

Jännitysten ja venymien vastaavuus kontinuumimekaniikassa

Martti Mikkola

Tiivistelmä. Suhteellinen muodonmuutos kontinuumimekaniikassa voidaan määrittää usealla tavalla. Kuhunkin venymämittaaan liittyy tietty jännityksen mitta. Artikkelin tarkoituksena on selvittää venymien ja jännitysten vastaavuutta yleisesti ja yksinkertaisen esimerkin avulla.

Avainsanat: suhteellinen muodonmuutos, venymä, venymänopeus, jännitys, jännitysten teho

Vastaanotettu 8.8.2016. Hyväksytty 18.10.2016. Julkaistu verkossa 30.10.2016.

Johdanto

Suhteellinen muodonmuutos kontinuumimekaniikassa voidaan määrittää usealla tavalla [2, 5, 7, 8, 9]. Kutakin venymämittaa vastaa tietty jännitysmitta. Johdonmukainen menettely jännitysten ja venymien vastaavuuden määrittämiseksi on asettaa jännitysten tehot yhtä suuriksi eri mittoja käytettäessä. Sitä varten on tarpeellista selvittää aluksi venymien muutosnopeuksia. Systemaattinen menettely on käyttää Lien derivaattoja (Marius Sophus Lie, 1842-1899, norjalainen matemaatikko) [5, 2] (Hill [2] käyttää nimitystä konvektiivinen derivaatta), jotka kuvaavat tensoriluonteisten suureiden derivaattoja eri kantajärjestelmissä lausuttuina.

Kontinuumin liike ja Lien derivaatta

Tarkastellaan kappaleen B liikettä karteesisessa koordinaatistossa, jonka kiinteät kantavektorit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ toteuttavat ehdot

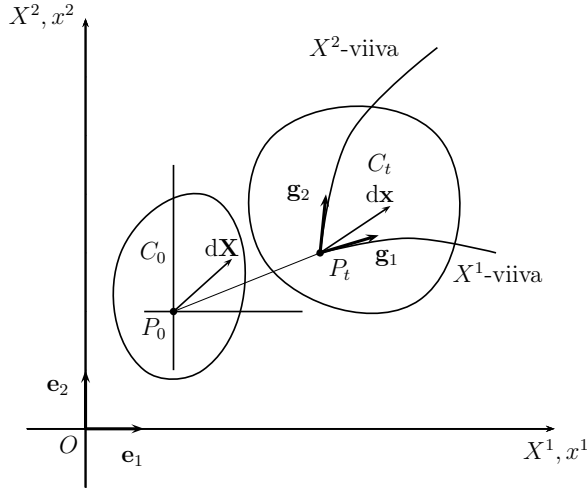
$$\mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_K = \delta_{IK}. \quad (1)$$

Kappaleen liikkeen kuvaus on $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = x^i \mathbf{e}_k$ alkutilan $\mathbf{X} = X^K \mathbf{e}_K$ ja ajan t funktiona. Deformaatiogradientti \mathbf{F} määrittää muodonmuutoksen ja rotaation alkutilan pisteessä \mathbf{X} sijainneen ainepisteen P_0 ympäristössä (Kuva 1)

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^k}{\partial X^L} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L = F^k_{.L} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L. \quad (2)$$

Deformaatiogradientin polaarihajotelma [5, 8]

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3)$$



Kuva 1. Kappaleen liike, alkutila ja lopputila.

jakaa deformaation venymöosaan \mathbf{U} tai \mathbf{V} ja rotaatioon \mathbf{R} . Deformaatiogradientin käänteistensori on

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial X^K}{\partial x^i} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{G} = G_{.i}^K \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_i. \quad (4)$$

Deformoituneen tilan konvektoituneet kantavektorit ovat

$$\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \text{ ja } \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3, \quad (5)$$

siten että

$$\mathbf{g}_K = \mathbf{F} \mathbf{e}_K = F_{.K}^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{g}^L = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{e}_L = G_{.i}^L \mathbf{e}_i, \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}_K \cdot \mathbf{g}^L = \mathbf{g}^K \cdot \mathbf{g}_L = \delta_L^K. \quad (6)$$

Selvyyden vuoksi alkutilan indekseinä käytetään isoja kirjaimia ja deformatiuneen tilan indekseinä pieniä kirjaimia, vaikka suuret referoidaan samaan koordinaatistoon, ts. kantajärjestelmään $\{\mathbf{e}_K\}$. Karteesisen koordinaatiston kovariantit ja kontravariantit kantavektorit ovat samat, mistä syystä niissä käytetään vain alaindeksejä. Konvektoituneille kantavektoreille käytetään myös isoja indeksikirjaimia osoittamaan, että ne kuuluvat konvektoituneisiin koordinaattiviivoihin.

Lien tai konvektiivisen derivaatan havainnollistamiseksi tarkastellaan aluksi vektorin aikaderivaatta pelkän rotaation tapauksessa, ts. $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. Vektori $\mathbf{A} = A^K \mathbf{g}_K$, jossa konvektiivinen kantavektori on $\mathbf{g}_K = \mathbf{R} \mathbf{e}_K$, derivoidaan ajan suhteen

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}^K \mathbf{g}_K + A^K \dot{\mathbf{g}}_K = \dot{A}^K \mathbf{g}_K + A^K \boldsymbol{\Omega} \mathbf{g}_K = \dot{A}^K \mathbf{g}_K + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}. \quad (7)$$

Tensori $\boldsymbol{\Omega}$ on rotaationopeus $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$. Konvektiivinen derivaatta

$$\dot{\mathbf{A}}^c = \dot{A}^K \mathbf{g}_K = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A} \quad (8)$$

on koordinaatiston mukana kiertyvän havaitsijan toteama vektorin \mathbf{A} muutosnopeus. Jos se on nolla, niin vektorin \mathbf{A} muutosnopeus aiheutuu vain rotaatiosta $\dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}$. Lien derivaattana konvektiivinen derivaatta määritetään kuvaamalla kiertynyt vektori takaisin kiinteään koordinaatistoon (pull-back)

$$A^K \mathbf{e}_K = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \quad (9)$$

ja derivoimalla sitten ajan suhteen

$$\dot{A}^K \mathbf{e}_K = \mathbf{R}^T (\dot{\mathbf{A}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{A}) = \mathbf{R}^T (\dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}) \quad (10)$$

ja siirtämällä lopuksi takaisin kiertyvään koordinaatistoon (push-forward)

$$\mathbf{R} \dot{A}^K \mathbf{e}_K = \dot{\mathbf{A}}^c = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}. \quad (11)$$

Kaavan (11) mukaista aikaderivaattaa jäykän rotaation tapahtuessa nimitetään myös korotationaliseksi (corotational) derivaataksi [5, 7].

Toisen kertaluvun tensorin $\mathbf{T} = T^{KL} \mathbf{g}_K \otimes \mathbf{g}_L = \tilde{T}^{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$ materiaalinen aikaderivatta on

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{T}^{KL} \mathbf{g}_K \otimes \mathbf{g}_L + T^{KL} \dot{\mathbf{g}}_K \otimes \mathbf{g}_L + T^{KL} \mathbf{g}_K \otimes \dot{\mathbf{g}}_L = \dot{\mathbf{T}}^c + \mathbf{L} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{L}^T, \quad (12)$$

jossa \mathbf{L} on nopeusgradientti

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = L_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k. \quad (13)$$

Konvektiivinen (mukana kulkeva) aikaderivaatta

$$\dot{\mathbf{T}}^c = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{L}^T \quad (14)$$

voidaan muodostaa Lien derivaattana seuraavalla tavalla: 'vedetään' tensori \mathbf{T} takaisin alkutilaan eli tehdään takaisin veto (pull-back)

$$\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = T^{KL} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L.$$

Sitten derivoidaan ajan suhteen

$$\dot{T}^{KL} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = \mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{T}} \mathbf{F}^{-T} + \dot{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \dot{\mathbf{F}}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} (\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{L}^T) \mathbf{F}^{-T}. \quad (15)$$

Sen jälkeen 'työnnetään' derivoitu tensori takaisin deformatuun tilaan eli tehdään eteen-työntö (push-forward)

$$\mathbf{F} (\dot{T}^{KL} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L) \mathbf{F}^T = \dot{T}^{KL} \mathbf{g}_K \otimes \mathbf{g}_L = \dot{\mathbf{T}}^c = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{L}^T. \quad (16)$$

Vastaavalla tavalla muodostetaan kontravariantissa kannassa lausutun tensorin $\mathbf{T} = T_{KL} \mathbf{g}^K \otimes \mathbf{g}^L$ Lien derivaatta. Aluksi tehdään takaisin veto

$$\mathbf{F}^T \mathbf{T} \mathbf{F} = T_{KL} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L.$$

Sen jälkeen derivoidaan ajan suhteen

$$\dot{T}_{KL} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{T}} \mathbf{F} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{T} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{T} \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^T (\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^T \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{L}) \mathbf{F} \quad (17)$$

ja suoritetaan eteen-työntö

$$\mathbf{F}^{-T} (\dot{T}_{KL} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L) \mathbf{F}^{-1} = \dot{T}_{KL} \mathbf{g}^K \otimes \mathbf{g}^L = \dot{\mathbf{T}}_c = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^T \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{L}. \quad (18)$$

Esimerkiksi Kirchhoffin jännityksen $\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma^{KL} \mathbf{g}_K \otimes \mathbf{g}_L$ Lien derivaatta on kaavan (16) mukaan

$$\mathbf{F} (\dot{\Sigma}^{KL} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L) \mathbf{F}^T = \dot{\Sigma}^{KL} \mathbf{g}_K \otimes \mathbf{g}_L = \dot{\boldsymbol{\Sigma}}^c = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - \mathbf{L} \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{L}^T. \quad (19)$$

Almansin-Eulerin venymätensorin $\mathbf{e} = e_{KL} \mathbf{g}^K \otimes \mathbf{g}^L$ Lien derivaatta on kaavan (18) mukaan

$$\dot{\mathbf{e}}_c = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{L}^T \mathbf{e} + \mathbf{e} \mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mathbf{d}, \quad (20)$$

jossa $\mathbf{E} = E_{KL} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L$ on Greenin-Lagrangen venymätensori.

Jännitysten ja venymien vastaavuudet

Kutakin venymämittaa vastaa tietty jännitysmitta. Vastaavuuksien määrittämiseksi käytetään menettelyä, jossa jännitysten tehot eri mittoja käytettäessä asetetaan yhtä suuri. Lähtökohdaksi valitaan symmetrisen Cauchyn jännityksen $\boldsymbol{\sigma}$ teho venymänopeuden \mathbf{d} suhteen deformatiivisessa tilassa [9, 5, 8, 2, 7, 6]

$$PdV = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV = \sigma^{ik} d_{ik} dV. \quad (21)$$

Venymänopeus \mathbf{d} on nopeusgradientin symmetrinen osa

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (22)$$

Antisymmetrinen osa \mathbf{w} on nimeltään pyörteisyydentensori (spin tensor, vorticity tensor). Käyttämällä nopeusgradientin lauseketta (13) yhtälö (21) voidaan saattaa muotoon

$$\begin{aligned} PdV &= \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T)dV = \frac{1}{2}[\text{tr}(\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T\boldsymbol{\sigma}) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T)]dV = \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} + \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}})dV = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}}dV_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Nopeusgradienttia vastaava jännitys on ensimmäinen Piolan-Kirchhoffin jännitystensori (PK1)

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = P^{iK}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_K = J\sigma^{ik}\frac{\partial X^K}{\partial x^k}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_K. \quad (24)$$

Jännitystensori PK1 on epäsymmetrinen, mutta huomataan helposti, että se toteuttaa momenttitasapainoehdon

$$\mathbf{F}\mathbf{P}^T = \mathbf{P}\mathbf{F}^T. \quad (25)$$

Se on lisäksi ns. kahden pisteen tensori, jonka ensimmäinen indeksi (komponentin suunta) viittaa deformatiiviseen tilaan ja toinen (pinnan normaalin suunta) viittaa alkutilaan. PK1 vaikuttaa deformatiiviseen tilan pinta-alkioon kohdassa \mathbf{x} , vaikka se on laskettu alkutilan pintaa kohti kohdassa \mathbf{X} niin, että sen avulla määritetty jännitysvektori on sama kuin Cauchyn jännityksen avulla laskettu

$$\mathbf{P}\mathbf{N}dA = \mathbf{t}da = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}da. \quad (26)$$

dA ja da ovat pinta-alkiot alku- ja deformatiivisessa tilassa ja \mathbf{N} ja \mathbf{n} niiden yksikkönormaalit. Pinta-alkioiden välillä pätee Nansonin kaava $J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}dA = \mathbf{n}da$.

Yhtälön (20) avulla saadaan sijoittamalla yhtälöön (21)

$$\begin{aligned} PdV &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1}dV = J\text{tr}(\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{E}}^T\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma})dV_0 = \\ &= J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{E}}dV_0 = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}dV_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Greenin-Lagrangen venymää \mathbf{E} vastaava jännitys on toinen Piolan-Kirchhoffin jännitystensori \mathbf{S} (PK2)

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = S^{KL}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L. \quad (28)$$

Se on pseudojännitys siinä mielessä, että se on laskettu alkutilan pintaa kohti ja että siitä määritetty jännitysvektori

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{S}\mathbf{N} \quad (29)$$

on pseudojännitysvektori, joka on siirrettävä deformaatiogradientin avulla deformatiiviseen tilaan, jotta siitä tulisi todellinen jännitysvektori \mathbf{t}

$$\mathbf{F}\mathbf{t}_0 dA = \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} n da. \quad (30)$$

Biot'n [1] jännityksen tehon määrittämiseksi todetaan aluksi polaarihajoitelmasta $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ saatava nopeuksien välinen yhteys

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{F} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{F},$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{R} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{R} + \mathbf{F}\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{R} + \mathbf{F}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}, \quad (31)$$

jossa $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$, $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$ on antisymmetrinen rotaationopeustensori. Yhtälöstä (23) seuraa aluksi

$$\begin{aligned} PdV &= \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV_0 = \text{tr}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{P}) dV_0 = \text{tr}[(\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{F})^T \mathbf{P}] dV_0 \\ &= \text{tr}(\dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{P} + \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{P}) dV_0 = (\mathbf{R}^T \mathbf{P} : \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{P}\mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega}) dV_0. \end{aligned}$$

Jaetaan tensorit $\mathbf{R}^T \mathbf{P}$ ja $\mathbf{P}\mathbf{F}^T$ symmetrisiin ja antisymmetrisiin osiin

$$\mathbf{R}^T \mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \mathbf{R}) + \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}^T \mathbf{R}) = \mathbf{B}_S + \mathbf{B}_A,$$

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{P}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{P}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{P}^T). \quad (32)$$

Yllä olevan yhtälön oikeanpuoleisin termi häviää PK1-jännityksen momenttitasapainon (25) takia. Lisäksi \mathbf{U} :n symmetrian ja $\boldsymbol{\Omega}$:n antisymmetrian takia jännitystehon lauseke supistuu muotoon

$$PdV = \mathbf{B}_S : \dot{\mathbf{U}} dV_0 \quad (33)$$

joka esittää Biot'n jännitysten tehoa. Siis Biot'n jännitys

$$\mathbf{B}_S = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \mathbf{R}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{U}) \quad (34)$$

ja venytystensori \mathbf{U} ovat toisiaan vastaava pari. Toisaalta yhtälöstä (31) saadaan

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}^T(\dot{\mathbf{F}} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{F}) = \mathbf{R}^T(\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{V})\mathbf{R}, \quad (35)$$

jolloin yhtälöstä (33) seuraa

$$P_i dV = \mathbf{B}_S : \dot{\mathbf{U}} dV_0 = \text{tr}[\mathbf{R}^T(\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{V})^T \mathbf{R}\mathbf{B}_S] dV_0 = \tilde{\mathbf{B}}_S : (\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{V}) dV_0. \quad (36)$$

Biot'n jännitys kierretyssä kannassa $\mathbf{R}\mathbf{e}_K$ on

$$\tilde{\mathbf{B}}_S = \mathbf{R}\mathbf{B}_S\mathbf{R}^T. \quad (37)$$

Venytyksnopeuksien $\dot{\mathbf{U}}$ ja $\dot{\mathbf{V}}$ yhtälön (35) esittämä yhteys on \mathbf{V} :n rotaation mukainen Lien derivaatta

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{V}}_c = \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{V}. \quad (38)$$

Logaritminen venymä on huomattavasti monimutkaisempi tapaus. Kuitenkin tilanne on varsin yksinkertainen venymän pääsuuntien pysyessä muuttumattomina, kuten seuraava tarkastelu osoittaa. Otaksutaan, että venytystensorin \mathbf{U} päävenymät ovat λ_1, λ_2 ja

λ_3 ja vastaavat pääsuunnat yksikkövektorien $\mathbf{N}^{(1)}$, $\mathbf{N}^{(2)}$, ja $\mathbf{N}^{(3)}$ mukaiset. Venytystensori voidaan esittää silloin muodossa [2]

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \quad (39)$$

ja logaritminen venymä muodossa

$$\ln \mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 (\ln \lambda_i) \mathbf{N}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)}. \quad (40)$$

Yhtälöitä (39) ja (40) nimitetään Lagrangen esitystavan mukaisiksi. Vastaavat Eulerin esitystavan mukaiset ovat

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \quad (41)$$

,

$$\ln \mathbf{V} = \mathbf{R}(\ln \mathbf{U})\mathbf{R}^T = \sum_{i=1}^3 (\ln \lambda_i) \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)}. \quad (42)$$

Tensorien \mathbf{U} ja \mathbf{V} päävenymät ovat samat. Yksikkövektorit $\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{R}\mathbf{N}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ ovat tensorin \mathbf{V} pääsuunnat. Olkoon $\mathbf{R}^{(L)}$ ortogonaalinen tensori (ominaisvektorien $\mathbf{N}^{(i)}$ muodostama) niin, että $\mathbf{N}^{(i)} = \mathbf{R}^{(L)}\mathbf{e}_i$. $\{\mathbf{e}_i\}$ on kiinteä ortonormeerattu kanta. Pääsuunnan aikaderivaatta on $\dot{\mathbf{N}}^{(i)} = \dot{\mathbf{R}}^{(L)}\mathbf{e}_i = \dot{\mathbf{R}}^{(L)}\mathbf{R}^{(L)T}\mathbf{N}^{(i)} = \boldsymbol{\Omega}^{(L)}\mathbf{N}^{(i)}$. Venytystensorin (39) ja logaritmissen venymän (40) aikaderivaatat ovat silloin

$$\dot{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^3 \dot{\lambda}_i \mathbf{N}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} + \boldsymbol{\Omega}^{(L)}\mathbf{U} - \mathbf{U}\boldsymbol{\Omega}^{(L)}, \quad (43)$$

$$(\ln \mathbf{U})^\bullet = \sum_{i=1}^3 (\dot{\lambda}_i \lambda_i^{-1}) \mathbf{N}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} + \boldsymbol{\Omega}^{(L)} \ln \mathbf{U} - (\ln \mathbf{U})\boldsymbol{\Omega}^{(L)}. \quad (44)$$

Vastaavasti pääsuunnan $\mathbf{n}^{(i)}$ aikaderivaatta on $\dot{\mathbf{n}}^{(i)} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{N}^{(i)} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{N}}^{(i)} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}^{(L)}\mathbf{R}^T\mathbf{n}^{(i)} = \boldsymbol{\Omega}^{(E)}\mathbf{n}^{(i)}$. Kun rotaation \mathbf{R} aikaderivaatta on $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}$, nähdään, että

$$\boldsymbol{\Omega}^{(E)} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}^{(L)}\mathbf{R}^T. \quad (45)$$

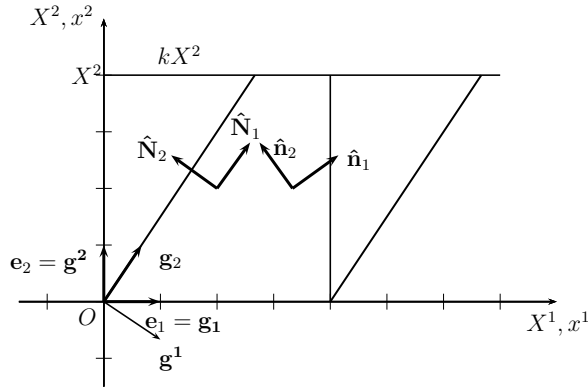
Tällöin Eulerin esitystavan mukaisten venytystensorin (41) ja logaritmissen venymän (42) aikaderivaatat ovat

$$\dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^3 \dot{\lambda}_i \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \boldsymbol{\Omega}^{(E)}\mathbf{V} - \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}^{(E)}, \quad (46)$$

$$(\ln \mathbf{V})^\bullet = \sum_{i=1}^3 (\dot{\lambda}_i \lambda_i^{-1}) \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \boldsymbol{\Omega}^{(E)} \ln \mathbf{V} - (\ln \mathbf{V})\boldsymbol{\Omega}^{(E)}. \quad (47)$$

Deformaatiogradientin lausekkeesta $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ saadaan

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{R} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}^{-1},$$



Kuva 2. Yksinkertainen leikkaus

mistä seuraa

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{V}^{-1} \quad (48)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{V}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{V}) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \dot{\lambda}_i \lambda_i^{-1} \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \sum_{i \neq j}^3 \boldsymbol{\Omega}_{ij}^{(L)} \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{2\lambda_i \lambda_j} \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(j)}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{V}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{V}) = \\ &= \boldsymbol{\Omega}^{(E)} - \sum_{i \neq j}^3 \boldsymbol{\Omega}_{ij}^{(L)} \frac{\lambda_j^2 + \lambda_i^2}{2\lambda_i \lambda_j} \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(j)}. \end{aligned} \quad (50)$$

Kaavoista (43) ja (49) nähdään, että jos pääsuunnat $\mathbf{N}^{(i)}$ eivät muutu, ts. $\boldsymbol{\Omega}^{(L)} = \mathbf{0}$, niin

$$\mathbf{R}(\ln \mathbf{U}) \bullet \mathbf{R}^T = \sum_{i=1}^3 \dot{\lambda}_i \lambda_i^{-1} \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{d}. \quad (51)$$

Kaavoista (44), (45) ja (47) seuraa myös

$$\mathbf{R}(\ln \mathbf{U}) \bullet \mathbf{R}^T = (\ln \mathbf{V}) \bullet - \boldsymbol{\Omega} \ln \mathbf{V} + (\ln \mathbf{V}) \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{d}. \quad (52)$$

Siis, kun pääsuunnat $\mathbf{N}^{(i)}$ eivät muutu, niin pääsuunnat $\mathbf{n}^{(i)}$ muuttuvat vain jäykän kapaleen rotaation mukaisesti kuten kaavasta (45) nähdään. Tällöin voidaan päätellä, että logaritmistä venymää vastaa Cauchyn jännitys. Yleisempi tapaus on huomattavasti mutkikkaampi, ks. [3, 4].

Esimerkki: Yksinkertainen leikkaus

Tarkastellaan esimerkkinä yksinkertaista leikkausta karteesisessa koordinaatistossa

$$x^1 = X^1 + kX^2, \quad x^2 = X^2, \quad x^3 = X^3$$

Kysymyksessä on deformaatio X^1X^2 -tasossa, joten käsitellään asiaa kaksidimensioisena. Deformaatiogradientti, sen käänteistensori, nopeusgradientti, rotaatiomatriisi ja kiertymänopeusmatriisi ovat

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [F]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [L] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}.$$

Konvektoituneet kantavektorit ovat

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{g}_2 = k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{g}^1 = \mathbf{e}^1 - k\mathbf{e}^2, \quad \mathbf{g}^2 = \mathbf{e}^2.$$

Greenin-Lagrangen venymä ja venymänopeus ovat

$$[E] = \frac{1}{2} ([F]^T[F] - [I]) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & k^2 \end{bmatrix}, \quad [\dot{E}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k}/2 \\ \dot{k}/2 & k\dot{k} \end{bmatrix}.$$

Almansin-Eulerin venymä ja sen konvektiivinen venymänopeus ovat

$$[e] = \frac{1}{2} ([I] - [F]^{-T}[F]^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & -k^2 \end{bmatrix}, \quad [\dot{e}_c] = [d] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k}/2 \\ \dot{k}/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oikeanpuoleinen venytystensori ja sen muutosnopeus ovat

$$[U] = [R]^T[F] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta + k \cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta - k \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & (1 + \sin^2 \theta)/\cos \theta \end{bmatrix}$$

$$[\dot{U}] = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta(1 + 2 \cos^{-2} \theta) \end{bmatrix} \dot{\theta}.$$

Kiertymiskulman θ ja parametrin k välinen yhteys $\tan \theta = -k/2$ seuraa matriisin $[U]$ symmetriaehdosta $-\sin \theta = \sin \theta + k \cos \theta$. Vastaavasti vasemmanpuoleinen venytysmatriisi ja sen muutosnopeus ovat

$$[V] = [F][R]^T = \begin{bmatrix} \cos \theta - k \sin \theta & \sin \theta + k \cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \sin^2 \theta)/\cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$[\dot{V}] = \begin{bmatrix} \sin \theta(1 + 2 \cos^{-2} \theta) & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \dot{\theta},$$

$$[\dot{V}_c] = [\dot{V}] - [\Omega][V] + [V][\Omega] = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin \theta(1 - 2 \cos^{-2} \theta) & \cos \theta(1 - 2 \cos^{-2} \theta) \\ \cos \theta(1 - 2 \cos^{-2} \theta) & \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Tilavuus ei muutu deformaation tapahtuessa, joten $J = \det \mathbf{F} = 1$ ja $dV = dV_0$. Jännitysten teholausekkeet ovat

$$P = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & \dot{k}/2 \\ \dot{k}/2 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \right) = (\sigma_{12} + \sigma_{21})(\dot{k}/2),$$

$$P = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & \dot{k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \right) = P_{12}\dot{k},$$

$$P = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & \dot{k}/2 \\ \dot{k}/2 & k\dot{k} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \right) = (S_{12} + S_{21} + 2kS_{22})(\dot{k}/2)$$

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{B}_S : \dot{\mathbf{U}} = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta(1 + 2/\cos^2 \theta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_{S11} & B_{S12} \\ B_{S21} & B_{S22} \end{bmatrix} \right) \dot{\theta} = \\ &= \left([B_{S22}(1 + 2/\cos^2 \theta) - B_{S11}] \sin \theta - (B_{S12} + B_{S21}) \cos \theta \right) \dot{\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \tilde{\mathbf{B}}_S : \dot{\mathbf{V}}_c = \\ &= \text{tr} \left(\begin{bmatrix} -\sin \theta(1 - 2\cos^{-2} \theta) & \cos \theta(1 - 2\cos^{-2} \theta) \\ \cos \theta(1 - 2\cos^{-2} \theta) & \sin \theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{B}_{S11} & \tilde{B}_{S12} \\ \tilde{B}_{S21} & \tilde{B}_{S22} \end{bmatrix} \right) \dot{\theta} = \\ &= \left((1 - 2\cos^{-2} \theta)[- \tilde{B}_{S11} \sin \theta + (\tilde{B}_{S12} + \tilde{B}_{S21}) \cos \theta] + \tilde{B}_{S22} \sin \theta \right) \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Nämä lausekkeet ovat keskenään yhtä suuria, mikä nähdään kun otetaan huomioon jännitysten väliset yhteydet (23), (27), (34) ja (37) ja PK1-jännitysten momenttitasapainoehto (25), josta seuraa $P_{12} = P_{21} + kP_{22}$. Kirjoitetaan vielä näkyviin jännitysten lausekkeet Cauchyn jännityksen funktioina

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad \text{eli} \quad \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - k\sigma_{12} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} - k\sigma_{22} & \sigma_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \quad \text{eli} \quad \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - k(\sigma_{12} + \sigma_{21}) + k^2\sigma_{22} & \sigma_{12} - k\sigma_{22} \\ \sigma_{21} - k\sigma_{22} & \sigma_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_S = \frac{1}{2}(\mathbf{R}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\mathbf{R}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{U}),$$

jonka matriisiin

$$[B_S] = \begin{bmatrix} B_{S11} & B_{S12} \\ B_{S21} & B_{S22} \end{bmatrix}$$

alkiot ovat

$$B_{S11} = \sigma_{11} \cos \theta + \frac{3}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \sin \theta + 2\sigma_{22} \sin^2 \theta / \cos \theta,$$

$$B_{S12} = \frac{1}{2}(3\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta + \sigma_{12} \cos \theta - \sigma_{21} \sin^2 \theta / \cos \theta,$$

$$B_{S21} = \frac{1}{2}(3\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta + \sigma_{21} \cos \theta - \sigma_{12} \sin^2 \theta / \cos \theta,$$

$$B_{S22} = \sigma_{22} \cos \theta - \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \sin \theta.$$

Vastaavasti kiertyneessä koordinaatistossa Biot'n jännityksen

$$\tilde{\mathbf{B}}_S = \frac{1}{2}(\mathbf{P}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\mathbf{P}^T) = \mathbf{R}\mathbf{B}_S\mathbf{R}^T$$

matriisin alkiot ovat

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{S11} &= \sigma_{11} \cos \theta + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \sin \theta, \\ \tilde{B}_{S12} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \theta + \sigma_{12}/\cos \theta, \\ \tilde{B}_{S21} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \theta + \sigma_{21}/\cos \theta, \\ \tilde{B}_{S22} &= \sigma_{22}(1 + \sin^2 \theta)/\cos \theta + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) \sin \theta.\end{aligned}$$

Logaritmisen venymän määrittämiseksi ratkaistaan aluksi Cauchyn oikeanpuoleisen venymätensoren $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ ominaisarvot ja -vektorit. Yhtälöstä

$$\det(\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{I}) = (\lambda^2)^2 - (2 + k^2)\lambda^2 + 1 = 0$$

seuraa

$$\lambda_{1,2}^2 = 1 + \frac{k^2}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}$$

ja edelleen

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{1 + \left(\frac{k}{2}\right)^2} \pm \frac{k}{2} = \frac{1 \pm \sin \theta}{\cos \theta}, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-1}.$$

Edellä $\sin \theta = -(k/2)/\sqrt{1 + (k/2)^2}$, $\cos \theta = 1/\sqrt{1 + (k/2)^2}$ seuraavat yhteydestä $\tan \theta = -k/2$. Käyttämällä merkintöjä

$$a = \sqrt{(1 + \sin \theta)/2}, \quad b = \sqrt{(1 - \sin \theta)/2}$$

ominaisvektorit saavat muodon

$$\mathbf{N}^{(1)} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{N}^{(2)} = -b\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n}^{(1)} = b\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n}^{(2)} = -a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2.$$

Matriisit $[R^{(L)}], [\Omega^{(L)}], [R^{(E)}]$ ja $[\Omega^{(E)}]$ ovat silloin

$$[R^{(L)}] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad [\Omega^{(L)}] = [\dot{R}^{(L)}] [R^{(L)}]^T = \frac{\dot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[R^{(E)}] = \begin{bmatrix} b & -a \\ a & b \end{bmatrix}, \quad [\Omega^{(E)}] = [\dot{R}^{(E)}] [R^{(E)}]^T = \frac{\dot{\theta}}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logaritmiset venymät voidaan esittää seuraavasti, jolloin on otettu huomioon $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$,

$$\ln \mathbf{U} = \sum_{i=1}^2 (\ln \lambda_i) \mathbf{N}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} = (\ln \lambda_1) [\sin \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \cos \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)],$$

$$\ln \mathbf{V} = \sum_{i=1}^2 (\ln \lambda_i) \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} = (\ln \lambda_1) [-\sin \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \cos \theta (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)].$$

Tässä tapauksessa pääsuunnat muuttuvat aina deformaation tapahtuessa, ts. kun $\dot{\theta} = -\dot{k} \cos^2 \theta / 2 \neq 0$. Näin ollen logaritmista venymää ei vastaa Cauchyn jännitys, vaan jokin monimutkaisempi jännityssuure.

Yhteenveto

Artikkelissa on tarkasteltu tavanomaisten jännitys- ja venymämittojen vastaavuutta kontinuumimekaniikassa. Tarkastellut venymämitat ovat Greenin-Lagrangen, Almansin-Eulerin, Biot'n ja Henckyn logaritminen venymä, joiden venymänopeudet on myös määritetty. Venymiä vastaavat jännitysmitat on johdettu asettamalla jännitysten tehon lausekkeet yhtäsuuriksi. Logaritmissen venymän osalta on tarkasteltu vain tapausta, jossa venymän pääsuunnat eivät muutu deformaation tapahtuessa. Tuloksia on havainnollistettu yksinkertaisen leikkauksen tapauksessa.

Viitteet

- [1] M. Biot. *Mechanics of Incremental Deformation*. John Wiley & Sons, New York, 1965.
- [2] R. Hill. Aspects of invariance in solid mechanics. *Advances in Applied Mechanics*, 18:1–75, 1978.
- [3] A. Hoger. The material time derivative of logarithmic strain. *International Journal of Solids and Structures*, 22(9):1019–1032, 1986.
- [4] A. Hoger. The stress conjugate to logarithmic strain. *International Journal of Solids and Structures*, 23(12):1645–1656, 1987.
- [5] G.A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, 2000.
- [6] D.B. Macvean. Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 19:157–185, 1968.
- [7] L.E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [8] R. Ogden. *Non-linear Elastic Deformations*. Ellis Harwood Ltd., 1984. Dover, 1997.
- [9] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-linear Field Theories of Mechanics*. Springer, 3. edition, 2004.

Martti Mikkola
Aalto-yliopisto
Insinööritieteiden korkeakoulu, Rakennustekniikan laitos
Rakentajanaukio 4 A, PL 12100, 00076 Aalto
martti.mikkola@aalto.fi