

## Makroskooppiset energiataseet virtauslaskennassa

Eero-Matti Salonen<sup>1</sup> ja Rauno Holopainen

**Tiivistelmä.** Mekaanisen energian periaate on verrattain vähän esillä virtausmekaniikan kirjallisuudessa. Tällä periaatteella on kuitenkin tiettyjä hyödyllisiä sovelluksia. Artikkelissa selostetaan mekaanisen energian periaatteen lisäksi vertailukohdan saamiseksi myös massan säilymisen ja varsinaisen energian periaatteiden sisältöä. Bernoullin yhtälöä kommentoidaan lyhyesti. Lopuksi esitetään yleisten yhtälöiden havainnollistamiseksi kanavistovirtaukseen liittyvän sovelluksen yksityiskohtia.

*Avainsanat:* virtauslaskenta, mekaanisen energian periaate, kanavistovirtaus

*Vastaanotettu 1.12.2014. Hyväksytty 30.12.2014. Julkaistu verkossa 30.12.2014.*

### Johdanto

Virtauslaskennan kaksi pääanalyysitapaa ovat (1) ns. makroskooppinen eli äärellinen eli integraalimuotoinen eli kontrollitilavuustyyppinen lähestymistapa (engl. macroscopic, integral, control-volume, large-scale analysis) ja (2) ns. paikallinen eli differentiaali-yhtälötyyppinen (engl. small-scale, differential analysis) lähestymistapa. Kyseisistä tavoista ja niihin liittyvistä eduista ja haitoista on valaiseva esitys lähteessä [1]. Tässä artikkelissa tarkastellaan lähinnä makroskooppista lähestymistapaa ja siihen liittyen erityisesti energiataseita. Tällöin lähtökohtana voi olla ensinnäkin tavanomainen termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön mukainen energiatarkastelu eli ns. *energian taseen periaate* (engl. principle of balance of energy). Vaihtoehtoisena mahdollisuutena on ns. *mekaanisen energian taseen periaate* (engl. principle of balance of mechanical energy). Tämä jälkimmäinen versio on usein hyödyllinen, mutta on verrattain harvoin tai vain ylimalkaisesti esillä alan kirjallisuudessa. Artikkelin painottuu täten erityisesti mekaanisen energian periaatteen selostamiseen. Lopuksi esitetään kanavistovirtaukseen liittyvän sovelluksen yksityiskohtia.

Jatkuvan aineen mekaniikan eli kontinuumimekaniikan tunnetusti hyväksytyt tavanomaiset perusaksioomat ovat (1) massan säilymisen periaate, (2) liikemäärän taseen periaate, (3) liikemäärämomentin taseen periaate, (4) energian taseen periaate ja (5) entropian kasvun periaate. Nämä periaatteet esitetään tavallisesti äärellisiä kappaleita koskevana ja ne tuottavat siten välittömästi makroskooppisista formulaatioista. Matemaattisten manipulaatioiden avulla näistä makroskooppisista muodoista voidaan kehittää tarvittaessa myös paikallisia yhtälöitä. Vertailukohdan saamiseksi mekaanisen

<sup>1</sup>Vastuullinen kirjoittaja. eero-matti.salonen@aalto.fi

energian taseyhtälön lisäksi esitetään taustaksi myös massan säilymisen ja energian taseyhtälöiden tavanomaisia makroskooppisia muotoja. Terminologia alalla on valitettavasti melko kirjavaa ja vakiintumatonta myös englanninkielisessä kirjallisuudessa.

Artikkelissa sovelletaan virtausmekaniikassa tavanomaista Eulerin esitystapaa ja suorakulmaisia karteesisia koordinaatteja  $x_1, x_2, x_3$  ja vektori- ja tensorimerkintöjä sekä Einsteinin summeeraussääntöä samaan tapaan kuin esimerkiksi lähteessä [2].

## Massan säilyminen

Massataseita tarvitaan käytännössä aina virtaustehtävien ratkaisussa. Täyttäköön tarkasteltava kappale ajan hetkellä  $t$  tilavuusalueen  $V$  ja olkoon sillä reuna  $S$ . Kappaleen massa

$$m = \int_V \rho dV, \quad (1)$$

jossa  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] on tiheys. Massan säilymisen periaatteen mukaisesti kappaleen massa säilyy eli siis massan arvon muutosnopeus on nolla:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (2)$$

Sovelletaan lisäksi Reynoldsin kuljetuslausetta [2], jonka avulla mielivaltaisen kappaleeseen liittyvän tilavuusintegraalin

$$\int_V f(x_1, x_2, x_3, t) dV \quad (3)$$

ainer derivaatta (engl. material time derivative, substantial derivative) voidaan esittää muodossa

$$\frac{D}{Dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f v_n dS. \quad (4)$$

Tässä

$$v_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = n_i v_i \quad (5)$$

on kappaleen reunan (materiaalin) ns. normaalinopeus,  $\mathbf{v}$  [m/s] (materiaalin) nopeusvektori ja  $\mathbf{n}$  [-] kappaleesta ulospäin suunnattu reunapinnan normaalin suuntainen yksikkövektori. Kun kuljetuslausetta (4) sovelletaan yhtälöön (2), massan säilymisen taseyhtälö tulee siis muotoon

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_n dS = 0. \quad (6)$$

Tarkemmin tässä käsitellään koordinaatiston suhteen kiinteää kontrollitilavuutta (engl. control volume)  $V$  ja sen reunaa  $S$ . Tarkasteltava kappale on ajan hetkellä  $t$  kyseisessä alueessa. Todettakoon, että mitään rajoituksia kappaleen materiaalin suhteen ei ole vielä

tehty; kappale voi siis muodostua vaikka osittain nesteestä ja osittain kiinteästä aineesta. Aineellisella aikaderivaatalla eli lyhyemmin ainederivaatalla tarkoitetaan kappaleeseen tai myös differentiaaliseen ainealkioon liittyvän jonkin suureen "kokemaa" muutosnopeutta. Virtausmekaniikassa tämän derivaatan operaattorille käytetään usein tunnuksen  $d/dt$  sijasta tässä sovellettua tunnusta  $D/Dt$ .

Pysyvässä eli stationaarisessa virtauksessa ( $\rho$  on vakio ajan suhteen kussakin virtausalueen pisteessä)  $\partial\rho/\partial t = 0$  ja yhtälö (6) yksinkertaistuu:

$$\int_S \rho v_n dS = 0. \quad (7)$$

Jos kyseessä on vakiotiheysnesteen virtaus ( $\rho$  on vakio myös paikan suhteen), edelleen  $\partial\rho/\partial t = 0$  ja lisäksi tiheys voidaan vakiona siirtää integraalimerkin ulkopuolelle ja saadaan muoto

$$\int_S v_n dS = 0. \quad (8)$$

## Energian tase

### *Perusmuoto*

Energian taseen periaate voidaan ilmaista seuraavasti: kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien tekemä työ  $W_{\text{ext}}$  plus kappaleen saama lämpö  $W_Q$  on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian  $K$  plus sisäenergian  $E$  muutos eli

$$W_{\text{ext}} + W_Q = \Delta K + \Delta E. \quad (9)$$

Tarkastelemalla differentiaalista ajan väliä ja jakamalla yhtälön (9) molemmat puolet tällä ajan välillä saadaan vastaavasti muutosnopeuksia koskeva yhtälö

$$P_{\text{ext}} + P_Q = \frac{DK}{Dt} + \frac{DE}{Dt}, \quad (10)$$

joka on jatkon kannalta hyödyllisempi.

### *Huomautuksia*

Käsitteen kappale sijasta termodynamiikassa käytetään usein nimitystä systeemi tai erityisesti suljettu systeemi (engl. closed system). Tällä korostetaan, että kyseessä on koko ajan samoista ainesosista koostuva kokonaisuus. Periaate (9) kulkee usein myös nimellä energian häviämättömyyden periaate tai termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö (engl. the first law of thermodynamics). Termodynamiikan esityksissä yhtälö (9) esitetään usein myös niin, että termi  $\Delta K$  puuttuu. Tällöin käsitellään systeemin muutoksia, jossa systeemi on alku- ja lopputilassa levossa, jolloin liike-energiat häviävät ja niiden muutoksetkin ovat siis nollia. Termin  $W_{\text{ext}}$  sijasta yhtälössä esiintyy joskus systeemin ympäristöönsä tekemä työ, joka on pintavoimien kyseessä ollessa arvoltaan  $-W_{\text{ext}}$ . Usein etenkin virtausmekaniikan esityksissä yhtälön (9) vasemmalla puolella näkyy vain epäkonservatiivisten voimien tekemä työ ja oikealla puolella on ns.

kokonaisenergian muutos. Kokonaisenergia muodostuu silloin liike-energiasta plus sisäenergiasta plus potentiaalienergiasta. Yhtälön (9) yhteydessä käytetään myös nimitystä säilymislaki (engl. conservation law). Mielestämme osuvampi termi on taselaki (engl. balance law). Vain massan säilymisen periaatteen yhteydessä on itse asiassa kyseessä tietyn suureen arvon säilymisestä (ja sekin vain ilman ydinreaktioiden osuutta).

### Perusmuodon yksityiskohtia

Tarkastellaan yhtälöä (10) yksityiskohtaisesti. Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien teho  $P_{\text{ext}}$  koostuu kappaleen pintaan vaikuttavien pintavoimien eli ns. traktioiden (engl. traction)  $t_i$  [Pa] sekä kappaleen sisällä vaikuttavien ns. kappale- eli massavoimien  $b_i$  [N/kg] tehosta:

$$P_{\text{ext}} \equiv P_{\text{ext}}^t + P_{\text{ext}}^b \equiv \int_S t_i v_i dS + \int_V \rho b_i v_i dV. \quad (11)$$

Jännitystensori  $\sigma_{ij}$  [Pa] jaetaan tavanomaiseen tapaan ns. isotrooppiseen eli paineosuuteen  $-p\delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  on Kroneckerin delta) ja deviatoriseen osaan  $\tau_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (12)$$

Deviaatiotensorille  $\tau_{ii} = 0$ . Traktiovektori riippuu jännitystensorista ja normaaliyksikkövektorista tunnetusti muodossa

$$t_i = n_j \sigma_{ji} = n_j (-p\delta_{ji} + \tau_{ji}) = -pn_i + n_j \tau_{ji}. \quad (13)$$

Täten termi

$$t_i v_i = -pn_i v_i + n_j \tau_{ji} v_i = -pv_n + t_i^{\tau} v_i, \quad (14)$$

jossa suuretta  $t_i^{\tau} \equiv n_j \tau_{ji}$  voidaan nimittää vaikka deviatoriseksi tai viskoosiksi traktioksi. Näin pintavoimien teho on saatu muotoon

$$P_{\text{ext}}^t = - \int_S pv_n dS + \int_S t_i^{\tau} v_i dS. \quad (15)$$

Tavallisin massavoimaosuus syntyy painovoimakentän johdosta. Otaksutaan vakio painovoimakenttä, joka vaikuttaa negatiivisen  $x_3 = z$ -akselin suuntaan. Tällöin  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = -g$ , jossa  $g$  [m/s<sup>2</sup>] on putoamiskiihtyvyyden arvo. Painovoima on konservatiivinen ja sen potentiaalienergian lauseke on

$$\int_V \rho g z dV. \quad (16)$$

Painovoiman kehittämä teho (käytetään nyt yläindeksin b sijasta indeksiä g) on tunnetusti miinusmerkkinen potentiaalienergian ainederivaatta:

$$P_{\text{ext}}^g = - \frac{D}{Dt} \int_V \rho g z dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho g z) dV - \int_S (\rho g z) v_n dS. \quad (17)$$

On sovellettu kuljetuslausetta (4).

Kappaleen reunojensa kautta saama lämpöteho

$$P_Q = - \int_S q_i n_i dS, \quad (18)$$

jossa  $q_i$  [W/m<sup>2</sup>] on lämpövuovektori (engl. heat flux vector). Miinusmerkki johtuu siitä, että valitun normaalivektorin suunnan (ulkoinen) perusteella itse integraali esittää kappaleesta ympäristöön siirtyvää lämpötehoa, ja tässä tarkastellaan juuri kappaleen saamaa lämpötehoa. Usein lauseketta (18) täydennetään vielä mahdollisen jakautuneen lämpölähteen edustamalla tilavuusintegraaliosuudella.

Kappaleen liike-energia

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV. \quad (19)$$

Täten soveltamalla kuljetuslausetta

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) dV + \int_S \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) v_n dS. \quad (20)$$

Kappaleen sisäenergia

$$E = \int_V \rho e dV, \quad (21)$$

jossa  $e$  [J/kg] on ominaissisäenergia (engl. specific internal energy). Täten jälleen

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) dV + \int_S \rho e v_n dS. \quad (22)$$

Makroskoopiset esitykset saavat käytännössä käyttökelpoisimmat versiot pysyvässä virtauksessa, jolloin edellä esitetyissä lausekkeissa olevat tilavuusintegraalit häviävät. Kirjataan täten näkyviin saatu energian taseyhtälö pysyvässä virtauksessa, kun lisäksi massavoimat johtuvat vain painovoimasta:

$$\begin{aligned} & - \int_S p v_n dS - \int_S \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) v_n dS - \int_S \rho g z v_n dS - \int_S \rho e v_n dS \\ & = \int_S n_i q_i dS - \int_S t_i^{\tau} v_i dS. \end{aligned} \quad (23)$$

Koska termejä kertyy nyt vain kappaleen (eli siis kontrollitilavuuden) reunalta, on tietyissä geometrioissa mahdollista tehdä sopivia lisäotaksumia ja saada käytännön sovelluskaavoja. Yhtälön termejä on järjestelty jonkinlaiseen standardimuotoon niin, että vasemmalla puolella näkyy tässä järjestyksessä paineeseen, liike-energiaan ja potentiaalienergian (tai korkeusasemaan) liittyvät osuudet. Usein otetaan lisäksi käyttöön ominaisentalpia (engl. specific enthalpy) [J/kg]

$$h = e + \frac{p}{\rho}, \quad (24)$$

jonka jälkeen yhtälö (23) saa hieman lyhyemmän muodon

$$-\int_S \rho h v_n \, dS - \int_S \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) v_n \, dS - \int_S \rho g z v_n \, dS = \int_S n_i q_i \, dS - \int_S t_i^T v_i \, dS. \quad (25)$$

## Mekaanisen energian tase

### Partikkelimekaniikka

Klassillisessa (partikkelimallin käyttöön perustuvassa) mekaniikassa ei ole mitään kontinuumimekaniikan termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön vastinetta. Tämä selittyy mm. sillä, että lämmön käsite ei ole lainkaan mukana partikkelimekaniikan teoriassa. Sen sijaan kääntäen partikkelimekaniikan mekaanisen energian periaatteen vastine on olemassa kontinuumimekaniikassa. Korostettakoon, että vaikka tässä ja jatkossa puhutaan periaatteesta, mekaanisen energian periaatteella ei tietenkään ole aksiooman asemaa, koska se kehitetään vain tiettyjen aikaisempien yhtälöiden avulla.

Käydään ensin johdantona läpi mekaanisen energian taseyhtälön johto yhden partikkelin tapauksessa. Johto perustuu partikkelin liikeyhtälön manipulointiin. Partikkelin liikeyhtälö on tutuin merkinnöin

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (26)$$

Kerrotaan tämä yhtälö puolittain (skalaaritulo) partikkelin nopeusvektorilla:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}. \quad (27)$$

Yhtälön vasen puoli on voiman  $\mathbf{F}$  teho

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (28)$$

Yhtälön oikea puoli on partikkelin liike-energian muutosnopeus

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}. \quad (29)$$

Yhtälö nähdään oikeaksi tulon derivoimissäännön ja skalaaritulon vaihdantalain perusteella. On saatu tulos

$$P = \frac{dK}{dt} \quad (30)$$

eli kappaleeseen vaikuttavan voiman teho on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutosnopeus.

Partikkelisysteemillä johto tapahtuu vastaavasti laskemalla vielä kaikki manipuloidut yhtälöt puolittain yhteen. Tulokseksi saadaan yhtälö (johtoa ei toisteta tässä)

$$P \equiv P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = \frac{dK}{dt} \quad (31)$$

eli systeemiin vaikuttavien ulkoisten voimien teho plus sisäisten voimien teho on yhtä suuri kuin systeemin liike-energian muutosnopeus. Tarkemmin

$$P_{\text{ext}} = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i, \quad (32)$$

$$P_{\text{int}} = -\sum_{ij} S \frac{ds}{dt}, \quad (33)$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i. \quad (34)$$

Pelkkä summamerkki tarkoittaa summaa yli systeemin partikkelien.  $\mathbf{F}_i$  on partikkeliin  $i$  vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti. Sisäisten voimien tehon lausekkeessa  $S$  on yleisen partikkeliparin  $ij$  välinen keskeisvoima ("veto" positiivisena) ja  $s$  partikkeliparin partikkelien välinen etäisyys. Kukin partikkelipari tulee summaan vain kerran. Muiden merkintöjen sisältö lienee ilmeinen. Yhtälö (31) on käyttökelpoisimmillaan jäykän kappaleen mallin yhteydessä, koska silloin lausekkeen (33) perusteella yleensä vaikeasti tunnettujen sisäisten voimien tehon ja työn osuudet häviävät.

Yhtälön (31) ja sen ajan suhteen integroidun muodon nimitykset vaihtelevat paljon alan kirjallisuudessa: energian periaate, työn ja liike-energian periaate, työperiaate, liike-energian laki jne. Jos osa systeemiin vaikuttavista voimista on konservatiivisia (eli niillä on potentiaalifunktio), niiden teho voidaan ilmaista miinusmerkkisenä potentiaali-energian  $V$  aikaderivaattana. Yhtälö (31) saa tällöin muodon

$$P^n = \frac{d}{dt}(K + V), \quad (35)$$

jossa  $P^n$  on systeemin epäkonservatiivisten voimien (ulkoisten ja sisäisten) yhteinen teho. Termiä  $K + V$  nimitetään yleisesti systeemin mekaaniseksi energiaksi (engl. mechanical energy). Tämän perusteella yhtälöä (31) tai (35) tullaan nimittämään jatkossa erotukseksi varsinaisesta energiaperiaatteesta (10) mekaanisen energian periaateksi. Todettakoon kuitenkin, että virtausmekaniikassa vaikuttavat sisäiset voimat (jännitykset) eivät ole yleensä konservatiivisia vaan pikemminkin ns. dissipatiivisia.

### *Virtausmekaniikka*

Johdetaan mekaanisen energian periaate nyt kontinuumin yhteydessä. Johto perustuu kuten edellä partikkelimekaniikassa liikeyhtälöiden käsittelyyn. Äärellisen kappaleen liikemäärän periaatteesta voidaan ensinnäkin synnyttää tuttu paikallinen liikemäärä- eli liikeyhtälö

$$\rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho \frac{Dv_i}{Dt}. \quad (36)$$

Kerrotaan tämän yhtälön molemmat puolet (skalaaritulo) nopeudella  $v_i$  ja integroidaan tulos puolittain alueen yli:

$$\int_V \rho b_i v_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i dV = \int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} v_i dV. \quad (37)$$

Kaksi jälkimmäistä integraalia vaativat verrattain raskasta lisäkäsittelyä tullakseen havainnollisiin muotoihin. Termi

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} v_i) - \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} v_i) - \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (38)$$

Käsittelyssä on käytetty hyväksi jännitystensorin symmetrisyyttä. Oikealle puolelle on ilmestynyt ns. muodonmuutosnopeuden (engl. deformation rate) lauseke [2]

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (39)$$

Gaussin lauseen perusteella integraali

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} v_i) dV = \int_S n_j \sigma_{ji} v_i dS = \int_S t_i v_i dS. \quad (40)$$

Lisäksi on sovellettu traktio-jännitysyhteyttä (13). Edelleen tulon derivoimissäännön perusteella

$$\frac{Dv_i}{Dt} v_i = \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} v_i v_i \right). \quad (41)$$

Reynoldsin kuljetuslauseen muodosta (4) poikkeava usein hyödyllinen versio on tyyppiä [2]

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho f(x_1, x_2, x_3, t) dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt} f(x_1, x_2, x_3, t) dV. \quad (42)$$

Soveltamalla tätä yhtälön (37) viimeiseen integraalin ja ottaen huomioon kaava (41) saadaan tulos

$$\int_V \rho \frac{Dv_i}{Dt} v_i dV = \frac{D}{Dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV. \quad (43)$$

Yhdistämällä saadut lausekkeet kaavassa (37) saadaan kontinuumin mekaanisen energian taseyhtälö



$$P \equiv P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = \frac{DK}{Dt}, \quad (44)$$

jossa nyt

$$P_{\text{ext}} = \int_S t_i v_i dS + \int_V \rho b_i v_i dV, \quad (45)$$

$$P_{\text{int}} = - \int_V \sigma_{ij} d_{ij} dV, \quad (46)$$

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV. \quad (47)$$

Esitetyt lausekkeet ovat vielä täysin yleisiä. Niistä (45) ja (47) ovat olleet esillä jo energian taseyhtälön yhteydessä ja siellä eteenpäin vietyjä muotoja voidaan siis hyödyntää suoraan myös tässä.

Kehitetään sisäisten voimien tehon lauseketta. Tehdään tavanomainen isotrooppisen nesteen konstitutiivinen otaksuma (ns. Newtonin neste) eli

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} + \lambda d_{kk} \delta_{ij}, \quad (48)$$

jossa  $\mu$  [Pa s] on nesteen viskositeetti ja jossa  $\lambda = -2/3 \cdot \mu$ . Tällöin itse jännitystensori

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + \lambda d_{kk} \delta_{ij} \quad (49)$$

ja ns. jännitystehon tiheys (engl. stress power density)

$$\sigma_{ij} d_{ij} = (-p \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + \lambda d_{kk} \delta_{ij}) d_{ij} = -p d_{ii} + 2\mu d_{ij} d_{ij} + \lambda d_{kk} d_{ii}. \quad (50)$$

Termien tietyllä järjestelyllä voidaan osoittaa, että dissipaatiotermi

$$\Phi \equiv 2\mu d_{ij} d_{ij} + \lambda d_{kk} d_{ii} \quad (51)$$

on positiivisesti semidefiniitti (kun  $\lambda = -2/3 \cdot \mu$ ). Kokoonpuristumattomassa virtauksessa ( $D\rho/Dt = 0$ ) ns. dilataationopeus (engl. dilatation)  $d_{ii} = 0$  ja on helppo nähdä lausekkeen (51) olevan positiivisesti definiitti. Määritellään ns. dissipaatioteho eli lyhyemmin dissipaatio

$$D \equiv \int_V \Phi dV. \quad (52)$$

Newtonin nesteen tapauksessa yleinen yhtälö (44) saa siis muodon

$$P_{\text{ext}} + \int_V p d_{ii} dV - D = \frac{DK}{Dt} \quad (53)$$

Suure  $D$  kuvaa (yleensä positiivisena) systeemissä tapahtuvaa sisäisen kitkan vaikutusta, joka pyrkii pienentämään kappaleen mekaanisen energian arvoa. Dissipaatiota nimitetään usein myös häviöksi (engl. loss).

Jos vielä massavoimat johtuvat pelkästään painovoimasta ja otaksutaan jälleen pysyvä virtaus, yhtälö (53) on yksityiskohtaisesti

$$-\int_S p v_n dS - \int_S \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) v_n dS - \int_S \rho g z v_n dS = D - \int_V p d_{ii} dV - \int_S t_i^r v_i dS. \quad (54)$$

Yhtälön (54) vasemman puolen toinen ja kolmas integraali esittävät vastaavasti liike-energian ja potentiaalienergian vuota kontrollipinnan läpi. Yhdessä nämä termit esittävät siis mekaanisen energian vuota [J] kontrollipinnan läpi. Ensimmäiseen, painetta koskevaan integraaliin yhdistetään alan kirjallisuudessa (analogisen yhtälön (23) tapauksessa) usein harhaanjohtavasti jonkinlainen paine-energia-sanan sisältävä kuvaus. Tämä on virheellistä, sillä kyseessä on vain kontrollipinnalla vaikuttavien painevoimien synnyttämä vastaavan materiaalipinnan liikkeestä seuraava tehotermi. Samantapaiset tulkinnot voidaan antaa yhtälön (54) artikkelissa myöhemmin esitettyjen versioiden suhteen. Kuten on jo todettu, mekaanisen energian periaatetta käsitellään virtausmekaniikan kirjallisuudessa yllättävän vähän. Poikkeuksen muodostaa ansiokas teos [3] ja sen uudempi laitos [4].

### Vaihtoehtoinen energian taseyhtälön muoto

Energian taseyhtälö saadaan myös erääseen vaihtoehtoiseen asuun käyttämällä hyväksi mekaanisen energian taseyhtälöä. Vähentämällä yhtälöt (10) ja (44) puolittain toisistaan seuraa yhtälö

$$P_Q - P_{\text{int}} = \frac{DE}{Dt} \quad (55)$$

eli kappaleen saama lämpöteho miinus sisäisten voimien teho on yhtä suuri kuin kappaleen sisäenergian muutosnopeus. Tämä versio on muun muassa kätevä lähtökohta johdettaessa paikallista energiayhtälöä. Siksi saadaan

$$\rho \frac{De}{Dt} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} d_{ij}, \quad (56)$$

jossa kaavan (50) perusteella erityisesti Newtonin nesteellä jännitystehon tiheys

$$\sigma_{ij} d_{ij} = -p d_{ii} + 2\mu d_{ij} d_{ij} + \lambda \mu d_{kk} d_{ii} = -p d_{ii} + \Phi. \quad (57)$$

### Bernoullin yhtälö

Virtausmekaniikan kirjallisuudessa esiintyy suuri määrä enemmän tai vähemmän samannäköisiä kaavoja, jotka kaikki kulkevat Bernoullin yhtälön nimellä. Tähän sopii hyvin mm. seuraava lainaus [5, s. 144]:

"It (the Bernoulli equation) is perhaps one of the most used and misused equation in fluid mechanics. It is misused because the limitations inherent in its development often go unrecognized."

Bernoullin yhtälön johto tapahtuu osittain samaan tapaan kuin mekaanisen energian taseyhtälön johto manipuloimalla paikallista liikeyhtälöä (36) kuitenkin otaksuen yleensä heti kitkaton virtaus ( $\tau_{ij} = 0$ ) eli lähtökohtana on yhtälö

$$\rho b_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \frac{Dv_i}{Dt}. \quad (58)$$

Yksityiskohtaista johtoa ei esitetä tässä. Kirjataan syntyvä Bernoullin yhtälön ehkä tavanomaisin muoto:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2. \quad (59)$$

Tässä indeksit 1 ja 2 viittaavat virtausalueen kahteen eri pisteeseen. Muiden merkintöjen sisältö on ilmeinen. Tehdyt otaksumat ovat seuraavat: (a) kitkaton virtaus, (b) vakio painovoimakenttä, (c) vakio tiheysneste, (d) pysyvä virtaus. Tällöin yhtälö (59) on voimassa kahdelle samalla virtaviivalla olevalle pisteelle. Jos lisäksi kyseessä on (e) pyörteetön virtaus, yhtälö on voimassa kahdelle virtausalueessa olevalle mielivaltaiselle pisteelle. Yhtälöä (59) voidaan soveltaa erityisesti levossa (tai esimerkiksi huonevirtauksessa miltei levossa) olevan nesteen yhteydessä, jolloin nopeusermit katoavat ja saadaan ns. hydrostaattinen painejakauma, jolloin

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2. \quad (60)$$

Bernoullin yhtälön yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia verrattuna energiatarkastelujen avulla saatuihin yhtälöihin selostetaan yleensä virtausmekaniikan oppikirjoissa. Oleellisin ero on tietenkin, että Bernoullin yhtälö ei ole luonteeltaan makroskooppinen vaan liittyy virtausalueen joihinkin pisteisiin eikä integraalisuureisiin. Kuitenkin usein kirjallisuudessa saatetaan puhua yleistetystä Bernoullin yhtälöstä tai insinööri-Bernoullin yhtälöstä (engl. generalized Bernoulli equation, engineering Bernoulli equation). Tällöin näissä yhtälöissä on yleensä mukana jo häviötermejä ja terminologia voi olla harhaanjohtavaa.

## Sovellus

### *Aineominaisuuksia*

Käsittelyn havainnollistamiseksi edellä esitettyjä yleisiä yhtälöitä sovelletaan jatkossa lähinnä kanavistovirtauksen tapaiseen tilanteeseen. Tarkasteltava väliaine on tällöin normaalisti ns. kostea ilma eli kuivan ilman ja vesihöyryn seos ja näiden seoskaasujen otaksutaan tavanomaiseen tapaan noudattavan ihannekaasulakeja. Esimerkiksi lähteessä [6] on tähän aiheeseen liittyvä esitys.

Kuivan ilman tiheys

$$\rho_i = \frac{p_i M_i}{RT} \quad (61)$$

ja vesihöyryn tiheys

$$\rho_h = \frac{p_h M_h}{RT}. \quad (62)$$

Näissä  $p_i$  ja  $p_h$  ovat vastaavat osapaineet ja  $M_i = 0.0290$  kg/mol ja  $M_h = 0.0180$  kg/mol vastaavat moolimassat.  $R = 8.314$  J/(mol K) on yleinen kaasuvakio ja  $T$  [K] termodynaaminen eli absoluuttinen lämpötila. Kokonaistiheys eli kostean ilman tiheys

$$\rho = \rho_i + \rho_h \quad (63)$$

ja paine

$$p = p_i + p_h. \quad (64)$$

Ilman ns. kosteus eli kosteussisältö  $x$  (engl. specific humidity, humidity ratio) [-] eli tietyssä tilavuudessa olevan vesihöyryn massan suhde samassa tilavuudessa olevan kuivan ilman massaan on sama kuin vastaavien tiheyksien suhde:

$$x = \frac{\rho_h}{\rho_i}. \quad (65)$$

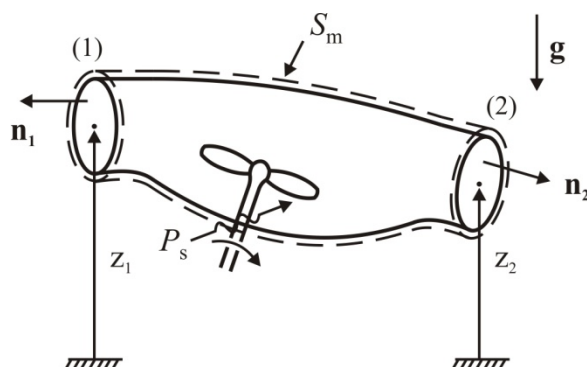
Edellisten kaavojen perusteella kostean ilman  $\rho = \rho(p, T, x)$  tiheydelle tulee konstitutiivinen yhteys

$$\rho = \frac{p}{RT} \frac{M_h (1+x)}{M_h / M_i + x}. \quad (66)$$

Kun kosteus  $x = 0$ , saadaan kuivan ilman tiheys (61). Kanavisto- ja huonevirtauksissa esiintyvät paineiden muutokset ovat normaalisti niin pieniä, että tiheyden voidaan otaksua riippuvan vain lämpötilasta ja kosteudesta eli jäljelle jää riippuvuus  $\rho = \rho(T, x)$ . Etenkin lämpötilan muutosten vaikutus voi olla huonevirtauksissa tärkeä.

Energian taseyhtälön yhteydessä tarvitaan myös ominaisentalpian  $h$  riippuvuus lämpötilasta ja kosteudesta. Koska emme keskity tässä voimakkaasti itse energiaperiaatteen soveltamiseen, viittaamme vain lähteeseen [6].

## Geometria



Kuva 1. Kaksiaukkoinen kontrollitilavuus.

Tarkastellaan kuvan 1 kaaviollisesti esittämää pitkänomaista putkimaista kontrollitilavuutta ja vastaavaa kontrollipintaa. Kontrollipinta muodostuu kohdissa 1 ja 2 tasopinnoista; pinta-alat  $A_1$  ja  $A_2$ . Kontrollipinnan loppuosaa  $S - A_1 - A_2$  nimitetään tässä vaippapinnaksi tai lyhyemmin vaipaksi (engl. mantle) ja sitä merkitään tunnuksella  $S_m$ . Täten mielivaltainen suureen  $f$  pintaintegraali kontrollipinnan yli saadaan muotoon

$$\int_S f dS = \int_{S_m} f dS + \int_{A_1} f dA + \int_{A_2} f dA. \quad (67)$$

Jos tapaus yleistetään siten, että kontrollipinnalla on enemmän kuin kaksi tasoaukkoa, yhtälö (67) laajenee ilmeisin merkinnöin muotoon

$$\int_S f dS = \int_{S_m} f dS + \sum \int_{A_i} f dA. \quad (68)$$

Tätä tärkeitä tapausta ei kuitenkaan viedä tässä tarkastelussa eteenpäin.

Vaippapinta asetetaan yhtymään sovelluksesta riippuen yleensä johonkin kiinteään ainepintaan (esimerkiksi tietyn kanaviston seinämiin), jolloin ns. takertumisehdon (engl. no-slip condition) perusteella nesteen nopeus

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{pinnalla } S_m. \quad (69)$$

Tähän ehtoon täytyy tehdä joskus pieniä paikallisia täsmennyksiä. Tässä ne liittyvät kuvassa 1 esitettyyn siipimäiseen kappaleeseen. Aihetta tullaan käsittelemään tarkemmin jatkos luvussa "energian tase".

### Massan säilyminen

On syytä sopia tietyistä merkkisäännöistä, jotka poikkeavat hieman edellisissä luvuissa esitetystä yleisestä tapauksesta. Valitaan kullekin tasopinnoille mielivaltaisella tavalla positiivinen puoli ja asetetaan yksikkönormaalivektori  $\mathbf{e}$  osoittamaan tähän suuntaan.

Usein  $\mathbf{e}$  pyritään valitsemaan siten, että se on otaksutun virtaussuunnan mukainen. Koska yksikkönormaalivektori  $\mathbf{n}$  merkitsi kontrollitilavuudesta ulospäin suunnattua vektoria,  $\mathbf{e}$  on aina joko  $\mathbf{n}$  tai  $-\mathbf{n}$ . Kuvan 1 tapauksessa on otaksuttu, että neste virtaa alueeseen poikkileikkauksen 1 kautta ja poistuu alueesta poikkileikkauksen 2 kautta. Täten tässä  $\mathbf{e}_1 = -\mathbf{n}_1$  ja  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}_2$ . Indeksit viittaavat kyseisiin poikkileikkauspintoihin liittyviin suureisiin. Otetaan edelleen käyttöön vektorin  $\mathbf{e}$  avulla määritelty poikkileikkauksessa vallitsevan virtausnopeuden  $\mathbf{v}$  normaalikomponentti

$$v_e = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = e_i v_i, \quad (70)$$

jolloin siis tässä  $(v_e)_1 = -(v_n)_1$  ja  $(v_e)_2 = (v_n)_2$ .

Pysyvässä virtauksessa massatase (7) saa otaksuman (69) perusteella (tietenkin myös normaalinopeus pinnalla  $S_m$  häviää) ensin muodon

$$\int_{A_1} \rho v_n dA + \int_{A_2} \rho v_n dA = 0 \quad (71)$$

ja sitten määritelmää (70) käyttäen

$$-\int_{A_1} \rho v_e dA + \int_{A_2} \rho v_e dA = 0. \quad (72)$$

Usein etenkin kanavisto- ja putkivirtausten yhteydessä on tapana toimia poikkileikkauksien suhteen laskettujen keskimääräisten suureiden avulla. Määritellään yleisesti suureen  $f$  pinta-alakeskiarvo (engl. surface average)  $\langle f \rangle$  kaavalla

$$\langle f \rangle = \frac{1}{A} \int_A f dA. \quad (73)$$

jossa  $A$  on kyseisen poikkileikkauksen pinta-ala. Vastaavasti siis

$$\int_A f dA = \langle f \rangle A. \quad (74)$$

Otetaan vielä käyttöön seuraavat tunnuksat. Poikkileikkauksen läpi vektorin  $\mathbf{e}$  suuntaan kulkevaa massavirtaa (engl. mass flow rate) [kg/s] merkitään tunnuksella  $w$ . Vastaavaa tilavuusvirtaa (engl. volume flow rate) [m<sup>3</sup>/s] merkitään tunnuksella  $Q$ . Siis

$$w = \int_A \rho v_e dA = \langle \rho v_e \rangle A \quad (75)$$

ja

$$Q = \int_A v_e dA = \langle v_e \rangle A. \quad (76)$$

Jos tiheys voidaan otaksua poikkileikkauspinnalla vakioksi,

$$w = \rho \langle v_e \rangle A = \rho Q. \quad (77)$$

Tässä esillä olevan putkimaisen geometrian tapauksessa edetään vielä jatkoa silmälläpitäen seuraavasti. Yleistetään käsittelyä siten, että käytetään paikkakoordinaattina putken suunnassa kulkevaa sopivasti valittua käyrää (jota voidaan nimittää vaikka virtausakseliksi) pitkin mitattua kaarenpituutta  $s$ . Virtausakseli voi olla esimerkiksi poikkileikkausten pintakeskiöiden kautta kulkeva käyrä (tai erikoistapauksena suora). Poikkileikkausten pinta-alat voivat riippua koordinaatista  $s$  eli  $A = A(s)$  ja kussakin poikkileikkauksessa on käytössä virtausakselin suuntainen yksikkövektori  $\mathbf{e}$ . Edellä esitetyt kaavat (73) - (77) voivat siis jo liittyä mielivaltaiseen  $s$ :n arvoon.

Palataan massataseyhtälöön (72). Se voidaan siis kirjata muotoon

$$-\langle \rho v_e \rangle_1 A_1 + \langle \rho v_e \rangle_2 A_2 \equiv -w_1 + w_2 = 0 \quad (78)$$

eli kyseiset massavirrat ovat yhtä suuret. Tarkastelemalla mielivaltaiseen arvoon  $s$  liittyvän poikkileikkauksen ja vaikka leikkauksen 1 rajaamaa osakontrollitulavuutta havaitaan heti yleisemmin, että

$$w(s) = \text{vakio} . \quad (79)$$

Yleensä voidaan otaksua, että tiheys on kullakin poikkileikkauksella likimain vakio. Tällöin tiheydet voidaan siirtää kaavassa (72) integraalimerkkien ulkopuolella ja saadaan tulos

$$-\rho_1 \langle v_e \rangle_1 A_1 + \rho_2 \langle v_e \rangle_2 A_2 \equiv -\rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 = 0 . \quad (80)$$

Tämä tulee yleisemmin muotoon

$$\rho(s) Q(s) = \text{vakio} . \quad (81)$$

Jos lopuksi kyseessä otaksutaan olevan vakiotiheysnesteen virtaus saadaan tulos  $Q(s) = \text{vakio}$  .

### *Energian tase*

Kuvassa 1 on esitetty siipimäinen kappale, jonka ajatellaan esittävän symbolisesti esimerkiksi rotaatiossa olevaa puhallinta. Puhaltimen pyörimisen johdosta virtaus ei tietenkään voi olla pysyvää, mutta sen voidaan otaksua olevan jaksollista. Kun tarkastellaankin jakson yli otettuja aikakeskiarvoja, voidaan kaavoja käsitellä pysyvän virtauksen tapaan [5]. Edellisessä luvussa tätä tietoa käytettiin jo hyväksi massataseen suhteen. Kiinteästä aineesta oleva kappale ei tietenkään liiku kuten neste kontrollitulavuuden läpi, mutta tämä ei sulje pois kontrollitulavuuskäsitteen käyttöä. (Kuviteltu) kontrollipinta leikkaa puhaltimen akselin ja voidaan otaksua, että leikkauksessa akselin materiaalin normaalinopeus  $v_n = 0$  . Sensijaan akselin pyörimisestä johtuen itse kontrollipinnan suuntaiset poikkileikkauspinnan nopeuskomponentit ovat yleensä nollasta eroavia ja akselin poikkileikkauksen leikkausjännitykset (joista kertyy akselin vääntömomentti) tekevät siis työtä kontrollialueeseen. Vastaavaa ns. akselitehoa (engl. shaft power) merkitään tässä tunnuksella  $P_s$  . Tämä tehotermi vastaa itse asiassa lausekkeen (15) jälkimmäistä termiä.

Vaihtoehtoinen tapa käsitellä puhallinta on ajatella se erotetuksi itse nesteestä rotaatioissa olevalla kontrollipinnalla. Tällöin täytyy kuitenkin soveltaa liikkuvan kontrollipinnan kaavoja. Aiheesta on erinomainen esitys lähteessä [5].

Tarkastellaan pysyvän virtauksen energiayhtälöä (25). Sen vasemman puolen pintaintegraalit häviävät vaipan osalta. Oikean puolen viimeisestä termistä tulee vaipalta osuus  $P_s$ . Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & \int_{A_1} \rho h v_e dA + \int_{A_1} \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) v_e dA + \int_{A_1} \rho g z v_e dA \\ & - \int_{A_2} \rho h v_e dA - \int_{A_2} \left( \frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) v_e dA - \int_{A_2} \rho g z v_e dA = -P_Q - P_s. \end{aligned} \quad (82)$$

Tässä on tehty lisäksi pari tavanomaista yksinkertaistusta: viskoosien traktioiden teho ja lämpövuoto poikkileikkauksien 1 ja 2 osalta on jätetty huomiotta. Systemin saamaa lämpötehoa on merkitty tunnuksella  $P_Q$  ja sen otaksutaan siis syntyvän vain vaipan kautta. Edelleen tiheys ja ominaisentalpia otaksutaan likimain vakioiksi poikkileikkauksissa ja korvataan koordinaatit  $z$  keskimääräisillä vakioarvoilla. Saadaan muoto

$$\begin{aligned} & \rho_1 h_1 \int_{A_1} v_e dA + \rho_1 \int_{A_1} \left( \frac{1}{2} v_i v_i \right) v_e dA + \rho_1 g z_1 \int_{A_1} v_e dA \\ & - \rho_2 h_2 \int_{A_2} v_e dA - \rho_2 \int_{A_2} \left( \frac{1}{2} v_i v_i \right) v_e dA - \rho_2 g z_2 \int_{A_2} v_e dA = -P_Q - P_s. \end{aligned} \quad (83)$$

eli

$$\begin{aligned} & \rho_1 h_1 \langle v_e \rangle_1 A_1 + \rho_1 \alpha_1 \frac{1}{2} \langle v_e \rangle_1^3 A_1 + \rho_1 g z_1 \langle v_e \rangle_1 A_1 \\ & - \rho_2 h_2 \langle v_e \rangle_2 A_2 - \rho_2 \alpha_2 \frac{1}{2} \langle v_e \rangle_2^3 A_2 - \rho_2 g z_2 \langle v_e \rangle_2 A_2 = -P_Q - P_s. \end{aligned} \quad (84)$$

Edellä on otettu vielä käyttöön ns. liike-energian korjaustekijä (eng. kinetic energy correction factor); esimerkiksi [1]

$$\alpha \approx \langle v_e^3 \rangle / \langle v_e \rangle^3. \quad (85)$$

Tämän tarkoituksena on ottaa huomioon virtausnopeuden epätasainen jakauma poikkileikkauksessa. Usein käytännössä kuitenkin asetetaan  $\alpha = 1$ . Kun lopuksi vielä käytetään hyväksi tilavuusvirran lauseketta  $Q = \langle v_e \rangle A$ , saadaan muoto

$$\begin{aligned} & Q_1 \left[ \rho_1 h_1 + \alpha_1 \frac{1}{2} \rho_1 \langle v_e \rangle_1^2 + \rho_1 g z_1 \right] - Q_2 \left[ \rho_2 h_2 + \alpha_2 \frac{1}{2} \rho_2 \langle v_e \rangle_2^2 + \rho_2 g z_2 \right] \\ & = -P_Q - P_s. \end{aligned} \quad (86)$$



### Mekaanisen energian tase

Pysyvän virtauksen yhtälö (54) tulee ensin (samoin perustein, joita on käytetty edellisessä luvussa) muotoon

$$\int_{A_1} p v_e dA + \int_{A_1} \frac{1}{2} \rho v_i v_i v_e dA + \int_{A_1} \rho g z v_e dA - \int_{A_2} p v_e dA - \int_{A_2} \frac{1}{2} \rho v_i v_i v_e dA - \int_{A_2} \rho g z v_e dA = D - \int_V p d_{ii} dV - P_s. \quad (87)$$

Jälleen pienin likimääräistyksin saadaan

$$p_1 \int_{A_1} v_e dA + \rho_1 \int_{A_1} \frac{1}{2} v_i v_i v_e dA + \rho_1 g z_1 \int_{A_1} v_e dA - p_2 \int_{A_2} v_e dA - \rho_2 \int_{A_2} \frac{1}{2} v_i v_i v_e dA - \rho_2 g z_2 \int_{A_2} v_e dA = D - \int_V p d_{ii} dV - P_s \quad (88)$$

ja sitten

$$p_1 \langle v_e \rangle_1 A_1 + \rho_1 \alpha_1 \frac{1}{2} \langle v_e \rangle_1^3 A_1 + \rho_1 g z_1 \langle v_e \rangle_1 A_1 - p_2 \langle v_e \rangle_2 A_2 - \rho_2 \alpha_2 \frac{1}{2} \langle v_e \rangle_2^3 A_2 - \rho_2 g z_2 \langle v_e \rangle_2 A_2 = D - \int_V p d_{ii} dV - P_s. \quad (89)$$

Käyttämällä taas hyväksi tilavuusvirran lauseketta  $Q = \langle v_e \rangle A$  saadaan

$$Q_1 \left[ p_1 + \alpha_1 \frac{1}{2} \rho_1 \langle v_e \rangle_1^2 + \rho_1 g z_1 \right] - Q_2 \left[ p_2 + \alpha_2 \frac{1}{2} \rho_2 \langle v_e \rangle_2^2 + \rho_2 g z_2 \right] = D - \int_V p d_{ii} dV - P_s. \quad (90)$$

Tämä on makroskooppisen mekaanisen energian taseyhtälön eräs hyödyllinen käyttömuoto. Yhtälön oikean puolen keskimmäisen termin arvioinnista on esitys lähteessä [4, s. 223]. Se jätetään käsittelemättä tässä. Saadulla yhtälöllä on selvästi tiettyjä yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia vastaavan energian taseyhtälön (86) kanssa. Voidaan myös suorittaa vertailua Bernoullin yhtälöön (59). Otaksutaan vakiotiheysneste ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ), jolloin  $Q_1 = Q_2 = Q$  ja kokoonpuristumattomuuden johdosta  $d_{ii} = 0$ . Jaetaan yhtälö (90) puolittain tilavuusvirralla  $Q$  ja asetetaan liike-energian korjaustekijät ykkösiksi:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \langle v_e \rangle_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \langle v_e \rangle_2^2 + \rho g z_2 + \frac{D}{Q} - \frac{P_s}{Q}. \quad (91)$$

Juuri tämäntyyppistä yhtälöä nimitetään usein yleistetyksi Bernoullin yhtälöksi ilmeisesti, koska sillä on paljon samankaltaisuutta varsinaisen Bernoullin yhtälön (59) kanssa. Kuitenkin nyt on siis mukana häviötermi  $D/Q$  ja puhallintermi  $P_s/Q$ . Yhtälö (90) (tai sitä läheisesti muistuttava versio) on erittäin tärkeä käyttökaava kanavisto- ja putkistovirtauksissa. Häviötermille on esitetty alan kirjallisuudessa suurelle määrälle eri

geometrioita lähinnä kokeellisesti määritettyjä arvioita. Esimerkkinä mainittakoon järkälemäinen teos [7], 790 sivua.

Usein annetaan ymmärtää, että käyttökaava (91) seuraa varsinaisesta energia-yhtälöstä (86) ja näin tosiaan edetään usein alan kirjallisuudessa; esimerkiksi lähteessä [1]. Tällöin häviötermi tulee sisältämään lämpötehon ja ominaissisäenergian antamia osuuksia. Tämä on muodollisesti oikein, mutta käytännössä häviötermi esitetään kuitenkin lopuksi kirjallisuuden antamien kokeellisten tietojen avulla yhtälön (91) terminä  $D/Q$ . Varsinaisen energiayhtälön "tehtävä" on sen sijaan antaa tarvittaessa arvioita esimerkiksi systeemin lämpötilajakaumista. Silloin on oltava mukana mm. ominaissisäenergian eksplisiittisiä lausekkeita eikä ominaissisäenergiaa voida kätkeä häviötermiin. Häviötermin syntymistä kuvaillaan tavallisesti sanallisesti selostamalla mm. nesteen pyörteilyä, jossa ns. sisäinen kitka synnyttää kyseisen termin. Näin varmaan onkin, mutta tämä selitys ei ole yhteydessä itse energian taseyhtälöön, sillä kuten yleisestä yhtälöstä (10) näkyy, kappaleen eli systeemin sisäiset voimat eivät ole siinä lainkaan mukana. Sen sijaan mekaanisen energian taseyhtälössä (44) ne ovat.

## Kanavisto

### *Tarvittavat yhtälöt*

Tarkastellaan kuvan 1 asetelmaa ajatelleen esitetty putkimainen geometria nyt osana jotain kanavistoa, jossa analysoidaan kostean ilman virtausta. Esitetään tilanne ensin melko yleisenä ja vähän myöhemmin yksinkertaistettuna. Olkoon poikkileikkauksissa 1 ja 2 perussuureina tilavuusvirta  $Q$ , paine  $p$ , lämpötila  $T$  ja kosteus  $x$ . Vastaava tiheys  $\rho(T, x)$  ja ominaisentalpia  $h(T, x)$  saadaan siis lämpötilan ja kosteuden perusteella. Ajatellaan, että analyysi on antanut tähän mennessä suureet  $Q_1$ ,  $p_1$ ,  $T_1$  ja  $x_1$ . On synnyttävä neljä makroskooppista yhtälöä neljän tuntemattoman  $Q_2$ ,  $p_2$ ,  $T_2$  ja  $x_2$  määrittämiseksi. Ensimmäinen yhtälö saadaan massataseesta. Edellä ei ole käsitelty kosteuden mahdollista muuttumista. Jos sitä tapahtuu esimerkiksi kondensoitumisen johdosta, on muodostettava lisäksi seososuuden  $\rho_h = x / (1 + x) \cdot \rho$  massataseyhtälö. Tätä ei ole käsitelty edellä. Kuitenkin seosvirtauksissa tulee tunnetusti yleisessä tapauksessa muodostaa komponenttien massataseyhtälöitä. Näin saadaan toinen yhtälö. Kolmas yhtälö on mekaanisen energian taseyhtälö ja neljäs yhtälö energian taseyhtälö. Yhtälöt ovat epälineaarisia ja ratkaisu vaatii iteratiivisten menetelmien käyttöä. Edellä ei ole myöskään puututtu mm. energian taseyhtälön yhteydessä systeemin saaman lämpötehon  $P_Q$  mahdollisiin esitysmuotoihin.

Tarkastellaan seuraavaksi pelkistetympää tilannetta hieman yksityiskohtaisemmin. Otaksutaan, että perussuureiksi poikkileikkauksissa 1 ja 2 riittävät  $Q$  ja  $p$ . Analyysi on antanut tähän mennessä arvot  $Q_1$  ja  $p_1$ . On määritettävä  $Q_2$  ja  $p_2$ . Massatase antaa yhtälön (80):

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2. \quad (92)$$

Mekaanisen energian tase antaa yhtälön (90):

$$Q_1 \left[ p_1 + \alpha_1 \frac{1}{2} \rho_1 \langle v_e \rangle_1^2 + \rho_1 g z_1 \right] - Q_2 \left[ p_2 + \alpha_2 \frac{1}{2} \rho_2 \langle v_e \rangle_2^2 + \rho_2 g z_2 \right] = D - \int_V p d_{ii} dV - P_s. \quad (93)$$

Nämä yhtälöt voisivat olla osa edellä esitetyn neljän yhtälön systeemiä. Ongelma näiden yhtälöiden käytössä on nyt kuitenkin etenkin se, että lämpötilan jakautumisesta ja siten tiheyden jakautumisesta ei ole mitään tietoa. Lämpötilan mukaanotto vaatisi energian taseyhtälön käyttöä. Eteenpäin päästään lähinnä vain otaksumalla jälleen, että  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ , jolloin  $Q_1 = Q_2 = Q$  ja  $d_{ii} = 0$ . Saadaan "standardiyhtälöt"

$$Q_1 = Q_2 \quad (94)$$

ja

$$p_1 + \alpha_1 \frac{1}{2} \rho \langle v_e \rangle_1^2 + \rho g z_1 - p_2 - \alpha_2 \frac{1}{2} \rho \langle v_e \rangle_2^2 - \rho g z_2 = \frac{D}{Q} - \frac{P_s}{Q}. \quad (95)$$

Nämä ovat siis paljon kanavisto- ja putkistovirtauksessa käytetyt muodot. Se, että tiheys otaksutaan vakioksi kyseisellä kanavisto-osalla ei tietenkään vaadi, että samaa tiheyttä tulisi käyttää koko kanavistossa. Esimerkiksi analyysi virtauksesta tietyn lämmitys-jäähdytyslaitteen läpi voi antaa tietoa uudesta tiheydestä.

Usein kaavan (95) mukaisessa tapauksessa puhutaan isotermisestä virtauksesta, koska ajatteleamalla nestealkion lämpötila vakioksi myös sen tiheys on ainakin ilmalla tietyllä tarkkuudella vakio. Tarkemmin ottaen paikallinen energiayhtälö (56) kuitenkin osoittaa, että dissipaatio pyrkii vääjäämättä kohottamaan nestealkion sisäenergian ja siten lämpötilan arvoa ja vaikuttaa täten tiheyteen. Useissa tapauksissa tämän ilmiön merkitys voidaan kuitenkin osoittaa pieneksi.

### *Nostevaikutus*

Vaikka otaksuttaisiin edellisen luvun mukaisesti kanaviston ilman tiheys vakioksi, itse kanaviston ilman ja ympäristön ilman mahdollisilla tiheyseroilla voi tunnetusti olla tärkeä merkitys. Seuraavassa käsitellään tätä aihetta.

Olkoon tarkasteltavan kohteen läheisyydessä vastaavassa korkeusasemassa (levossa olevaksi otaksutussa ilmassa) paine  $p$ , lämpötila  $T$  ja kosteus  $x$ , jolloin vastaava tiheys  $\rho_a$  saadaan kaavasta (66). Tämä tiheys otaksutaan jatkossa paikan suhteen vakioksi. (Otaksuma on tietenkin hieman epälooginen, koska ilmanpaine muuttuu korkeuden mukana ja siis sitä kautta myös tiheys, mutta tätä kautta tuleva tiheyden muuttuminen on normaaleissa sovelluksissa mitätön.) Tällöin syntyvä hydrostaattinen painejakauma (Bernoullin yhtälön sovellus) ympäristössä on

$$p_a = p_0 - \rho_a g z. \quad (96)$$

Tässä  $p_0$  on valitulla referenssisitasolla  $z=0$  vallitseva paine. Yhtälön (95) korkeusasemia  $z_1$  ja  $z_2$  vastaavat ympäristön paineen arvot ovat

$$\begin{aligned} p_{a1} &= p_0 - \rho_a g z_1, \\ p_{a2} &= p_0 - \rho_a g z_2. \end{aligned} \quad (97)$$

Edetään kuten esimerkiksi lähteessä [7]. Vähennetään ja lisätään suureet  $p_{a1}$  ja  $p_{a2}$  yhtälön (95) vasemmalle puolelle. Saadaan ensin

$$\begin{aligned} p_1 + \alpha_1 \frac{1}{2} \rho \langle v_e \rangle_1^2 + \rho g z_1 - p_{a1} + p_0 - \rho_a g z_1 \\ - p_2 - \alpha_2 \frac{1}{2} \rho \langle v_e \rangle_2^2 - \rho g z_2 + p_{a2} - p_0 + \rho_a g z_2 = \frac{D}{Q} - \frac{P_s}{Q}. \end{aligned} \quad (98)$$

Pieni järjestely tuottaa sitten yhtälön

$$\begin{aligned} (p_1 - p_{a1}) + \alpha_1 \frac{1}{2} \rho \langle v_e \rangle_1^2 \\ - (p_2 - p_{a2}) - \alpha_2 \frac{1}{2} \rho \langle v_e \rangle_2^2 + (\rho - \rho_a) g (z_1 - z_2) = \frac{D}{Q} - \frac{P_s}{Q}. \end{aligned} \quad (99)$$

Suureet  $p_1 - p_{a1}$  ja  $p_2 - p_{a2}$  ovat ns. mittapaineita (engl. gage pressure) eli paine-eroja mitattuina ympäristön paineen (ilmakehän) suhteen. Näiden suureiden avullahan normaalisti juuri toimitaan LVI-tekniikassa. Jos  $\rho = \rho_a$ , korkeusasematermi katoaa. Jos  $\rho \neq \rho_a$ , kyseistä termiä nimitetään yleensä nostetermiksi (engl. buoyancy term) ja sen vaikutus virtaukseen kulkee joskus myös nimellä hormivaikutus (engl. stack effect.) Tiheyseron syynä on tällöin normaalisti juuri lämpötilaero.

## Loppuhuomautuksia

Artikkelin päätarkoituksena on ollut tuoda esille makroskooppisen mekaanisen energian periaatteen tärkeä asema virtausmekaniikassa. Samoin on oleellista nähdä ero tämän periaatteen ja varsinaisen energian periaatteen välillä. Kummallakin on oma toisistaan eroava sovellusalueensa. Kuten edellä on käynyt ilmi, mekaanisen energian periaate on "valepuvussa" esitetty liikemäärän periaatteen manipuloitu versio. Esimerkiksi mutkia ja supistuksia sisältävässä kanavistossa suora liikemäärän periaatteen käyttö olisi hyvin vaikeaa, koska siinä vaadittaisiin tietoa kontrollialueen pintoihin vaikuttavista voimista.

Huonevirtauksiin liittyen on syytä viitata erityisesti lähteeseen [8], jossa selostetaan lähestymistapaa, jossa rakennuksen huonetilojen ilmavirrat mallinnetaan joukkona kontrollitilavuuksia (esimerkiksi ns. vyöhykkeitä, virtausreittejä, kanavisto-osia), jotka liittyvät toisiinsa tasoaukkojen välityksellä. Tarvittavat yhtälöt synnytetään makroskooppisten massan säilymisen ja mekaanisen energian taseiden avulla. Menettelystä käytetään nimitystä "mechanical power balance approach". Häviöiden arvioinnissa viitataan mm. teokseen [7].

## Kiitokset

Kiitämme käsikirjoituksen arvioijia eräiden virheiden osoittamisesta ja tekstin parannusehdotuksista.

## Viitteet

- [1] White, F.M. (1987) *Fluid Mechanics*, 2nd ed. McGraw-Hill.
- [2] Ziegler, H. (1983) *An Introduction to Thermomechanics*, 2nd ed. North Holland,
- [3] Bird, R.B., Stewart. W.E. and Lightfoot, E.N. (1960). *Transport Phenomena.*, Wiley.
- [4] Bird, R.B., Stewart W.E. and Lightfoot. E.N. (2002). *Transport Phenomena*, 2nd ed. Wiley.
- [5] Hansen, A.G. (1967). *Fluid Mechanics*, Wiley.
- [6] Lampinen, M. J. (2008) *Kostean ilman termodynamiikka, tilapiirroksat ja reaaliikaasut*, Sovelletun termodynamiikan laboratorio 154, Otaniemi.
- [7] Idelchik, I. E. (2003) *Handbook of Hydraulic Resistance*, 3rd ed. Jaico.
- [8] Axley JW and Chung DH (2005). POWBAM0: Mechanical Power Balances for Multi-zone Building Airflow Analysis, *International Journal of Ventilation*, **4**, (2), 95-112.

Eero-Matti Salonen  
Aalto Yliopisto, Insinöörityötekniikan korkeakoulu  
PL 12100, 00076 Aalto  
eero-matti.salonen@aalto.fi

Rauno Holopainen  
Työterveyslaitos  
Työympäristön kehittäminen -tiimi  
Arinatie 3A, 00370 Helsinki  
rauno.holopainen@ttl.fi