

Voimapari ja sen momentti

Tapio Salmi¹

Tiivistelmä. Artikkelissa tarkastellaan kahden voimavektorin muodostamaa tiettyä voimasysteemiä, voimaparia. Osoitetaan, että voimaparin voimavektorien summa on nolla huolimatta siitä, että voimien suunnikslakiaksioomaa ei voida soveltaa. Lisäksi osoitetaan, että voimaparin momentti on vapaa vektori eli riippumaton valitusta momenttipisteestä.

Avainsanat: voimapari, voimaparin momentti, suunnikslaki, mekaniikan opetus

Vastaanotettu 2.2.2016. Hyväksytty 22.11.2016. Julkaistu verkossa 9.12.2016.

Professori Juhani Kosken muistolle

Johdanto

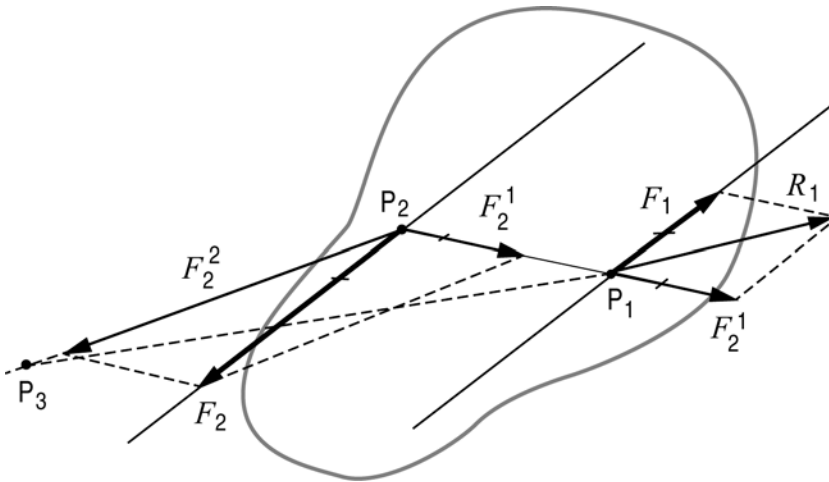
Jäykän kappaleen mekaniikan teoriassa tarkastellaan kappaleeseen vaikuttavia voimasysteemejä ja niiden yhdistämistä mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Tässä yhdistämistyössä on tukeuduttava *mekaniikan peruslakeihin* ja vain niihin. Tällä varmistuu, että alkuperäisen ja yhdistetyn voimasysteemin *ulkoinen* vaikutus kappaleeseen säilyy. *Voimien suunnikslaki* on peruslaki, joka esittää, miten kappaleen (tai sen kuvitellun jatkeen) samaan pisteeseen vaikuttavat kaksi voimaa \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 yhdistetään resultanttivoimaksi

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 \oplus \mathbf{F}_2. \quad (1)$$

Yhteenlaskumerkki \oplus merkitsee tässä ja jatkossa suunnikassäännön mukaista summaamista.

Jos voimat \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 eivät vaikuta jäykän kappaleen samaan pisteeseen, niin ne voidaan siirtää vaikutussuoriaan pitkin niiden suuruutta tai suuntaa muuttamatta suorien leikkauspisteeseen *voimien siirtolain* perusteella. Tällöin tasossa tai avaruudessa kulkevien vaikutussuorien on leikattava toisensa. Jos näin ei ole, voimien yhdistämismenettely vaatii lisätarkastelun.

¹ tapio.salmi@pressus.fi



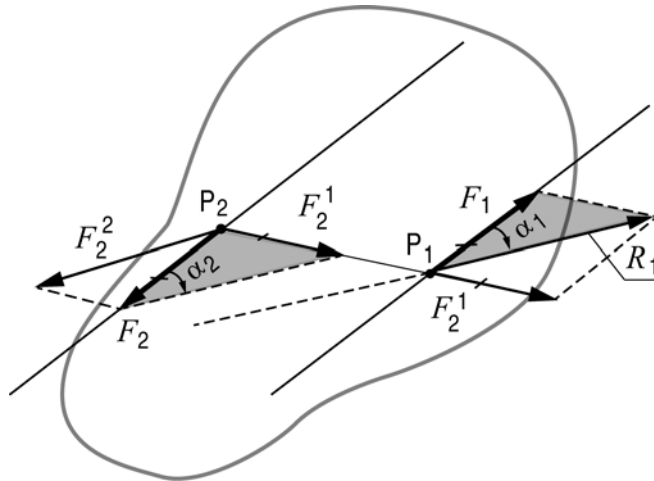
Kuva 1. Kappaleeseen vaikuttavat yhdensuuntaiset voimat \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 , $F_1 \neq F_2$.

Tarkastellaan kuvan 1 kahden voiman voimasysteemiä $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$, jonka voimat ovat yhdensuuntaisia, mutta erisuuria eli $F_1 \neq F_2$. Jaetaan voimavektori \mathbf{F}_2 suunnikaslain avulla kahteen komponenttiin \mathbf{F}_2^1 ja \mathbf{F}_2^2 kuvan 1 mukaisesti². Tämän jälkeen siirretään komponentti \mathbf{F}_2^1 voiman siirtolain avulla toisen voiman \mathbf{F}_1 vaikutuspisteeseen P_1 . Sovelletaan voimiin \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2^1 suunnikslakia, jolloin saadaan niiden resultantti \mathbf{R}_1 . Siirretään saatu resultantti \mathbf{R}_1 vaikutussuoraansa pitkin komponentin \mathbf{F}_2^2 vaikutussuoran leikkauspisteeseen P_3 , johon myös komponentti \mathbf{F}_2^2 siirretään. Tämän jälkeen resultantti \mathbf{R}_1 ja komponentti \mathbf{F}_2^2 voidaan laskea suunnikaslain avulla yhteen, jolloin saadaan alkuperäisen voimasysteemin $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$ resultantti.

Edellä esitetty peruslakeihin perustuva menettely onnistui, kun $F_1 \neq F_2$. Tarkastellaan seuraavassa tilannetta, jossa voimavektorit ovat yhtä pitkät eli $F_1 = F_2$ (kuva 2). Jaetaan nytkin ensin voima \mathbf{F}_2 kahteen komponenttiin \mathbf{F}_2^1 ja \mathbf{F}_2^2 kuvan 2 mukaisesti ja siirretään komponentti \mathbf{F}_2^1 vaikutussuoraansa pitkin voiman \mathbf{F}_1 vaikutuspisteeseen P_1 . Tämän jälkeen muodostetaan voiman \mathbf{F}_1 ja komponentin \mathbf{F}_2^1 resultantti \mathbf{R}_1 .

Kuvan 2 tummennetut kolmiot ovat yhteneviä (sks), josta seuraa, että kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret eli $\alpha_2 = \alpha_1$. Näin ollen resultantin \mathbf{R}_1 ja komponentin \mathbf{F}_2^2 vaikutussuorat ovat yhdensuuntaiset eikä kyseisiä vektoreita voida siirtää vaikutussuoriensa leikkauspisteeseen. Tällä menetelmällä alkuperäisen voimasysteemin resultantin muodostaminen epäonnistui tapauksessa $F_1 = F_2$.

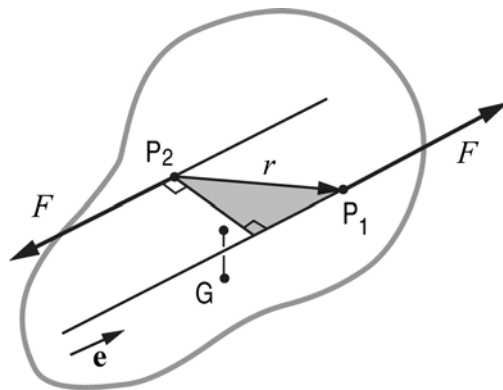
²Viiva vektorinuolen päällä tarkoittaa, että kyseiseen vektoriin on tehty laskutoimitus eli se on pois pelistä. Vektoria kuvissa esittää nuoli ja sen vieressä oleva vektorin suuruutta esittävä skalaarisymboli.



Kuva 2. Kappaleeseen vaikuttavat yhdensuuntaiset voimat \mathbf{F}_1 ja \mathbf{F}_2 , $F_1 = F_2$.

Voimapari

Kahden yhtä suuren, mutta vastakkaisuuntaisen voiman \mathbf{F} ja $-\mathbf{F}$ muodostamaa voimasysteemiä $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ sanotaan *voimapariksi* (couple). Kuvassa 3 voimat on suunnistettu ykkösvektorin \mathbf{e} avulla, jolloin $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\} = \{F\mathbf{e}, -F\mathbf{e}\}$.



Kuva 3. Voimapari $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$.

Yleisyyttä kunnioittaen valitaan kappaleen *massakeskiö* G siten, ettei se ole välttämättä voimaparin määrittelytasossa, ja jos onkin, niin voimaparin määrittelytaso ei ole välttämättä kappaleen päähitaustaso.

Kuvan 2 yhdensuuntaiset voimat $\mathbf{F}_1 = F \mathbf{e}$ ja $\mathbf{F}_2 = -F \mathbf{e}$ muodostavat voimaparin. Edellä todettiin, että kyseisen voimasysteemin resultantin määrittäminen suunnikaslain ja voiman siirtolain avulla epäonnistui.

Mekaniikan oppikirjoissa, esimerkiksi [1, 3 - 7] pääsääntöisesti vain *todetaan*, että voimaparin voimien resultantti $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Toisaalta voimapari ja sen momentti ovat aivan keskeisessä asemassa jäykän kappaleen mekaniikan voimasysteemien yhdistämisen teoriassa. Siksi seuraavassa tälle väitteelle esitetään todistus.

Väite 1: Voimaparin $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ voimien \mathbf{F} ja $-\mathbf{F}$ resultantti $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Kuvaan 2 liittyvä voimien suunnikaslakiin ja siirtolakiin perustuva menettely ei nyt toimi. Tästä syystä kannattaakin käyttää hyväksi dynamiikan *massakeskiön liikkeen lausetta* ([2], s. 266)

$$\mathbf{R} = m \mathbf{a}_G, \quad (2)$$

jossa \mathbf{a}_G on massakeskiön G (fysikaalinen) kiihtyvyys ja \mathbf{R} kappaleeseen vaikuttavan ulkoisen voimasysteemin resultantti. Lauseen mukaan partikkelisysteemin (ja myös jäykän kappaleen) massakeskiö G liikkuu kuin partikkeli, jonka massa on yhtä suuri kuin kappaleen kokonaismassa m ja johon vaikuttavat ulkoiset voimat.

Tulos ei edellytä voimien vaikutussuorien tuntemista, joten se on voimassa silloinkin, kun ulkoisten voimien vaikutussuorat eivät kulje massakeskiön kautta tai eivät edes leikkaa toisiaan. Tästä seuraa, että voimaparin voiman $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} = F \mathbf{e}$ aikaansaama massakeskiön G kiihtyvyys

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 / m = \mathbf{F} / m \quad (3)$$

(vaikka voiman \mathbf{F}_1 vaikutussuora ei kulje massakeskiön kautta). Vastaavasti voimaparin toisen voiman $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F} = -F \mathbf{e}$ aikaansaama massakeskiön G kiihtyvyys

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2 / m = -\mathbf{F} / m \quad (4)$$

(vaikka voiman \mathbf{F}_2 vaikutussuora ei kulje massakeskiön kautta).

Partikkelin fysikaalinen kiihtyvyys \mathbf{a} on dynamiikan peruslain mukaan verrannollinen voimaan, josta seuraa, että sen yhteenlasku noudattaa suunnikaslakia. (Usein fysiikassa valitaan kiihtyvyyden suunnikaslaki peruslaiksi, joka tällöin *korvaa* voiman suunnikaslain). Nyt voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}}{m} \oplus \left(-\frac{\mathbf{F}}{m} \right) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Soveltamalla tulosta (2) päädytään tulokseen

$$\mathbf{R} = m \mathbf{a}_G = m \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Siis voimaparin voimien resultantti $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Kappaleen massakeskiö pysyy siis paikallaan (ellei ole jo ennestään tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä) ja kappale on tällöin enintään palloliikkeessä massakeskiön ympäri.

Voimaparin momentti

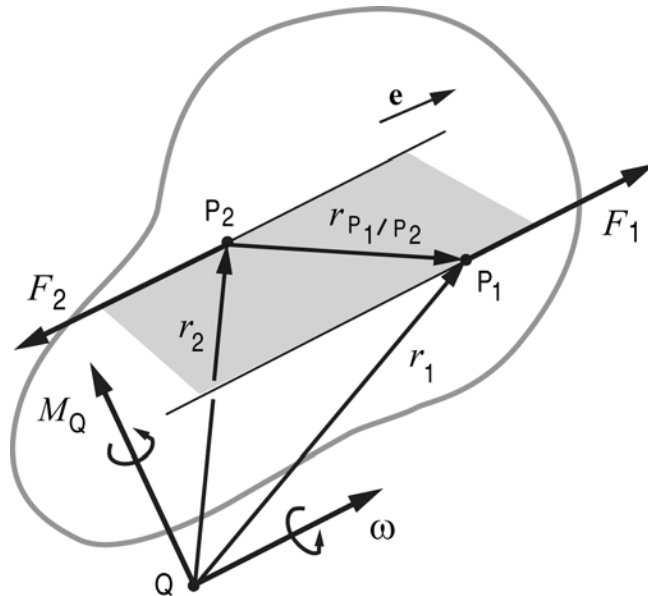
Mekaniikan oppikirjoissa lasketaan voimaparin voimien momenttivektorit mielivaltaisen pisteen Q suhteen erikseen (kuva 4) ja saadut momenttivektorit lasketaan perustelematta yhteen suunnikaslain avulla. Tämä menettely on kuitenkin luvallista vain, jos voimat vaikuttavat samaan pisteeseen, jolloin kysymyksessä on *momenttilauseen* (Varignon lauseen) soveltaminen.

Kuten edellisessä luvussa esitettiin, voimaparin $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ voimia ei voida peruslakeja käyttämällä saattaa vaikuttamaan samaan vaikutuspisteeseen, joten momenttilauseen käyttäminen tässä tapauksessa on suljettava pois. Oppikirjoissa [1] ja [3] ongelma on ratkaistu siten, että voiman momentin pisteen suhteen *määritelmään* on sisällytetty kyseisten momenttivektorien yhteenlasku suunnikaslain mukaisesti. Tämä on kuitenkin vaarallista, sillä antamalla suureille määritelmän luonteisesti liikaa ominaisuuksia voidaan aiheuttaa teoriaan sisäisiä ristiriitoja.

Väite 2: Voimaparin $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ voimien

$$\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F} = F \mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{F}_2 \equiv -\mathbf{F} = -F \mathbf{e} \quad (7)$$

momenttivektoreiden summa mielivaltaisen pisteen Q suhteen on *riippumaton* momenttipisteen Q valinnasta.



Kuva 4. Voimapari $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ ja momenttipiste Q.

Merkitään kuvan 4 voimaparin $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ voiman $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F} = F \mathbf{e}$ vaikutuspisteen P_1 paikkavektoria \mathbf{r}_1 momenttipisteestä Q ja voiman $\mathbf{F}_2 \equiv -\mathbf{F} = -F \mathbf{e}$ vaikutuspisteen P_2 paikkavektoria \mathbf{r}_2 pisteestä Q . Vaikutuspisteiden välistä relatiivista paikkavektoria merkitään \mathbf{r}_{P_1/P_2} .

Lauseen todistuksessa kannattaa käyttää *virtuaalisen tehon* (tai työn) käsitettä. Tätä varten annetaan kuvan 4 jäykälle kappaleelle virtuaalinen kulmanopeus $\boldsymbol{\omega}$, joka tuottaa vaikutuspisteille P_1 ja P_2 virtuaaliset nopeudet \mathbf{v}_{P_1} ja \mathbf{v}_{P_2} . Tällöin kyseiseen kappaleeseen vaikuttava voimapari $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ tuottaa virtuaalisen tehon

$$\delta P = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_{P_1} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_{P_2}. \quad (8)$$

Toisaalta jäykän kappaleen kinematiikan mukaan nopeusvektoreiden välillä on yhteys (siirtopistelause)

$$\mathbf{v}_{P_2} = \mathbf{v}_{P_1} \oplus \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P_2/P_1}, \quad (9)$$

jossa oikean puolen vektoreiden yhteenlaskussa käytetään suunnikaslakia.

Sijoitetaan yhteys (9) lausekkeeseen (8) ja otetaan huomioon $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}$ ja $\mathbf{F}_2 \equiv -\mathbf{F}$. Tällöin saadaan

$$\delta P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{P_1} + (-\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{v}_{P_1} \oplus \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P_2/P_1}). \quad (10)$$

Soveltamalla suunnikaslain mukaiseen summaan osittelulakia voidaan kirjoittaa

$$\delta P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{P_1} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{P_1} - \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P_2/P_1}. \quad (11)$$

Skalaarikolmitulon kiertosäännön mukaan lauseke (11) menee muotoon

$$\delta P = -\mathbf{r}_{P_2/P_1} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}_{P_1/P_2} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (12)$$

Voimaparin momentilla \mathbf{M} tarkoitetaan momenttivektoria, joka tuottaa yhtä suuren virtuaalisen tehon kuin voimaparin voimien $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}$ ja $\mathbf{F}_2 \equiv -\mathbf{F}$ yhteenlaskettu teho (8), josta on muokattu lauseke (12). Tällöin voidaan kirjoittaa

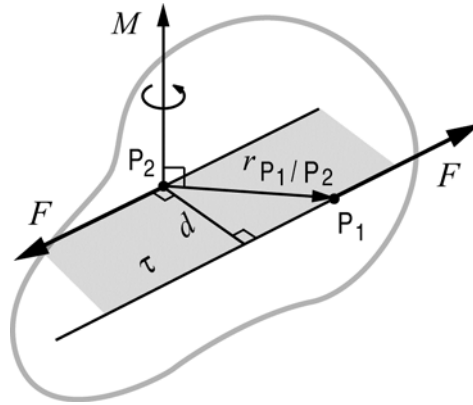
$$\delta P = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{r}_{P_1/P_2} \times \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (13)$$

Koska yhtälö (13) on voimassa kaikilla kinemaattisesti käyville virtuaalisilla nopeuskentillä eli $\forall \boldsymbol{\omega}$, on oltava

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{P_1/P_2} \times \mathbf{F}. \quad (14)$$

Lopputuloksesta (14) nähdään, että voimaparin momentti on riippumaton mistään momenttipisteestä, joten momentin symboli ei tarvitse mitään alaindeksiä. Voimaparin momenttivektori \mathbf{M} on siis *vapaa vektori*.

Tuloksen (14) mukaan voimaparin momentti voidaan laskea voiman $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}$ momenttina toisen voiman $\mathbf{F}_2 \equiv -\mathbf{F}$ vaikutuspisteen P_2 suhteen ja se voidaan piirtää kyseiseen momenttipisteeseen P_2 .



Kuva 5. Voimaparin $\{\mathbf{F}, -\mathbf{F}\}$ momenttivektori \mathbf{M} .

Tehdään vielä lyhyt lisätarkastelu: Kuvasta 4 nähdään paikkavektoreiden välinen yhteys

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \oplus \mathbf{r}_{P_1/P_2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{P_1/P_2} = \mathbf{r}_1 \oplus (-\mathbf{r}_2). \quad (15)$$

Sijoittamalla yhteys (15) tulokseen (14) saadaan osittelulakia soveltamalla

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{r}_1 \oplus (-\mathbf{r}_2)) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} \oplus \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) \\ \Rightarrow \quad \mathbf{M} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \oplus \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}_{Q1} \oplus \mathbf{M}_{Q2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Tuloksen mukaan voimaparin momenttivektori \mathbf{M} saadaan voimaparin voimien mielivaltaisen pisteen Q suhteen laskettujen momenttivektoreiden

$$\mathbf{M}_{Q1} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{M}_{Q2} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \quad (17)$$

suunnikkaslain mukaisen yhteenlaskun tuloksena. Tämä selittää sen, että tuloksen (16) loogisesti ennenaikainen soveltaminen ei johda ristiriitoihin.

Loppusanat

Mekaniikan peruskurssien yliopisto-opetuksessa pyritään esittämään klassillisen jäykän kappaleen mekaniikan oppirakennelma mahdollisimman johdonmukaisessa muodossa. Tällä opiskelijoille annetaan parhaimmat mahdollisuudet oppia ja ymmärtää vaikeaksi koetun oppiaineen teoreettiset perusteet ja sen sovellukset insinööritieteisiin. Tässä kirjoituksessa pyritään terästämään eräiden statiikan teorian keskeisten suureiden, voimaparin ja sen momentin, ominaisuuksia. Näin mahdollistetaan voimasysteemien

yhdistämisen teorian viimeistely lopulliseen muotoonsa ja luodaan edellytykset mekaniikan insinööritehtävien sujuvalle ratkaisemiselle.

Kiitokset

Kiitän Aalto yliopiston sovelletun termodynamiikan laitoksen yliopisto-opettajaa Ralf Wiksténia artikkelin aiheen esille ottamisesta ja lukuisista antoisista keskusteluista aiheesta.

Viitteet

- [1] T. Salmi, *Statiikka*, Pressus Oy, 2005.
- [2] T. Salmi, S. Virtanen, *Dynamiikka*, Pressus Oy, 2006.
- [3] E-M. Salonen, *Statiikka*, Otatieto Oy, 1995.
- [4] R. Hibbeler, *Engineering Mechanics, Statics*. 8 th Ed., Prentice Hall, 1998.
- [5] F. Beer, E. Johnston Jr., E. Eisenberg, *Vector Mechanics for Engineers, Statics*. 7 th Ed., McGraw-Hill, 2004.
- [6] J. Merian, L. Kraige, *Engineering Mechanics, Statics*, 5 th Ed., John Wiley, 2003.
- [7] A. Bedford, W. Fowler, *Engineering Mechanics, Statics*, Addison-Wesley, 1997.
- [8] K. Väisälä, *Vektorianalyysi*, 5. p., WSOY, 1966.

Tapio Salmi
Ritalankatu 25 B
33400 Tampere
tapio.salmi@pressus.fi