jään kantokykylaskelmissa ja referenssijännitysmenetelmän yhteydessä. Kummassakaan ratkaisut eivät ole pohjautuneet elementtimenetelmään.

Jatkossa tulen esittelemään, miten epälineaarinen viruminen otetaan huomioon elementtimenetelmässä, missä epälineaarisen tasapainoyhtälön ratkaisu perustuu ensimmäisen asteen itsekorjaavan menetelmän käyttöön. Vastaavan toimenpiteen olen tehnyt jo plastisuusteorialle aikaisemmissa julkaisussani /3,4/.

2 EPÄLINEAARINEN VIRUMINEN

Epälineaarista virumista kuvaavaksi laiksi olen ottanut Sinhan esittämän lausekkeen kokonaisvenymän ϵ_t ja vakiojännityksen σ_e välille siten, että Norton-termi on kerrottu t^{n-1} :llä Bailey-Norton-termiksi.

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_e}{E} + c_1 \left\{ \frac{d_1}{d} \right\} \left\{ \frac{\sigma_e}{E} \right\}^s (1 - e^{-(a_T t)^b}) + A \sigma_e^m t^n \quad (1)$$

missä ϵ_t kokonaisvenymä

σ_e vakiojännitys

E kimmomoduuli

d raekoko

d_1 vertailu raekoko

a_T käänteinen relaksaatio aika

A viskoinen venymisnopeus

c_1, s, b, m ja n materiaalivakioita

Venymisnopeus $\dot{\epsilon}_a$ saadaan yhtälöstä (1) derivoimalla lauseke ajan t suhteen. Samalla muutetaan lauseke kolmidimensionaaliseksi J_2 -teorian avulla kertomalla se $\sqrt{3}s_{ij}/2\sigma_e$:llä, missä $\{s_{ij}\}$ on deviaattori-jännitys ja σ_e efektiivinen jännitys.

$$\{\dot{\epsilon}_{ij}\}_a = \left[c_1 \frac{d_1}{d} \frac{e^{s-1}}{E^s} b a_T^b e^{-(a_T t)^b} \cdot t^{b-1} + A n \frac{m-1}{e} t^{n-1} \right] \cdot \frac{3}{2} \{s_{ij}\} \quad (2)$$

Lasketaan matriisi $[H]$ seuraavien lähteiden /2,6/ mukaisesti.

$$[H] = \frac{\partial \{\dot{\epsilon}_{ij}\}_a}{\partial \{\sigma\}} \quad (3)$$

Käytetään seuraavia lyhennysmerkintöjä

$$\{a_{ij}\} = \frac{3}{2\sigma_e} \{s_{ij}\}$$

$$V_1 = c_1 \frac{d_1}{d} \frac{1}{E^s} b a_T^b e^{-(a_T t)^b} \cdot t^{b-1}$$

$$F^s = \sigma_e^s$$

$$F^m = \sigma_e^m$$

$$V_2 = \text{Ant}^{n-1} \quad (4)$$

Lyhennysmerkinnöillä lauseke (2) supistuu seuraavaan muotoon

$$\{\epsilon_{ij}\}_a = V_1 F^s \{a_{ij}\} + V_2 F^m \{a_{ij}\} \quad (5)$$

Lasketaan lausekkeen (3) matriisi $[H]$, joksi saadaan seuraavaa

$$[H] = (V_1 F^s + V_2 F^m) \frac{2}{3\sigma_e} [M_1] + (V_1 (s-1) F^s + V_2 (m-1) F^m) \cdot \frac{9}{3\sigma_e^3} [M_2] \quad (6)$$

missä

$$[M_1] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 6 & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & 6 & 0 \\ & & & & & 6 \end{bmatrix}$$

ja

$$[M_2] = \begin{bmatrix} s_{xx}^2 & s_{xx}s_{yy} & s_{xx}s_{zz} & 2s_{xx}\tau_{xy} & 2s_{xx}\tau_{yz} & 2s_{xx}\tau_{xz} \\ & s_{yy}^2 & s_{yy}s_{zz} & 2s_{yy}\tau_{xy} & 2s_{yy}\tau_{yz} & 2s_{yy}\tau_{xz} \\ & & s_{zz}^2 & 2s_{zz}\tau_{xy} & 2s_{zz}\tau_{yz} & 2s_{zz}\tau_{xz} \\ & & & 4\tau_{xy}^2 & 4\tau_{xy}\tau_{yz} & 4\tau_{xy}\tau_{xz} \\ \text{symm.} & & & & 4\tau_{yz}^2 & 4\tau_{yz}\tau_{xz} \\ & & & & & 4\tau_{xz}^2 \end{bmatrix}$$

Kun venymisnopeuden $\{\epsilon_{ij}\}_a$ ja matriisin $[H]$ lausekkeita lasketaan tulee meidän muistaa, että efektiivinen jännitys muuttuu jokaisen kuormitusaskeleen aikana. Lausekkeissa (2) ja (3) esiintyvänä aikana t ei nyt voida käyttää ensimmäisen kuormitusaskeleen alusta

laskettua todellista aikaa vaan efektiivistä aikaa, joka lasketaan seuraavilla toimenpiteillä /1/. Lasketaan lauseketta (1) käyttäen efektiivinen kokonaisvenymä ε_t kutakin efektiivistä jännitystä σ_e ja todellista aikaa vastaten. Tämän jälkeen lasketaan efektiivinen aika $\bar{t}$ viimeksi laskettua efektiivistä jännitystä σ_e ja äsken laskettua efektiivistä venymää ε_t vastaten lausekkeella (1).

3 EPÄLINEAARINEN VIRUMINEN ENSIMMAISEN ASTEEN ITSEKORJAAVALLA ASKELMENETELMÄLLÄ

Kun epälineaarinen viruminen halutaan ottaa huomioon elementtimenetelmällä, tietää se automaattisesti, että systeemin tasapainoyhtälöstä tulee epälineaarinen. Suoritetaan tämä ratkaisu ensimmäisen asteen itsekorjaavaan askelmenetelmää hyväksi käyttäen /3/. Kaikkein ensimmäiseksi ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä seuraavalla tavalla

$$[K_e]\{\Delta q\}_1 = \{\Delta F\}_1 \quad (7)$$

missä $[K_e]$ lineaarinen jäykkyyssmatriisi
 $\{\Delta q\}$ siirtymän lisäys
 $\{\Delta F\}$ kuormituksen lisäys

Tämän jälkeen lasketaan seuraavat suureet kussakin integrointipisteessä

$$\{\Delta \varepsilon\}_1 = [B]\{\Delta q\}_1,$$

$$\{\Delta \sigma\}_1 = [E]\{\Delta \varepsilon\}_1,$$

$$\sigma_{c1}, \varepsilon_{t1},$$

$$\bar{t}_1, \{\dot{\varepsilon}_{ij}\}_1, [H]_1,$$

$$[E_n]_1 = ([E]^{-1} + [H]_1)^{-1} \quad \text{ja}$$

$$[E_{ero}]_1 = [E] - [E_n]_1 \quad (8)$$

Seuraavaa kuormitusaskelta varten lasketaan viskoinen jäykkyyssmatriisi $[K_v]$ ja kokonaisjäykkyyssmatriisi $[K_T]$.

$$[K_v]_1 = \int_V [B]^T [E_{ero}]_1 [B] dV \quad (9)$$

ja

$$[K_T] = [K_e] + [K_v]_1 \quad (10)$$

Lisäksi lasketaan virumisesta johtuva epätasapainovoimavektori $\{f_v\}$ seuraavalla tavalla

$$\{f_v\} = -[K_e]\{q\} + \{F\} + \int_V [B]^T [E_n]_1 \{\dot{\epsilon}_{ij}\}_1 \Delta t_1 dV \quad (11)$$

Tämän jälkeen suoritetaan ensimmäinen varsinainen ensimmäisen asteen itsekorjaavan askelmenetelmän mukainen kuormitusaskel

$$[K_T]\{\Delta q\}_2 = \{\Delta F\}_2 + Z\Delta P\{f_v\} \quad (12)$$

missä $Z\Delta P$ itsekorjaustermi

Tämän jälkeen lasketaan lausekkeet (8), (9), (10) ja (11) kuten edellä paitsi, että jännityksen lisäyksen $\{\Delta\sigma\}$ ja epätasapainovoimavektorin $\{f\}$ lausekkeisiin tulee yhdet termit lisää.

Uusi jännityksen lisäys lasketaan seuraavasti

$$\{\Delta\sigma\}_2 = [E_n]_1 (\{\Delta\epsilon\}_2 - \{\epsilon_{ij}\}_1 \Delta t_1) \quad (13)$$

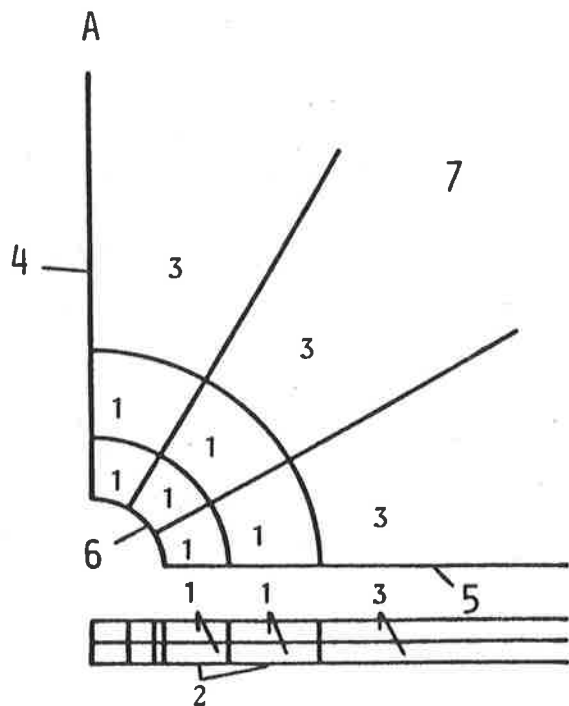
Epätasapainovoimavektorin lausekkeeseen tulee lisäys viruvasta jännityksestä seuraavasti

$$\{f_v\} = \int_V [B]^T [E_{ero}]_1 \{\epsilon\} dV \quad (14)$$

Tämän jälkeen prosessia voidaan jatkaa niin pitkälle, kun on tarpeen.

4 JÄÄVOIMIA SINHAN MALLILLA

Käytän edellä kuvattua laskentamenetelmää jäävoimien määrittämiseen pyöreätä pilaria vasten. Jaan pilarin ympärillä olevan jääkentän kuvan 1 mukaisella tavalla elementeiksi. Käytän seuraavia merkintöjä; 1 $\triangleq$ normaali kolmidimensionaalinen solid-elementti, 2 $\triangleq$ alustaa kuvaava välipintaelementti, 3 $\triangleq$ kolmidimensionaalinen solid-äärettömyys-elementti, 4 $\triangleq$ jääkenttä on symmetrinen viivan 4 suhteen, 5 $\triangleq$ vapaa reuna, 6 $\triangleq$ pyöreä pilari ja 7 $\triangleq$ reuna äärettömyydessä. Reunaehdot reunalla 6 ovat jäykät eli reuna 6 pystyy ainoastaan liikkumaan A suuntaanpäin.



Kuva 1. Jääkentän elementtiverkko (periaate)

Radiaalisuunnassa käytän ensiksi viittä tavallista kolmidimensionaalista elementtiä ja yhtä äärettömyys-elementtiä. Kehäsuunnassa käytän viidellä ensimmäisellä rivillä viittä tavallista kolmidimensionaalista elementtiä ja viimeisellä kuudennella rivillä viittä äärettömyys-elementtiä. Paksuussuunnassa käytän kahta elementtikerrosta sekä tavallisten että äärettömyys-elementtien kohdalla ja lisäksi jokaisen alimmaisessa kerroksessa olevan tavallisen elementin alla välipintaelementtiä alustan kuvaamiseen. Elementtien kokonais-

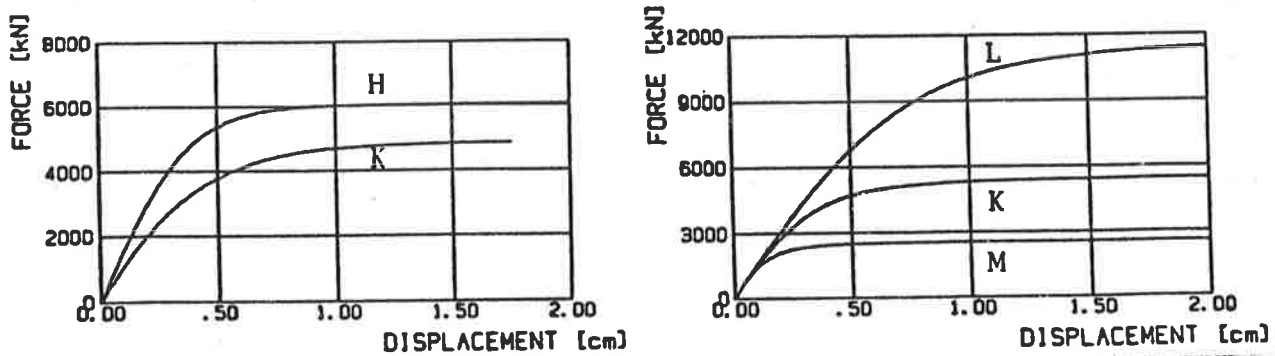
määräksi tulee 85 elementtiä, joista 50 on tavallista kolmidimensio-naalista, 10 äärettömyys- ja 25 välipintaelementtiä.

Jään paksuus on 0.7 m ja pilarin halkaisija 4.0 m. Elementtien nurkkapisteiden koordinaatit ovat seuraavat 2.0, 3.0, 5.0, 10.0, 20.0, 33.0 ja 64.0 m. Materiaalivakiot, joita käytän Sinhan mallis-sa, ovat taulukossa 1.

Taulukko 1. Tietokoneajoissa käytetyt jään materiaaliominaisuudet

E	[kN/cm ²]	950	(= 9500 MPa)
ν		0.3	
Q	[kJ/mol]	67	
R		8.314	
c_1		9	
s		1	
m		3	
b		0.34	
a_T	[1/s]	$2.5 \cdot 10^{-4}$	(vertailu lämpötila = 263°K)
A	[1/s]	$1.76 \cdot 10^{-7}$	(vertailu lämpötila = 263°K)
d	[mm]	4	
T	[°K]	262	
σ_r	[kN/cm ²]	0.1	

Kuvassa 2 on viisi jäävoima-siirtymä käyrää, joista neljä on eri-laista. Käyrä H on laskettu siten, että lämpötila on 262°K kummas-sakin kerroksessa. Käyrä K on vuorostaan laskettu siten, että ylem-män kerroksen lämpötila on 262°K ja alemman 268°K. Pilarin nopeus käyriä H ja K laskiessa on ollut 0.0001 cm/s. Käyrät L ja M on laskettu samoilla lämpötiloilla kuin käyrä K mutta eri nopeuksilla. Käyrälle L on käytetty nopeutta 0.001 cm/s ja käyrälle M 0.00001 cm/s. Jäävoima käyrälle H on 6.0 MN ja käyrälle K 5.48 MN. Vas-taavasti jäävoimat käyrille L, K ja M ovat seuraavat 11.4, 5.48 ja 2.48 MN. Nämä tulokset ovat vertailukelpoisia referenssijännitys-menetelmällä laskettujen jäävoimien kanssa.



Kuva 2. Jäävoima-siirtymä käyriä

5 LÄHDELUETTELO

- /1/ Bathe, K.-J., Finite element procedures in engineering analysis. New Jersey 1982, 735 s.
- /2/ Owen, D.R.J. & Hinton, E., Finite elements on plasticity: Theory and practice. Swansea 1980, 594 s.
- /3/ Pulkkinen, E., Large displacement viscoelasticplastic finite element analysis of ice forces during ice failure by crushing against a pier. POAC-83. Helsinki, April 5-9 1983, s. 802 - 811.
- /4/ Pulkkinen, E., Finite element analysis of ice forces during failure by crushing against structures. Symposium on Ice Problems. IAHR. Vol. III Hamburg, August 27-31 1984, s. 17 - 26.
- /5/ Pulkkinen, E., Comparison between the creep and the plastic analysis of ice forces by the FEM. Fifth international offshore mechanics and arctic engineering symposium. OMAE. Tokyo, April 13-17 1986.
- /6/ Zienkiewicz, O.C., The finite element method. London 1977. 787 s.

KÄYRÄ ISOPARAMETRINEN PALKKIELEMENTTI

Tapio Salmi

Oulun yliopisto
Rakentamistekniikan osasto

1 JOHDANTO

Käyrät palkit, erityisesti kaaret ja vaakatasossa kaarevat palkit, ovat nykyään varsin yleisiä rakenteiden osia. Usein käyrä palkki toimii kuorirakenteessa jäykistyspalkkina.

Käyrän palkin mekaniikan tehtävät ratkaistaan yleensä käyttämällä elementtimenetelmää. Pääosa tämän alueen lujuuslaskennan kehittelytyöstä on kohdistunut joihinkin erityistapauksiin, kuten tasossa käyrään kaarielementtiin, jolla usein on vielä oletettu olevan vakio-kaarevuus.

Käyrän palkin elementin kehittelyssä on iso- tai yliparametrin muunnoksen käyttö elementin geometrian ja siirtymäkentän kuvauksessa aivan keskeisellä sijalla. *Ferguson* ja *Clark* [1] sekä *Buragohain et al.* [2] muodostavat joukon käyriä isoparametrisia palkkielementtejä pelkistämällä 3-ulotteisia isoparametrisia solidielementtejä yksiulotteisiksi. Palkin poikkileikkauksen on tällöin oltava suorakaiteen muotoinen tai ainakin koottavissa suorakaiteen muotoisista osista. Varsinaiseen palkkiteoriaan perustuvia käyriä elementtejä kehittävät *Venkatosh* ja *Rao* [3] sekä *Jirousek* [4]. *Venkatosh* ja *Rao* käsittelevät kaksisolmuista 16-vapausasteen epäisotrooppista elementtiä, jonka siirtymäkentän kuvaukseen käytetään *HERMITE*n polynomeja. *Jirousek* kehittää joukon isoparametrisia elementtejä, joilla voi olla useita sisäsolmuja. Artikkeleissa [1]-[4] esitetyt elementit on testattu joihinkin statiikan tehtäviin.

Tässä esityksessä luonnostellaan *Jirousekin* elementin tapainen käyrän palkin teoriaan perustuva isoparametrinen palkkielementti, joka käyttää edellä mainittuja elementtejä hieman tarkempaa kinemaattista mallia.

Palkin kinemaattisissa yhtälöissä samoin kuin poikkipinnan momenttisuureissa otetaan huomioon palkin kaarevuuden ja kierevyyden vaikutus. Elementin tehokkuutta on tarkoitettu testata erityisesti dynamiikan tehtävissä. Elementin kullakin solmulla on 6 vapausastetta, kolme siirtymä- ja kolme rotaativapausastetta. Elementillä voi olla päätesolmujen lisäksi 0...4 sisäsolmua, joten elementin vapausasteiden lukumäärä on 12...36. Elementin geometrian ja siirtymäkentän kuvaukseen käytetään *LAGRANGE*n interpolaatiopolynomeja sekä jäykkyys- ja massamatriisin alkiodien integroinnissa *GAUSS*in numeerista integrointia.

Elementin kehittämisessä tehdään seuraavat oletukset:

1. Siirtymät ovat pienet niin, että tehtävä on *geometrisesti* lineaarinen.
2. Materiaali on *fysikaalisesti* lineaarista.
3. Palkin poikkileikkaus siirtyy jäykkänä tasona, joka ei välttämättä ole kohtisuorassa deformatiivista referenssiviivaa vastaan. Leikkausmuodonmuutos otetaan siis likimääräisesti huomioon, mutta poikkileikkauksen venymät ja liukumukset oletetaan nolliksi.

Myös artikkelien [1]-[4] elementit perustuvat näille oletuksille. Oletuksen 3 mukaan palkin poikkipintapainuma jätetään huomioon ottamatta, joten elementti sopii vain palkeille, joiden poikkileikkaus on kompakti.

2 PALKKIELEMENTIN GEOMETRIA

Valitaan käyrän palkin jokin sen pituussuuntaisista säikeistä palkin *referenssiviivaksi*. Referenssiviivaa vastaan kohtisuoran tason ja palkin materiaalidomeenin leikkauskuviota sanotaan palkin *poikkileikkaukseksi*. Palkin poikkileikkauksen referenssiviivan pisteeseen asetetaan käyräviivainen $Y^1 Y^2 Y^3$ -koordinaatisto, jonka normeerattua ortogonaalista kantajärjestelmää merkitään g_1, g_2, g_3 kuvan 1a mukaisesti. Koordinaattiviiva Y^1 yhtyy referenssiviivaan ja koordinaattisuorat Y^2 ja Y^3 yhtyvät poikkileikkauksen *pääsuuntiin*.

Kuvassa 1b on esitetty nelisolmuisen palkkielementin emo. Emoelementin pituus on aina 2 ja $\xi \in [-1, +1]$. Referenssiviivan mielivaltaisen pisteen koordinaatit ovat siis

$$x^1 = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \bar{x}_i^1, \quad x^2 = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \bar{x}_i^2, \quad x^3 = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \bar{x}_i^3 \quad (3)$$

Merkitään referenssiviivaa pitkin mitatun käyräviivaisen koordinaatin y^1 arvoja solmuissa $\bar{y}_i^1$ ($i=1, \dots, n$). Tällöin kuvaus emoelementiltä käyrälle palkkielementille on muotoa

$$y^1 = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \bar{y}_i^1 \quad (4)$$

Tehtävänä on ensin määrittää koordinaatin y^1 solmuarvot $\bar{y}_i^1$, jota varten tarvitaan elementin pituus ℓ . Koska yhtälöiden (3) perusteella koordinaatit

$$x^1 = x^1(\xi), \quad x^2 = x^2(\xi), \quad x^3 = x^3(\xi) \quad (5)$$

missä $\xi \in [-1, +1]$ on parametri, niin elementin pituus

$$\ell = \int_{\xi=-1}^1 \sqrt{(x_{,\xi}^1)^2 + (x_{,\xi}^2)^2 + (x_{,\xi}^3)^2} d\xi \quad (6)$$

joka yhtälöiden (3) perusteella voidaan laskea lausekkeesta

$$\ell = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \bar{x}_i^1\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \bar{x}_i^2\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \bar{x}_i^3\right)^2} d\xi \quad (7)$$

Integrointi suoritetaan esimerkiksi GAUSSin numeerisella integroinnilla käyttäen niinmontaa integrointipistettä, että asetettu tarkkuus saavutetaan.

Referenssiviivaan liittyvän koordinaatin y^1 solmuarvot $\bar{y}_i^1$ ($i=1, \dots, n$) saadaan nyt siten, että asetetaan $\bar{y}_1^1 = 0$ ja $\bar{y}_2^1 = \ell$ sekä mahdolliset sisäsolmujen arvot tiettyinä osina pituudesta ℓ .

Merkitään suureen $(\cdot)$ osittaisderivaattaa koordinaatin y^1 suhteen

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial y^1} \equiv (\cdot)_{,1}$$

Ketjuderivointisäännön ja yhtälön (4) mukaan voidaan kirjoittaa

$$(\cdot)_{,\xi} = (\cdot)_{,1} y_{,\xi}^1 = (\cdot)_{,1} \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \bar{y}_i^1 = (\cdot)_{,1} J$$

jolloin on merkitty kuvauksen JACOBI:n determinantin arvoa

$$J = \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \bar{y}_i^1 \quad (8)$$

Derivaatalle $(\cdot)_{,1}$ seuraa nyt yhtälö

$$(\cdot)_{,1} = J^{-1} (\cdot)_{,\xi} \quad (9)$$

Referenssiviivan tangentin suuntainen vektori $\mathbf{t}$ tietyssä pisteessä saadaan derivoimalla tähän pisteeseen piirretty paikkavektori (1) parametrin ξ suhteen. Tangentin suuntaiseksi vektoriksi tulee

$$\mathbf{t} = x_{,\xi}^1 \mathbf{e}_1 + x_{,\xi}^2 \mathbf{e}_2 + x_{,\xi}^3 \mathbf{e}_3$$

eli

$$\mathbf{t} = \left(\sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \bar{x}_i^1 \right) \mathbf{e}_1 + \left(\sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \bar{x}_i^2 \right) \mathbf{e}_2 + \left(\sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \bar{x}_i^3 \right) \mathbf{e}_3 \quad (10)$$

Poikkileikkauksen referenssiviivan pisteen tangentin suuntaiseksi ykkösvektoriksi $\mathbf{g}_1$ seuraa

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{t} / \|\mathbf{t}\| \quad (11)$$

Poikkileikkauksen pääakselin Y^3 suuntainen kantavektori on kuvan 1a mukaan

$$\mathbf{g}_3 = \frac{(\tilde{x}^1 - x^1) \mathbf{e}_1 + (\tilde{x}^2 - x^2) \mathbf{e}_2 + (-x^3) \mathbf{e}_3}{\sqrt{(\tilde{x}^1 - x^1)^2 + (\tilde{x}^2 - x^2)^2 + (-x^3)^2}} \quad (12)$$

jonka jälkeen kantavektori $\mathbf{g}_2$ saadaan vektoritulosta

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 \quad (13)$$

Antamalla koordinaateille x^j ja $\tilde{x}^j$ ($j=1,2,3$) yhtälössä (12) sekä parametrille ξ yhtälössä (10) solmuarvot saadaan solmuun liittyvän poikkileikkauksen kantavektorit $\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2, \bar{\mathbf{g}}_3$. Merkitään niitä lyhyesti

$$\bar{\mathbf{g}}_j = \bar{g}_j^1 \mathbf{e}_1 + \bar{g}_j^2 \mathbf{e}_2 + \bar{g}_j^3 \mathbf{e}_3, \quad j=1,2,3 \quad (14)$$

Vektorikolmikon $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ suuntien mukaan voidaan kuhunkin solmuun liittää lokaalinen karteellinen koordinaatisto, joka on sitten kiertävä kiinteään globaalin $X^1 X^2 X^3$ -koordinaatiston suuntaiseksi. Solmun i koordinaatiston *kiertomatriisi* on

$$[\bar{T}]_i = \begin{bmatrix} \bar{g}_1^1 & \bar{g}_1^2 & \bar{g}_1^3 \\ \bar{g}_2^1 & \bar{g}_2^2 & \bar{g}_2^3 \\ \bar{g}_3^1 & \bar{g}_3^2 & \bar{g}_3^3 \end{bmatrix}_i \quad (15)$$

Palkin *kaarevuusvektori* κ on artikkelin [5] mukaan

$$\kappa = (g_{2,1} \cdot g_3) g_1 + (g_{3,1} \cdot g_1) g_2 + (g_{1,1} \cdot g_2) g_3 \quad (16)$$

missä *palkin kierevyys* τ ja *palkin kaarevuudet* κ^2 ja κ^3 ovat kaarevuusvektorin komponentit siten, että

$$\begin{aligned} \tau &= g_3 \cdot g_{2,1} = -g_2 \cdot g_{3,1} \\ \kappa^2 &= g_2 \cdot g_{1,1} = -g_1 \cdot g_{2,1} \\ \kappa^3 &= g_3 \cdot g_{1,1} = -g_1 \cdot g_{3,1} \end{aligned} \quad (17)$$

Kaarevuusvektorin $\kappa = \tau g_1 - \kappa^2 g_2 + \kappa^3 g_3$ kinemaattinen tulkinta on, että se esittää kantavektorikolmikon g_1, g_2, g_3 kulmanopeusvektoria, kun kolmikko etenee referenssiviivaa pitkin ykkösnopeudella. Kaarevuuksien κ^2 ja κ^3 sekä kierevyyden τ lausekkeissa esiintyvät derivaatat $g_{j,1}$ kannattaa laskea differenssiosamäärinä

$$g_{j,1} = J^{-1} g_{j,\xi} \approx J^{-1} \frac{\Delta g_j}{\Delta \xi}, \quad j=1,2,3 \quad (18)$$

Antamalla parametrille ξ solmuarvot $\bar{\xi}_i$ ($i=1, \dots, n$) saadaan derivaatat (18) ja niiden avulla kirjoitetut kierevyys ja kaarevuudet solmuissa i . Merkitään niitä $\bar{\tau}_i, \bar{\kappa}_i^2$ ja $\bar{\kappa}_i^3$.

4 KINEMAATTISET YHTÄLÖT

Elementin poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen $P: (y^2, y^3)$ kinemaattiset yhtälöt ovat (Salmi [5])

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (u_{1,1} - \kappa^2 u_2 - \kappa^3 u_3 - y^2 \varphi_{3,1} + y^3 \varphi_{2,1} - y^2 \kappa^3 \varphi_1 + y^3 \kappa^2 \varphi_1 - y^3 \tau \varphi_3 - y^2 \tau \varphi_2) \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} (u_{2,1} + \kappa^2 u_1 - \tau u_3 - \varphi_3 + y^3 \kappa^3 \varphi_3 + y^3 \kappa^2 \varphi_2 - y^3 \varphi_{1,1}) \\ \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} (u_{3,1} + \kappa^3 u_1 + \tau u_2 + \varphi_2 - y^2 \kappa^2 \varphi_2 - y^2 \kappa^3 \varphi_3 + y^2 \varphi_{1,1})\end{aligned}\quad (19)$$

Palkin poikkileikkauksen referenssiviivan pisteen siirtymäkomponentteja on merkitty u_1, u_2, u_3 ja poikkileikkauksen rotaatiokomponentteja $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Käyräviivaisen $Y^1 Y^2 Y^3$ -koordinaatiston metriikkatensorin determinantti

$$g = (1 - y^2 \kappa^2 - y^3 \kappa^3)^2 \quad (20)$$

Muodonmuutoskomponentit $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}$ ja ϵ_{13} ovat kappaleen pisteen GREEN-LAGRANGEn muodonmuutostensorin komponentteja poikkileikkauksen pisteeseen liittyvässä karteesisessä koordinaatistossa.

Kirjoittamalla muodonmuutostensorin nolasta poikkeavat komponentit sarakematriisiksi (vektoriksi)

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11} \ 2\epsilon_{12} \ 2\epsilon_{13}\} = \{\epsilon_{11} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13}\} \quad (21)$$

ja ottamalla käyttöön matriisit

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa^2 & -\kappa^3 & y^3 \kappa^2 - y^2 \kappa^3 & -y^2 \tau & -y^3 \tau \\ \kappa^2 & 0 & -\tau & 0 & y^3 \kappa^2 - 1 + y^3 \kappa^3 & \\ \kappa^3 & \tau & 0 & 0 & 1 - y^2 \kappa^2 & -y^2 \kappa^3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

ja

$$[b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y^3 & -y^2 \\ 0 & 1 & 0 & -y^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

voidaan kinemaattiset yhtälöt kirjoittaa tiiviissä muodossa

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{\sqrt{g}} ([b]\{u_{,1}\} + [a]\{u\}) \quad (24)$$

Tällöin referenssiviivan siirtymäkomponentit on kirjoitettu *siirtymävektoriin* $\{u\}$ järjestyksessä

$$\{u\} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3\} \quad (25)$$

jolloin

$$\{u_{,1}\} = \{u_{1,1} \ u_{2,1} \ u_{3,1} \ \varphi_{1,1} \ \varphi_{2,1} \ \varphi_{3,1}\} \quad (26)$$

Elementin solmulla on kuusi vapausastetta, kolme siirtymä- ja kolme rotaatiovapausastetta. Solmun i siirtymäkomponentit $\bar{u}_j$ ja rotaatio-komponentit $\bar{\varphi}_j$ ($j=1,2,3$) kirjoitetaan *solmusiirtymävektoriin* $\{\bar{d}\}_i$ järjestyksessä

$$\{\bar{d}\}_i = \{\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{u}_3 \ \bar{\varphi}_1 \ \bar{\varphi}_2 \ \bar{\varphi}_3\}_i, \quad i=1, \dots, n \quad (27)$$

Kun elementti halutaan *isoparametriseksi*, niin siirtymien interpolointiin käytetään samoja solmuja ja samoja interpolointifunktioita kuin geometrian kuvaukseen. Kenttäfunktio $\{f\}$ esitetään tällöin muodossa

$$\{f\} = \{u\} = \sum_{i=1}^n N_i \{\bar{d}\}_i \quad (28)$$

Yhteyden (28) ja derivaattavektorin

$$\{u_{,1}\} = J^{-1} \left(\sum_{i=1}^n N_i \{\bar{d}\}_i \right)_{,\xi} = J^{-1} \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \{\bar{d}\}_i \quad (29)$$

avulla kinemaattisista yhtälöistä (24) seuraa

$$\{\epsilon\} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} ([a] N_i + [b] J^{-1} N_{i,\xi}) \{\bar{d}\}_i \quad (30)$$

Merkitsemällä elementin solmusiirtymien vektoria

$$\{\bar{d}\} = \{ \{\bar{d}\}_1 \mid \{\bar{d}\}_2 \mid \dots \mid \{\bar{d}\}_n \} \quad (31)$$

voidaan kinemaattiset yhtälöt lopulta kirjoittaa muotoon

$$\{\epsilon\} = \sum_{i=1}^n [B_i] \{\bar{d}\}_i = [B] \{\bar{d}\} \quad (32)$$

missä $3 \times 6n$ -matriisi, niin sanottu *kinemaattinen matriisi*

$$[B] = [[B_1] \mid [B_2] \mid \dots \mid [B_n]] \quad (33)$$

ja 3×6 -matriisit

$$[B_i] = \frac{1}{\sqrt{g}} ([a] N_i + [b] J^{-1} N_{i,\xi}) \quad (34)$$

5 MATERIAALIYHTÄLÖT

GREEN-LAGRANGEn muodonmuutostensorin komponenttien (19) yhteydessä käytetään PIOLA-KIRCHHOFFin toisen jännitystensorin komponentteja σ^{11} , σ^{12} , σ^{13} . Lineaarisesti kimmoisen, isotrooppisen materiaalin *materiaalilaki* on tällöin

$$\begin{aligned}\sigma^{11} &= E \epsilon_{11} \\ \sigma^{12} &= 2G \epsilon_{12} = G \gamma_{12} \\ \sigma^{13} &= 2G \epsilon_{13} = G \gamma_{13}\end{aligned}\quad (35)$$

missä E on kimmomoduuli ja G liukumoduuli. Matriisimuodossa materiaalilaki voidaan kirjoittaa

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} \quad (36)$$

missä

$$\{\sigma\} = \{\sigma^{11} \quad \sigma^{12} \quad \sigma^{13}\} \quad (37)$$

ja *kimmomatriisi*

$$[E] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (38)$$

6 ELEMENTIN JÄYKKYYS- JA MASSAMATRIISI

Tavanomaisen elementtimenetelmän teoriakehittelyn perusteella elementin *jäykkyyismatriisilla* on lauseke

$$[k] = \iiint_V [B]^T [E] [B] dV \quad (39)$$

Ottamalla huomioon differentiaalipalan tilavuuden ja pinta-alkion lausekkeet

$$\begin{aligned}dV &= \sqrt{g} dy^1 dy^2 dy^3 = \sqrt{g} J d\xi dA \\ dA &= dy^2 dy^3\end{aligned}\quad (40)$$

saadaan elementin jäykkyyismatriisin lausekkeeksi

$$[k] = \int_{\xi=-1}^1 \int_A [B]^T [E] [B] \sqrt{g} dA J d\xi \quad (41)$$

Jäykkyysmatriisi, jonka dimensio on $6n \times 6n$, kannattaa osittaa seuraavasti

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & \dots & [k_{1n}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & \dots & [k_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [k_{n1}] & [k_{n2}] & \dots & [k_{nn}] \end{bmatrix} \quad (42)$$

missä 6×6 -osamatriisit ovat

$$[k_{ij}] = \int_{-1}^1 \iint_A [B_i]^T [E] [B_j] \sqrt{g} \, dA \, J \, d\xi, \quad i, j=1, \dots, n \quad (43)$$

Osajäykkyysmatriisin lauseketta (43) kannattaa kehittää siten, että suoritetaan integrointi yli poikkileikkauspinnan A . Tätä varten kirjoitetaan 3×6 -matriisi $[B_i]$ tulona

$$[B_i] = \frac{1}{\sqrt{g}} [C] [N_i] \quad (44)$$

missä 3×12 -matriisi $[C]$ ja 12×6 -matriisi $[N_i]$ on

$$[C] = [[a] \mid [b]], \quad [N_i] = [N_i [I] \mid N_{i,\xi} J [I]]^T \quad (45)$$

6×6 -matriisi $[I]$ on ykkösmatriisi. Näillä toimenpiteillä jäykkyysmatriisin (43) integrandista saadaan separoitua ydin, joka ei riipu koordinaatista ξ . Lauseke (43) on tällöin muotoa

$$[k_{ij}] = \int_{-1}^1 [N_i]^T \left(\iint_A \frac{1}{\sqrt{g}} [C]^T [E] [C] \, dA \right) [N_j] J \, d\xi \quad (46)$$

Merkitään integrandin ydintä, symmetristä 12×12 -matriisia

$$[G] = \iint_A \frac{1}{\sqrt{g}} [C]^T [E] [C] \, dA = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \\ [G_{21}] & [G_{22}] \end{bmatrix} \quad (47)$$

Kun merkitään, kuten kirjoituksessa [5], poikkipinnan *yleistettyjä momentteja*

$$I_{\mu\nu} = \iint_A \frac{1}{\sqrt{g}} (y^2)^\mu (y^3)^\nu \, dA \quad (48)$$

voidaan lausekkeen (47) pintaintegrointi kehittää edelleen. 6×6 -matriiseiksi $[G_{ij}]$ saadaan liitteen 1 mukaiset esitykset.

Tuloksen (46) mukainen jäykkyyismatriisin osa $[k_{ij}]$ ($i, j=1, \dots, n$) voidaan lopulta kirjoittaa muotoon

$$[k_{ij}] = \int_{\xi=-1}^1 (N_i N_j [G_{11}] + J N_i N_{j,\xi} [G_{12}] + J N_{i,\xi} N_j [G_{12}]^T + J^2 N_{i,\xi} N_{j,\xi} [G_{22}]) J d\xi \quad (49)$$

Integraali (49) lasketaan käyttämällä GAUSSin numeerista integrointia. Matriisien $[G_{11}]$, $[G_{12}]$ ja $[G_{22}]$ (liite 1) alkioden lausekkeet ovat varsin mutkikkaat. Onneksi ne eivät kuitenkaan riipu indeksiparista i, j ($i, j=1, \dots, n$), joten elementin kokonaisjäykkyyismatriisia $[k]$ kohti ne on laskettava vain kerran kussakin GAUSSin integrointipisteessä. Matriisien lausekkeissa esiintyvät kaarevuusvektorin komponentit sekä yleistetyt poikkipintasuuheet interpoloidaan solmuarvoistaan LAGRANGEn interpolaatiopolynomeja käyttäen toisin sanoen

$$\kappa^2(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \bar{\kappa}_i^2, \quad \kappa^3(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \bar{\kappa}_i^3, \quad \tau(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \bar{\tau}_i \quad (50)$$

$$I_{\mu\nu}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) (\bar{I}_{\mu\nu})_i \quad (51)$$

Usein käyränkin palkin teoriassa poikkipinnan leikkausjännitysten epätasainen jakautuminen otetaan huomioon siten, että leikkausvoimatermeihin Q^2 ja Q^3 liittyvät poikkipintasuuheet jaetaan luvulla ζ_2 tai ζ_3 , jolloin esimerkiksi suorakaiteen muotoiselle poikkileikkaukselle $\zeta = 1, 2$ ([1],[2],[4]).

Elementin jäykkyyismatriisi $[k]$ täytyy vielä kiertää lokaalista koordinaatistosta globaalin koordinaatiston mukaiseksi. Muunnoksessa käytetään kunkin solmun i ($i=1, \dots, n$) koordinaatiston kiertomatriisia $[\bar{T}]_i$, jolloin elementin transformaatiomatriisi $[T]$ on superlävistäjämatrisi

$$[T] = [[\bar{T}]_1 \quad [\bar{T}]_2 \quad \dots \quad [\bar{T}]_n] \quad (52)$$

Globaalkoordinaatiston mukainen elementin jäykkyyismatriisi $[k]$ on tällöin

$$[k] = [T]^T [k] [T] \quad (53)$$

ja sen osamatriisit

$$[k_{ij}] = [\bar{T}]_i^T [k_{ij}] [\bar{T}]_j, \quad i, j=1, \dots, n \quad (54)$$

Massamatriisin johtamiseksi tarkastellaan ensin poikkileikkauksen mielivaltaisen pisteen $P: (y^2, y^3)$ siirtymävektoria $\mathbf{v}$, jolle annetuista oletuksista seuraa lauseke

$$\mathbf{v} = (u_1 - y^2 \varphi_3 + y^3 \varphi_2) \mathbf{g}_1 + (u_2 - y^3 \varphi_1) \mathbf{g}_2 + (u_3 + y^2 \varphi_1) \mathbf{g}_3 \quad (55)$$

Pisteen P nopeusvektori $\dot{\mathbf{v}}$ on

$$\dot{\mathbf{v}} = (\dot{u}_1 - y^2 \dot{\varphi}_3 + y^3 \dot{\varphi}_2) \mathbf{g}_1 + (\dot{u}_2 - y^3 \dot{\varphi}_1) \mathbf{g}_2 + (\dot{u}_3 + y^2 \dot{\varphi}_1) \mathbf{g}_3 \quad (56)$$

joka matriisimerkintöjen ja merkintöjen (23) ja (25) avulla menee muotoon

$$\{\dot{\mathbf{v}}\} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 - y^2 \dot{\varphi}_3 + y^3 \dot{\varphi}_2 \\ \dot{u}_2 - y^3 \dot{\varphi}_1 \\ \dot{u}_3 + y^2 \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y^3 & -y^2 \\ 0 & 1 & 0 & -y^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = [b] \{\dot{\mathbf{u}}\} \quad (57)$$

Palkkielementin *liike-energialla* T on lauseke

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{\mathbf{v}}^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\xi=-1}^1 \rho \{\dot{\mathbf{v}}\}^T \{\dot{\mathbf{v}}\} \sqrt{g} dA J d\xi \quad (58)$$

Nopeusvektorin lausekkeen (57) ja merkinnän

$$\{\dot{\mathbf{u}}\} = \sum_{i=1}^n N_i \{\dot{\tilde{\mathbf{d}}}\}_i = [N] \{\dot{\tilde{\mathbf{d}}}\} \quad (59)$$

missä

$$\{\dot{\tilde{\mathbf{d}}}\} = \{ \{\dot{\tilde{\mathbf{d}}}\}_1 \mid \{\dot{\tilde{\mathbf{d}}}\}_2 \mid \dots \mid \{\dot{\tilde{\mathbf{d}}}\}_n \} \quad (60)$$

ja

$$[N] = [N_1[I] \mid N_2[I] \mid \dots \mid N_n[I]] \quad (61)$$

avulla elementin liike-energiaksi saadaan

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\tilde{\mathbf{d}}}\}^T \int_{-1}^1 [N]^T \left(\iint_A [b]^T \rho [b] \sqrt{g} dA \right) [N] J d\xi \{\dot{\tilde{\mathbf{d}}}\} \quad (62)$$

Merkitään liike-energian lausekkeen integrandin ydintä, 6x6-matriisia

$$[\Xi] = \iint_A [b]^T \rho [b] \sqrt{g} dA \quad (63)$$

sekä massan yleistettyjä momentteja

$$J_{\mu\nu} = \iint_A \sqrt{g} (y^2)^\mu (y^3)^\nu dA \quad (64)$$

Laskujen jälkeen liike-energian lausekkeen integrandin ytimeksi seuraa

$$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} J_{00} & 0 & 0 & 0 & J_{01} & -J_{10} \\ 0 & J_{00} & 0 & -J_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{00} & J_{10} & 0 & 0 \\ 0 & -J_{01} & J_{10} & J_{02} + J_{20} & 0 & 0 \\ J_{01} & 0 & 0 & 0 & J_{02} & -J_{11} \\ -J_{10} & 0 & 0 & 0 & -J_{11} & J_{20} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Tämän jälkeen elementin *massamatriisiksi* voidaan kirjoittaa

$$[m] = \int_{-1}^1 [N]^T [\mathcal{E}] [N] J d\xi \quad (66)$$

Muotomatriisin $[N]$ ositusta (61) hyväksi käyttäen voidaan myös elementin massamatriisi koota pala kerrallaan siten, että

$$[m] = \begin{bmatrix} [m_{11}] & \dots & [m_{1n}] \\ \vdots & & \vdots \\ [m_{n1}] & \dots & [m_{nn}] \end{bmatrix} \quad (67)$$

missä

$$[m_{ij}] = \int_{-1}^1 N_i [\mathcal{E}] N_j J d\xi, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (68)$$

Integraali (68) lasketaan käyttämällä GAUSSin numeerista integrointia. Matriisi $[\mathcal{E}]$ ei riipu onneksi indekseistä i, j , joten se pitää muodostaa vain kerran kussakin GAUSSin integrointipisteessä.

Poikkileikkauksen massan yleistetyt momentit interpoloidaan solmuarvoistaan toisin sanoen

$$J_{\mu\nu}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) (\bar{J}_{\mu\nu})_i \quad (69)$$

Lopuksi massamatriisi transformoidaan globaalikoordinaatistoon muunnoskaavalla

$$[\underline{m}] = [T]^T [m] [T] \quad (70)$$

joka parhaiten tapahtuu muuntamalla massamatriisin osat kaavalla

$$[\underline{m}_{ij}] = [\bar{T}]_i^T [m_{ij}] [\bar{T}]_j, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (71)$$

7 LOPPUPÄÄTELMÄ

Alkeellisoin tapa ratkaista käyrän palkin mekaniikan tehtävä on käyttää suoria palkkielementtejä tai pinta- tai solidielementtejä. Suoria elementtejä käytettäessä vapausasteiden lukumäärä kasvaa helposti turhan suureksi. Pinta- tai solidielementtejä käytettäessä taas ei oteta tehokkaasti huomioon tehtävän yksiulotteisuutta, jolloin esimerkiksi numeerinen integrointi joudutaan tekemään useampaan suuntaan. Pinta- ja solidielementtien tehokkuutta joihinkin käyrän palkin statiikan tehtäviin on testattu kirjoituksessa [6].

Myös korkeanasteisia ja pitkälle kehitettyjä elementtejä tarvitaan rakenteiden analysoinnissa. Esimerkiksi rakenteiden dynamiikassa pitkälle kehitettyjen elementtien käyttö on perusteltua varsinkin silloin, kun halutaan ottaa laskentaan mukaan korkeampia värähtelymuotoja.

Tässä esityksessä hahmotellun käyrän palkkielementin yksityiskohdittien kehittämissä on monia vaihtoehtoja. Elementtitasolla, ainakin statiikan tehtävissä, kannattaisi elementin sisäsolmuihin liittyvät vapausasteet tiivistää pois, jolloin rakenteen lopullisten vapausasteiden määrää voitaisiin oleellisesti pienentää. Palkin geometria kannattaisi ehkä antaa useamman solmun avulla kuin siirtymäkenttä, jolloin elementti olisi yliparametrinen. Elementin sisäsolmujen paikkoja voisi myös varioida (vert. [7]).

Edellä esitetyn käyrän, isoparametrisen palkkielementin käyttö on parhaiten motivoitu silloin, kun palkki on suhteellisen paksu ja käyrä, sillä tällöin kaarevuuden ja kierevyyden vaikutus poikkeipintasuuressiin ja muodonmuutoksiin on merkittävä.

Suhteellisen ohuiden käyrien rakenteiden analysoinnissa elementtimenetelmällä on niin sanotun "lukkiintumisen" mahdollisuus tiedotettava ([8]-[10]). Käyttämällä matala-asteista GAUSSin numeerista integrointia voidaan tätä vaaraa toisaalta pienentää.

8 KIRJALLISUUSLUETTELO

- [1] Ferguson G., Clark R., *A variable thickness, curved beam and shell stiffening element with shear deformations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **14**(1979), pp. 581-592.
- [2] Buragohain D., Agrawal S., Ayyar R., *A matching superparametric beam element for shell beam system*. Computers and Structures, **9**(1978), pp. 175-182.
- [3] Venkatesh A., Rao K., *A laminated anisotropic curved beam and shell stiffening finite element*. Computers and Structures, **15**(1982), pp. 197-201.
- [4] Jirousek J., *A family of variable section curved beam and thick-shell or membrane stiffening isoparametric elements*. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, **17**(1981), pp. 171-186.
- [5] Salmi T., *Avaruudessa käyrän sauvan liikeyhtälöt*. Rakenteiden Mekaniikka **15**(1982)4, s. 1-23.
- [6] MacNeal R., Harder R., *A Proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite Elements in Analysis and Design, **1**(1985), pp. 3-20.
- [7] Celia M., Gray W., *An Improved isoparametric transformation for finite element analysis*. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, **20**(1984), pp. 1443-1459.
- [8] Kikuchi F., Tanizawa K., *Accuracy and locking-free property of the beam element approximation for arch problems*. Computers and Structures, **19**(1984)1-2, pp. 102-110.
- [9] Stolarski H., Belytschko T., *Membrane locking and reduced integration for curved elements*. Journal of Applied Mechanics, **49**(1982), pp. 172-176.
- [10] Stolarski H., Belytschko T., *Shear and membrane locking in curved C^0 elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **41**(1983), pp. 279-296.

$$[G_{11}] = \begin{bmatrix} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)GI_{00} & \tau \kappa_3 GI_{00} & -\tau \kappa_2 GI_{00} & 0 & (\kappa_3 I_{00} - \kappa_2 \kappa_3 I_{10} + \kappa_2^2 I_{01})G & (-\kappa_2 I_{00} - \kappa_3^2 I_{10} + \kappa_2 \kappa_3 I_{01})G \\ (\kappa_2^2 E + \tau^2 G)I_{00} & \kappa_2 \kappa_3 EI_{00} & \kappa_2 \kappa_3 EI_{00} & (\kappa_2 \kappa_3 I_{10} - \kappa_2^2 I_{01})E & \tau \kappa_2 I_{01} E + \tau (\kappa_3 I_{10} - \kappa_2 I_{01})G & \tau \kappa_2 I_{01} E - \tau \kappa_3 I_{10} G \\ (\kappa_3^2 E + \tau^2 G)I_{00} & (\kappa_3^2 I_{10} - \kappa_2 \kappa_3 I_{01})E & (\kappa_3^2 I_{10} - \kappa_2 \kappa_3 I_{01})E & (\kappa_3^2 I_{10} - \kappa_2 \kappa_3 I_{01})E & \tau \kappa_3 I_{01} E + \tau (\kappa_3 I_{10} - \kappa_2 I_{01})G & \tau \kappa_3 I_{01} E + \tau (\kappa_3 I_{10} - \kappa_2 I_{01})G \\ (\kappa_2^2 I_{02} + \kappa_3^2 I_{20} - 2\kappa_2 \kappa_3 I_{11})E & (\kappa_2^2 I_{02} + \kappa_3^2 I_{20} - 2\kappa_2 \kappa_3 I_{11})E & (-\tau \kappa_2 I_{11} + \tau \kappa_3 I_{20})E & (-\tau \kappa_2 I_{11} + \tau \kappa_3 I_{20})E & (-\tau \kappa_2 I_{02} + \tau \kappa_3 I_{11})E & (-\tau \kappa_2 I_{02} + \tau \kappa_3 I_{11})E \end{bmatrix}$$

symm. $\begin{matrix} h_{55} \\ h_{56} \\ h_{66} \end{matrix}$

$$[G_{12}] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2 GI_{00} & \kappa_3 GI_{00} & (\kappa_3 I_{10} - \kappa_2 I_{01})G & 0 & 0 \\ -\kappa_2 EI_{00} & 0 & \tau GI_{00} & \tau GI_{10} & -\kappa_2 EI_{01} & \kappa_2 EI_{10} \\ -\kappa_3 EI_{00} & -\tau GI_{00} & 0 & \tau GI_{01} & -\kappa_3 EI_{01} & \kappa_3 EI_{10} \\ (\kappa_2 I_{01} - \kappa_3 I_{10})E & 0 & 0 & 0 & (\kappa_2 I_{02} - \kappa_3 I_{11})E & (-\kappa_2 I_{11} + \kappa_3 I_{20})E \\ -\tau EI_{10} & \kappa_2 GI_{01} & (-I_{00} - \kappa_2 I_{10})G & (I_{10} - \kappa_2 (I_{20} + I_{02}))G & -\tau EI_{11} & \tau EI_{20} \\ -\tau EI_{01} & (-I_{00} + \kappa_3 I_{01})G & -\kappa_3 GI_{10} & (I_{01} - \kappa_3 (I_{20} + I_{02}))G & -\tau EI_{11} & \tau EI_{20} \end{bmatrix} = [G_{21}]^T$$

$$[G_{22}] = \begin{bmatrix} EI_{00} & 0 & 0 & EI_{01} & EI_{10} \\ GI_{00} & 0 & -GI_{01} & 0 & 0 \\ GI_{00} & GI_{10} & 0 & 0 & 0 \\ (I_{20} + I_{20})G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EI_{02} & -EI_{11} & EI_{20} \end{bmatrix}$$

symm.

Merkin tötjā:

$\kappa_2 = \kappa^2, \kappa_3 = \kappa^3, \kappa_2^2 = \kappa^2 \kappa^2, \kappa_3^2 = \kappa^3 \kappa^3$

$h_{55} = \tau^2 EI_{20} + (\kappa_2^2 (I_{20} + I_{02}) + I_{00} - 2\kappa_2 I_{10})G$

$h_{56} = \tau^2 EI_{11} + (-\kappa_2 I_{11} - \kappa_3 I_{10} + \kappa_2 \kappa_3 (I_{20} + I_{02}))G$

$h_{66} = \tau^2 EI_{02} + (\kappa_3^2 (I_{20} + I_{02}) + I_{00} - 2\kappa_3 I_{01})G$

$$[k_{ij}] = \int_{-1}^1 (N_i N_j [G_{11}] + J N_i N_j [G_{12}] + J^2 N_i N_j [G_{21}] + J^2 N_i N_j [G_{22}]) J d\xi$$

KAAREN JÄYKKYYSKERTOIMIEN MÄÄRITTÄMINEN JÄNNITYSRESULTANTTIEN LAUSEKKEISTA

Pentti Tuominen
Oulun yliopisto

1 JOHDANTO

Elementtimenetelmän eräs perustehtävä on elementin jäykkyyskertoimien määrittäminen. Tässä esityksessä tarkastellaan käyrän, tasossa taipuvan sauvaelementin eli kaaren jäykkyyskertoimien laskemista.

Kaari-elementin jäykkyyskertoimet voidaan määrittää monella tavalla. Yksittäisissä tapauksissa tämä voi tapahtua kaaren differentiaaliyhtälöiden tarkoista ratkaisuksista (Ylinen [3]). Elementtimenetelmän kannalta tavallisin tapa on määrittää jäykkyysmatriisin alkiot kimmoenergian minimiperiaatteella otaksutun siirtymäkentän perusteella (Moan [7] ja Dawe [8]). Myös differenssienergia menetelmä on mahdollinen (Bushnell [9]). Tehtävään sopivista differentiaaliyhtälöiden numeerisista ratkaisumenetelmistä mainitaan vain differenssimenetelmä. Jäykkyyskerrointen laskenta voidaan toteuttaa artikkelissa [1] esitetyn laskentatavan yleistyksenä kaarelle. Tässä esityksessä johdetaan toinen siirtymien differenssien käyttöön perustuva laskentamenetelmä kaaren jäykkyyskertoimille.

Johdettava menetelmä on rekursiivinen tähtäysmenetelmä, jonka lähtökohtana ovat kaaren normaalivoiman ja taivutusmomentin differenssiapproksimaatiot. Menetelmä on ajateltu lähinnä pientietokoneissa käytettäväksi. Laskentatavan suurin etu lienee mahdollisuus saavuttaa hyvä tarkkuus

Kaarirakenteesta otaksutaan, että sen materiaali on lineaarisesti kimmoista ja kaaren muodonmuutokset ja siirtymät pieniä. Leikkausmuodonmuutosta ei oteta huomioon.

2 LASKENTAMENETELMÄN JOHTO

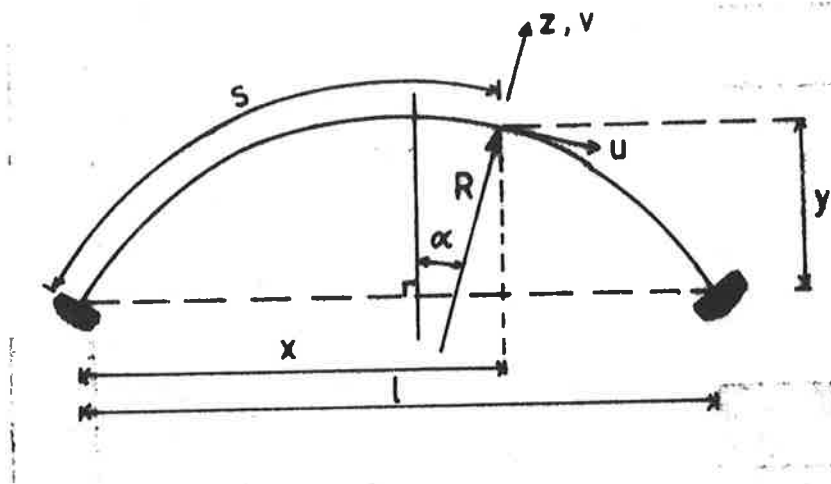
2.1 Yleistä

Seuraavisse tarkasteluissa oletetaan, että kaari on jaettu n kappaleeseen yhtäsuuria jako-

osia Δs . Näin määräytyneet jakopisteet on numeroitu yhdestä lukuun $n+1$. Jakopiste 1 on kaaren alkupiste ja $n+1$ sen loppupiste. Jännemitta 1 on pisteiden 1 ja $n+1$ välinen suora etäisyys. Pisteessä 1 on kaarta pitkin mitatulla koordinaatilla s arvo $s = 0$. Laskentapisteiden i ja $i+1$ välipistettä merkitään symbolisesti "indeksillä" $i+\frac{1}{2}$ tai vastaavalla sekaluvulla.

2.2 Kaaren siirtymien ja jännitysresultanttien välinen yhteys

Tarkastellaan kuvan 1 mukaista kaarta



E = kimmomoduuli

A = kaaren poikkileikkauksen pinta-ala

I = kaaren poikkileikkauksen neliömomentti

Kuva 1. Kaaren koordinaatit ja siirtymät sekä muita merkintöjä.

Kaaren tangentin suunnanmuutos siirtymistä u ja v on

$$\phi = \frac{u}{R} - \frac{dv}{ds} \quad (1)$$

ja kaaren painopisteakselin venymä

$$\epsilon = \frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \quad (2)$$

Etäisyydellä z kaaren akselista venymä saa arvon

$$\epsilon_z = \frac{1}{1+z/R} \left[\frac{du}{ds} + z \frac{d}{ds} \left(\frac{u}{R} \right) + \frac{v}{R} - z \frac{d^2 v}{ds^2} \right] \quad (3)$$

Kun tarkasteltavassa poikkileikkauksessa tunnetaan venymä saadaan integroimalla yhtälö taivutusmomentille

$$M = \int_A \sigma_z z dA = EJ \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R} + \frac{u}{R^2} \frac{dR}{ds} \right) \quad (4)$$

ja normaalivoimalle

$$N = \int_A \sigma_z dA = EA \left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \right) + \frac{M}{R} \quad (5)$$

Kaarevuussäteen R derivaatasta käytetään seuraavassa esityksessä lyhyempää merkintää $R' = dR/ds$. Termi J on lähellä poikkileikkauksen neliömomenttia ja lasketaan yhtälöstä

$$J = \int_A \frac{1}{1+z/R} z^2 dA \quad (6)$$

Lähde [3] käyttää termistä merkintää I_1 ja sisältää sivuilla 482-490 yhtälöitä sen laskemiseksi. Yhtälöiden (4) ja (5) johdolle on ominaista se, että poikkileikkauksen muodon oletetaan pysyvän muuttumattomana, kuten teknillisessä taivutusteoriassa. Yhtälöt soveltuvat siten lähinnä massiivisten poikkileikkaustyyppien käsittelyyn.

2.3 Siirtymien rekursioyhtälöt ja reunaehdot

Kun taivutusmomentin ja normaalivoiman riippuvuus siirtymistä tunnetaan, voidaan sen perusteella lähteä määrittämään myös kaaren jäykkyyskertoimia. Korvataan taivutusmomentti differenssiapproksimaatiolla:

$$M_i = \frac{EJ_i}{R_i^2} R_i u_i + \frac{EJ_i}{\Delta s^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) + \frac{EJ_i}{R_i^2} v_i \quad (7)$$

Siitä saadaan taipumien peräkkäiseen laskemiseen yhtälö:

$$v_{i+1} = - \frac{\Delta s^2}{R_i^2} R_i u_i - v_{i-1} + \left(2 - \frac{\Delta s^2}{R_i^2} \right) v_i + \Delta s^2 \frac{M_i}{EJ_i} \quad (8)$$

Korvataan vielä normaalivoiman ja siirtymien välinen yhtälö (5) pisteiden i ja $i+1$ välissä likiarvolla

$$N_{i+\frac{1}{2}} = \frac{EA_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s} (-u_i + u_{i+1}) + \frac{EA_{i+\frac{1}{2}}}{2R_{i+\frac{1}{2}}} (v_i + v_{i+1}) + \frac{M_{i+\frac{1}{2}}}{R_{i+\frac{1}{2}}} \quad \text{josta:} \quad (9)$$

$$u_{i+1} = u_i - \frac{\Delta s}{2R_{i+\frac{1}{2}}} v_i - \frac{\Delta s}{2R_{i+\frac{1}{2}}} v_{i+1} - \frac{\Delta s}{R_{i+\frac{1}{2}}} \frac{M_{i+\frac{1}{2}}}{EA_{i+\frac{1}{2}}} + \Delta s \frac{N_{i+\frac{1}{2}}}{EA_{i+\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

Yhtälöiden (8) ja (10) lisäksi on siirtymiä laskettaessa otettava huomioon kaaren reunaehdot. Kaaren tangentin suunnanmuutosta vastaa yhtälön (1) mukaan pisteessä i differenssiapproksimaatio

$$\phi_i = \frac{u_i}{R_i} - \frac{-v_{i-1} + v_{i+1}}{2\Delta s} \quad (11)$$

Kiertymän ϕ_1 lausekkeesta voidaan ratkaista kaaren ajatellulla jatkeella oleva taipuma v_0 . Sijoitetaan se edelleen momentin M_1 lausekkeeseen josta ratkaistaan taipuma v_2 . Tällöin:

$$v_2 = \left(\frac{\Delta s}{R_1} - \frac{\Delta s^2}{R_1^2} \frac{R_1}{2} \right) u_1 - \Delta s \phi_1 + \left(1 - \frac{\Delta s^2}{2R_1^2} \right) v_1 + \frac{\Delta s^2}{2} \frac{M_1}{EJ_1} \quad (12)$$

Kaaren loppupään reunaehdot tulevat huomioonotetuksi, kun momentin M_{n+1} lausekkeesta ratkaistu kuviteltu taipuma v_{n+2} sijoitetaan kiertymän ϕ_{n+1} lausekkeeseen. Nyt saadaan yhtälö:

$$\phi_{n+1} = \left(\frac{1}{R_{n+1}} + \frac{\Delta s}{2R_{n+1}^2} R_{n+1} \right) u_{n+1} + \frac{v_n}{\Delta s} - \left(\frac{1}{\Delta s} - \frac{\Delta s}{2R_{n+1}^2} \right) v_{n+1} - \frac{\Delta s}{2} \frac{M_{n+1}}{EJ_{n+1}} \quad (13)$$

2.4 Tuen siirtymästä aiheutuvat tukireaktiot ja jännitysresultantit

Kaaren jäykkyyskerroin on kaaren alkua tai loppupään ykkössiirtymää tai -kiertymää vastaava kaaren päähän vaikuttava voimasuure. Siirtymistä johtuvassa kuormituksettomassa jännitystilassa kaareen vaikuttavat kuvan 2 mukaiset tukireaktiot. Kaaren kaikissa poikkileikkauksissa on normaalivoiman ja leikkausvoiman resultantilla vakioarvo. Se on sama kuin voimien H ja V resultantti.

Kaavoihin (8) ja (10) sisältyvät taivutusmomentit ovat laskettavissa yhtälöstä

$$M = M_1 + Hy + Vx \quad (14)$$

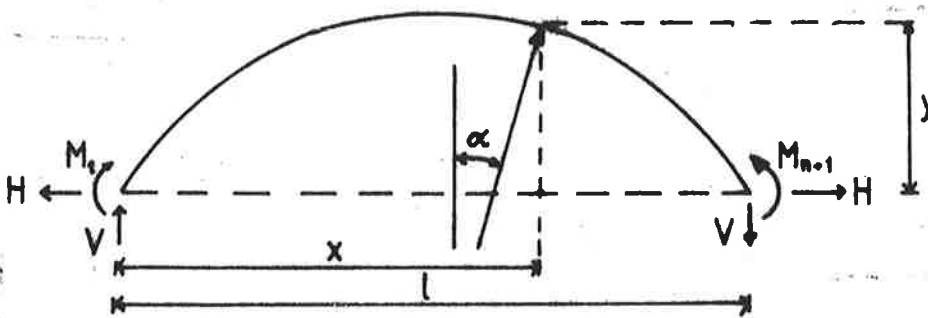
sekä normaalivoima yhtälöstä

$$N = H \cos \alpha + V \sin \alpha \quad (15)$$

Kun tukivoiman V tilalle sijoitetaan

$$V = \frac{-M_1 + M_{n+1}}{l} \quad (16)$$

tulevat yhtälöissä (8), (10), (12) ja (13) esiintyviksi ratkaistaviksi voimasuureiksi H , M_1 ja M_{n+1} .



Kuva 2. Kaaren tukireaktiot.

2.5 Jäykkyyskertoimien laskenta

Jäykkyyskertoimien laskentamenetelmä muodostuu seuraavaksi. Soveltamalla ensin yhtälöitä (12) ja (10) sitten toistuvasti yhtälöitä (8) ja (10) sekä lopuksi yhtälöä (13) saada siirtymät ja kiertymä ϕ_{n+1} kaarenpisteessä $n+1$ lausuttua voimasuureiden H , M_1 ja M_{n+1} sekä siirtymäsuureiden u_1 , v_1 ja ϕ_1 funktioina. Tuloksena on matriisiyhtälö

$$[C] \{F\} = \{V_{n+1}\} - [B] \{V_1\} \quad , \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{missä} \quad \{F\} &= \{H, M_1, M_{n+1}\}^T \\ \{V_1\} &= \{u_1, v_1, \phi_1\}^T \\ \{V_{n+1}\} &= \{u_{n+1}, v_{n+1}, \phi_{n+1}\}^T \end{aligned}$$

Antamalla vektorien $\{V_1\}$ tai $\{V_{n+1}\}$ jollekin komponentille arvo 1 ja muille siirtymäsuureille arvo 0 saadaan yhtälöryhmän (17) ratkaisuna vektori $\{F\}$, jonka komponentit ovat

jäykkyyskertoimia. Muut ykkössiirtymää vastaavat jäykkyyskertoimet lasketaan kaaren tasapainoehdoista.

2.6 Rekursioyhtälöihin sisältyvät raja-arvot suoralle sauvalle

Kun yhtälöä (10) sovelletaan suoraan sauvaan, supistuu se muotoon

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\Delta s N_{i+\frac{1}{2}}}{EA_{i+\frac{1}{2}}} = u_i + \frac{H \Delta s}{EA_{i+\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

Käyttämällä yhtälöä toistuvasti saadaan sauvan alku- ja loppupään siirtymien väliseksi yhteydeksi

$$u_{n+1} - u_1 = H \sum_{i=1}^n \frac{\Delta s}{EA_{i+\frac{1}{2}}} \quad (19)$$

Jako-osien lukumäärän n kasvaessa lähestyy yhtälö raja-arvoa

$$u_{n+1} - u_1 = H \int_0^l \frac{ds}{EA(s)}, \quad (20)$$

kuten pitääkin.

Yhtälö (12) supistuu suoralle sauvalle yhtälöksi

$$v_2 = v_1 - \Delta s \phi_1 + \frac{\Delta s^2}{2} \frac{M_1}{EI_1} \quad (21)$$

ja yhtälö (8) yhtälöksi

$$v_{i+1} = -v_{i-1} + 2v_i + \Delta s^2 \frac{M_i}{EI_i} \quad (22)$$

Kun näitä yhtälöitä käyttäen kehitetään sauvan pisteen k taipuma tullaan yhtälöön

$$v_k = v_1 - (k-1) \Delta s \phi_1 + (k-1) \frac{\Delta s^2}{2} \frac{M_1}{EI_1} + (k-2) \Delta s^2 \frac{M_2}{EI_2} + \dots + \Delta s^2 \frac{M_{k-1}}{EI_{k-1}} =$$

$$= v_1 - s_k \phi_1 + s_k \frac{\Delta s}{2} \frac{M_1}{EI_1} + (s_k - s_2) \frac{\Delta s M_2}{EI_2} + \dots + (s_k - s_{k-1}) \frac{\Delta s M_{k-1}}{EI_{k-1}} \quad (23)$$

Jako-osien lukumäärän n kasvaessa rajatta lähenee lauseke arvoa

$$v_k = v_1 - s_k \phi_1 + \int_0^{s_k} \frac{M(s)}{EI(s)} (s_k - s) ds, \quad (24)$$

josta on nähtävissä laskentatavan yhteys Mohrin analogiaan. Lauseke (13) saa suoran palkin tapauksessa muodon

$$\phi_{n+1} = \phi_1 - \frac{\Delta s}{2} \frac{M_1}{EI_1} - \Delta s \frac{M_2}{EI_2} - \dots - \Delta s \frac{M_n}{EI_n} - \frac{\Delta s}{2} \frac{M_{n+1}}{EI_{n+1}} \quad (25)$$

jonka raja-arvo n :n kasvaessa on

$$\phi_{n+1} = \phi_1 - \int_0^l \frac{M(s)}{EI(s)} ds \quad (26)$$

Sekin on Mohrin analogian mukainen tulos.

2.7 Laskentatavan suppenemisnopeuden parantaminen

Suoralle sauvalle johdetut numeeriset integraalit ovat kaikki varsin hitaasti suppenevia. Suppenemisominaisuudet paranevat, kun laskentamenetelmään yhdistetään yhtälön (17) matriisien $[C]$ ja $[B]$ alkioiden ekstrapolointi. Menetelmään liittyvän diskreetointivirheen otaksutaan olevan

$$e = C_2 \Delta s^2 + C_4 \Delta s^4 + C_6 \Delta s^6 \quad (27)$$

Kun jako-osien lukumäärä aina kaksinkertaistetaan muodostuu diskreetointivirheen käyttäytymisen taulukon 1 mukaiseksi ja monivaiheinen ekstrapolointi voidaan tehdä virheen perusteella. Hiukan perusteellisempi selvitys aiheesta on lähteessä [4] sivuilla 171 - 173 sekä lähteessä [10] sivuilla 108 -111.

Taulukko 1. Kolmivaiheinen ekstrapolaatio. Ekstrapolointi tapahtuu oletetun virheen muutoksen perusteella.

Jako-osi- en luku- määrä	Laskettu suure	Oletettu virhe	I vaiheen ekstrapoloi- tu arvo	Oletettu virhe	II vaiheen ekstrapoloi- tu arvo	Oletettu virhe	III vaiheen ekstrapoloi- tu arvo
n	F_n	f	$G_{n,2n}$	g	$H_{n,2n,4n}$	h	$I_{n,8n}$
2n	F_{2n}	f/4	$G_{2n,4n}$	g/16	$H_{2n,4n,8n}$	h/64	
4n	F_{4n}	f/4/4	$G_{4n,8n}$	g/16/16			
8n	F_{8n}	f/16/4					

Jako-osien lukumäärän kasvattaminen tarkemman tuloksen saamiseksi on vanha keino. Lähteen [6] mukaan ensimmäinen soveltaja lience ollut Archimedes ympyrää ja paarabelia käsittelevissä tutkimuksissaan. Saman lähteen mukaan ekstrapoloinnin ensimmäistä vaihetta on käytetty Huygens'in ajalta saakka, tosin todistamatta sen oikeellisuutta. Ekstrapoloinnin muut vaiheet esiintyvät samanlaisina ainakin em. Salan julkaisussa [6] suoran sauvan värähtelytehtävään sovellettuna. Käytetty ekstrapolointi tunnetaan yleisesti Richardsonin ekstrapoloinnin nimellä.

3. LASKENTAESIMERKKI POIKKILEIKKAUKSELTAAN MUUTTUMATTOMALLE YMPYRÄNKAARELLE

3.1 Yleistä

Edellisessä luvussa johdettu laskentamenetelmä on ohjelmoitu Oulun yliopiston Sperry 1100-tietokoneelle. Esimerkkirakenteena lasketaan ympyränkaari, jonka poikkileikkaus on muuttumaton. Esimerkiksi lähteen [3] perusteella voidaan rakenteelle johtaa numeerista ratkaisua vastaava analyyttinen ratkaisu ja laskea yhtälön (17) [B] ja [C] matriiseille alkiot suljetussa muodossa.

Esitettyyn menetelmään perustuvissa laskelmissa on käytetty kaksinkertaisen tarkkuuden reaali- ja kompleksiluvut. Muuttujat käsittävät tällöin 72 bittiä, mikä vastaa kahdeksantoista numeron tarkkuutta kymmenjärjestelmässä. Vertailulaskelmat on tehty mikrotietokoneelle 64:llä bitillä eli kuudellatoista merkitsevällä numerolla.

Tietokoneajoista esitetään vain kolmivaiheisen ekstrapoloinnin antamat tulokset. Ohjelman koko tulostus sisältää matriisien [B] ja [C] alkiot kullakin jako-osien lukumäärällä sekä

ekstrapoloinnin eri vaiheissa. Tulokset ovat taulukoissa, joissa alemmilla riveillä on esitetty ylempänä olevan täydellisen rivin tuloksista poikkeavat numerot.

3.2 Esimerkkikaaren tulokset

Esimerkkikaari 1 on ympyränkaari, jonka säde $R = 10,0$ m, kaaren keskuskulma $\alpha_0 = 120^\circ$, kaaren poikkileikkauksen korkeus $h = 1,0$ m ja leveys $0,3$ m sekä kimmomoduuli $10\,000,0$ MN/m². Tulokset on esitetty taulukoissa 2, 3 ja 4. Vertailuarvoina on vastaavat analyttisesti lasketut tulokset sekä taulukossa 4 tulokset, jotka saadaan, kun kaaren jäykkyys lasketaan käyttäen poikkileikkauksen neliömomenttia I eikä yhtälön (6) mukaista termiä J .

Taulukko 2. Kaaren loppupään siirtymien riippuvuus voimasuureista.

siirt.	n	H	M_1	M_{n+1}
u_{n+1}	30..240	1,503 029 06 600 8304	-0,367 756 766 286 4463	-0,122 818 299 329 0811
	anal.	1 1957	4445	0807
v_{n+1}	30..240	2,12 122 934 749 0938	0,369 809 536 514 7760	0,228 394 246 682 0450
	anal.	0923	7722	0440
ϕ_{n+1}	30..240	- 0,272 772 140 079 5152	-0,041 797 409 043 7237	-0,041 797 409 043 7233
	anal.	80 6389	7230	7230

Taulukko 3. Kaaren loppupään siirtymien riippuvuus alkupään siirtymistä.

siirt.	n	u_1	v_1	ϕ_1
u_{n+1}	30..240	-0,500 000 000 000 0146	-0,866 025 403 784 4636	15,0 000 000 000 0012
	anal.	000	4386	00
v_{n+1}	30..240	0,866 025 403 784 4627	-0,499 999 999 999 9776	-8,66 025 403 784 4568
	anal.	4386	-0,5	4386
ϕ_{n+1}	30..240	-0,000 000 000 000 0038	-0,000 000 000 000 0022	1,000 000 000 000 0027
	anal.	00	00	00

Taulukko 4. Kaaren loppupään ykkössiirtymiä vastaavat jäykkyyskertoimet. Alimpien rivien tulokset laskettu käyttämällä taivutusjäykkyyttä EI.

siirt.	n	$u_{n+1} = 1$	$v_{n+1} = 1$	$\phi_{n+1} = 1$
H	30..240	2,55 805 324 497	4,43 067 818 875	16,6 939 930 975
	anal.EJ	509	896	983
	anal.EI	2,55 058 142 474	4,41 773 661 649	16,6 453 369 808
M ₁	30..240	-11,4 089 900 744	-12,6 895 793 267	-35,8 154 772 579
	anal.EJ	748	274	607
	anal.EI	-11,3 754 953 423	-12,6 527 342 752	-35,7 129 395 045
M _{n+1}	30..240	-5,28 500 302 310	-16,2 252 648 993	-97,0 553 477 704
	anal.EJ	353	649 000	732
	anal.EI	-5,26 984 163 848	-16,1 778 350 847	-96,7 694 765 429

Esimerkin perusteella voidaan tulosten tarkkuus todeta hyväksi. Tarkimmat tulokset näyttää menetelmä antavan yhtälön (17) [B]-matriisin alkioille ja matriisin [C] momenttien kertoimille. Saman yhtälön matriisia [C] tarkasteltaessa nähdään, että huonoin tarkkuus on voiman H kertoimilla. Näiden tarkkuus asettaa rajan myös jäykkyyskertoimien laskentatarkkuudelle. Esimerkit osoittavat, että kaarevuuden vaikutus rakenteen taivutusjäykkyyteen on syytä ottaa huomioon. Mikäli taivutusjäykkyytenä käytetään termiä $(1+\epsilon)$ EJ (Ylinen [3] yht. (588)), tulee tehtävästä lievästi epälineaarinen ja laskennasta iteratiivinen. Ensimmäisen kierroksen tuloksista lasketaan venymä kaaren jakopisteissä. Toinen laskentakierros käyttäen $(1+\epsilon)$ -kertaista jäykkyyttä antanee jo riittävän tarkkoja tuloksia.

Käsitelty menetelmä soveltuu myös kaaren ekvivalenttien solmukuormien määrittämiseen niiden laskeminen vaatii kuormituksen huomioonottamista yhtälöissä (32) ja (33). Leikkausmuodonmuutoksen ottaminen huomioon laskennassa olisi luonnollinen tapa kehittää menetelmää.

KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Tuominen, P., Tasokehien analysoinnista differenssimenetelmällä. Rakenteiden mekaniikka. Vol. 17. No.3 1984, s. 21-36.
- [2] Salmi, T., Avaruudessa käyrän sauvan liikeyhtälöt. Rakenteiden mekaniikka. Vol. 16. No 1 1983, s. 1-24.

- [3] Ylinen, Arvo, Kimmo- ja lujuusoppi II. Werner Söderström Oy. Porvoo 1970.
- [4] Crandall, S.H., Engineering Analysis. McGraw-Hill 1956.
- [5] Sala, I., A Numerical Method for Calculating Critical Speeds of Rotating Shafts. Acta Polytechnica Scandinavica. Mechanical Engineering Series No 11. Helsinki 1962.
- [6] Sala, I., On the numerical solution of certain boundary value problems and eigenvalue problems of the second and fourth order with the aid of integral equations. Acta Polytechnica Scandinavica. Mathematics and Computing Machinery Series No 9. Helsinki 1963.
- [7] Moan, T., A note on the convergence of finite element approximations for problems formulated in curvilinear coordinate systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3 (1974) s. 209-235. North-Holland Publishing Company.
- [8] Dawe, D.J., Curved finite elements for the analysis of shallow and deep arches. Computers & Structures. Vol. 4. s. 559-580. Pergamon Press 1974.
- [9] Bushnell, D., Computerized analysis of shells-governing equations, Computers & Structures. Vol. 18. No 33 1984, s. 471-536.
- [10] Mäkelä, M., Nevanlinna, O., Virkkunen, J., Numeerinen matematiikka, Toinen painos. Gaudeamus, Mänttä 1984.

EPÄLINEAARISEN YHTÄLÖRYHMÄN RATKAISUMENETELMIÄ

Reijo Kouhia

TKK rakennusinsinööriosasto

1 JOHDANTO

Epälineaarisen yhtälösystemin ratkaisemisella tarkoitetaan probleeman

$$\bar{F}(\bar{u}) = \bar{0} \quad (1)$$

ratkaisemisesta, missä kuvaus $\bar{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on $\bar{u}$:n epälineaarinen funktio. Koska yhtälön (1) analyttinen ratkaiseminen on aivan yksinkertaisimpia tapauksia lukuunottamatta mahdotonta, on turvauduttava numeerisiin menetelmiin. Oden [6] luokittelee ratkaisumenetelmät jonomenetelmiin (sequential methods) ja satunnaishakumenetelmiin (nonsequential methods). Jonomenetelmissä määrätyillä operaatioilla muodostetaan ratkaisua kohti suppeeneva jono $\{\bar{u}_i\}$. Satunnaishakumenetelmissä poimitaan ratkaisukandidaatit $\bar{u}_i$ satunnaisesti. Tyypillisesti jonomenetelmissä joudutaan ensimmäinen testipiste $\bar{u}_0$ valitsemaan ja korjattu arvo saadaan rekursiivisesti

$$\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + \bar{d}_i, \quad (2)$$

missä $\bar{u}_i$ on yhtälön (1) ratkaisun estimaatti i :nnellä iteraatiolla ja $\bar{d}_i$ on korjaus. Prosessia jatketaan kunnes haluttu tarkkuus on saavutettu. Lopetusriteeri voi perustua lisäysten $\bar{d}_i$ vertaamiseen tiettyyn vertailuarvoon tai epätasapainon suuruuteen yhtälössä (1) tai molempiin yhdessä.

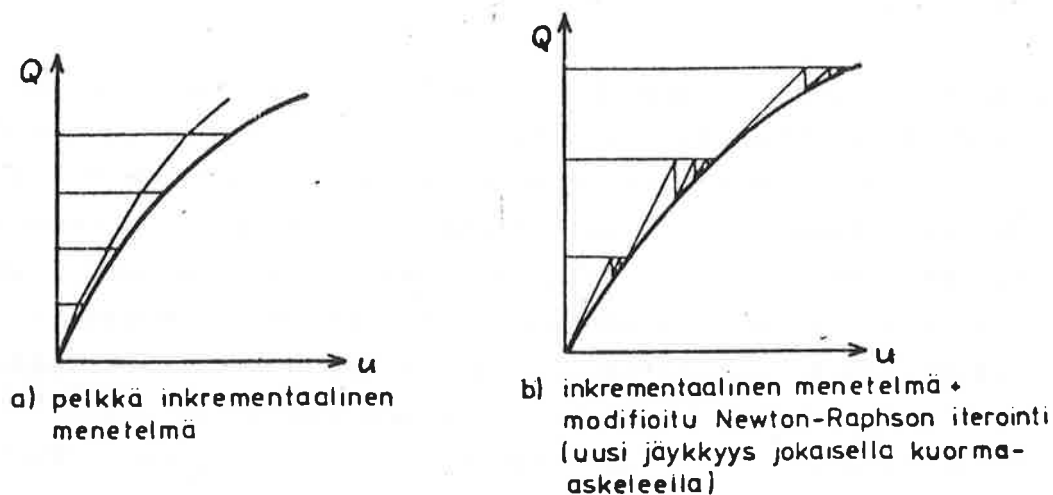
Rakenteiden mekaniikassa esiintyy epälineaarisia yhtälösystemejä esim. analysoitaessa elementtimenetelmällä rakenteita malleilla, joissa kinemaattiset ja/tai konstitutiiviset yhteydet ovat epälineaarisia (geometrisen ja/tai fysikaalinen epälineaarisuus).

2 JONOMENETELMÄT

Elementtimenetelmässä esiintyvien epälineaaristen yhtälöryhmien

$$\bar{F}(\bar{u}) = \bar{Q} - \bar{R}(\bar{u}) , \quad (3)$$

missä $\bar{Q}$ on ulkoinen kuormavektori, $\bar{R}$ on sisäisten voimien vektori ja $\bar{u}$ solmupistesiertymävektori (siirtymämenetelmä), ratkaiseminen tapahtuu useinmiten yhdistämällä ns. inkrementaalinen menetelmä johonkin Newton-Raphson tyyppiseen tasapainoiterointimenetelmään (kuva 1).



Kuva 1. Muutamia ratkaisumenetelmiä.

Epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen on läheistä sukua optimointitehtävälle: etsi $\bar{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, kun vaaditaan

$$h(\bar{x}) \leq h(\bar{u}) , \quad \forall \bar{u} \in D, \quad (4)$$

ja kuvaus $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on annettu. Voidaan tyytyä minimointitehtävään sillä $\max(h(\bar{u})) = \min(-h(\bar{u}))$. Muodostetaan funktiosta $\bar{F}$ lauseke: $h(\bar{u}) = \bar{F}(\bar{u})^T \bar{F}(\bar{u})$, ja todetaan että $h(\bar{u}) = 0$, ja h :n pienin arvo saavutetaan kun $\bar{F}(\bar{u}) = \bar{0}$. Täten vektoriarvoisen skalaarifunktion minimointialgoritmeja voidaan myös käyttää epälineaarisen yhtälösystemin ratkaisemiseen. Tässä kirjoituksessa keskitytään kuitenkin vain N-R tyyppisiin iteraatioihin yhdistettynä inkrementaaliseen menetelmään.

2.1 Standardi Newton-Raphson iteraatiot

Kehittämällä $\bar{F}(\bar{u}) = \bar{Q} - \bar{R}(\bar{u})$ Taylorin sarjaksi ja ottamalla huomioon sarjasta vain $\bar{u}$:n lineaariset termit, saadaan Newton-Raphson iteraatiokaava

$$\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + \underline{K}_i^{-1} (\bar{Q} - \bar{R}(\bar{u}_i)), \quad (5)$$

missä

$$\underline{K}_i = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{u}} \bigg|_{\bar{u}_i} = - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}} \bigg|_{\bar{u}_i},$$

on tangentialinen jäykkyyssmatriisi $\bar{u}_i$:ssä. Iteraatiota toistetaan kunnes haluttu tarkkuus on saavutettu. Yhtälössä (5) olevaa käänteismatriisia ei käytännössä tarvitse muodostaa kun ratkaistaan lisäykset $\bar{d}_i = \bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i$ yhtälöstä

$$\underline{K}_i \bar{d}_i = \bar{Q} - \bar{R}(\bar{u}_i). \quad (6)$$

Yhdistettynä inkrementaaliseen menetelmään saadaan kuorma-askeleella j

$${}^j \underline{K}_i {}^j \bar{d}_i = {}^j \bar{Q} - \bar{R}({}^j \bar{u}_i), \quad (7)$$

missä

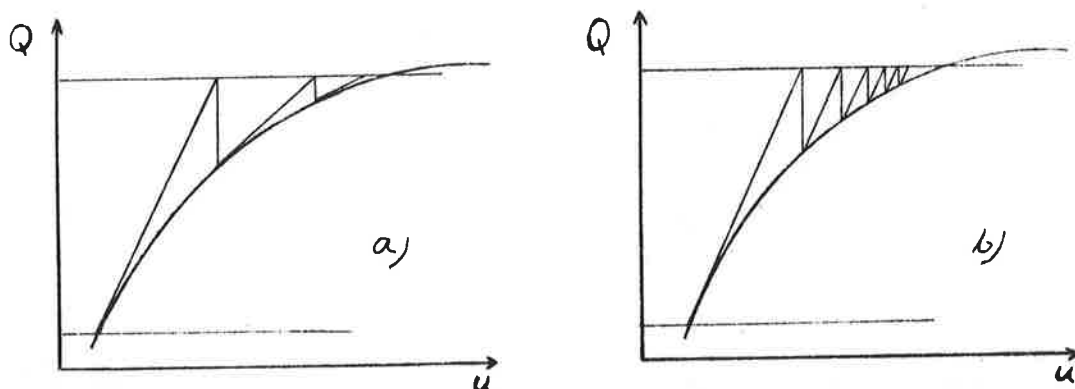
$${}^j \bar{Q} = {}^{j-1} \bar{Q} + \Delta \bar{Q} = ({}^{j-1} \lambda + \Delta \lambda) \bar{Q}_{\text{ref}},$$

ja λ kaavassa (7) on ns. kuormaparametri.

Newton-Raphson iteroinnissa joudutaan jokaisella iteraatiokierroksella muodostamaan tangentialinen jäykkyyssmatriisi, ja suorittamaan sen LDU hajotelma. Tämä on usein paljon laskenta-aikaa vaativa toimenpide. Joissain tapauksissa saat-
taa olla edullisempaa päivittää jäykkyys vain esim. jokaisen kuorma-askeleen alussa. Tämän modifioidun Newton-Raphson menetelmän ratkaisuyhtälöksi saadaan askeleella j

$${}^j \underline{K}_0 {}^j \bar{d}_i = {}^j \bar{Q} - \bar{R}({}^j \bar{u}_i). \quad (8)$$

Suppeneminen on tietenkin hitaampaa kuin N-R iteraatiossa. Menetelmiä on havainnollistettu yhden vapausasteen tapauksessa kuvassa 2.



Kuva 2. a) Newton Raphson- ja b) modifioitu Newton-Raphson iteraatio.

2.2 Kvasi-Newton iteraatiot

2.2.1 BFGS päivitys

Kvasi-Newton iteraatioissa pyritään päivittämään tangentiaalmatriisi s.e. se toteuttaa ns. kvasi-Newton yhtälön

$$\underline{K}_i (\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}) = \bar{F}(\bar{u}_i) - \bar{F}(\bar{u}_{i-1}). \quad (9)$$

Ehkä tunnetuin ja käytetyin päivityskaava yhtälön (9) toteuttamiseksi on Broydenin-Fletcherin-Goldfarbin-Shannon (BFGS) kaava, joka lausuttuna operoimaan tangentiaalmatriisin käänteismatriisiin on [1], [4], [5]

$$\underline{K}_i^{-1} = (\underline{I} + \bar{w}_i \bar{v}_i^T) \underline{K}_{i-1}^{-1} (\underline{I} + \bar{v}_i \bar{w}_i^T), \quad (10)$$

missä

$$\bar{v}_i = \bar{F}(\bar{u}_{i-1}) \left\{ 1 + \frac{\bar{d}_{i-1}^T (\bar{F}(\bar{u}_{i-1}) - \bar{F}(\bar{u}_i))}{\bar{d}_{i-1}^T \bar{F}(\bar{u}_{i-1})} \right\} - \bar{F}(\bar{u}_i),$$

$$\bar{w}_i = \bar{d}_{i-1} / \{ \bar{d}_{i-1}^T (\bar{F}(\bar{u}_i) - \bar{F}(\bar{u}_{i-1})) \}.$$

Käänteismatriisia $\underline{K}^{-1}$ ei muodosteta eksplisiittisesti vaan askel $\bar{d}_i$ saadaan seuraavasti

$$\bar{d}_i = \left(\prod_{j=i}^1 (\underline{I} + \bar{w}_j \bar{v}_j^T) \right) \underline{K}_0^{-1} \left(\prod_{j=1}^i (\underline{I} + \bar{v}_j \bar{w}_j^T) \right) \bar{F}(\bar{u}_i). \quad (11)$$

Menetelmän haittapuolena mainittakoon vektoreiden $\bar{w}_j$ ja $\bar{v}_j$, sisältämän tiedon tarve jokaisella iteraatiokierroksella, jolloin ne joudutaan varastoimaan keskusmuistitilan säästämiseksi ajonaikaiseen levytiedostoon, ja tällainen tiedonsiirto voi joillakin koneilla viedä suhteellisen paljon keskusyksikköaikaa.

Joissain tapauksissa saattaa matriisin $\underline{Q} = \underline{I} + \bar{v} \bar{w}^T$ häiriöalttius kasvaa hyvin suureksi, jolloin on syytä pidättäytyä kaavan (10) päivityksestä. Matriisin $\underline{Q}$ häiriöalttiudelle on johdettu estimaatti spektraalinormissa [1]

$$C_2(\underline{Q}) = \frac{\{ (\bar{w}^T \bar{w})^{\frac{1}{2}} (\bar{v}^T \bar{v})^{\frac{1}{2}} + ((\bar{w}^T \bar{w}) (\bar{v}^T \bar{v}) + 4(1 + \bar{v}^T \bar{w}))^{\frac{1}{2}} \}^2}{4(1 + \bar{v}^T \bar{w})}. \quad (12)$$

2.2.2 Modifioitu BFGS päivitys

Crisfield [2] on esittänyt menetelmän, joka pohjautuu BFGS päivityskaavaan, ja jossa välttyään lisävektoreiden $\bar{w}$ ja $\bar{v}$ varastoimiselta. Kiihdytetyn iteraatioaskeleen lausekkeeksi saadaan

$$\bar{d}_i = (f_i (1 - c_i/b_i) - 1) \bar{d}_{i-1} + f_i \bar{D}_i, \quad (13)$$

missä

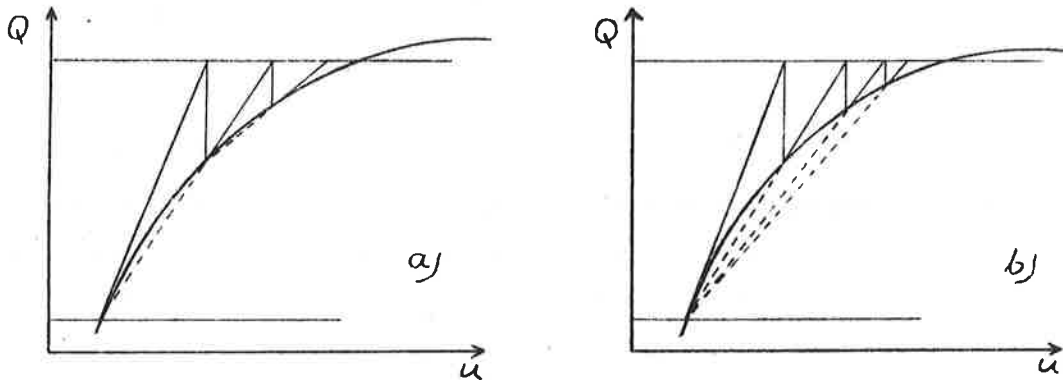
$$\bar{D}_i = \underline{K}_0^{-1} \bar{F}(\bar{u}_i),$$

$$a_i = \bar{d}_{i-1}^T \bar{F}(\bar{u}_{i-1}),$$

$$b_i = \bar{d}_{i-1}^T (\bar{F}(\bar{u}_i) - \bar{F}(\bar{u}_{i-1})),$$

$$c_i = \bar{D}_i^T (\bar{F}(\bar{u}_i) - \bar{F}(\bar{u}_{i-1})), \quad f_i = -a_i/b_i.$$

Havainnollinen tulkinta BFGS- ja modifioidusta BFGS iteraatiosta on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3. BFGS- (a) ja modifioitu BFGS (b) iteraatio.

3. SINGULARITEETTIENTEN MÄÄRITYS JA OHITUS

Edellä kuvatut menetelmät menettävät kelpoisuutensa lähestyttäessä ns. raja- tai bifurkaatio l. haarautumispisteitä. Riks [7] ja Wempner [9] ovat esittäneet menetelmän kriittisten pisteiden ja sekundaarisen tasapainopolun määrittämiseksi, jota Crisfield [3] on muuntanut käyttökelpoisempaan muotoon (kuva 4).

3.1 Raja- ja haarautumispisteiden määrittäminen

Tarkastellaan yhtälösystemiä

$$\bar{F}(\bar{u}, \lambda) = \lambda \bar{Q}_{\text{ref}} - \bar{R}(\bar{u}, \lambda) = \bar{0}. \quad (14)$$

Välttämätön ja riittävä ehto systeemin stabiilille tasapainotilalle on se, että ominaisarvotehtävän

$$K \bar{\phi}_i = \omega_i \bar{\phi}_i \quad (15)$$

kaikki ominaisarvot ω_i ovat positiivisia ja nolasta poikkeavia. Stabiiliusraja on saavutettu kun yksi tai useampia ominaisarvoja saavat arvokseen nolla. Tässä esityksessä rajoitutaan vain yksinkertaisen nollakohdan tapauksiin.

Sovellutusten kannalta tärkeä ehto kriittiselle pisteelle on

$$\det \mathbf{K} = 0, \quad (16)$$

joka on välttämätön mutta ei riittävä ehto.

Muodostettaessa algoritmia joka pystyy seuraamaan systeemin vastetta raja- tai haarautumispisteiden jälkeen, on käyttökelpoista pitää kuormaparametria λ myös muuttujana. Tällöin systeemissä (14) on n yhtälöä ja $n+1$ tuntematonta, joten tarvitaan ylimääräinen sidosyhtälö sen ratkaisemiseksi. Yhtälön muodostamista varten otetaan käyttöön uusi kontrolliparametri s ns. polkuparametri. Kasvatettaessa kuormaa inkrementteittäin rajoitetaan siirtymiä sidosyhtälön

$$(\mathbf{j}_{\Delta \mathbf{u}})^T (\mathbf{j}_{\Delta \mathbf{u}}) = (\Delta s)^2 \quad (17)$$

mukaisesti, missä Δs on ns. kaarenpituus (kuva 4b).

Välttämätöntä on myös tehdä ero raja- ja haarautumispisteen välillä. Raja- (18) ja haarautumispistettä (19) vastaavat seuraavat ehdot [7]

$$(\partial \lambda / \partial s) = 0, \text{ kun } s = s^{cr}, \quad (18)$$

$$(\partial \bar{\mathbf{F}} / \partial \lambda)^T \bar{\boldsymbol{\phi}}_1 = 0, \quad (19)$$

missä $\bar{\boldsymbol{\phi}}_1$ on yhtälön (14) nolla ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

3.2 Kriittisten pisteiden ohitus

Tarkastellaan tilannetta kuorma-askeleella j ja iteraatio-kierroksella i (kuva 4b). Merkitään

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\lambda_{i+1}} &= \mathbf{j}_{\lambda_i} + \mathbf{j}_{\delta \lambda_i}, \quad \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{j}_{\mathbf{u}_i}^-, \mathbf{j}_{\lambda_{i+1}}) = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{j}_{\mathbf{u}_i}^-, \mathbf{j}_{\lambda_i}) + \mathbf{j}_{\delta \lambda_i} \bar{\mathbf{Q}}_{\text{ref}}, \\ \mathbf{j}_{\mathbf{K}_i}^{-1} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{j}_{\mathbf{u}_i}^-, \mathbf{j}_{\lambda_i}) &= \mathbf{j}_{\mathbf{D}_i}^-, \quad \mathbf{j}_{\mathbf{K}_i}^{-1} \bar{\mathbf{Q}}_{\text{ref}} = \mathbf{j}_{\mathbf{d}_{Ti}}^-. \end{aligned} \quad (20)$$

Mukavuussyistä jätetään jatkossa inkrementtiä osoittava ylä-

indeksi j pois. Saadaan iteraatioaskeleen lausekkeeksi

$$\bar{d}_i = \bar{D}_i + \delta\lambda_i \bar{d}_{Ti} \quad (21)$$

ja inkrementillä j muodostuneiksi siirtymiksi

$$\Delta\bar{u}_{i+1} = \Delta\bar{u}_i + \bar{d}_i = \Delta\bar{u}_i + \bar{D}_i + \delta\lambda_i \bar{d}_{Ti}. \quad (22)$$

Sijoittamalla $\Delta\bar{u}_{i+1}$:n lauseke yhtälöön (17), saadaan toisen asteen polynomiyhtälö kuormaparametrin muutoksen $\delta\lambda_i$ ratkaisemiseksi eli

$$a(\delta\lambda_i)^2 + b(\delta\lambda_i) + c = 0 \quad (23)$$

missä

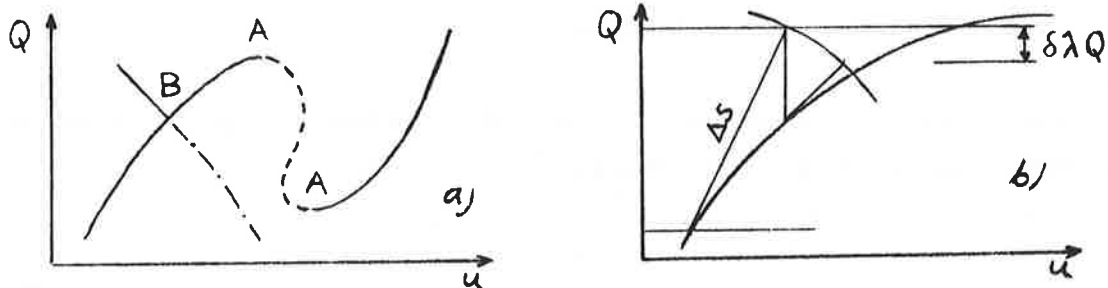
$$a = \bar{d}_{Ti}^T \bar{d}_{Ti}, \quad b = 2(\Delta\bar{u}_i + \bar{D}_i)^T \bar{d}_{Ti}, \quad c = (2\Delta\bar{u}_i + \bar{D}_i)^T \bar{D}_i.$$

Kaarenpituus Δs lasketaan ensimmäisen inkrementin ensimmäisellä iteraatiolla yhtälöstä

$$\Delta s = {}^1\Delta\lambda \sqrt{\bar{d}_{Ti}^T \bar{d}_{Ti}}, \quad (24)$$

missä alkuaskel ${}^1\Delta\lambda$ annetaan lähtötietona.

Edellä kuvattu algoritmi pystyy rajapisteiden ohituksiin mutta haarautumispisteen tapauksessa tarvitaan lisäkeinoja sekundaariselle tasapainopolulle siirtymisessä. Tällöin superponoidaan nolla ominaisarvoa vastaava ominaisvektori iteraatioaskeleen lausekkeeseen, ja jatketaan tämän jälkeen kuten edellä on esitetty.



Kuva 4. a) Raja- (A) ja haarautumispisteitä (B) tasapainopolulla, b) Riksin menetelmä N-R iteraatiossa.

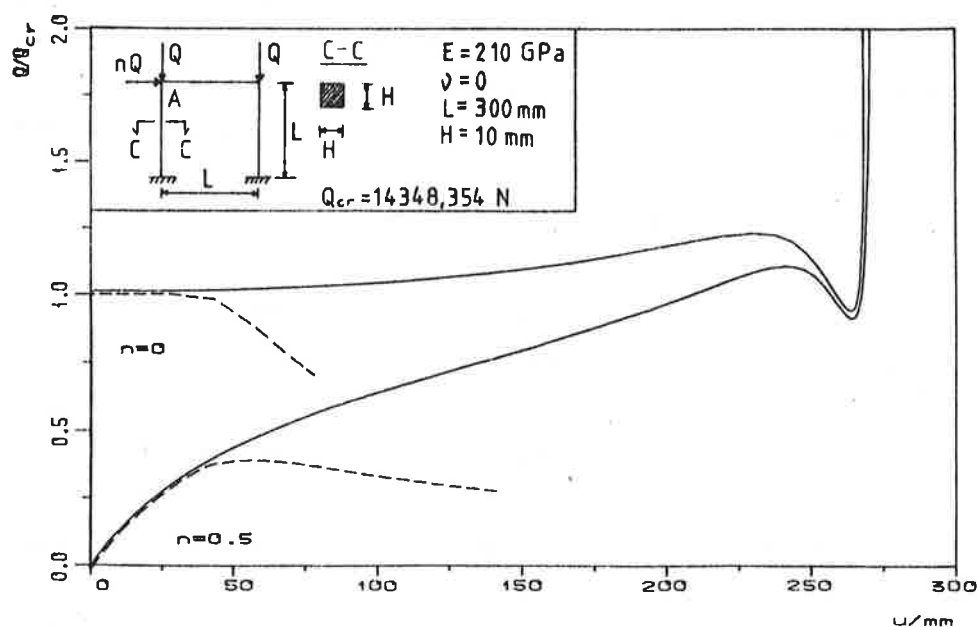
4 NUMEERISET ESIMERKIT

Esimerkkinä laskettiin kuvassa 5 esitettyä tasajäykkää kehää kahdella eri sivukuorman arvolla ($n=0$ ja $n=0,5$). Rakenne jaettiin 30 yhtäsuureen Timoshenkon palkkiteoriaan perustuvaan kehäsauvaelementtiin (yht. 93 vap. ast.), jossa siirtymille u , v ja ϕ otaksutaan lineaarinen approksimaatio [8]. Kehää laskettiin neljällä eri menetelmällä: N-R, mN-R, BFGS ja mBFGS, yhdistettynä Riksin menetelmään. Jäykkyys päivitettiin jokaisen askeleen alussa ja tasapainoyhtälöt on muodostettu päivitetyn Lagrangen esitystavan mukaisesti, materiaali on lineaarista. Menetelmiä on vertailtu taulukossa 1. Suppenemistoleranssi oli 10^{-4} ($\|d\|/\|Au\| < 10^{-4}$). BFGS iteraatiossa $\max(C_2(Q)) = 10^8$, alkuaskel $\Delta\lambda = 0.1 (Q/Q_{cr})$. Tulokset on esitetty kuvassa 5 yhtenäisellä viivalla.

Taulukko 1. Eri iteraatiomenetelmien vertailua ($n=0.5$)

	I	JM	IT	CPU/s	huom.
N-R	80	288	288	73	
mN-R	80	219	580	79	suppeni 34 ask. $Q/Q = 0,97 *$
BFGS	80	210	504	205	suppeni 37 ask. $Q/Q = 1,02 *$
mBFGS	80	192	507	78	suppeni 43 ask. $Q/Q = 1,10 *$

I=kuorma-askelten lukumäärä, JM=jäykkyysmatriisin muodostuksia, IT=iteraatioita yhteensä, laskelmat TKK:n laskentakeskuksen DEC-2060 tietokoneella. *) divergoinnin jälkeen palataan askeleen alkuun ja jatketaan N-R iteroinnilla.

Kuva 5. Kehän pisteen A vaakasiirtymät (u).

Kehää analysoitiin myös käyttäen kimmoista ideaaliplastista materiaaalimallia, jossa myötöjännitykseksi asetettiin $\sigma_y = 1600$ MPa. Iteraatiokierrosten maksimi oli 150/askel. Tulokset kuvassa 5 on esitetty katkoviivalla.

Tapauksessa $n=0$ on tasapainopolulla haarautumispiste kuorman arvolla 14348,354 N (analyttinen), elementtimenetelmällä nyt saatu tulos poikkesi 1,2 %. Kaikki muut, paitsi N-R iteratio, divergoivat jo hyvin aikaisessa vaiheessa sekundaarisella tasapainopolulla (molemmilla materiaaalimalleilla laskettaessa).

5 KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Brodlie K.W., Gourlay A.R., Greenstadt J., Rank-one and rank-two corrections to positive definite matrices expressed in product form. J. Inst. Math. Appl. 11 (1973), s. 73-82.
- [2] Crisfield M.A., A faster modified Newton-Raphson iteration. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 20 (1979), s. 267-278.
- [3] Crisfield M.A., A fast incremental, iterative solution procedure that handles snap-through. Comp. & Struct. 13 (1981), s. 55-62.
- [4] Dennis J.E., More J.J., Quasi-Newton methods, motivation and theory. SIAM Rev. 19 (1977), s. 46-89.
- [5] Matthies H., Strang G., The solution of nonlinear finite element equations. Int. J. Num. Meth. Engng. 14 (1979), s. 1613-1626.
- [6] Oden J.T., Finite elements in nonlinear continua, New York, McGraw-Hill, 1972. 407 s.
- [7] Riks E., An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. Int. J. Solid Structures. 15 (1979), s. 529-551.
- [8] Tuomala M., Eräiden yksinkertaisten rakenteiden staattisen ja dynaamisen vasteen analysointi elementtimenetelmällä. TKK, rakennusinsinööriosasto, rakennetekniikan laitoksen julkaisu 30. Otaniemi 1980. 183 s.
- [9] Wempner G.A., Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. Int. J. Solid Structures. 7 (1971), s. 1581-1599.

LINEAARISEN YHTÄLÖRYHMÄN RATKAISUMENETELMISTÄ KÄYTETTÄESSÄ ELEMENTTIMENETELMÄÄ

Tekn.yo Jari Laukkanen
Oulun yliopisto, konetekniikan osasto

1 JOHDANTO

Ratkaistaessa elementtimenetelmän lineaarista yhtälöryhmää ei yleensä matematiikka aiheuta vaikeuksia vaan sen soveltaminen tietokoneelle. Perusratkaisumenetelmien (Gauss, Crout, Cholesky jne) erilaisia tietokonesovellutuksia käytetään yhä useammissa tietokoneissa. Lisäksi FEM-ohjelmistoilta ollaan nykyään vaatimassa taloudellista tehokkuutta sekä helppokäyttöisyyttä.

Henkilökohtaisten tietokoneiden ja minikoneiden sekä niihin saatavien FEM-ohjelmien yleistyminen on lisännyt elementtimenetelmän käyttöä. Yhä tarkempien, monimutkaisempien ja suurempien FEM-mallien käytännön käyttö on lisääntynyt. Samalla törmätään useammin tilanteisiin: laskenta-aika on kohtuuton, tila loppuu, tuloksissa hämminkiä toimittaessa laskentakapasiteetin ylärajoilla.

Mikro- ja minitietokoneiden yleistyminen on tuonut yhä useamman ulottuville mahdollisuuden tehdä omia FEM-sovellutuksia ja kokeilija.

2 TIEDON KÄSITTELYTAVAT

Yleensä ratkaistaessa elementtimenetelmän yhteydessä matriisiyhtälöä

$$A x = y$$

(1)

ei tietokoneen keskusyksikön koko tai yhdelle ohjelmalle sallittu suurin tila riittä. Tämän takia käytetään erilaisia tiedonkäsittelytekniikoita kiertämään keskusyksikön koon aiheuttamaa rajoitusta. Niillä pyritään pieneen keskusyksikön tilantarpeeseen ja mahdollisimman alhaiseen I/O-operaatioiden määrään.

Käsittelytekniikat voidaan jakaa karkeasti kuuteen pääryhmään [1]:

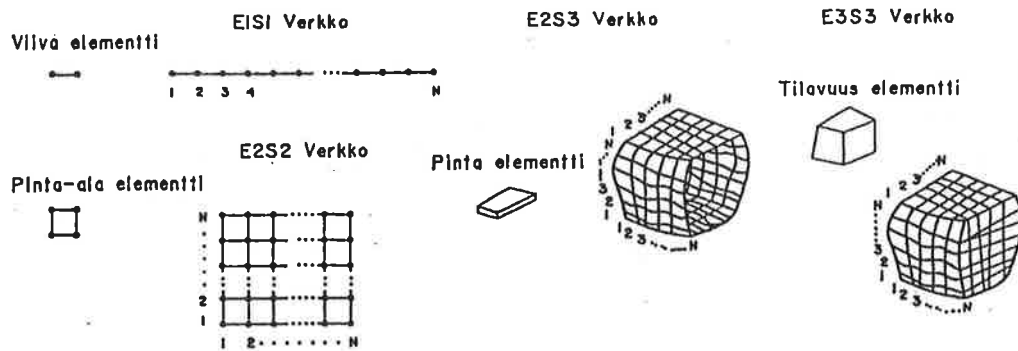
- 1 Kerroinmatriisi pidetään nauhamaisena kokoajan keskusyksikössä (IB = in core banded).
- 2 Kerroinmatriisi talletetaan nauhamaisena massamuistiyksikköön. Rivit tai sarakkeet talletetaan yksittäin (RR = row by row).
- 3 Kerroinmatriisi talletetaan nauhamaisena massamuistiyksikköön riveittäin tai sarakkeittain ositettuna (GR = group of rows, GG = group of groups).
- 4 Kerroinmatriisin harvuuden huomioivat menetelmät (esim. skyline).
- 5 Hypermatriisimenetelmä (SG = submatrix groups).
- 6 Sekalaiset menetelmät

3 ELEMENTTIVERKKOJEN LUOKITTELU

Kulloinkin käsiteltävällä matemaattisella mallilla on suuri vaikutus sopivan ratkaisualgoritmin valintaan. Ihannetilanteessa yleisen elementtimenetelmäohjelman ja -ohjelmiston tulisi käyttää tehokkainta "jokapaikan" algoritmia. Kuitenkin monet erikoissovellutuksiin alunperin suunnitellut ohjelmat käyttävät yksinkertaisinta mahdollista soveliaasta ratkaisualgoritmia. Kuvassa 1 on esitetty tyypillisimmät elementtiverkot, jotka käytännössä esiintyvät.

Yksidimensioiset verkot (E1S1) ovat yksinkertaisimpia malleja ja ne voidaan helposti käsitellä kokonaan keskusyksikössä varsin suurin vapausastemääriin asti niiden kerroinmatriisin voimakkaan nauhamaisuuden takia.

Kaksidimensioisissa verkoissa (E2S2) out-of-core-tyyppiset kerroinmatriisin nauhamaisuuden huomioonottavat algoritmit (GR, GG) toimivat hyvin, kuten [2] ja [3] osoittavat.



Kuva 1. Tavallisimmat käytännössä esiintyvät elementtiverkot.

Kaksidimensioiden verkko kolmidimensioisessa avaruudessa (E2S3) on tyypillinen kuorirakenteille, joilla on suuri käytännön merkitys. Ratkaisualgoritmilta ja tiedonkäsittelytavoilta vaaditaan näissä malleissa tehokasta kerroinmatriisin harvuuden huomiointia, kuten suurten tehtävien ratkaisuun kykenevät ohjelmistot [4] - [6] osoittavat.

Kolmidimensioiden verkko kolmidimensioisessa avaruudessa (E3S3) on vaativin elementtimalli. Se vaatii suurta nopeutta ratkaisualgoritmilta ja suuren tietomäärän hallittavuutta tiedonkäsittelysysteemiltä.

4 KÄYTETTÄVÄN TYÖTILAN ASETTAMAT RAJOITUKSET

Taulukossa 2 on esitetty kuvan 1 elementtiverkkojen rajoitukset eri solmupisteiden vapausastemäärillä, kun käytettävissä on tietty määrä keskusyksikön muistitilaa. Taulukossa on esitetty myös iteratiivisille ja suorille ratkaisumenetelmille, kun käytettävissä on 40000 sanaa keskusyksikköä. Esityksessä ei ole otettu huomioon tarvittavaa lisätilaa tiedonkäsittelymenetelmille. Lisäksi on oletettu että työtilan kokonaistarve pysyy samana eri tiedonkäsittelymenetelmillä.

Taulukossa 3 on esitetty taulukkoa 2 vastaavat arvot out-of-core-tyyppiselle ratkaisumenetelmälle, kun massamuistia on 1M sanaa kerroinmatriisille.

Kummastakin taulukosta käy ilmi työtilan merkitys. Esimerkiksi työtilan suurentaminen 40000 sanasta 1M sanaan kasvattaa E3S3-verkon maksimikokoa kaksinkertaiseksi lämmönjohtumistehtävässä ($7 \times 7 \times 7$:stä $14 \times 14 \times 14$:aan), ts elementtiverkon tiheyden kaksinkertaistaminen vaatii työtilan 25 kertaistamisen.

5 TARVITTAVAT TIETOKONERESURSSIT

Eri ratkaisumenetelmät edellyttävät käytettävältä tietokoneelta menetelmälle ominaisia tietokoneresursseja. Vertailtaessa eri menetelmien aiheuttamaa kuormitusta tietokonesysteemille, on tarkasteltava kaikkia tarvittavia systeemiresursseja. Tällöin tarkastelun kohteeksi joutuvat käytetty keskusyksikköaika ja -tila sekä I/O-aika ja tarvittava levytila.

Vertailtaessa eri ratkaisumenetelmien sopivuutta tyypillisimpien matemaattisten mallien ratkaisuun, on sopivimman selville saamiseksi otettava huomioon em. neljän seikan yhteisvaikutus. Useat tutkijat (esim. [1,7]) ovat osoittaneet, että perusratkaisumenetelmien käyttämä keskusyksikköaika on enemmän tai vähemmän riippumaton käytetyistä matemaattisista välineistä ja tiedonkäsittelytavoista. Lisäksi voidaan osoittaa, että tarvittava massamuistitila on käytännössä vakio. Täten kaksi tärkeintä tekijää ovat keskusyksikkötila ja I/O-aika [1].

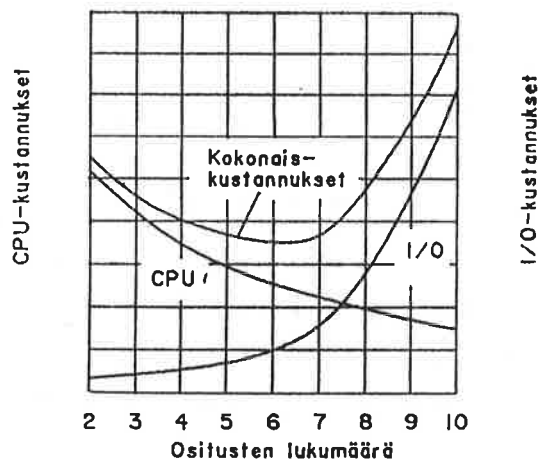
Taulukossa 1 on vertailtu eri ratkaisualgoritmien tiedonkäsittelytapojen työtilantarvetta ja I/O-kutsujen määrää. Taulukossa on oletettu kerroinmatriisin olevan nauhamainen ja riveittäin orientoituneissa algoritmeissa oletetaan kuormitusvektori(t) talletetuiksi vastaavien rivien kanssa (RR, GR, GG). Hypermatriisimenetelmässä (SG) kuormitusvektori(t) oletetaan talletetuiksi erillisinä.

Kuvissa 4a-4c on esitetty eri ratkaisualgoritmien I/O-kutsujen määrä ja työtilan tarve E2S2-mallille. Kuvissa 4d-4f on puolestaan esitetty vastaavat I/O-kutsujen määrät ja työtilan tarpeet osituskoon funktiona, kun tuntemattomien lukumäärä $U = 3200$ ja

nauhaleveyden puolikas $b = 84$. Kuorityyppisen tehtävän (E2S3) työtilan tarve ja I/O-kutsujen määrä on esitetty kuvissa 5a ja 5b. Vastaavat tulokset 3D-mallille on esitetty kuvissa 5c ja 5d.

6 OPTIMAALISEN OSITUSKOON VALINTA

Ratkaisualgoritmeissa, joissa kerroinmatriisi ositetaan yhdessä suunnassa (GR, GG) tai molemmissa suunnissa (SG), suuri osituksen koko pienentää I/O-kustannuksia tarvittavan keskusyksikkötilan kustannuksella. Kuvassa 2 on esitetty tyypillinen keskusyksikkö- ja I/O-kustannusten yhteisvaikutus. Optimaalisen osituksen koko riippuu käytettävän tietokoneen kovosta (hardware) ja käytettävästä laskutusalgoritmista.



Kuva 2. Keskusyksikkö- ja I/O-kustannusten yhteisvaikutus ositusten lukumäärän funktiona.

Tyypillinen laskutusalgoritmi tietokonekeskuksissa ja suurissa tietokoneissa voidaan esittää muodossa [1]

$$LK = SK(k_c TK + k_p TIO + k_t KT \times S) \quad , \quad (2)$$

missä SK = systeemikustannukset tunnissa, TK = keskusyksikköaika tunteina, TIO = I/O-aika tunteina, KT = keskusyksikön työtila

sanoina ja S = suurempi tekijöistä TK ja TIO . Kaavan (2) kertoimien tavanomaisia arvoja ovat: $RS = \$ 500$, $k_c = 0,6$, $k_p = 0,15$, $k_t = 1,63 \times 10^{-5}$. Lisäksi TIO voidaan laskea seuraavasti

$$TIO = p_w NW + p_a NA \quad , \quad (3)$$

missä NW ja NA ovat siirrettävien sanojen ja suoritettavien toimintojen lukumäärät. Esim. CDC 6400:lle ovat kaavan (3) kertoimet

$$\begin{aligned} p_w &= 1,11 \times 10^{-8} \text{ h/sana} \\ p_a &= 1,04 \times 10^{-6} \text{ h/toiminto} \end{aligned} \quad . \quad (4)$$

Jos tietokoneohjelman laskennallinen tehokkuus, E_c , oletetaan tunnetuksi, voidaan esim. Gaussin eliminointimenetelmälle esittää keskusyksikköaika muodossa [1]

$$TK = \frac{t_m + t_a}{E_a} \left(\frac{Ub^2}{2} + 4bn_y \right) \quad , \quad (5)$$

missä esim. CDC 6400:lle vakiot $t_m = 57 \times 10^{-7}$ s ja $t_a = 11 \times 10^{-7}$ s.

Kuvassa 3 on esitetty osituksen koon vaikutus laskentakustannuksiin kaavojen (2) - (5) perusteella. Kuvasta nähdään ettei kyseisen installaatio sovelly E2S3-mallin ja suurten tehtävien käsittelyyn ja ratkaisuun.

Minitietokoneissa laskentakustannukset ovat enemmänkin odotusajan funktioita, kuin tietokonesysteemin laskentakustannusten funktioita. Yhtälöitä (2) - (4) vastaavat esitykset minitietokoneelle ovat

$$LK = SK(TK + k_p TIO) \quad (6)$$

ja kertoimet esim. PDP-15:sta : $SK = \$ 15$, $k_p = 8,333 \times 10^{-6}$ h/kutsu sekä

$$\begin{aligned} t_m &= 4,167 \times 10^{-9} \text{ h} \\ t_a &= 2,778 \times 10^{-9} \text{ h} \end{aligned} \quad (7)$$

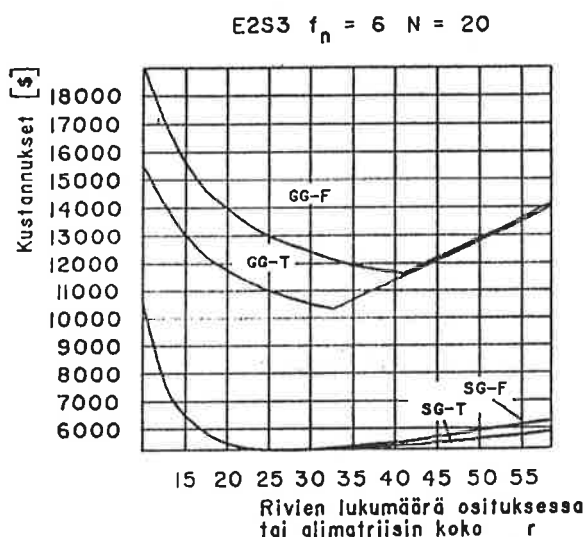
Yhtälöitä (6) ja (7) käyttäen on kuvassa 5e esitetty laskentakustannukset minitietokoneelle. Kuvasta nähdään että laskentakustannukset ovat kohtuulliset. Laskenta-ajat sensijaan ovat SG- ja GR-menetelmille 40 h ja 70 h [1].

Kaavoja (2), (3) ja (6) käyttäen voidaan hakea optimaalista osituskokoa. Käytännössä joudutaan myös turvautumaan koeajoihin ja kokeeseen.

7 KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Kamel, H.A., McCabe, M.W., Direct numerical solution of large sets of simultaneous equations, Computers & Structures 9 (1978) 2, s. 113 - 123.
- [2] Bathe, K.-J., Wilson, E.L., Peterson, F.E., SAP4 - A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems. Rev. Berkeley, California, University of California, 1974, 150 s.
- [3] Bathe, K.-J., Solution methods for large generalized eigenvalue problems in structural engineering, Report UC SESM 71-20, Civil Engineering Department, University of California, Berkeley, 138 s.
- [4] SPERRY NASTRAN users manual, level 15.5, SPERRY Support Services, Huntsville, AL, 1978.
- [5] The NASTRAN theoretical manual index (level 15.5), Computer Software Management and Information Center, University of Georgia, 1972.

- [6] Argyris, J.H., Kamel, H.A., et al., ASKA, an Automatic System for Kinematic Analysis, Programmer's manual, Oct. 1965.
- [7] Phanaskar, S.R., Solution of large systems of linear simultaneous equations by inverse decomposition, Computers & Structures, 5 (1975) 2/3, s. 131 - 144.



Kuva 3. Osituskoon vaikutus laskentakustannuksiin riveittälnositetussa (GG) ja hypermatriisimenetelmässä ($U = 9120$, $b = 912$, $n_y = 5$, $E_c = 0,8$) [1].

Taulukko 1. Eri tiedonkäsittelytapojen tilantarve ja I/O-ope-raatioiden määrä [1]. r = rivien lukumäärä osituksessa tai alimatriisin koko, s = käsiteltävien alimatriisien ($\neq 0$) lukumäärä hyperrivissä $\approx b/r$, T = kolmiomuotoon saattaminen, F = hajotusmenetelmä, N_p = ositusten lukumäärä $\approx U/r$.

Datan käsittelytapa	Tilan tarve	I/O-kutsujen määrä	Tietueen pituus
IB-T IB-F	Ub	0	—
RR-T	$2b$	$4bU$	b
RR-F	$2b$	$5bU$	b
GR-T	$b(r+1)$	$4sU$	br
GR-F	$b(r+1)$	$5sU$	br
GG-T	$2br$	$4sN_p$	br
GG-F	$2br$	$5sN_p$	br
SG-T	$4r^2 + s^2$	$\frac{N}{2} (3s^2 + 13s - 8)$	r^2
SG-F	$5r^2 + s^2$	$\frac{N}{2} (3s^2 + 11s - 6)$	r^2

Taulukko 2. Tehtäväkoon rajoitukset in core-tyyppiselle ratkaisulle. Työtilaa kerroin-
matriisille 40000 sanaa [1].

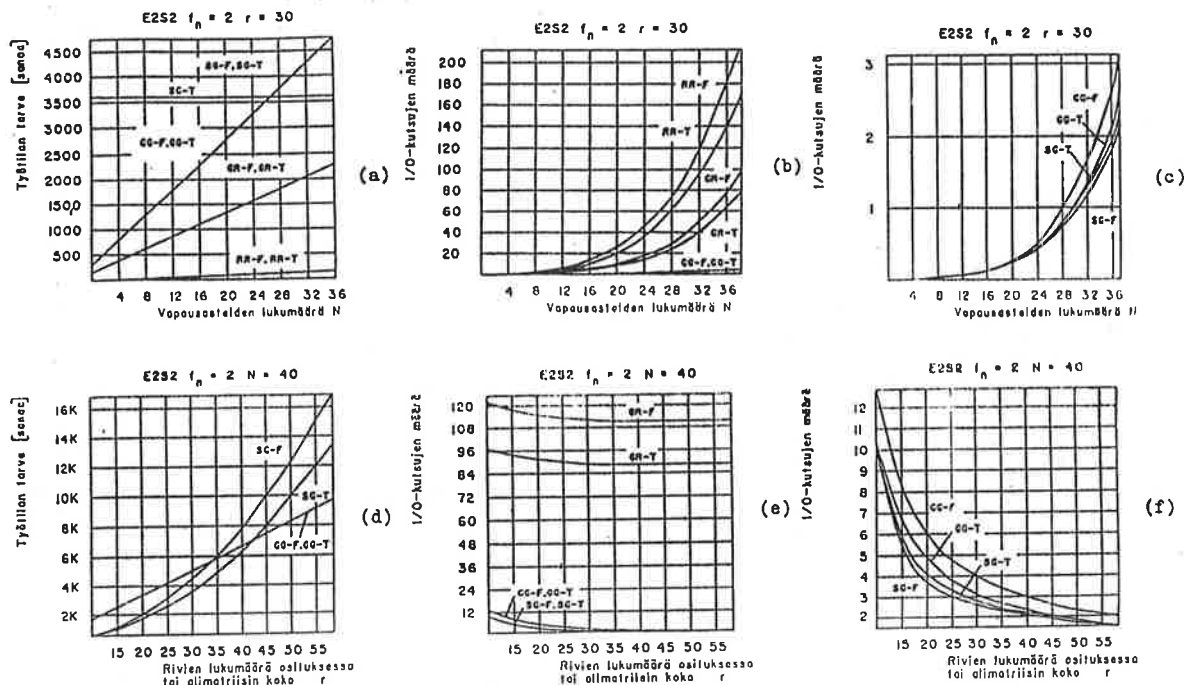
Malli	U	b_0	b	$\sigma = 2b/U$	$S_d = bU$	$S_i = b_0 U$	f_n	N_d	U_d	N_i	U_i
E1-S1	$f_n N$	$2f_n$	$2f_n$	$4/N$	$2f_n^2 N$	$2f_n^2 N$	1	20000	20000	20000	20000
							3	2222	6666	2222	6666
E2-S2	$f_n N^2$	$5f_n$	$f_n(N+2)$	$\frac{2(N+2)}{N^2}$	$f_n^2 N^2(N+2)$	$5f_n^2 N^2$	1	33	1089	89	7921
							3	15	675	29	2523
E2-S3	$4f_n N(N-1)$	$8f_n$	$8f_n(N-1)^*$	$4/N$	$32f_n^2 N(N-1)^2$	$32f_n^2 N(N-1)^2$	1	11	440	35	4760
							3	5	240	12	1584
E3-S3	$f_n N^3$	$14f_n$	$f_n(N^2+N+2)$	$\frac{2(N^2+N+2)}{N^3}$	$f_n^2 N^3(N^2+N+2)$	$14f_n^2 N^3$	1	8	512	14	2744
							3	5	375	6	648

* On mahdollista pienentää $2f(n+1)$, jos huomioidaan matriisin harvuus

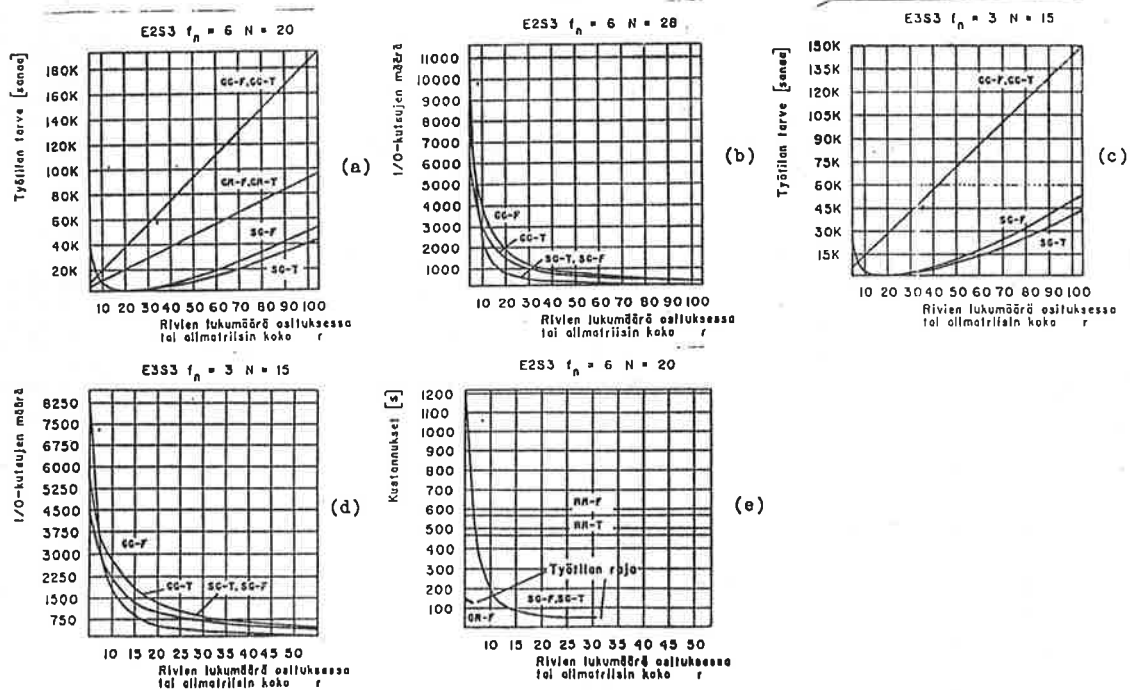
Taulukko 3. Tehtäväkoon rajoitukset out-of-core-tyyppiselle ratkaisulle. Työtilaa ker-
roinmatriisille 1M sanaa [1].

Malli	U	b_0	b	$\sigma = 2b/U$	$S_d = bU$	$S_i = b_0 U$	f_n	N_d	U_d	N_i	U_i
E1-S1	$f_n N$	$2f_n$	$2f_n$	$4/N$	$2f_n^2 N$	$2f_n^2 N$	1	500000	500000	500000	500000
							3	55555	166665	55555	166665
E2-S2	$f_n N^2$	$5f_n$	$f_n(N+2)$	$\frac{2(N+2)}{N^2}$	$f_n^2 N^2(N+2)$	$5f_n^2 N^2$	1	99	9801	447	199809
							3	47	6627	149	66603
E2-S3	$4f_n N(N-1)$	$8f_n$	$8f_n(N-1)^*$	$4/N$	$32f_n^2 N(N-1)^2$	$32f_n^2 N(N-1)^2$	1	32	3968	177	124608
							3	15	2520	59	41064
E3-S3	$f_n N^3$	$14f_n$	$f_n(N^2+N+2)$	$\frac{2(N^2+N+2)}{N^3}$	$f_n^2 N^3(N^2+N+2)$	$14f_n^2 N^3$	1	15	3375	41	68921
							3	10	3000	20	24000

d = suora ratkaisumenetelmä, i = iteratiivinen ratkaisumenetelmä, $N_d, N_i =$
solmupisteiden lukumäärä/dimensio, f = vapausasteiden määrä/solmupiste,
 $U_d, U_i =$ tuntemattomien lukumäärä, $b_0 =$ paikallinen nauhaleveyden puolikas,
 $b_d =$ nauhaleveyden puolikas, $S_d, S_i =$ työtilan tarve, $\sigma =$ matriisin harvuus



Kuva 4. Työtilan tarve tehtäväkoon (a)-(c) ja osituksen koon ($U = 3200, b = 84$) (d) funktiona sekä I/O-kutsujen määrä osituksen koon funktiona ($U = 3200, b = 84$) (e), (f) E2S2-mallille [1].



Kuva 5. Työtilan tarve tehtäväkoon ($U = 9120, b = 912$) (a) ja I/O-kutsujen määrä osituksen koon ($U = 18144, b = 1296$) (b) funktiona E2S3-mallille. Työtilan tarve E2S3-mallille osituksen koon funktiona ($U = 10125, b = 726$) (c), (d) sekä laskentakustannukset osituskoon funktiona E2S3-mallille minitietokoneelle (PDP-15) ($U = 9120, b = 912, n_y = 5, E_c = 0,8$) (e) [1].

ARINARAKENTTEEN ESTETTY VÄÄNTÖ LIITOSTEN JOUSTAVUUS HUOMIOONOTTAEN

Reijo Ilvonen

Kari Vaittiniemi

Erkki Niemi

Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu

Koneenrakennuksen laitos

1. JOHDANTO

Estetyn väännön aiheuttamien rasitusten laskenta arinarakenteissa tuottaa vaikeuksia. Risteävät palkit ovat käytännössä usein eri kokoisia, mistä seuraa, etteivät ne liity täysin jäykästi toisiinsa. Liitosten paikallinen jousto olisi otettava huomioon ratkaistaessa rasitusten jakautumista rakenteeseen. Jännitysten laskenta tällaisen rakenteen liitoksissa aiheuttaa lisäksi omia ongelmiaan.

Käytettäessä normaaleja kuuden vapausasteen palkkielementtejä arinarakenteen analysointiin ei estetyn väännön vaikutusta pystytä ottamaan huomioon. Muutamissa elementtiohjelmassa, kuten MSC/NASTRAN [5] on myös seitsemän vapausasteen palkkielementti. Kuitenkin ko. elementtiä käytettäessä joudutaan liitokset oletamaan täysin jäyiksi estetyn väännön suhteen, ottamatta huomioon liitosten joustavuutta.

Hyötyajoneuvojen runkorakenteita ovat tutkineet mm. Oehlschlaeger [1,2] ja Beermann [3], sekä avaruuskehärakenteita Yang ja McGuire [4]. Oehlschlaeger [1] on määrittänyt FEM-laskelmien tulosten perusteella ajoneuvojen runkojen erilaisille tyyppiliitoksille joustavuuskertoimia, joita voidaan käyttää voimamenetelmän yhtälöryhmän muodostamisessa [3,4]. Joustavuuskertoimien määrittämisessä Oehlschlaeger ei ole kuitenkaan ottanut huomioon liitoksen joustavuuden vaihtelua liitoksen eri kohdissa.

Tässä työssä tarkastellaan arinarakenteen liitosta, jossa matalampi poikkipalkki on hitsattu pääpalkin uumalevyyn. Tällaisia liitoksia esiintyy mm. hyötyajoneuvojen tikapuurungoissa. Liitoksen joustoa tutkitaan FE-menetelmällä kuorirakenteeksi mallinnettuna.

Tavoitteena on esittää suuntaviivat, joilla määritetään jäykkyyshluvut K liitosjouselle, jolla poikkipalkki liitetään pääpalkkiin.

2.LIITOKSEN JÄYKKYYSLUKU

Tarkastellaan kuvan 1 mukaista U-profiilia, jota kuormittaa vääntömomentti M_v . Poikkileikkauksessa vaikuttava bimomentti on [6]

$$B = \int_S \sigma_z(s) \cdot \omega(s) \cdot t \cdot ds = -E \cdot I_\omega \cdot \varphi'' \quad (1)$$

missä

σ_z on aksiaalinen normaaliännitys

$\omega(s) = \int_0^s r_t \cdot ds$ on sektoriaalinen koordinaatti

t on seinämän paksuus

s on koordinaatti pitkin poikkileikkauksen piiriä

E on kimmomoduuli

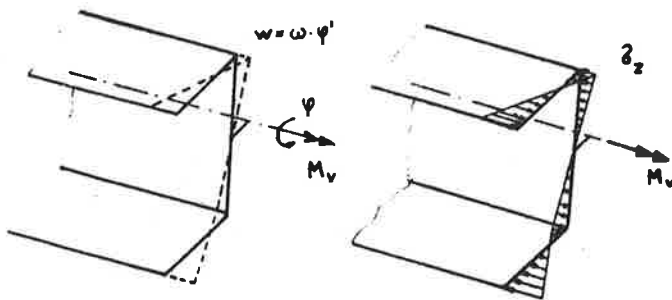
$I_\omega = \int_S \omega^2 \cdot t \cdot ds$ on sektoriaalinen jäyhyysmomentti

φ on poikkileikkauksen vääntökulma

φ' on vääntökulman derivaatta pituuskoordinaatin suhteen eli vääntymä

Poikkipintapainuma eli siirtymä pituusakselin suuntaan $w(s)$ on [1]

$$w(s) = \omega(s) \cdot \varphi' \quad (2)$$



Kuva 1. Vääntömomentin kuormittama U-palkki

Tarkastellaan kuvan 2 mukaista ajoneuvon rungon liitosta, jossa poikittaispalkki on hitsattu pitkittäispalkin uumaan. Riippuen tarkasteltavasta rasituskomponentista, voidaan liitosta pitää

joustavana tai lähes jäykkänä. Aksiaalivoimat ja leikkausvoimat ovat yleensä pieniä ja ongelmattomia tällaisten ajoneuvojen rungoissa, siksi tarkastellaan liitoksen joustoa vain taivutusmomenttien ja bimomentin suhteen.

Jotta liitoksen joustavuus voitaisiin ottaa huomioon arinaa palkkirakenteena analysoitaessa, on liitokselle määrättävä jäykkyyssluku. Jäykkyyssluku $K_{\theta\omega}$ voidaan määrittää bimomentin suhteen.

$$K_{\theta\omega} = \frac{B}{\varphi'} \quad (3)$$

Kaavasta (2) saadaan vääntymä φ' , joka sijoitettuna kaavaan (3) saadaan

$$K_{\theta\omega} = \frac{\omega(s) \cdot B}{w(s)} \quad (4)$$

Sijoittamalla bimomentin lauseke (1) kaavaan (4) saadaan

$$K_{\theta\omega} = \frac{\omega(s)}{w(s)} \cdot \int_s \sigma_z(s) \cdot \omega(s) \cdot t \cdot ds \quad (5)$$

Jos liitoksen joustavuus pitkin poikkileikkauksen piiriä olisi vakio, olisi myös φ' vakio ja kaavasta (5) laskettu jäykkyyssluku kuvaisi liitoksen jäykkyyttä tarkasti. Kuitenkin poikkipalkin liittyessä pitkittäispalkin uumaan (kuva 2), toimii uuma laattana, jolloin φ' pitkin poikkileikkauksen piiriä vaihtelee (jopa useita kymmeniä prosentteja, kts. taulukko 1). Tällöin jäykkyyssluvun arvoon vaikuttaa voimakkaasti se, mitä φ' :n arvoa integraalin edessä kaavassa (5) käytetään. Tämä ongelma voidaan välttää, kun $\varphi' = w/\omega$ siirretään integraalin sisään, jolloin jäykkyyssluku $K_{\theta\omega}$ saadaan

$$K_{\theta\omega} = \int_s \frac{\sigma_z(s) \cdot \omega^2(s)}{w(s)} \cdot t \cdot ds \quad (6)$$

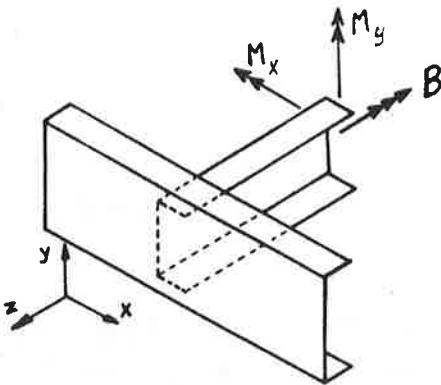
Kaavan (6) mukaan määritetty jäykkyyssluku kuvaa yksikäsitteisesti liitoksen jäykkyyttä estetyn väännön suhteen. $K_{\theta\omega}$:n laskennassa tarvittavat $w(s)$ ja $\sigma_z(s)$ -arvot voidaan tuottaa elementtimenetel-

mällä käyttäen ohutkuorielementtejä. Liitoksen mallin reunaehdot on asetettava siten, että $w(s)$ ja $\sigma_z(s)$ -arvoissa esiintyy ainoastaan liitoksen joustavuus eikä esimerkiksi pitkittäispalkin vääntymästä aiheutuvaa joustavuutta.

Analogisesti estetyn väännön jäykkyyksiluvulle saadaan jäykkyyksiluvut taivutusmomenttien M_x ja M_y suhteen

$$K_{\theta x} = \frac{M_x}{y'} = \int_S \frac{\sigma_z(s) \cdot y^2(s)}{w(s)} \cdot t \cdot ds \quad (7)$$

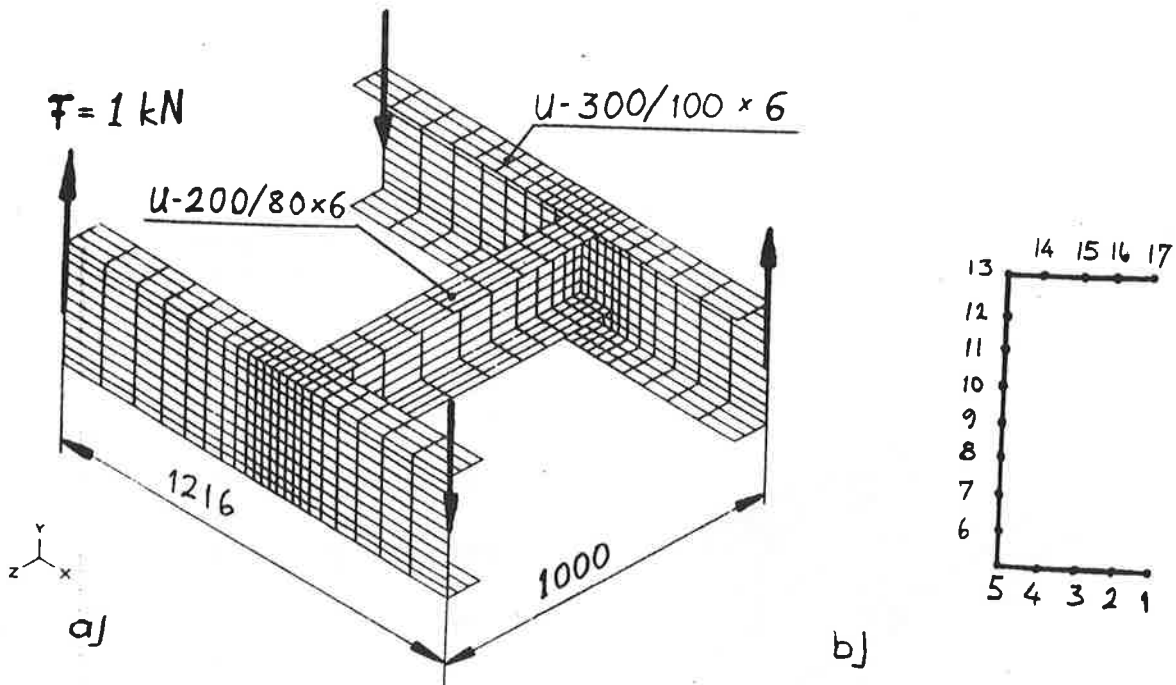
$$K_{\theta y} = \frac{M_y}{x'} = \int_S \frac{\sigma_z(s) \cdot x^2(s)}{w(s)} \cdot t \cdot ds \quad (8)$$



Kuva 2. Liitoksen kuormituskomponentit

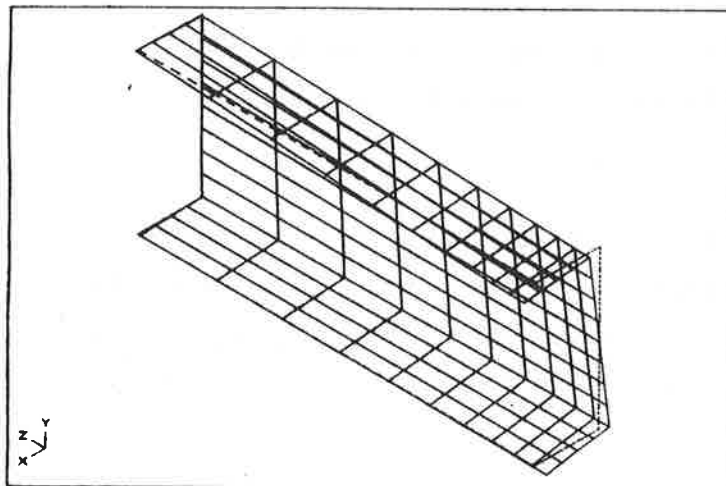
3. ESIMERKKILIITOS

Tarkastellaan kuvan 3 mukaista arinarakenteen osakokonaisuutta. Rakenteesta muodostettiin elementtimalli käyttäen 1. asteen ohutkuorielementtejä, QUAD4, [5]. Malli kiinnitettiin poikkipalkin puolivälistä palkkielementeillä nivelellisesti poikkileikkauksen vääntökeskiöön. Pitkittäispalkkien kiertyminen x-akselin ympäri estettiin. Kuormituksena käytettiin kahta pistevoimaparia. Malli ratkaistiin MSC/NASTRAN-elementtiohjelmalla käyttäen lineaarista ratkaisua. Poikkipalkin pään siirtymät on esitetty kuvassa 4 ja normaalijännitykset kuvassa 5.



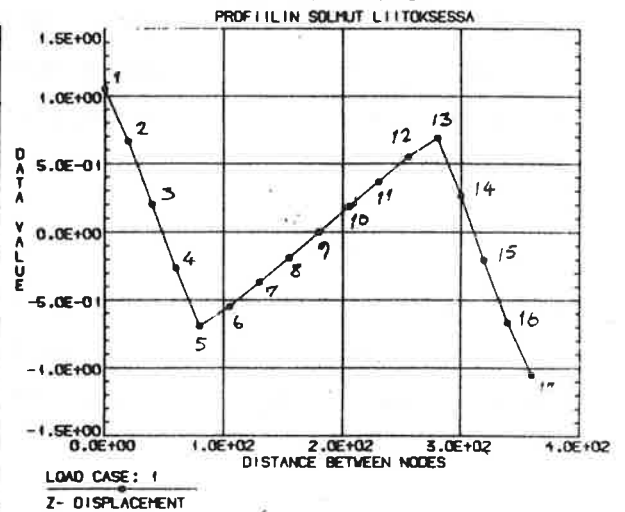
Kuva 3. a) Tarkasteltava rakenne. b) Poikkipalkin poikkileikkaus

SORC...I-DEAS 2.5B: Output Display 4-AUG-85 14:46:05
U-PALKKIA VAANNETAAN LOAD CASE: 1
DISPLACEMENTS MIN:+3.520E-01 MAX:+2.121E+01



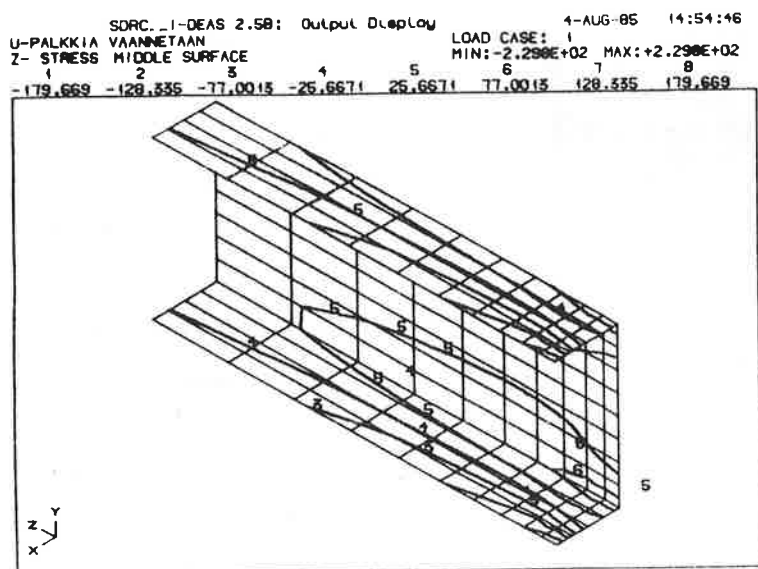
a)

SORC...I-DEAS 2.5B: Output Display 4-AUG-85

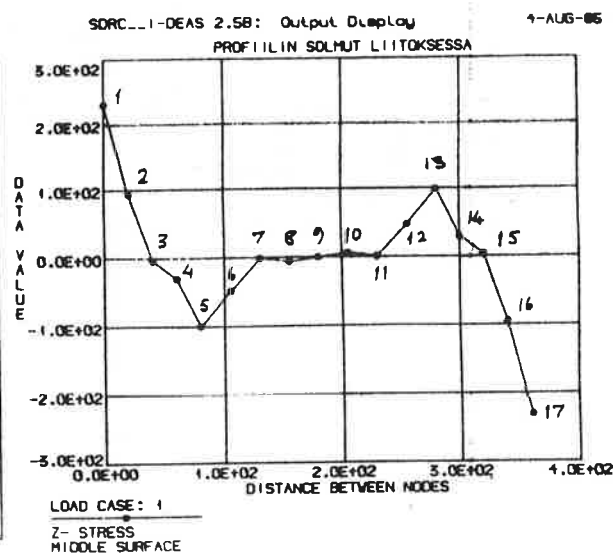


b)

Kuva 4. Poikkipalkin muodonmuutokset. b) Poikkipalkin pään siirtymät pitkin poikkileikkauksen piiriä.



a)



b)

Kuva 5. a) Poikkipalkin normaaliännitysten tasa-arvokäyrät.
 b) Normaaliännitykset poikkipalkin päässä.

Poikkipalkin φ' liitoksen solmupisteissä laskettiin kaavasta (2). Tulokset on esitetty taulukossa 1. Taulukosta voidaan havaita, ettei φ' ole vakio yli koko poikkileikkauksen, kuten kaavassa (1) oletettiin.

Erot FEM-laskelmien ja teoreettisten tulosten välillä voidaan selittää pitkittäispalkin uuman toimimisella laattana. Tällöin poikkipintapainumaa vastustava laatta toimii kuten rinnankytketyt jouset, joiden jousivakio vaihtelee pitkin poikkileikkauksen piriä.

Taulukko 1. Poikkipalkin pään solmupisteiden siirtymät ja normaali-jännitykset, sekä poikkileikkauksen vääntymä solmupisteissä laskettuna.

solmu	w mm ²	w mm	δ_z N/mm ²	φ' 1/mm · 10 ⁻⁴
1	5176,5	1,05	231,0	2,03
2	3176,5	0,67	94,1	2,09
3	1176,5	0,20	- 3,9	1,72
4	- 823,5	-0,26	-29,7	3,18
5	-2823,5	-0,69	-99,3	2,44
6	-2117,6	-0,55	-47,3	2,59
7	-1411,8	-0,37	- 0,8	2,59
8	- 705,9	-0,18	- 6,1	2,62
9	0	0	0	-

Esimerkkiliitokselle laskettiin $K_{\theta\omega}$ kaavasta (6) FEM-laskelmien tulosten (taulukko 1) perusteella. Kaava (6) voitiin integroida numeerisesti, kun $w(s)$ ja $\sigma_z(s)$ oletettiin lineaarisiksi solmupisteiden välillä. $K_{\theta\omega}$:lle saatiin arvoksi

$$K_{\theta\omega} = 1,35 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^3$$

$K_{\theta\omega}$:n suuruusluokka tarkastettiin vertaamalla laskettua $K_{\theta\omega}$:aa Oehlschlaeger:n [1] esittämän joustavuusluvun käänteislukuun $1/\delta_{LQF} = 1,52 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^3$ samallaiselle liitokselle.

4. ANALYYTTINEN RATKAISU

Esimerkkiliitosta tarkasteltiin kuvan 6 mukaisena vääntömomenttin M_V kuormittamana ulokepalkkina. Palkin differentiaaliyhtälöksi saadaan [6]

$$-a^2 \varphi'''' + \varphi' = \frac{M_V}{GI_V} \quad (9)$$

missä

$$a^2 = \frac{EI_{\omega}}{GI_V} \quad \text{ja} \quad I_V = 1/3 \cdot s \cdot t^3$$

G on liukumoduuli

I_V on vääntöjäyhyysmomentti

Differentiaaliyhtälön ratkaisu on muotoa

$$\varphi' = A_1 \cdot \sinh \frac{z}{a} + A_2 \cdot \cosh \frac{z}{a} + \frac{M_V}{GI_V} \quad (10)$$

Reunaehdot ovat

$$\begin{aligned} \varphi'' &= 0, \quad \text{kun } z = 0 \\ -EI_{\omega} \cdot \varphi'' &= K_{\theta\omega} \cdot \varphi', \quad \text{kun } z = l \end{aligned}$$

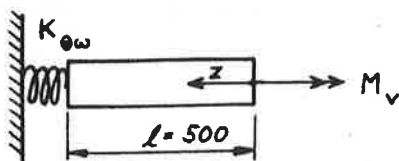
Ratkaisuksi saadaan

$$A_1 = 0 \quad (11)$$

$$A_2 = - \frac{\frac{M_V}{GI_V}}{\frac{EI_{\omega}}{K_{\theta\omega} \cdot a} \cdot \sinh \frac{l}{a} + \cosh \frac{l}{a}} \quad (12)$$

Sijoittamalla tulokset bimomentin kaavaan (1), saadaan bimomentti z :n funktiona

$$B(z) = -EI_{\omega} \cdot \frac{A_2}{a} \cdot \sinh \frac{z}{a} \quad (13)$$



Kuva 6 Vääntömomentin kuormittama ulokepalkki

Kuvassa 7 a on esitetty kaavasta (13) laskettu bimomentti käyttäen

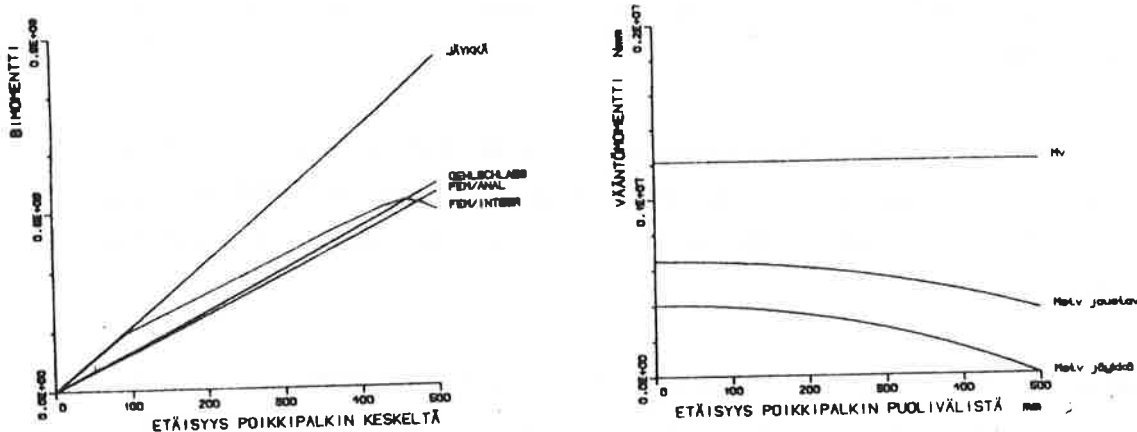
jäykkyyslukuna $K_{\theta\omega}$:aa ja lähteen [1] jäykkyyslukua $1/\delta_{LQF}$. Samassa kuvassa on esitetty myös kaavalla (1) laskettu bimomentti sekä bimomenttijakauma kaavan (14) mukaan [6], olettamalla liitos täysin jäykäksi

$$B = -M_V \cdot a \cdot \frac{\sinh \frac{z}{a}}{\cosh \frac{l}{a}} \quad (14)$$

Vapaan väännön osuus vääntömomentista saadaan [6]

$$M_{Vst} = GI_V \cdot \varphi' \quad (15)$$

Kuvassa 7 b on esitetty kaavan (15) mukainen vääntömomenttijakauma vapaan ja estetyn väännön suhteen kun liitoksen jousivakio on $K_{\theta\omega}$ ja kun liitos on täysin jäykkä ($K_{\theta\omega} = \infty$).



Kuva 7. a) Bimomenttijakauma. b) Vääntömomenttijakauma

5. TULOSTEN TARKASTELUA

Kappaleen 3 ja kuvan 7 perusteella voidaan vetää seuraavat johtopäätökset. Vapaan väännön osuus M_{Vst} kokonaisvääntömomentista M_V kasvaa n. kolminkertaiseksi ja bimomentti pienenee n. 47 %, kun liitoksen joustavuus otetaan huomioon. Kuitenkaan maksimijännitys ei pienene niin paljon kuin bimomentti ($301,0 \rightarrow 231,0 \text{ N/mm}^2$, eli n. 32 %), koska σ_z :n jakauma poikkeaa liitoksen jouston vaikutuk-

sesta estetyn väännön teorian mukaisesta. Edelleen kuvasta 7a voidaan havaita, että FEM-tulosten (kuorirakenne) perusteella laskettu bimomenttijakauma ei noudata hyperbolisen sinin muotoa, kuten teoriassa oletetaan.

Tässä työssä esitetty uudella tavalla määritetty jäykkyyssluku $K_{\theta\omega}$ näyttää antavan järkeviä tuloksia. Kuitenkin jatkotutkimuksin on selvitettävä, miten hyvin jäykkyyssluku toimii mutkikkaammilla profiileilla (esim. hattu) ja poikkipalkin sijaitessa epäsymmetrisesti korkeussuunnassa.

6. KIRJALLISUUSVIITTEET

- 1 Oehlschlaeger, H. Berechnung verwindungsweicher Nutzfahrzeugrahmen auf Torsion unter Berücksichtigung der Knoten-Ausbildung. Dissertation. Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig. 1981. s. 217
- 2 Oehlschlaeger, H. Zur FEM-Berechnung von Nutzfahrzeugrahmen mit nachgiebigen Knoten bei reduziertem Rechenaufwand. Düsseldorf 1984. VDI Verlag GmbH. VDI Berichte 537. Berechnung im Automobilbau. s.439 - 459.
- 3 Beermann, H.J., Warping torsion in commercial vehicle frames, taking into consideration flexible joints. Int. Journal of vehicle design vol 1, no 5, 1980 s. 397 -414.
- 4 Yang, Y-B & Mc Guire W., A procedure for analysing spaceframes with partial Warping Restraint, Int. Journal for Numerical methods in Engineering Vol 20, s. 1377 - 1398. 1984.
- 5 MSC/Nastran Users manual, Vol. 1, Los Angeles, California 1980.
- 6 Murray N.W., Introduction to the theory of thin-walled structures. Clarendon press. Oxford 1984, s. 447.

Vastauksia CIM- kysymyksiin.

Palveluksessanne
Teknistieteellisen tietojenkäsittelyn ryhmä.

Puhelin (90) 4591



IHMISILLE, JOILLA ON TAVOITTEITA.

IVOFEM

IVOFEM on Imatran Voima Oy:ssä kehitetty supisuomalainen elementtimenetelmään perustuva tietokoneohjelma.

Ohjelmasta on olemassa selkeä suomenkielinen käyttäjän opas. Ohjelman helppo lähtöarvojen antaminen mahdollistaa niin nopeat rutiinilaskennat kuin mutkikkaat erikoistehtävät.

IVOFEM soveltuu seuraavien lineaaristen staattisten tehtävien ratkaisemiseen:

- levytehtävät
- pyörähdyskappaleet
- laattatehtävät
- sylinterimäiset kuoret
- mielivaltaiset 3D-kappaleet
- yleiset kuoret
- tasoristikot, liitettävissä levyihin
- arinat, liitettävissä laattoihin
- tasokehät
- avaruusristikot, liitettävissä 3D-kappaleisiin
- avaruuskehät, liitettävissä yleiseen kuoreen
- kenttäprobleemat (mm. lämmönjohtuminen, suotovirtaus) levyssä tai pyörähdyskappaleessa

Ohjelmaan liittyy useita tulosten käsittelyohjelmia, jotka tuottavat piirturikuvia mm. mallista, sama-arvokäyristä, pääjännitys jakaumista, momenttipinnoista ja pääjännitysvektoreista.

Ohjelmaa kehitellään nykyään VAX-ympäristössä. Siitä on olemassa tällä hetkellä toimivat versiot VAX-koneen lisäksi HP9000- ja Honeywell 66-koneilla.

IVOFEM-ohjelmistoon kuuluu lisäksi mm. levyjen ja pyörähdyskappaleiden epälineaariseen (plastisuus) analysointiin soveltuva IVOPLAST-ohjelma sekä tehokas transienttien lämpötilajakaumien laskentaohjelma IVOHEAT.

Lisätietoja: Seppo Orivuori
Imatran Voima Oy
PL 138
00101 Helsinki, puh. (90)6090532

