Rakenteiden Mekaniikka
Vol. 48, Nro 4, 2015, s. 181-198
rmseura.tkk.fi/rmlehti/

VERTAISARVIOITU
KOLLEGIALT GRANSKAD
PEER-REVIEWED
www.tsv.fi/tunnus

Pitääkö virtuaalisten siirtymien olla infinitesimaalisia?

Juha Paavola ja Eero-Matti Salonen[1]

Tiivistelmä. Artikkelissa käsitellään virtuaalisen työn periaatteen opetusta erityisesti virtuaalisten siirtymien tyypin (äärellinen vai infinitesimaalinen?) kannalta. Aihetta tarkastellaan kahden yksinkertaisen esimerkkitapauksen avulla soveltaen äärellisiä virtuaalisia siirtymiä. Näin saadaan korostetusti esille virtuaalisen ja todellisen työn käsitteiden eroavaisuudet.

Avainsanat: virtuaalisen työn periaate, äärelliset ja infinitesimaaliset siirtymät, mekaniikan opetus

Vastaanotettu 21.11.2015. Hyväksytty 29.12.2015. Julkaistu verkossa 5.1.2015.

Johdanto

Usein esitetyn toteamuksen mukaisesti virtuaalisen työn periaatteen tärkeää asemaa mekaniikassa yleensä ja rakenteiden mekaniikassa erityisesti ei voida yliarvioida. Periaatteen opetukseen saattaa kuitenkin liittyä tiettyjä vaikeuksia. Ongelma on seuraava. Mekaniikan opetus nojautuu — tai sen ainakin tulisi nojautua — edeltävästi matematiikan opetuksessa jo saatuihin valmiuksiin. Näin on tilanne luultavasti mm. vektorilaskennan ja tavallisten differentiaaliyhtälöiden teorian osalta. Mutta termi "virtuaalinen työ" ei varmaankaan herätä aluksi normaalissa opiskelijassa mitään käsitystä vastaavasta matemaattisesta yhteydestä. Terminologia voi pikemminkin synnyttää lähinnä mystiikkaa. Tähän sopii lähteen [1, s. 22] toteamus: "Virtual displacements have been said to be imaginary, which has seemed to imply that they are endowed with mystical properties." Täten opetuksessa olisi hyvä poistaa mahdollinen mystiikka ja tuoda esille kyseessä oleva matemaattinen tausta.

Tämän artikkelin tarkoituksena on kuvata erityisesti yhtä virtuaalisen työn periaatteen piirrettä: tavanomaista vaatimusta virtuaalisten siirtymien infinitesimaali[2]sesta luonteesta. Käsittelemällä tiettyjen esimerkkien yhteydessä vaihtoehtoisesti myös äärellisiä virtuaalisia siirtymiä virtuaalisen työn ja todellisen työn käsitteiden ero tulee korostetusti esille ja voi näin ollen lisätä periaatteen ymmärrystä.

[1] Vastuullinen kirjoittaja. eero-matti.salonen@tut.fi

Infinitesimaalisiin virtuaalisiin siirtymiin liittyvä tavanomainen virtuaalisen työn periaate kirjataan tässä seuraavasti (virtuaalinen työyhtälö)

$$\delta' W \equiv \delta' W^{\text{ext}} + \delta' W^{\text{int}} = 0 \tag{1}$$

eli kappaleeseen (usein sanotaan myös systeemiin) vaikuttavien ulkoisten voimien ja kappaleessa vaikuttavien sisäisten voimien yhteensä tekemä virtuaalinen työ on nolla. Dynaamiset tapaukset tulevat mukaan käsittelemällä hitausvoimat ulkoisina voimina. Kirjallisuudessa käytetyt merkinnät vaihtelevat jonkin verran. Tässä yläpilkulla pyritään korostamaan ensinnäkin, että kyseessä eivät ole kappaletta koskevat todelliset työsuureet, jotka vaatisivat siis aina ajan muutosten mukanaoloa. Lisäksi yläpilkku korostaa, että kyseessä ei ole yleensä jonkin suureen W variaatio tai muutos. Esimerkiksi tunnetusti kappaleeseen tehty työ ei ole termodynamiikan sanaston mukaan kappaleen "ominaisuus" eli tilasuure kuten esimerkiksi kappaleen liike-energia ja ei siis voida puhua esimerkiksi työsuureen variaatiosta.

Äärellisten virtuaalisten siirtymien mukainen virtuaalinen työyhtälö esiintyy kirjallisuudessa harvoin. Tässä se kirjataan vastaavasti muotoon

$$\Delta' W \equiv \Delta' W^{\text{ext}} + \Delta' W^{\text{int}} = 0\,. \tag{2}$$

Seuraavassa luvussa selostetaan tarkemmin sekä yhtälön (1) että (2) termien sisältöä partikkelimekaniikassa.

Partikkelisysteemi

Partikkelimekaniikka muodostaa opetuksessa virtuaalisen työn periaatteen parhaan lähtökohdan, koska tarvittava matematiikka on siinä yksinkertaisimmillaan. Edetään samaan tapaan kuin lähteessä [2, s. 421] käyttäen kuitenkin erilaisia merkintöjä. Systeemin partikkeliin i vaikuttaa resultoiva ulkoinen voima $\mathbf{F}_i$ ja resultoiva sisäinen voima $\mathbf{f}_i$. Systeemin tasapainoyhtälöt ovat (N on systeemin partikkelien lukumäärä)

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, N\,. \tag{3}$$

Nämä N vektoriyhtälöä ovat täysin samanarvoiset skalaariyhtälön

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) \bullet \mathbf{w}_i \equiv \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i \bullet \mathbf{w}_i = 0 \tag{4}$$

kanssa, jossa vektorit $\mathbf{w}_i$ ovat *mielivaltaisia* (engl. arbitrary). Skalaariyhtälö on siis saatu kertomalla kukin tasapainoyhtälö (3) puolittain vektorilla $\mathbf{w}_i$ ja laskemalla saadut yhtälöt puolittain yhteen. Matemaattisessa mielessä on siis vain muodostettu tasapainoyhtälöiden lineaarikombinaatio. Päättely muodosta (4) takaisin muotoihin (3) perustuu ilmeisellä tavalla juuri "painovektoreiden" $\mathbf{w}_i$ mielivaltaisuuteen. Jos sitten kirjoitetaan

$$\mathbf{w}_i = \delta \mathbf{r}_i\,, \tag{5}$$

ja pidetään suureita $\delta\mathbf{r}_i$ mielivaltaisina virtuaalisina siirtyminä, saadaan tulos (virtuaalinen työyhtälö (1))

$$\delta' W \equiv \delta' W^{\text{ext}} + \delta' W^{\text{int}} = 0\,, \tag{6}$$

jossa

$$\delta' W^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i \tag{7}$$

on systeemiin vaikuttavien ulkoistenvoimien tekemä virtuaalinen työ ja

$$\delta' W^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i \bullet \delta\mathbf{r}_i = -\sum_{ij} S_{ij}\, \delta s_{ij} \tag{8}$$

systeemissä vaikuttavien sisäisen voimien tekemä virtuaalinen työ. Lausekkeen (8) viimeisen muodon johto ja merkintöjen selitys on esitetty liitteessä A.

Dynaamisessa tapauksessa yhtälöiden (3) oikealla puolella esiintyy ilmeisin merkinnöin termi $m_i\mathbf{a}_i$. Tämä voidaan ottaa huomioon niin haluttaessa toistamatta johtoa soveltamalla hitausvoima-ajattelua korvaamalla lausekkeen (7) termi $\mathbf{F}_i$ termillä $\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i$. Jatkossa tässä tullaan tarkastelemaan vain staattisia tapauksia.

Lähteen [2] tyyppinen virtuaalisen työn periaatteen johtamistapa — siis tapa, jossa ei aluksi puhuta mitään virtuaalisista siirtymistä — on erittäin suositeltava, koska manipulaatiossa yhtälöistä (3) yhtälöön (4) tulee selvästi esille ensinnäkin, että mitään ajan kulumista ei liity tähän askeleeseen; aika niin sanotusti "jäädytetään". Lisäksi ymmärretään, että systeemiin vaikuttavien voimien suuruuksiin ja suuntiin ei saa yhdistää mitään muutoksia virtuaalista työtä muodostettaessa. Ainoa ilman perusteluja oleva vaihe on tietenkin yhteys (5): miksi vektoreille $\mathbf{w}_i$ annetaan juuri tällainen tulkinta (siis niillä on fysikaalisesti pituuden dimensio) ja miksi nämä vektorit tulkitaan infinitesimaalisiksi ja miksi käytetään erityistä sanaa virtuaalinen? Aivan viimeiseen kysymykseen voitaneen todeta yksinkertaisesti lähdettä [1, s. 3] seuraten tulkinta: "at this stage our purpose will be served by interpreting the word "virtual" as meaning arbitrary."

Teos [1, 560 sivua] on omistautunut nimensä mukaisesti kokonaan virtuaalisen työn periaatteen selostamiseen ja soveltamiseen rakenteiden mekaniikassa. Tavanomaisista esityksistä poiketen teoksessa näytetään myös muutaman esimerkin avulla, että virtuaalisten siirtymien ei suinkaan tarvitse olla ns. pieniä. Tähän liittyen todetaan [1, s. 22]: "Virtual displacements are not necessarily small in magnitude. However, little seems to be gained and much simplicity seems to be lost by choosing them arbitrarily large." Tämä toteamus antaa siis jo vastauksen artikkelin otsikossa esitettyyn kysymykseen. Koska aihe on tärkeä, tämä artikkeli käsittelee kuitenkin edelleen kyseistä aihepiiriä ja myös verraten paljon lähteen [1] esitystavasta poiketen.

Usein alan kirjallisuudessa käytetään termin *pieni siirtymä* (engl small displacement) sijasta termiä *infinitesimaalinen siirtymä* (engl. infinitesimal displacement); esimerkiksi lähteet [2] ja [3]. Matemaatikot eivät tunnetusti yleensä hyväksy käsitettä *infinitesimaali*. Voidaan lainata esimerkkinä teosta [4, s. 180]: "Earlier we used the symbol dy/dx purely symbolically to denote the limit of $\Delta y/\Delta x$ for Δx tending to zero. With our present definition of the differentials dy and dx the derivative dy/dx can actually be considered as the ordinary quotient of dy and dx. and, however, dy and dx are now not in any sense "infinitely small" quantities or "infinitesimals"; such an interpretation would be devoid of meaning." Kuitenkin vaikuttaa siltä, että fysiikassa ei tulla helposti toimeen ilman infinitesimaalikäsitteen käyttöä juuri tässä matemaattisesti epämääräisessä merkityksessä "mielivaltaisen pieni olematta kuitenkaan nolla". Esimerkiksi arvovaltaiset teokset [2] ja [3] käyttävätkin infinitesimaali-terminologiaa ilman mitään anteeksipyyntöjä. Tähän aiheeseen liittyy myös kiinnostava suomenkielinen artikkeli [5].

Jos yllä esitetty johto toistetaan korvaamalla valinta (5) valinnalla

$$\mathbf{w}_i = \Delta\mathbf{r}_i\,, \tag{9}$$

jossa siis $\Delta\mathbf{r}_i$ on nyt partikkelin i äärellinen virtuaalinen siirtymä, saadaan ilmeisin askelin tulos (virtuaalinen työyhtälö (2))

$$\Delta' W \equiv \Delta' W^{\text{ext}} + \Delta' W^{\text{int}} = 0\,, \tag{10}$$

jossa

$$\Delta' W^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \bullet \Delta\mathbf{r}_i \tag{11}$$

on ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ ja

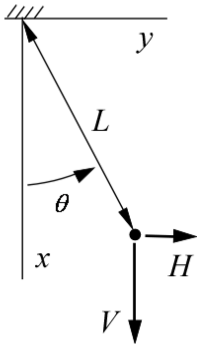
$$\Delta' W^{\text{int}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i \bullet \Delta\mathbf{r}_i = -\sum_{ij} S_{ij}\,\Delta s_{ij} \cos\Delta\phi_{ij} + \sum_{ij} S_{ij}\, s_{ij} (1 - \cos\Delta\phi_{ij}) \tag{12}$$

on sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ. Lausekkeen (12) viimeisen muodon johto ja merkintöjen selitys on esitetty liitteessä B. Rakenteiden mekaniikassa esimerkiksi nivelristikko voidaan käsitellä approksimaationa partikkelisysteeminä. Jatkon sovelluksissa emme tule tarvitsemaan lausekkeita (8) ja (12). Kuitenkin niiden viimeisten muotojen vertailu osoittaa, että äärellisten virtuaalisten siirtymien käyttö — vaikkakin sinänsä teoreettisesti oikeellinen tapa — selvästikin mutkistaa käsittelyjä.

Sovellus

Tehtävän kuvaus

Kohteena on kuvan 1 esittämä äärimmäisen yksinkertainen tasosysteemi, joka muodostuu massapartikkelista ja venymättömästä massattomasta langasta, jonka pituus on L. Partikkeliin vaikuttaa annettuina ulkoisina voimina pystysuunnassa voima V ja vaakasuunnassa voima H. On määritettävä systeemin tasapainotilaan liittyvä kulman θ arvo.



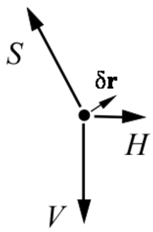
Kuva 1. Partikkeli-lankasysteemi.

Tehtävän ratkaisu on tietenkin intuitiivisesti itsestään selvä jo ilman edes vapaakappalekuvion käyttöä: ulkoisten voimien resultantin tulee olla langan suuntainen eli kulmalle θ pätee yhteys

$$\frac{H}{V} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta\,. \tag{13}$$

Infinitesimaalisen virtuaalisen siirtymän käyttö

Otetaan tässä systeemiksi *pelkkä partikkeli*, jonka vapaakappalekuvio on esitetty kuvassa 2. Koska systeemi muodostuu yhdestä partikkelista, systeemiin ei siis vaikuta sisäisiä voimia.



Kuva 2. Partikkelin vapaakappalekuvio ja infinitesimaalinen virtuaalinen siirtymä $\delta\mathbf{r}$.

Lankavoima (eli rajoitteeseen L on vakio liittyvä rajoitevoima) S on periaatteessa vielä tuntematon. Kuvan 1 geometrian perusteella partikkelin koordinaatit ovat

$$\begin{aligned} x &= L\cos\theta, \\ y &= L\sin\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

Annetaan partikkelille infinitesimaalinen virtuaalinen siirtymä pitämällä suure L vakiona ja varioimalla kulmaa θ infinitesimaalisella määrällä $\delta\theta$. (Jos opetuksessa ei ole vielä esitetty variointiin liittyvää terminologiaa, voidaan yhtä hyvin puhua differentiaalista $\delta\theta$ ja differentioimisesta.) Saadaan virtuaaliset siirtymäkomponentit

$$
\begin{aligned}
\delta x &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta = -L\sin\theta\,\delta\theta, \\
\delta y &= \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta = L\cos\theta\,\delta\theta.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Tässä on käytetty osittaisderivaattamerkintöjä, koska myöhemmin myös suureen L arvoa tullaan muuttamaan. Partikkeliin vaikuttavien voimien tekemä virtuaalinen työ on siis

$$
\delta' W = V\,\delta x + H\,\delta y = L\left(-V\sin\theta + H\cos\theta\right)\delta\theta. \tag{16}
$$

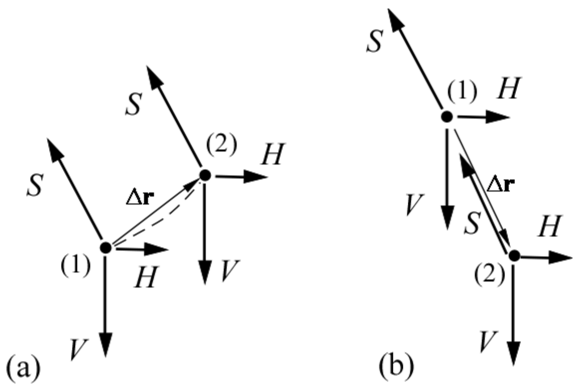
Rajoitevoima S ei siis tee virtuaalista työtä, koska virtuaalinen siirtymä $\delta\mathbf{r} = \delta x\,\mathbf{i} + \delta y\,\mathbf{j}$ on selvästikin kohtisuorassa voimaa S vastaan. Virtuaalisen työn periaate vaatii, että virtuaalinen työ (16) on arvoltaan nolla. Koska $\delta\theta$ on mielivaltainen, seuraa tästä yhtälö

$$
-V\sin\theta + H\cos\theta = 0 \tag{17}
$$

eli saadaan ratkaisu (13).

Äärellisten virtuaalisten siirtymien käyttö

Annetaan kulmalle θ äärellinen muutos $\Delta\theta$. Kuvassa 3 (a) on esitetty partikkelin vapaakappalekuvio alku- ja lopputilassaan sekä äärellinen virtuaalinen siirtymä $\Delta\mathbf{r}$. On siis syytä huomata, että vaikuttavat voimat V, H ja S ovat säilyttäneet virtuaalisen työn periaatteen mukaisesti siirtymissä alkuperäiset suuntansa ja arvonsa.



Kuva 3. (a) Systeemi alkutilassa (1) ja lopputilassa (2) muutoksen $\Delta\theta$ johdosta. (b) Systeemi alkutilassa (1) ja lopputilassa (2) muutoksen ΔL johdosta

Kaavojen (14) perusteella partikkelin siirtymäkomponentit ovat

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= L\left[\cos(\theta+\Delta\theta) - \cos\theta\right] = L\left[\cos\theta\cos\Delta\theta - \sin\theta\sin\Delta\theta - \cos\theta\right], \\
\Delta y &= L\left[\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta\right] = L\left[\sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta\sin\Delta\theta - \sin\theta\right].
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Kuvan 3 (a) perusteella nähdään, että nyt myös rajoitevoima S tekee virtuaalista työtä, vaikka rajoitetta $L = \text{vakio}$ ei rikota, sillä siirtymä $\Delta\mathbf{r}$ ei ole enää kohtisuorassa voimaa S vastaan. Todellisessa liikkeessä, jossa olisi kyse peräkkäisissä aikamuutoksissa $\mathrm{d}t$ tapahtuvista kulmanmuutoksista $\mathrm{d}\theta$, rajoitevoima S ei tee työtä, koska voiman suunta muuttuu ja pysyy jatkuvasti kohtisuorassa liikesuuntaa vastaan. Kuvan 3 (a) tarkastelu osoittaa, että partikkelin siirtymä voiman S suunnassa on

$$\Delta s = L\left(1 - \cos\Delta\theta\right). \tag{19}$$

Täten partikkeliin tehty virtuaalinen työ

$$\begin{aligned}\Delta' W &= V\Delta x + H\Delta y + S\Delta s \\ &= VL\left(\cos\theta\cos\Delta\theta - \sin\theta\sin\Delta\theta - \cos\theta\right) \\ &\quad + HL\left(\sin\theta\cos\Delta\theta + \cos\theta\sin\Delta\theta - \sin\theta\right) \\ &\quad + SL\left(1 - \cos\Delta\theta\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Toisin kuin lausekkeessa (16) mukaan on nyt ilmestynyt tuntematon suure: voima S. Tämän määrittämiseksi muodostetaan toinen virtuaalinen siirtymätila muuttamalla pituuden L arvoa määrällä ΔL ja pitämällä θ kiinnitettynä. Kyseessä on siis ns. kinemaattisesti luvaton virtuaalinen siirtymä, jossa systeemin kinemaattista rajoitetta rikotaan. Tapaus on esitetty kuvassa 3 (b). Nyt kaavojen (14) perusteella

$$\begin{aligned}\Delta x &= \left(L + \Delta L\right)\cos\theta - L\cos\theta = \Delta L\cos\theta, \\ \Delta y &= \left(L + \Delta L\right)\sin\theta - L\sin\theta = \Delta L\sin\theta\end{aligned} \tag{21}$$

ja suoraan kuvan perusteella

$$\Delta s = -\Delta L\,. \tag{22}$$

Virtuaalinen työ

$$\begin{aligned}\Delta' W &= V\Delta x + H\Delta y + S\Delta s \\ &= V\Delta L\cos\theta + H\Delta L\sin\theta - S\Delta L \\ &= \left(V\cos\theta + H\sin\theta - S\right)\Delta L\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Asettamalla ehto $\Delta' W = 0$ saadaan tulos

$$S = V\cos\theta + H\sin\theta. \tag{24}$$

Kun tämä sijoitetaan lausekkeeseen (20), saadaan sievennysten jälkeen tulos

$$\Delta' W = L\left(-V\sin\theta + H\cos\theta\right)\sin\Delta\theta. \tag{25}$$

Vaatimus tämän häviämisestä antaa vihdoin jälleen ratkaisun (13).

Äärellisten virtuaalisten siirtymien käyttö; vaihtoehtoinen käsittely

Äskeinen esimerkki näytti todella osoittavan, että infinitesimaalisten virtuaalisten siirtymien soveltaminen on oleellisesti yksinkertaisempaa kuin äärellisten siirtymien. Jos kuitenkin heti hyväksytään rajoitevoiman S mukanaolo ja operoidaan suoraan siirtymäkomponenttien Δx ja Δy avulla, käsittely palautuu yksinkertaiseksi. Saadaan virtuaalisen työn lauseke

$$\Delta' W = \left(V - S\cos\theta\right)\Delta x + \left(H - S\sin\theta\right)\Delta x \,. \tag{26}$$

Koska siirtymäkomponentit ovat mielivaltaisia, saadaan siis seurauksina yhtälöt

$$\begin{aligned} V - S\cos\theta &= 0, \\ H - S\sin\theta &= 0, \end{aligned} \tag{27}$$

joista on helppo ratkaista tuntemattomat S ja θ. Havaitaan, että käsittely on tässä yhtä suoraviivaista oli sitten kyseessä äärelliset suureet Δx ja Δy tai vaihtoehtoisesti infinitesimaaliset suureet δx ja δy. Syynä käsittelyn mutkistumiseen edellä lausekkeita (14) sovellettaessa oli ilmeisestikin niiden epälineaarisuus suureen θ suhteen.

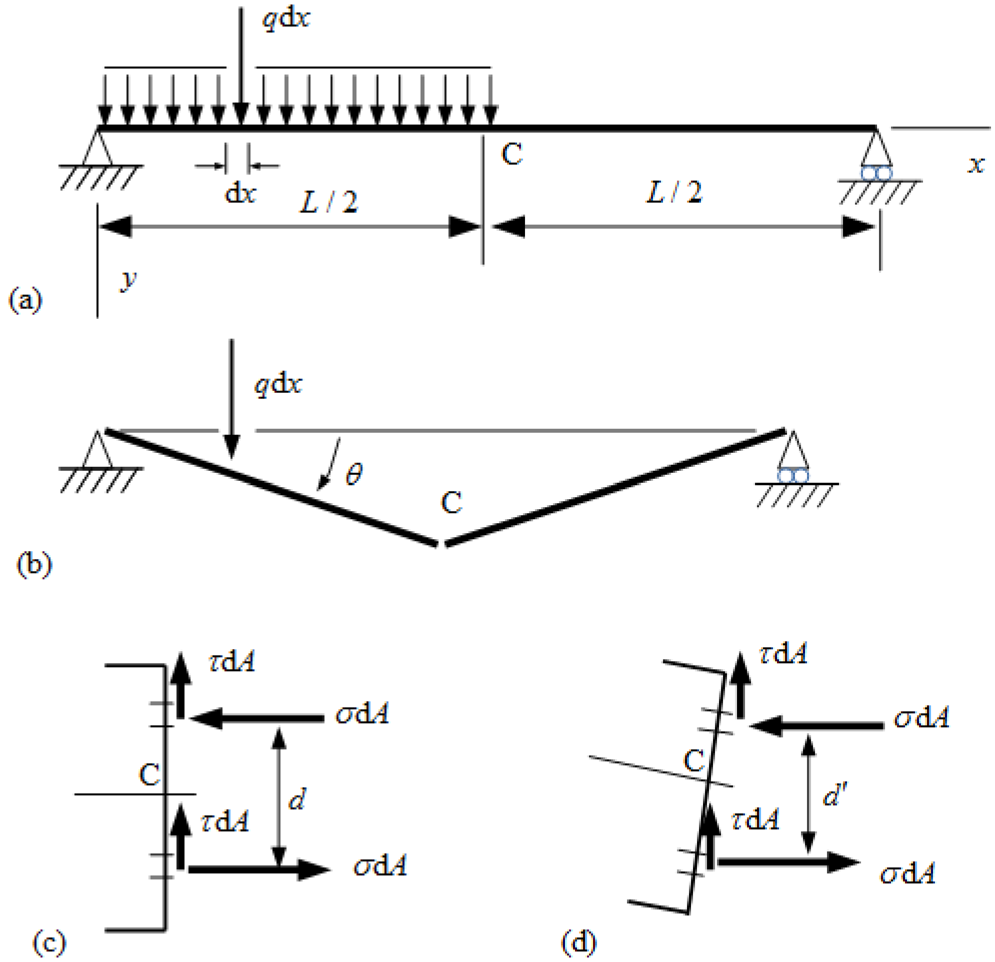
Kontinuumi

Johdanto

Matemaattisessa kirjallisuudessa puhutaan mm. elementtimenetelmän yhteydessä ns. *heikoista muodoista* (engl. weak form). Tällöin numeeristen käsittelyjen lähtökohtana on aina vain yksi skalaariyhtälö (heikko muoto). Heikko muoto synnytetään vallitsevista differentiaaliyhtälöistä ja reunaehdoista tunnetusti tiettyjen manipulaatioiden avulla soveltaen ns. *paino*- eli *testifunktioita* (engl. weighting function, test function). (Kyseessä on analoginen askel edellä partikkelisysteemin yhteydessä esitetyn lineaarikombinaation muodostamisen kanssa, joka tuotti yhden skalaariyhtälön.) Heikko muoto on yleensä paljon hedelmällisempi lähtökohta likiratkaisujen määrittämiseen kuin suoraan differentiaaliyhtälöt. Rakenteiden mekaniikasta tuttu *virtuaalisen työn periaate on itse asiassa matemaattisessa mielessä juuri eräs heikko muoto, jossa virtuaalisilla siirtymillä on painofunktioiden rooli*. Nyt on kuitenkin huomattava, että matemaattisessa kirjallisuudessa ei yleensä mitenkään vaadita, että painofunktioiden tulisi olla infinitesimaalisia. Miksi siis virtuaalisen työn periaatteen yhteydessä esitetään niin usein tämä vaatimus?

Palkin taivutus

Lähteessä [1, s. 15] on esitetty mielenkiintoinen palkin taivutukseen liittyvä esimerkki, jossa virtuaalinen siirtymä on otettu äärelliseksi. Kuva 4 (a) toistaa lähteen esimerkin kuitenkin niin, että palkin kuormitus muodostuu pelkästään palkin vasemmalla puolella vaikuttavasta tasaisesti jakautuneesta kuormituksesta q ($[q] = \mathrm{N/m}$). (Lähteen asetelmassa on mukana myös palkin keskipisteessä vaikuttava pistekuorma ja jakautunut kuormitus vaikuttaa palkin oikealla puolella.).Tehtävänä on määrittää palkin taivutusmomentin arvo M_C palkin keskipisteessä C käyttäen virtuaalisen työn periaatetta.



Kuva 4. (a) Vapaasti tuettu jakautuneen kuormituksen q alainen palkki. (b) Virtuaalinen siirtymä. (c) Palkin poikkileikkaukseen vaikuttavat tyypilliset voima-alkiot ennen virtuaalista siirtymää. (d) Palkin poikkileikkaukseen vaikuttavat tyypilliset voima-alkiot virtuaalisen siirtymän jälkeen.

Rakenne on staattisesti määrätty (kun tavanomaiseen tapaan otaksutaan palkin todellisten siirtymien olevan kuormituksen johdosta niin pieniä, että tasapainoa voidaan tarkastella alkuperäisen annetun geometrian mukaisena.) Annetaan kuvan 4 (b) mukainen kinemaattisesti luvaton äärellinen virtuaalinen siirtymä, jossa palkin kuvitellaan toimivan tavallaan nivelmekanismina ja jossa kiertymiskulma θ on äärellinen. Palkin siirtymä pystysuunnassa on

$$\begin{aligned} w &= x\sin\theta, \quad 0 \le x \le L/2, \\ w &= (L-x)\sin\theta, \quad L/2 \le x \le L. \end{aligned} \tag{28}$$

Vaakasuuntaisen siirtymän lauseketta ei tässä tarvita, koska systeemiin ei vaikuta vaakasuunnassa virtuaalista työtä tekeviä voimia.

Tarkastellaan ensin jakautuneen kuormituksen tekemää virtuaalista työtä. Saadaan osuus

$$\Delta' W^{\text{ext}} = \int_0^{L/2} q w \,\mathrm{d}x = \int_0^{L/2} q x \sin\theta \,\mathrm{d}x = q \sin\theta \int_0^{L/2} x \,\mathrm{d}x = q \sin\theta \frac{L^2}{8}. \tag{29}$$

Kuvassa 4 (b) on vielä korostettu, kuinka voima-alkio $q\mathrm{d}x$ säilyttää suuruutensa ja suuntansa virtuaalisessa siirtymässä.

Tarkastellaan sitten systeemin sisäisten voimien tekemää työtä kuvitellussa nivelessä pisteessä C. Kuvissa 4 (c) ja (d) on esitetty palkin poikkileikkauksessa (pinnan ulkoinen normaali osoittaa positiivisen *x*-akselin suuntaan) pinta-alkioon $\mathrm{d}A$ vaikuttavien tyypillisten voima-alkioiden $\sigma\mathrm{d}A$ ja $\tau\mathrm{d}A$ osuuksia. Tässä σ viittaa normaalijännitykseen ja τ leikkausjännitykseen. Kuten kyseisissä kuvissa on osoitettu nämä voima-alkiot säilyttävät virtuaalisen työn periaatteen johtamistavan perusteella siirtymän yhteydessä suuruutensa ja suuntansa. Mutta tämä merkitsee ehkä hieman yllättäen, että itse *taivutusmomentti ei enää säily vakiona siirtymän yhteydessä*. Tämä ymmärretään kuvien (c) ja (d) perusteella siten, että voima-alkioiden $\sigma\mathrm{d}A$ "vipuvarsi" *d* on saanut lopputilassa arvon $d' = d\cos\theta$. Alkutilassa taivutusmomentin arvo on ilmeisin merkinnöin

$$M_{\mathrm{C}} = \int_A \sigma y \mathrm{d}A. \tag{30}$$

Kuvien (c) ja (d) perusteella havaitaan, että jos kiertymiskulman lopullinen arvo on θ, mielivaltaisella kulman α arvolla momentin lauseke on

$$M_{\mathrm{C}}(\alpha) = \int_A \sigma y \cos\alpha \mathrm{d}A = \cos\alpha \int_A \sigma y \mathrm{d}A = \cos\alpha M_{\mathrm{C}}. \tag{31}$$

Taivutusmomentin palkkiin tekemä virtuaalinen työ kulmanmuutoksen $\delta\alpha$ yhteydessä on

$$\delta' W^{\text{int}} = -2 M_{\mathrm{C}}(\alpha)\delta\alpha = -2 M_{\mathrm{C}} \cos\alpha \delta\alpha. \tag{32}$$

Kerroin 2 syntyy siitä, että pisteessä C palkin aukeamiskulma kasvaa määrällä $2\delta\alpha$. Integroimalla saadaan sisäisten voimien (eli tässä taivutusmomentin) tekemäksi virtuaaliseksi työksi

$$\Delta' W^{\text{int}} = -2 M_{\mathrm{C}} \int_0^{\theta} \cos\alpha \delta\alpha = -2 M_{\mathrm{C}} \Big|_0^{\theta} \sin\alpha = -2 M_{\mathrm{C}} \sin\theta. \tag{33}$$

Kuvien (c) ja (d) perusteella voidaan vielä havaita, että otaksumalla leikkausvoimiin liittyvät voima-alkiot $\tau\mathrm{d}A$ yhtä suuriksi ja otaksumalla niiden etäisyydet pisteestä C yhtä suuriksi, näiden voima-alkioiden tekemät virtuaaliset työosuudet kumoavat toisensa. Palkin virtuaalinen työyhtälö saa siis muodon

$$\Delta' W \equiv \Delta' W^{\text{ext}} + \Delta' W^{\text{int}} \equiv q \sin\theta \frac{L^2}{8} - 2 M_{\mathrm{C}} \sin\theta = 0 \tag{34}$$

ja taivutusmomentin arvoksi tulee

$$M_{\mathrm{C}} = q\frac{L^2}{16}\,. \tag{35}$$

Tehtävän käsittely ottamalla alkutilan suhteen kulman θ sijasta pelkästään infinitesimaalinen kulmasiirtymä $\delta\theta$ tapahtuu ilmeisestikin oleellisesti suoraviivaisemmin.

Äärellistä siirtymää soveltava ratkaisu voidaan synnyttää myös tarkastelemalla voimien palkin akselin suuntaisia ja kohtisuoria komponentteja, jolloin tiettyjen komponenttien tekemä virtuaalinen työ häviää. Tätä käsittelyä ei viedä tässä pitemmälle.

Tarkastellaan tehtävää edelleen nyt vaihtoehtoisella tavalla ja tietyssä mielessä matemaattisemmin ilman kuvan 4 (b) "geometriaa". Palkin taivutukseen liittyvä differentiaaliyhtälö on tunnetusti

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} + q = 0\,. \tag{36}$$

Muodostetaan vastaava heikko muoto kertomalla tämä yhtälö puolittain painofunktiolla $w(x)$ ja integroimalla puolittain alueen $0 < x < L$ yli:

$$\int_0^L w\left(\frac{d^2 M}{dx^2} + q\right)\mathrm{d}x = 0\,. \tag{37}$$

Otaksutaan painofunktio lausekkeen (28) mukaiseksi. Käytetyllä painofunktiolla ei kuitenkaan tarvitse välttämättä olla esimerkiksi tulkintaa pystysiirtymänä. Painofunktion luonteen perusteella jatkon osittaisintegroinneissa tulee soveltaa tiettyä varovaisuutta pisteen $x = L/2$ suhteen, joten suoritetaan käsittely paloittain. Ensimmäinen osittaisintegrointi tuottaa muodon

$$-\int_0^{L/2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \Big|_0^{L/2} w\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} - \int_{L/2}^{L}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \Big|_0^{L/2} w\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} + \int_0^L wq\mathrm{d}x = 0\,. \tag{38}$$

Toinen osittaisintegrointi antaa edelleen

$$\begin{aligned}&\int_0^{L/2}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}M\mathrm{d}x - \Big|_0^{L/2}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}M + \Big|_0^{L/2} w\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\\ &+\int_{L/2}^{L}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}M\mathrm{d}x - \Big|_{L/2}^{L}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}M + \Big|_{L/2}^{L} w\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} + \int_0^L wq\mathrm{d}x = 0\,.\end{aligned} \tag{39}$$

Palkin taivutusmomentin reunaehtoina saadaan arvot

$$M(0) = 0, \quad M(L) = 0\,. \tag{40}$$

Lausekkeista (28) seuraa lisäksi

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sin\theta, \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad 0 \le x < L/2$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -\sin\theta, \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad L/2 < x \le L \tag{41}$$

ja vielä

$$w(0) = 0, \quad w(L) = 0\,. \tag{42}$$

Yhtälö (39) saa muodon

$$-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}M\bigg|_{x=L/2^-} + w\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=L/2^-} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}M\bigg|_{x=L/2^+} - w\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=L/2^+} + q\int_0^{L/2} w\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{43}$$

Tässä on merkitty miinus- ja plusmerkeillä vastaavasti pisteessä $x = L/2$ esiintyviä vasemman- ja oikeanpuoleisia raja-arvoja. Nyt w, M ja $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = Q$ (Q on leikkausvoima) ovat jatkuvia pisteessä $x = L/2$, joten jäljelle jää yhtälö

$$-\sin\theta M_{\mathrm{C}} - \sin\theta M_{\mathrm{C}} + q\sin\theta\int_0^{L/2} x\,\mathrm{d}x = 0 \tag{44}$$

eli

$$-2\sin\theta M_{\mathrm{C}} + q\sin\theta\frac{L^2}{8} = 0 \tag{45}$$

Täten saadaan ratkaisu (35) ilman mitään kuvan 4 (c) ja (d) esittämiä yksityiskohtaisia tarkasteluja. Tulkinta, jossa w on nimenomaan pystysiirtymä tai vielä infinitesimaalinen pystysiirtymä, ei yksinkertaistaisi tässä käsittelyä.

Todettakoon vielä, että eri rakennemallien yhteydessä pätevät yksityiskohtaiset virtuaaliset työyhtälöt saadaan systemaattisimmin yleisestä kontinuumin kolmiulotteisesta virtuaalisesta työyhtälöstä ottamalla huomioon vallitsevat kinemaattiset ja jännityksiä koskevat otaksumat. Edellä kuitenkin haluttiin näyttää vaihtoehtoinen (heikon muodon) johto käyttäen lähtökohtana jo kyseisten otaksumien avulla saatua taivutetun palkin differentiaaliyhtälöä (36).

Pienet siirtymät

Pyritään pitämään tarvittava matematiikka mahdollisimman yksinkertaisena. Täten tässä ei johdeta virtuaalisia työyhtälöitä (1) ja (2) yleisessä muodossa, vaan pelkistetään asetelmaa radikaalisti. Otaksutaan, että vain jännityskomponentti σ_x ja vastaavasti x-akselin suuntainen siirtymäkomponentti u ovat nollasta eroavia. Vallitseva kontinuumin tasapainoyhtälö on tällöin tutuin merkinnöin

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \rho b_x = 0\,. \tag{46}$$

Näin vastaavan virtuaalisen työn periaatteen johto saadaan lyhyeksi. Johto alkaa kertomalla yhtälö puolittain painofunktiolla $w(x)$ ja integroimalla saadun yhtälön molemmat puolet tarkasteltavan kappaleen tilavuuden V yli:

$$\int_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} w \,\mathrm{d}V + \int_V \rho b\, w \,\mathrm{d}V = 0 \tag{47}$$

Yhtälön ensimmäiseen termiin sovelletaan osittaisintegrointia:

$$-\int_V \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} \mathrm{d}V + \int_S n_x \sigma_x w \,\mathrm{d}S + \int_V \rho b\, w \,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{48}$$

Tässä n_x kappaleen reunapinnan S ulos suunnatun yksikkönormaalivektorin $\mathbf{n}$ x-akselin suuntainen komponentti. Termi $n_x \sigma_x$ on kappaleen pinnalla vaikuttavan jännitysvektorin (eli traktion) $\mathbf{t}$ x-akselin suuntainen komponentti t_x. On saatu heikko muoto

$$-\int_V \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} \mathrm{d}V + \int_S t_x w \,\mathrm{d}S + \int_V \rho b\, w \,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{49}$$

Jos painofunktio w tulkitaan lisäksi siirtymäkomponentin u variaatioksi eli jos $w = \delta u$, saadaan tutumpi esitys

$$\delta' W^{\mathrm{int}} + \delta' W^{\mathrm{ext}} \equiv -\int_V \sigma_x \delta\varepsilon \,\mathrm{d}V + \int_S t_x \delta u \,\mathrm{d}S + \int_V \rho b\, \delta u \,\mathrm{d}V = 0\,, \tag{51}$$

jossa on käytetty vielä hyväksi venymän ε lauseketta

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{52}$$

jonka variaatio

$$\delta\varepsilon = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\, \delta u}{\partial x} \tag{53}$$

on ns. virtuaalinen venymä.

Havaitaan kuitenkin, että mitään välttämätöntä tarvetta infinitesimaalisen virtuaalisen siirtymän käyttöön ei ole. Myös valitsemalla $w = \Delta u$ saadaan yksinkertainen muoto

$$\Delta' W^{\mathrm{int}} + \Delta' W^{\mathrm{ext}} \equiv -\int_V \sigma_x \Delta\varepsilon \,\mathrm{d}V + \int_S t_x \Delta u \,\mathrm{d}S + \int_V \rho b\, \Delta u \,\mathrm{d}V = 0\,, \tag{54}$$

jossa

$$\Delta\varepsilon = \Delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\, \Delta u}{\partial x}\,. \tag{55}$$

Suuret siirtymät

Tehdään samantapaiset yksinkertaistukset kuin edellisessä luvussa. Otaksutaan , että vain jännitystensorin (toisen lajin Piola-Kirchhoff) komponentti S_{xx} ja vastaava siirtymäkomponentti u ovat nollasta eroavia. Yhtälön (46) vastineeksi tulee suurten siirtymien teoriassa (esimerkiksi lähde [6])

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[S_{xx}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\rho_0 b_x=0\,. \tag{56}$$

Tässä ja jatkossa merkintä 0 viittaa kappaleen alkutilaan. Operoimalla painofunktiolla $w(x)$ saadaan yhtälön (47) vastine

$$\int_{V_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[S_{xx}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]w\,\mathrm{d}V+\int_{V_0}\rho_0 b\,w\,\mathrm{d}V=0\,. \tag{57}$$

Osittaisintegrointi tuottaa muodon

$$-\int_{V_0}S_{xx}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}V+\int_{S_0}n_x^0 S_{xx}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)w\,\mathrm{d}S+\int_{V_0}\rho_0 b\,w\,\mathrm{d}V=0\,. \tag{58}$$

Kappaleen pintaan vaikuttavan (pseudo)traktion x-komponentti on tässä

$$T_x=n_x^0 S_{xx}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{59}$$

joten on saatu heikko muoto

$$-\int_{V_0}S_{xx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\mathrm{d}V+\int_{S_0}T_x\,w\,\mathrm{d}S+\int_{V_0}\rho_0 b\,w\,\mathrm{d}V=0\,. \tag{60}$$

Greenin venymäkomponentin lauseke on tässä

$$E_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{61}$$

Sen variaatio on

$$\delta E_{xx}=\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\delta u}{\partial x} \tag{62}$$

Havaitaan, että tulkinta $w=\delta u$ muuntaa yhtälön (60) "haluttuun" muotoon

$$\delta' W^{\mathrm{int}}+\delta' W^{\mathrm{ext}}\equiv-\int_{V_0}S_{xx}\delta E_{xx}\,\mathrm{d}V+\int_{S_0}T_x\,\delta u\,\mathrm{d}S+\int_{V_0}\rho_0 b\,\delta u\mathrm{d}V=0\,. \tag{63}$$

Sen sijaan äärellinen valinta $w=\Delta u$ johtaa erityyppiseen yhtälöön

$$\Delta' W^{\text{int}} + \Delta' W^{\text{ext}} \equiv -\int_{V_0} S_{xx}\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Delta u}{\partial x}\right)\mathrm{d}V + \int_{S_0} T_x\, \Delta u\, \mathrm{d}S + \int_{V_0} \rho_0 b\, \Delta u \mathrm{d}V = 0\,, \quad (64)$$

jossa jännityskomponentin S_{xx} kertoimella ei ole enää havainnollista merkitystä. Syynä tähän on lausekkeen (61) epälineaarisuus, jonka johdosta Greenin venymän äärellinen muutos

$$\Delta E_{xx} = \frac{\partial(u+\Delta u)}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(u+\Delta u)}{\partial x}\right]^2 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2 = \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x}\right)^2. \quad (65)$$

Loppuhuomautuksia

Edellä esitettyjen tapausten perusteella voidaan todeta, että painofunktion tulkinta äärelliseksi virtuaaliseksi siirtymäksi voi usein selvästi mutkistaa käsittelyä. Kuitenkin opetuksessa voi olla syytä soveltaa joissain määrin äärellisiä virtuaalisia siirtymiä, koska näin virtuaalisen työn ja äärellisen työn käsitteiden erot korostuvat. Kysymykseen miksi esimerkiksi käytetään juuri valintaa (5): $\mathbf{w} = \delta\mathbf{r}$, voitaneen vastata mm., että korvaamalla merkintä $\delta\mathbf{r}$ merkinnällä $\mathrm{d}\mathbf{r}$ saadaan analogisia todellisia differentiaalisia siirtymiä koskevia työlausekkeita, joka seikka voi helpottaa esiintyvien kaavojen seuraamista. Artikkelin luonteen johdosta käytetty matemaattinen kalusto on pidetty yksinkertaisena. Vaativampien käsitteiden käytön suhteen voidaan viitata mm. lähteisiin [7], [8], [9].

Viitteet

[1] F. S. Shaw, *Virtual Displacements and Analysis of Structures*, Prentice-Hall,1972.

[2] J. L. Synge, B. A. Griffith, *Principles of Mechanics*, third edition, Mc-Graw-Hill, 1959.

[3] J. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, fourth edition, University of Toronto Press, 1970.

[4] R. Courant and F. John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Volume 1, Wiley, 1965.

[5] J. Tuomela, Mitä ovat δx ja dx ja mitä niiden pitäisi olla?, *Arkhimedes*, 21-24, 5/2008.

[6] K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 3rd ed., Pergamon Press, 1982.

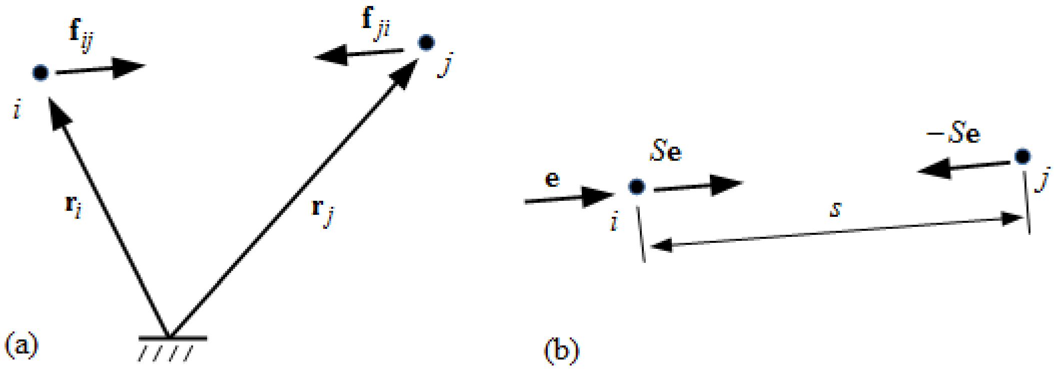
[7] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, 1978.

[8] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover, 1994.

[9] G. A. Holzapfel, *Nonlinear solid mechanics. A Continuum approach for engineering*, Wiley, 2000.

Liite A

Tarkastellaan kuvassa A.1 (a) esitettyjen systeemin kahden yleisen partikkelin i ja j välisiä parittaisia voimia $\mathbf{f}_{ij}$ ja $\mathbf{f}_{ji}$ ja niiden yhteensä tekemää virtuaalista työtä.



Kuva A.1 (a) Parittaiset voimat. (b) Lisämerkintöjä.

Otaksutaan lähteen [2, s. 28] mukaisesti, että voiman ja vastavoiman laki on voimassa eli

$$\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij} \tag{A.1}$$

Lisäksi voimien vaikutussuorat ovat partikkelien yhdysjanan suuntaiset. Kuvan A.1 (b) merkinnöin

$$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = s\mathbf{e} \tag{A.2}$$

jossa partikkelien välinen etäisyys on s ja $\mathbf{e}$ on partikkelista i partikkeliin j suunnattu yksikkövektori. Merkitään lisäksi

$$\mathbf{f}_{ij} = S\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{f}_{ji} = -S\,\mathbf{e}, \tag{A.3}$$

jossa siis parittainen voima S on positiivinen, jos partikkelien välillä on "vetoa". Parittaisten voimien yhteensä tekemä infinitesimaalinen virtuaalinen työ on

$$\begin{aligned}\delta' W_{ij}^{\text{int}} &= \mathbf{f}_{ij} \bullet \delta\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_{ji} \bullet \delta\mathbf{r}_j = -\mathbf{f}_{ji} \bullet \delta\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_{ji} \bullet \delta\mathbf{r}_j = \mathbf{f}_{ji} \bullet \left(\delta\mathbf{r}_j - \delta\mathbf{r}_i\right) = \mathbf{f}_{ji} \bullet \delta\left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right) \\ &= -S\,\mathbf{e} \bullet \delta\left(s\mathbf{e}\right) = -S\,\mathbf{e} \bullet \left(\delta s\mathbf{e} + s\,\delta\mathbf{e}\right) = -S\,\delta s - Ss\,\mathbf{e} \bullet \delta\mathbf{e} = -S\,\delta s\,.\end{aligned} \tag{A.4}$$

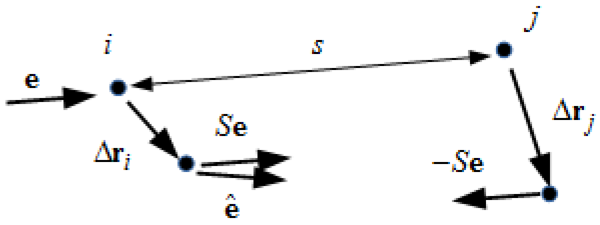
On käytetty hyväksi tietoa, että itseisarvoltaan vakioarvoisen vektorin variaatio on kohtisuorassa vektoria vastaan tai nolla. Systeemiin vaikuttavien kaikkien parittaisten voimien yhteensä tekemä virtuaalinen työ saadaan summana

$$\delta' W^{\text{int}} = -\sum_{ij} S_{ij}\,\delta s_{ij} \tag{A.5}$$

Tässä summa on siis yli kaikkien partikkeliparien (kukin pari kerran).

Liite B

Tarkastellaan samaa tapausta kuin liitteessä A, mutta nyt partikkelien *i* ja *j* siirtymillä on infinitesimaalisten arvojen $\delta\mathbf{r}_i$ ja $\delta\mathbf{r}_j$ sijasta äärelliset arvot $\Delta\mathbf{r}_i$ ja $\Delta\mathbf{r}_j$ (kuva B.1).



Kuva B.1 Äärelliset siirtymät.

Edelleen merkitään

$$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = s\mathbf{e} \tag{B.1}$$

ja lisäksi

$$\mathbf{r}_j + \Delta\mathbf{r}_j - (\mathbf{r}_i + \Delta\mathbf{r}_i) = (s + \Delta s)\hat{\mathbf{e}} \tag{B.2}$$

Tässä siis $\hat{\mathbf{e}}$ on siirtymien synnyttyä partikkelista *i* partikkeliin *j* suunnattu yksikkövektori ja Δs partikkelien välisen etäisyyden muutos. Kaavasta (B.2) saadaan

$$\Delta\mathbf{r}_j - \Delta\mathbf{r}_i = -(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + (s + \Delta s)\hat{\mathbf{e}} = -s\mathbf{e} + (s + \Delta s)\hat{\mathbf{e}}\,. \tag{B.3}$$

Muistetaan jälleen, että virtuaalisen työn periaatteessa voimat säilyttävät suuntansa ja suuruutensa, joten siirtymien yhteydessä edelleen

$$\mathbf{f}_{ij} = S\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{f}_{ji} = -S\,\mathbf{e}\,. \tag{B.4}$$

Parittaisten voimien yhteensä tekemä virtuaalinen työ

$$\begin{aligned}\Delta W_{ij}^{\text{int}} &= \mathbf{f}_{ij}\bullet\Delta\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_{ji}\bullet\Delta\mathbf{r}_j = -\mathbf{f}_{ji}\bullet\Delta\mathbf{r}_i + \mathbf{f}_{ji}\bullet\Delta\mathbf{r}_j = \mathbf{f}_{ji}\bullet\left(\Delta\mathbf{r}_j - \Delta\mathbf{r}_i\right)\\ &= -S\,\mathbf{e}\bullet\left[-s\,\mathbf{e} + (s+\Delta s)\hat{\mathbf{e}}\right] = S\,s\,\mathbf{e}\bullet\mathbf{e} - S\,s\,\mathbf{e}\bullet\hat{\mathbf{e}} - S\Delta s\,\mathbf{e}\bullet\hat{\mathbf{e}}\\ &= -S\Delta s\cos\Delta\phi + S\,s(1-\cos\Delta\phi)\,.\end{aligned} \tag{B.5}$$

Tässä $\Delta\phi$ on vektoreiden $\mathbf{e}$ ja $\hat{\mathbf{e}}$ välinen kulma eli se kuvaa partikkelien yhdysjanan kiertymää. Partikkelisysteemille saadaan siis kaavan (A.5) tyyliin sisäisten voimien virtuaaliseksi työksi lauseke

$$\Delta' W^{\text{int}} = -\sum_{ij} S_{ij}\,\Delta s_{ij}\cos\Delta\phi_{ij} + \sum_{ij} S_{ij}\,s_{ij}(1-\cos\Delta\phi_{ij}) \tag{B.6}$$

Juha Paavola, Eero-Matti Salonen
Aalto-yliopisto
Insinööritieteiden korkeakoulu
Rakennustekniikan laitos
PL 12100, 00076 Aalto
juha.paavola@aalto.fi, eero-matti.salonen@aalto.fi