

Ensimmäisten derivaattojen ongelmat virtauslaskennassa

Jouni Freund ja Eero-Matti Salonen

Tiivistelmä. Artikkelissa käsitellään muutoksia, joita tarvitaan elementtimenetelmän soveltamisessa, kun siirrytään tyypillisestä lujuusopin tai rakenteiden mekaniikan probleemasta tyypilliseen virtausmekaniikan problemaan. Ensimmäisiin paikkaderivaattoihin liittyviä ongelmia kuvataan. Artikkelin on opetuksellinen ja käsittelyssä toimitaan lievällä matematiikalla.

Avainsanat: virtauslaskenta, elementtimenetelmä, ensimmäiset derivaatat

Johdanto

Artikkelissa kuvataan pelkistetysti niitä muutoksia, joita tarvitaan elementtimenetelmän soveltamisessa, kun siirrytään tyypillisestä lujuusopin tai rakenteiden mekaniikan probleemasta tyypilliseen virtausmekaniikan problemaan. Lähtökohtana on yksiulotteinen tilanne ilman konvektiotermiä, josta päädytään lopulta epälineaariseen kaksiulotteiseen tapaukseen konvektion kanssa. Käsittelyä havainnollistetaan kolmella esimerkillä. Artikkelin pääpaino on opetuksellinen.

Tarkastellaan nestevirtausta kahdessa dimensiossa (x, y -tasossa). Liikemääräyhtälöt ovat tutuin merkinnöin

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho b_x = \rho a_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho b_y = \rho a_y, \quad (2)$$

joissa Eulerin esitystavan mukaiset kiihtyvyyden komponenttien lausekkeet ovat

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3)$$

Käsitellään lisäksi vain kokoonpuristumatonta virtausta, jolloin massan säilymisen periaate antaa ns. jatkuvuusyhtälön yksinkertaisessa muodossa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Reunaehtoina esiintyvät tavallisimmin annetut nopeuskomponentit

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad s_v: \text{llä} \quad (5)$$

ja/tai annetut traktiokomponentit

$$n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} = \bar{t}_x, \quad n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y = \bar{t}_y, \quad s_t: \text{llä}. \quad (6)$$

Otaksutaan konstitutiiviseksi yhteydeksi tavanomainen Stokesin kitkalaki, jolloin

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (7)$$

joissa p on staattinen paine ja μ viskositeetti. Ilmeisten sijoitusten jälkeen päädytään kenttäyhtälöihin (Navier-Stokesin yhtälöt), joissa tuntemattomina suureina esiintyvät nopeuskomponentit u ja v sekä paine p :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho b_x = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho b_y = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Seuraavassa tullaan lainaamaan useaan otteeseen arvostettua klassikkolähdettä [1]. Kyseinen teos onnistuu selittämään ihailtavan suoraviivaisella tavalla ja tyydyttävän vähäisellä matematiikalla numeeriseen lämmönjohtumiseen ja virtausmekaniikkaan liittyviä oleellisia kysymyksiä. Teoksessa sovelletaan kontrollitilavuusmenetelmää ja tässä artikkelissa lähtökohtana on elementtimenetelmä. Kuitenkin lähteen [1] esittämät ongelmat toistuvat myös elementtimenetelmässä. Lähteessä [1, s. 118] todetaan mm. seuraavaa:

”Before we proceed to describe a way out of these difficulties, it is interesting to note that the troublesome hurdles in numerical difficulties seem to be associated with the first derivatives. The second derivative is always well behaved and creates no difficulties. On the other hand, all the complications encountered in Chapter 5 can be attributed to the first derivative representing the convection term; and here the first derivative of pressure (in the momentum equations) and of velocity (in the continuity equation) cause considerable nuisance.”

Tämä lainaus sisältää viittauksia kohtiin, jotka eivät näy suoraan itse lainauksesta. Kuitenkin vertaamalla tekstiä kaavoihin (8), (9) ja (10) on helposti ymmärrettävissä, mihin ongelmiin viitataan. Todetaan vielä jatkossa käytettävän terminologian suhteen näihin yhtälöihin liittyen seuraavaa.

Termejä, joissa on mukana kerroin μ nimitetään tässä diffuusiotermeiksi. Kun μ on vakio paikan suhteen (kuten yleensä), termit koostuvat toisista derivaatoista. Nämä termit ovat ”ongelmattomia”.

Tyyppiä $u \partial u / \partial x$ jne. olevat termit ovat ns. konvektio- eli advektiotermejä. Ne aiheuttavat kahdenlaatuista ongelmia. Ensinnäkin termit ovat epälineaarisia (tuntemattomat esiintyvät tietynlaisessa tulomuodossa). Ratkaisuyritykset johtavat siten väistämättä iteratiiviseen käsittelyyn. Jatkossa konvektiotermit linearisoidaan tarkastelun helpottamiseksi tilapäisesti kirjoittamalla esimerkiksi äskeinen termi muotoon $\bar{u} \partial u / \partial x$, jossa yläviivalla esitetty osuus ajatellaan (hetkellisesti; iteraation tiettyssä vaiheessa) tunnetuksi. Mutta myös tämänkaltainen yksinkertaistettu konvektiotermi voi tuottaa huonosti valitussa numeerisessa menetelmässä voimakkaita epäfysikaalisia heilahteluja. Aikaderivaattatermit $\partial u / \partial t$ ja $\partial v / \partial t$ eivät sinänsä ole erityisen ongelmallisia, paitsi että ne tietenkin mutkistavat tilannetta lisäämällä tehtävään yhden dimension. Tässä artikkelissa aikaderivaattatermit jätetään käsittelemättä.

Suureet ρb_x ja ρb_y ovat ns. lähdetermejä. Annettuina suureina ne eivät aiheuta ongelmia. Kuitenkin joskus näihin termeihin kätetään virtausmekaniikassa epälineaarisia osuuksia, jolloin niiden käsittely täytyy hoitaa sopivasti [1, luku 3.4].

Suureet $\partial p / \partial x$ ja $\partial p / \partial y$ ovat ns. painegradienttitermejä. Jatkuvuusyhtälössä esiintyville nopeuden derivaatoille ei yleensä ole käytössä erityisiä nimityksiä. Äskeisiin suureisiin voidaan liittää lähteestä [1, s.113] seuraava lainaus:

”The real difficulty in the calculation of the velocity field lies in the unknown pressure field. The pressure gradient forms a part of the source term for a momentum equation. Yet, there is no obvious equation for obtaining pressure. For a *given* pressure field, it is true, there is no particular difficulty in solving the momentum equations. But, the way to determine the pressure field seems rather obscure.

The pressure field is indirectly determined via the continuity equation.”

Elementtimenetelmän kannalta on kiinnostavaa todeta seuraavaa. Elementtimenetelmä sai alkunsa ja sen ensimmäiset sovellukset koskivat lujuusopin ja rakenteiden mekaniikan probleemeja. Niissä vallitsevat yhtälöt ovat samankaltaisia kuin yhtälöt (8) ja (9) sisältäen kuitenkin vain diffuusio- ja lähdetermejä. Ensimmäiset derivaatat puuttuvat. Elementtimenetelmä toimii tämäntyyppisten yhtälöiden yhteydessä tunnetusti hyvin; taustana on variaatioperiaatteeseen (potentiaalienergian stationaarisuuden periaate) tukeutuva formulaatio, joka voidaan tulkita myös Galerkinin keinon käytöksi. Kun elementtimenetelmää alettiin sitten soveltaa optimistisesti virtausmekaniikan probleemeihin, tulokset eivät aluksi aina olleet kovin lupaavia. Vasta lukuisten yritysten jälkeen on löytynyt keinot kiertää ensimmäisten derivaattojen tuottamat ongelmat. Tämän artikkelin tarkoituksena on selostaa mahdollisimman yksinkertaisella tavalla näitä keinoja.

Yksidimensioinen tapaus

Yhtälöt

Tarkastellaan yhtälöiden (8), (9) ja (10) yksidimensioisia versioita (x - akseli ja ajasta riippumaton tapaus). Saadaan yhtälöt

$$R_u \equiv -\frac{d}{dx}\left(2\mu\frac{du}{dx}\right) + \rho\bar{u}\frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} - \rho b = 0, \quad (11)$$

$$R_p \equiv -\frac{du}{dx} = 0. \quad (12)$$

Tässä on käytetty elementtimenetelmässä melko tavanomaista tapaa kirjata yhtälöt siten, että yhtälön oikea puoli jää muotoon nolla. Tunnus R seuraa sanasta jäännös (engl. residual). Käytetyt yhtälöiden merkkien vaihdot eivät ole oleellisia. Niitä perustellaan myöhemmin. Merkinnällä \bar{u} on edellisessä luvussa selostettu merkitys.

Olkoot yhtälöt voimassa välillä $0 < x < L$ ja otetaan esimerkkireunaehdot

$$u(0) = \bar{u}_0 \quad (13)$$

ja

$$\sigma_x(L) \equiv \left(-p + 2\mu\frac{du}{dx}\right)_{x=L} = \bar{t}, \quad (14)$$

joissa siis \bar{u}_0 ja \bar{t} ovat annettuja. Tämän yhtälösystemin avulla on päästy mahdollisimman pelkistettyyn asetelmaan. Toisaalta tilanne on ehkä analyyttisessä mielessä liiankin yksinkertainen, koska yhtälö (12) antaa reunaehdon johdosta ratkaisun

$$u(x) = \bar{u}_0. \quad (15)$$

Kun tämä otetaan huomioon yhtälössä (11), jäljelle jää vain kenttäyhtälö

$$\frac{dp}{dx} - \rho b = 0. \quad (16)$$

Täten paitsi diffuusio- myös konvektiotermi katoaa. Havaitaan myös, että reunaehto pelkistyy muotoon $-p(L) = \bar{t}$, joten paineen ratkaisu saadaan integroimalla, kun lähde-termi ρb on annettu. Analyyttisen ratkaisun yksinkertaisuudesta huolimatta yhtälösystemi (11) - (14) antaa kuitenkin mahdollisuuden käsitellä eräitä numeeriseen ratkaisuun liittyviä piirteitä.

Hidas virtaus

Pelkistetään aluksi vieläkin käsittelyä ja jätetään konvektiotermi pois. Kyseessä on ns. hidas tai ryömivä virtaus (engl. creeping flow, Stokes' flow). Saadaan yhtälöt

$$R_u \equiv -\frac{d}{dx}\left(2\mu\frac{du}{dx}\right) + \frac{dp}{dx} - \rho b = 0, \quad (17)$$

$$R_p \equiv -\frac{du}{dx} = 0. \quad (18)$$

Syntyvät lausekkeet saadaan näin aluksi mahdollisimman yksinkertaisiksi, jolloin tarvittavien manipulaatioiden tausta ei huku niin helposti.

Sovelletaan Galerkinin keinoa ja kirjoitetaan heikko muoto

$$F_G \equiv \int_0^L (\delta u R_u + \delta p R_p) dx = 0. \quad (19)$$

Liikemääräyhtälön painofunktioksi on siis valittu nopeuden variaatio δu ja jatkuvuusyhtälön painofunktioksi paineen variaatio δp . Yhtälö (19) on kirjoitettu jatkoa silmälläpitäen aluksi näennäisesti vain yhtenä heikkona muotona. Mutta koska variaatiot δu ja δp voidaan valita mielivaltaisesti, voidaan esittää vaihtoehtoisesti ehkä tavallisempaan tapaan kaksi erillistä heikkoa muotoa:

$$\int_0^L \delta u R_u dx = 0, \quad (20)$$

$$\int_0^L \delta p R_p dx = 0. \quad (21)$$

Seuraavana askeleena heikossa muodossa (20) suoritetaan osittaisintegrointi diffuusio- ja painegradienttitermien suhteen. Saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta u R_u dx &= \int_0^L \delta u \left[-\frac{d}{dx} \left(2\mu \frac{du}{dx} \right) + \frac{dp}{dx} - \rho b \right] dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{d\delta u}{dx} 2\mu \frac{du}{dx} - \frac{d\delta u}{dx} p - \delta u \rho b \right) dx - \left[\left(-p + 2\mu \frac{du}{dx} \right) \delta u \right]_{x=0}^{x=L}. \end{aligned} \quad (22)$$

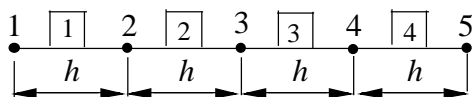
Tehtyjen osittaisintegrointien valintaperuste on seuraava. Diffuusiotermin osittaisintegroinnilla saadaan alennettua u :hun kohdistuvaa derivointia, jolloin elementtiapproksimaatiossa u :lle voidaan käyttää vain C^0 -jatkovaa esitystä. Tämäntyyppinen manipulaatio on tuttu standardiaskel lujusopin ongelmien yhteydessä. Suureen u roolia vastaa silloin siirtymä. Painegradienttitermin osittaisintegroinnilla saadaan paine mukaan reunatermeihin, jolloin mahdollisen traktioreunaehdon soveltaminen onnistuu suoraviivaisesti. Jälkimmäisen heikon muodon (21) suhteen ei ole tarpeen suorittaa osittaisintegrointia. Jos se tehdään, saadut diskreetit yhtälöt eivät muutu. Reunalla $x=0$ u on annettu reunaehdon (13) perusteella, joten asetetaan $\delta u(0) = 0$ ja vastaava sijoitustermi häviää. Reunalla $x=L$ sijoitustermin vastaava osuus on reunaehdon (14) perusteella \bar{t} . Näin ollen heikot muodot (20) ja (21) ovat tässä lopuksi yksityiskohtaisesti

$$\int_0^L \left(\frac{d\delta u}{dx} 2\mu \frac{du}{dx} - \frac{d\delta u}{dx} p - \delta u \rho b \right) dx - (\bar{t} \delta u)_{x=L} = 0, \quad (23)$$

$$\int_0^L \delta p \left(-\frac{du}{dx} \right) dx = 0. \quad (24)$$

Esimerkki 1

Havainnollisuuden saavuttamiseksi otetaan seuraava pelkistetty esimerkkitapaus. Elementtiverkko koostuu viidestä solmusta ja neljästä tasapituudesta elementistä (Kuva 1).



Kuva 1. Elementtiverkko.

Elementtiapproksimaatiot ovat

$$u \approx \tilde{u} = N_1(x)\bar{u}_0 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3 + N_4(x)u_4 + N_5(x)u_5, \quad (25)$$

$$p \approx \tilde{p} = N_1(x)p_1 + N_2(x)p_2 + N_3(x)p_3 + N_4(x)p_4 + N_5(x)p_5, \quad (26)$$

jossa suureet N ovat (tässä ns. globaaleja) muotofunktioita. Nopeuden esityksessä on otettu jo huomioon Dirichlet-reunaehdon (13) antama solmuarvo solmussa 1. Kyseessä on siis kummallekin tuntemattomalle samaa C^0 -jatkovaa tyyppiä oleva elementteittäin lineaarinen esitys. Tuntemattomia solmuarvoja on yhdeksän kappaletta. Diskreetit painofunktiot saadaan varioimalla solmuarvoja:

$$\delta \tilde{u} = N_2(x)\delta u_2 + N_3(x)\delta u_3 + N_4(x)\delta u_4 + N_5(x)\delta u_5, \quad (27)$$

$$\delta \tilde{p} = N_1(x)\delta p_1 + N_2(x)\delta p_2 + N_3(x)\delta p_3 + N_4(x)\delta p_4 + N_5(x)\delta p_5. \quad (28)$$

Solmuihin liittyvät diskreetit yhtälöt syntyvät tuttuun tapaan antamalla vuoronperään aina vain yhden solmuarvon variaatiolle nollasta eroava arvo; helpoiten muodollisesti arvo 1. Koska näitä solmuarvovariaatioita on yhdeksän, saadaan siten myös tuntemattomia vastaava määrä diskreettejä yhtälöitä.

Tässä ei ole tarpeen käydä läpi laskelmien yksityiskohtia. Viskositeetti μ ja lähde-termi ρb otaksutaan vakioiksi. Saadaan yhtälösystemi

$$\frac{1}{2}(\bar{u}_0 - u_2) = 0, \quad (29)$$

$$2\mu \frac{1}{h}(-\bar{u}_0 + 2u_2 - u_3) + \frac{1}{2}(-p_1 + p_3) - \rho b h = 0, \quad (30)$$

$$\frac{1}{2}(\bar{u}_0 - u_3) = 0, \quad (31)$$

$$2\mu \frac{1}{h}(-u_2 + 2u_3 - u_4) + \frac{1}{2}(-p_2 + p_4) - \rho b h = 0, \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}(u_2 - u_4) = 0, \quad (33)$$

$$2\mu \frac{1}{h}(-u_3 + 2u_4 - u_5) + \frac{1}{2}(-p_3 + p_5) - \rho b h = 0, \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}(u_3 - u_5) = 0, \quad (35)$$

$$2\mu \frac{1}{h}(-u_4 + u_5) + \frac{1}{2}(-p_4 - p_5) - \frac{1}{2}\rho bh - \bar{t} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{1}{2}(u_4 - u_5) = 0. \quad (37)$$

Tämä on vielä matriisimerkinnöin

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{4\mu}{h} & 0 & -\frac{2\mu}{h} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\mu}{h} & -\frac{1}{2} & \frac{4\mu}{h} & 0 & -\frac{2\mu}{h} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2\mu}{h} & -\frac{1}{2} & \frac{4\mu}{h} & 0 & -\frac{2\mu}{h} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\mu}{h} & -\frac{1}{2} & \frac{2\mu}{h} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ u_2 \\ p_2 \\ u_3 \\ p_3 \\ u_4 \\ p_4 \\ u_5 \\ p_5 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\bar{u}_0 \\ \rho bh + \frac{2\mu}{h}\bar{u}_0 \\ -\frac{1}{2}\bar{u}_0 \\ \rho bh \\ 0 \\ \rho bh \\ 0 \\ \frac{1}{2}\rho bh + \bar{t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

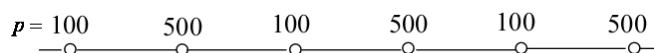
Yhtälöt on listattu samassa järjestyksessä kuin edellä ja tuntemattomat on listattu järjestyksessä, joka näkyy matriisiyhtälön pystyvektorista. Kerroinmatriisiin nähdään olevan tällöin symmetrisen. Yhtälöiden (17) ja (18) merkkivalinnat selittyvät seuraavasti. On ensinnäkin haluttu kauneussyistä, että lävistäjällä olevat kertoimet $4\mu/h$ esiintyvät nimenomaan positiivisina. Jotta sitten saataisiin lisäksi symmetrinen kerroinmatriisi, on jatkuvuusyhtälö (18) täytynyt lisäksi varustaa miinusmerkillä. Saavutettu symmetria perustuu siihen, että hitaan virtauksen tapauksessa probleema voidaan myös kuvata tietyn potentiaalienergiaa muistuttavan funktionaalin avulla. Tämä ei kuitenkaan ole kovin tärkeää, koska realistisemmissä tapauksissa mukana on konvektiota ja silloin symmetriaa ei voida enää saavuttaa.

Otetaan tarkastelun tarkemmaksi kohteeksi erityisesti alueen sisäpisteisiin liittyvät tyypilliset yhtälöt kuten (32) ja (33). Jakamalla ne vielä pituudella h nähdään välittömästi, että kyseessä ovat tutut keskeisdifferenssimenetelmällä saadut approksimaatiot yhtälöille (17) ja (18) pisteessä 3. Galerkinin menetelmällä on siis ilmeisesti tässä paljon samankaltaisuutta differenssimenetelmän (tai myös kontrollitilavuusmenetelmän) kanssa. Siten Galerkinin menetelmään voi myös liittyä samoja puutteita kuin differenssimenetelmään.

Näissä yhtälöissä on oleellista, että diffuusio-osuus tuottaa viereisille solmuarvoille voimakkaan $-1,2,-1$ -kytkennän. Sen sijaan painegradientin ja jatkuvuusyhtälön

approksimaatiossa kytkentä on heikkoa: itse keskeisen pisteen solmuarvo ei ole ollenkaan mukana. Tämä ei ole tässä niin tärkeää jatkuvuusyhtälöissä, koska diffuusioosuudessa on jo nopeusarvojen hyvä kytkentä. Sen sijaan painegradientti on huonosti edustettuna. Joka tapauksessa voidaan todeta, että ensimmäisten derivaattojen ongelma kytkeytyy oleellisesti mainittuun puuttuvaan naapurisolmuarvojen kytkentään. Se voi johtaa ratkaisujen epäfysikaalisiin heilahteluihin.

Painegradientin suhteen tässä on jälleen lainattu lähdettä [1]. Kuva 2 on kopio lähteen kuvasta 6.2.



Kuva 2. Siksak-painejakauma.

Kuva esittää kaaviollisesti (lukujen arvoilla ei ole oleellista merkitystä) mahdollista painejakaumaa pisteittäin verkon sisäosassa. Kuvaan 2 liittyen [1, s. 116]:

”Thus, the devastating consequence is that such a wavy pressure field will be *felt* like a uniform pressure field by the momentum equation.”

Kahdessa ja kolmessa dimensiossa voi esiintyä kuvan 2 tyyppistä mutkikkaampaa heilahtelua ilman, että liikemääräyhtälöt kokevat painegradientin. Samoin jatkuvuusyhtälön suhteen voidaan esittää kuvaan liittyvää analogista tarkastelua.

Esimerkkiprobleemassa saatiin siis edellä Galerkinin keinon avulla yhdeksää tuntematonta vastaten yhdeksän systeemyhtälöä (29) – (37). Niiden ratkaisu ei kuitenkaan onnistu. Nopeuden solmuarvot löytyvät kyllä oikein: $u_2 = \bar{u}_0$, $u_3 = \bar{u}_0$, $u_4 = \bar{u}_0$, $u_5 = \bar{u}_0$, mutta painearvot eivät ratkea. Tämä ymmärretään yhtälöitä tarkastelemalla: paineet esiintyvät vain neljässä yhtälössä, mutta tuntemattomia painearvoja on viisi.

Elementtimenetelmän soveltamisyritykset virtausmekaniikassa etenivät siten, että nopeuskomponenteille ja paineelle valittiin taitavasti toisistaan poikkeavaa tyyppiä olevat approksimaatiot. Esimerkiksi lähteessä [2] on esitetty näitä valintoja. Taustalla oleva matemaattinen teoria on vaativaa. Yleispiirteinä paineen approksimaatio on alemmaa astetta kuin nopeuskomponenttien. Jos esimerkkitaapauksessamme valitaan paineelle epäjatkuva, kussakin elementissä vakioarvoinen approksimaatio, tuntemattomia painearvoja jää jäljelle neljä. Pitämälle u :lle edelleen sama approksimaatio kuin edellä systeemyhtälöitä tulee kahdeksan. Tämän systeemin ratkaisu onnistuu ja saadut painearvot yhtyvät keskimäärin tarkkaan ratkaisuun. Kuitenkin erityyppisten ja kahdessa ja kolmessa dimensiossa mutkikkaiden approksimaatioiden käyttö on kömpelöä ja epätydyttävää. Seuraavassa luvussa esitetään suoraviivaisempi tapa paineen käsittelyyn.

Galerkin-pienimmän neliön keino

Ns. painotettujen jäännösten menetelmän (engl. method of weighted residuals) eräs tärkeä versio Galerkinin keinoon lisäksi on pienimmän neliön keino. Sovellettuna esillä olevaan systeemiin (17) – (18) muodostetaan ensin pienimmän neliön funktionaali

$$\Pi(u, p) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\tau_u (R_u)^2 + \tau_p (R_p)^2 \right] dx. \quad (39)$$

Tässä annetut suureet τ_u ja τ_p ovat ns. painotekijöitä, joilla yhtälöjäännösten neliöitä painotetaan. Tässä on käytetty ns. lävistäjätyyppistä painotusta; yleisempi tapa on myös mahdollinen. Vaaditaan funktionaalin (39) stationaarisuutta. Variaatiolaskennan sääntöjen avulla päädytään yhtälöön

$$F_{LS} \equiv \int_0^L (\delta R_u \tau_u R_u + \delta R_p \tau_p R_p) dx = 0. \quad (40)$$

Tätä voidaan nimittää pienimmän neliön keinoon heikoksi muodoksi. Verrattaessa Galerkinin keinoon heikkoon muotoon (19) havaitaan, että painofunktioiden valintaa ei tarvitse suorittaa: termit $\delta R_u \tau_u$ ja $\delta R_p \tau_p$ syntyvät automaattisesti.

Pienimmän neliön keinoon käyttö sellaisenaan yksinkertaista C^0 -jatkovaa approksimaatiota soveltaen edellyttää, että kenttäyhtälöissä saa olla korkeintaan ensimmäisiä paikkaderivaattoja. Tämä merkitsee usein, että täytyy määritellä uusia muuttujia ja uusia kenttäyhtälöitä. Koska yhtälö (17) sisältää toisen derivaatan, emme siis voi soveltaa pienimmän neliön keinoa suoraan yhtälösystemiin (17) ja (18). Unohdetaan tämä kuitenkin hetkeksi. Kirjoitetaan Galerkinin ja pienimmän neliön keinoon lineaarikombinaationa uusi heikko muoto

$$F_G + F_{LS} = 0. \quad (41)$$

Kyseessä on ns. Galerkin-pienimmän neliön (engl. Galerkin-least-squares method) keinoon käyttö. Kun sovelletaan elementteittäin lineaarista approksimaatiota, pienimmän neliön heikossa muodossa (40) kuitenkin elementteittäin

$$R_u \approx \frac{dp}{dx} - \rho b, \quad \delta R_u \approx \frac{d\delta p}{dx}, \quad (42)$$

$$R_p = -\frac{du}{dx}, \quad \delta R_p = -\frac{d\delta u}{dx}. \quad (43)$$

Täten heikko muoto (40) yksinkertaistuu:

$$F_{LS} \equiv \int_0^L \left[\frac{d\delta p}{dx} \tau_u \left(\frac{dp}{dx} - \rho b \right) + \frac{d\delta u}{dx} \tau_p \frac{du}{dx} \right] dx = 0. \quad (44)$$

Ottamalla jälleen huomioon, että δu ja δp ovat riippumattomia, Galerkin-pienimmän neliön keino tuottaa siis seuraavat kaksi uutta heikkoa muotoa

$$\int_0^L \left[\frac{d\delta u}{dx} (2\mu + \tau_p) \frac{du}{dx} - \frac{d\delta u}{dx} p - \delta u \rho b \right] dx - (\bar{t} \delta u)_{x=L} = 0, \quad (45)$$

$$\int_0^L \left[\delta p \left(-\frac{du}{dx} \right) + \frac{d\delta p}{dx} \tau_u \frac{dp}{dx} - \frac{d\delta p}{dx} \tau_u \rho b \right] dx = 0. \quad (46)$$

Oleellisin muutos on heikkojen muotojen (24) ja (46) suhteen. Jälkimmäiseen on tullut painetta koskeva diffuusiotyypinen termi. Tämä siis synnyttää puuttuvan kytkennän vierekkäisten paineen solmuarvojen välille.

Koska nopeuden solmuarvoille on jo diffuusion kautta keskinäistä kytkentää, tuntuu painotekijän τ_p merkitys turhalta verrattuna painotekijän τ_u merkitykseen ja täten asetetaan yhtälössä (45) termin 2μ rinnalla $\tau_p = 0$. Dimensiotarkastelu osoittaa, että painotekijä τ_u voidaan esittää kussakin elementissä muodossa

$$\tau_u = \hat{\tau}_u \frac{h^2}{\mu}, \quad (47)$$

jossa h on kyseisen elementin pituus ja $\hat{\tau}_u$ positiivinen dimensioton kerroin. Kertoimen $\hat{\tau}_u$ sopivan arvon valinnalle on tässä vaikea löytää logiikkaa. Numeeriset kokeilut osoittavat, että tämä arvo voidaan valita tässä miltei mielivaltaisesti, kunhan se eroaa nollassa. Jatkossa konvektiotermin mukaanotto antaa painotekijän τ_u valintaan tiettyä logiikkaa.

Approksimaatioiden (42) suhteen voidaan nopeasti katsoen esittää vakavaa kritiikkiä. Kuinka voidaan noin vain hylätä toisen derivaatan osuus yhtälöjäännöksessä? Tätä aihepiiriä on käsitelty perusteellisemmin mm. lähteessä [3]. Jos käytettäisiin pelkkää pienimmän neliön keinoa, toisen derivaatan osuutta ei tietenkään voitaisi jättää huomiotta. Mutta kombinaatiossa Galerkin-pienimmän neliön keino pienimmän neliön heikko muoto antaa osuuden, joka vähenee verkon tiheydessä. Esimerkiksi, jos lausekkeessa (47) pidetään kerroin $\hat{\tau}_u$ vakiona, painokerroin τ_u lähestyy nolaa verkon tihentyessä. Täten pienimmän neliön heikon muodon yhteydessä tehtyjen ”rikosten” merkitys katoaa lopuksi teoreettisessa ”äärettömän” tiheässä verkossa, joka on käytössä matemaattisten suppenevuustarkastelujen yhteydessä. Toisten derivaattojen unohtaminen pienimmän neliösumman termissä saattaa kuitenkin vaikuttaa menetelmän konvergenssiominaisuuksiin, jos nopeuden approksimaatio ei ole lineaarinen tai bilineaarinen.

Galerkin-pienimmän neliön keinon tietynlaisena syntykirjoituksena voitaneen pitää Courantin artikkelia [4]. Vasta paljon myöhemmin; esimerkiksi [5], vastaavaa ajattelutapaa alettiin soveltaa virtausmekaniikassa.

Esimerkki 2

Tarkastellaan esimerkin 1 esittämää tapausta nyt heikkojen muotojen (45) ja (46) avulla asettaen $\tau_p = 0$. Tällöin ensimmäiseen heikkoon muotoon liittyvät diskreetit yhtälöt ovat samat kuin esimerkissä 1. Jälkimmäiseen heikkoon muotoon liittyvät diskreetit yhtälöt sen sijaan muuttuvat. Matriisimuodossa päädytään yhtälösystemiin

$$\begin{bmatrix}
\frac{\tau_u}{h} & -\frac{1}{2} & -\frac{\tau_u}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & \frac{4\mu}{h} & 0 & -\frac{2\mu}{h} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\tau_u}{h} & 0 & \frac{2\tau_u}{h} & -\frac{1}{2} & -\frac{\tau_u}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{2\mu}{h} & -\frac{1}{2} & \frac{4\mu}{h} & 0 & -\frac{2\mu}{h} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & -\frac{\tau_u}{h} & 0 & \frac{2\tau_u}{h} & -\frac{1}{2} & -\frac{\tau_u}{h} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{2\mu}{h} & -\frac{1}{2} & \frac{4\mu}{h} & 0 & -\frac{2\mu}{h} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\tau_u}{h} & 0 & \frac{2\tau_u}{h} & -\frac{1}{2} & -\frac{\tau_u}{h} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\mu}{h} & -\frac{1}{2} & \frac{2\mu}{h} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\tau_u}{h} & -\frac{1}{2} & \frac{\tau_u}{h}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
p_1 \\
u_2 \\
p_2 \\
u_3 \\
p_3 \\
u_4 \\
p_4 \\
u_5 \\
p_5
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
-\frac{1}{2}\bar{u}_0 - \tau_u \rho b \\
\rho b h + \frac{2\mu}{h}\bar{u}_0 \\
-\frac{1}{2}\bar{u}_0 \\
\rho b h \\
0 \\
\rho b h \\
0 \\
\frac{1}{2}\rho b h + \bar{t} \\
\tau_u \rho b
\end{Bmatrix}. \quad (48)$$

Havaitaan, että kerroinmatriisi on edelleen symmetrinen. Sisäpisteisiin liittyy painearvojenkin suhteen -1, 2, -1-tyyppinen kytkentä. Nyt saadaan ratkaisu myös paineille:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -4hpb - \bar{t}, & p_2 &= -3hpb - \bar{t}, & p_3 &= -2hpb - \bar{t}, \\
p_4 &= -hpb - \bar{t}, & p_5 &= -\bar{t}.
\end{aligned} \quad (49)$$

Arvot yhtyvät analyttiseen ratkaisuun. Tulokset pysyvät valitusta $\hat{\tau}_u$:n arvosta riippumatta samoina.

Konvektio

Diffuusio-konvektioyhtälö

Ennen konvektiotermin mukaanottoa varsinaisessa liikemääräyhtälössä tarkastellaan alustavana aputehtävänä ns. skalaarista yksidimensioista diffuusio-konvektioyhtälöä

$$R_\varphi \equiv -\frac{d}{dx} \left(d \frac{d\varphi}{dx} \right) + a \frac{d\varphi}{dx} - s = 0. \quad (50)$$

Tässä $\varphi(x)$ on tuntematon suure ja diffusiivisuus $d(x)$, konvektionopeus $a(x)$ ja lähde-termi $s(x)$ ovat tunnettuja suureita. Tämä on elementtimenetelmää käsittelevissä oppikirjoissa yleisesti käytetty malliprobleema, jolla selostetaan yksinkertaisimmillaan konvektiotermiin liittyviä piirteitä. Otetaan vielä Dirichlet-reunaehdot $\varphi(0) = \bar{\varphi}_0$ ja $\varphi(L) = \bar{\varphi}_L$.

Puhtaan Galerkinin keinon soveltaminen voimakkaan konvektio-osuuden kanssa johtaa φ :n solmuarvojen heilahteluun; siis ensimmäisen derivaatan aiheuttama ongelma. Lääkityksenä toimii jälleen Galerkin-pienimmän neliön keino. Vastaava heikko muoto on

$$F_G + F_{LS} \equiv \int_0^L \left[\frac{d\delta\varphi}{dx} (d + \tau_\varphi a^2) \frac{d\varphi}{dx} + \delta\varphi a \frac{d\varphi}{dx} - \left(\delta\varphi + \frac{d\delta\varphi}{dx} \tau_\varphi a \right) s \right] dx = 0. \quad (51)$$

Tämä syntyy samaan tapaan kuin edellä. Asetelma on vain yksinkertaisempi, koska lähtökohtana on vain yksi kenttäyhtälö ja tarvitaan vain yksi painotekijä: τ_φ . On siis taas otaksuttu pienimmän neliön keinon yhteydessä elementeittäin lineaarinen approksimaatio. Yhtälöstä (51) huomataan, että diffuusiotermin on tullut lisäys $\tau_\varphi a^2$. Tämän termin sopiva arvo vaimentaa heilahtelut pois. Numeerisen menetelmän stabiiliustarkastelu osoittaa, että painotekijän arvolla on approksimaation kertaluvusta riippuva alaraja. Tilanne on siis sama kuin hitaan virtauksen tapauksessa, jossa ongelmana oli painemuuttuja. Pyrkimällä tulokseen, joka antaa vakiodatan, lineaarisen approksimaation ja säännöllisen verkon tapauksessa tarkkaan ratkaisuun yhtyvät solmuarvot, voidaan painotekijälle johtaa lauseke

$$\tau_\varphi = \left(\frac{pe}{2} \coth \frac{pe}{2} - 1 \right) \frac{d}{a^2} = \frac{1}{2} \left(\coth \frac{pe}{2} - \frac{2}{pe} \right) \frac{h}{a}, \quad (52)$$

jossa pe on ns. (elementtikohtainen) Péclet luku (h on elementin pituus)

$$pe = \frac{ah}{d}. \quad (53)$$

Edellä elementin kokoon liittyvälle Péclet luvulle on käytetty merkintää pe erotukseksi tavanomaisesta merkinnästä Pe , jossa pituusmitta kuvaa ratkaisualueen kokoa tai liittyvä muutoin itse tehtävään. On mielenkiintoista todeta, että kun painotekijä (52) kerrotaan yhtälössä (51) termillä a^2 , efektiiviseksi diffusiivisuudeksi jää jäljelle

$$d \frac{pe}{2} \coth \frac{pe}{2} \quad (54)$$

ja tämä lähestyy arvoa d , kun $pe \rightarrow 0$. Kun d ja a riippuvat paikasta, painotekijä määritetään yleensä kullekin elementille käyttäen sopivia keskimääräisiä arvoja. Pienillä ja suurilla Péclet luvun arvoilla, kun $|pe| \rightarrow 0$ tai $|pe| \rightarrow \infty$, päädytään yksinkertaisiin esityksiin $\tau_\varphi \rightarrow h^2 / (12d)$ ja $\tau_\varphi \rightarrow h / (2|a|)$ vastaavassa järjestyksessä. Lausekkeen (52) ns. kaksoisasymptoottinen approksimaatio

$$\tau_\varphi = \frac{h}{2} \min \left(\frac{h}{6d}, \frac{1}{|a|} \right) \quad (55)$$

perustuu näihin yksinkertaistuksiin.

Konvektio mukana

Otetaan nyt tarkastelun kohteeksi alkuperäinen systeemi (11) ja (12), jossa edellisessä on siis konvektiotermin mukana:

$$R_u \equiv -\frac{d}{dx} \left(2\mu \frac{du}{dx} \right) + \rho \bar{u} \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} - \rho b = 0, \quad (56)$$

$$R_p \equiv \frac{du}{dx} = 0. \quad (57)$$

Jatkuvuusyhtälö (57) on nyt kirjattu ilman edellä käytettyä miinusmerkkiä, jonka avulla saavutettiin hitaassa virtauksessa symmetrinen, diskreetti yhtälösystemi. Tarkempi analyysi osoittaa nimittäin ehkä hieman yllättäen, että merkinvaihdon jälkeen päästään stabiliteetin kannalta yksinkertaisempaan tilanteeseen. Konvektio synnyttää jatkossa jo melkoisesti lisätermejä. Kuitenkin Galerkin-pienimmän neliön keinon käytössä tarvittavat askeleet ovat periaatteeltaan täysin samoja kuin edellä.

Galerkinin keinon heikko muoto (19) antaa nyt yhtälöiden (23) ja (24) sijasta yhtälöt

$$\int_0^L \left(\frac{d\delta u}{dx} 2\mu \frac{du}{dx} + \delta u \rho \bar{u} \frac{du}{dx} - \frac{d\delta u}{dx} p - \delta u \rho b \right) dx - (\bar{t} \delta u)_{x=L} = 0, \quad (58)$$

$$\int_0^L \delta p \left(\frac{du}{dx} \right) dx = 0. \quad (59)$$

Jälkimmäinen yhtälö on olennaisesti sama kuin aikaisemmin. Edelliseen yhtälön integrandiin on tullut lisää konvektio-osuus $\delta u \rho \bar{u} du / dx$. Sen suhteen ei ole tarvetta suorittaa osittaisintegrointia.

Pienimmän neliön heikossa muodossa (40) nyt

$$R_u \approx \rho \bar{u} \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} - \rho b, \quad \delta R_u \approx \rho \bar{u} \frac{d\delta u}{dx} + \frac{d\delta p}{dx}, \quad (60)$$

$$R_p = \frac{du}{dx}, \quad \delta R_p = \frac{d\delta u}{dx}. \quad (61)$$

Saadaan

$$F_{LS} \equiv \int_0^L \left[\left(\rho \bar{u} \frac{d\delta u}{dx} + \frac{d\delta p}{dx} \right) \tau_u \left(\rho \bar{u} \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} - \rho b \right) + \frac{d\delta u}{dx} \tau_p \frac{du}{dx} \right] dx = 0. \quad (62)$$

Koska jälleen δu ja δp ovat riippumattomia, syntyy siis seuraavat kaksi pienimmän neliön heikkoa muotoa:

$$\int_0^L \left[\rho \bar{u} \frac{d\delta u}{dx} \tau_u \left(\rho \bar{u} \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} - \rho b \right) + \frac{d\delta u}{dx} \tau_p \frac{du}{dx} \right] dx = 0, \quad (63)$$

$$\int_0^L \frac{d\delta p}{dx} \tau_u \left(\rho \bar{u} \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} - \rho b \right) dx = 0. \quad (64)$$

Kombinoimalla vastaavasti (58) ja (63) sekä (59) ja (64), Galerkin-pienimmän neliön keinon lopulliset heikot muodot ovat siis

$$\int_0^L \left[\frac{d\delta u}{dx} \left(2\mu + \tau_u \rho^2 \bar{u}^2 + \tau_p \right) \frac{du}{dx} + \delta u \rho \bar{u} \frac{du}{dx} - \frac{d\delta u}{dx} p + \frac{d\delta u}{dx} \tau_u \rho \bar{u} \frac{dp}{dx} - \left(\delta u + \frac{d\delta u}{dx} \tau_u \rho \bar{u} \right) \rho b \right] dx - (\bar{t} \delta u)_{x=L} = 0, \quad (65)$$

$$\int_0^L \left[\delta p \frac{du}{dx} + \frac{d\delta p}{dx} \tau_u \rho \bar{u} \frac{du}{dx} + \frac{d\delta p}{dx} \tau_u \frac{dp}{dx} - \frac{d\delta p}{dx} \tau_u \rho b \right] dx = 0. \quad (66)$$

Kysymys kuuluu jälleen: miten valitaan painotekijöiden τ_u ja τ_p sopivat arvot? Edelleen tuntuu siltä, että voidaan ilman ongelmia asettaa $\tau_p = 0$. Painotekijän τ_u suhteen edetään seuraavasti. Ajatellaan kenttäyhtälöä (56) hetkellisesti siten, että painotermin osuus tunnetaan ja se toimii ikään kuin lähdeterminä liikemääräyhtälössä. Esimerkiksi lähteessä [1] esitetty ns. SIMPLE-algoritmi toimii iteroinnin tietyssä vaiheessa näin. Tällöin liikemääräyhtälö on samaa muotoa kuin skalaarinen yhtälö (50) ja saadaan vastaavuudet

$$d \cong 2\mu, \quad a \cong \rho \bar{u}. \quad (67)$$

Elementtikohtainen Péclet luku on siis

$$pe = \frac{\rho \bar{u} h}{2\mu}. \quad (68)$$

Vastaavasti τ_u määritetään kaavan (52) vastineesta:

$$\tau_u = \left(\frac{pe}{2} \coth \frac{pe}{2} - 1 \right) \frac{2\mu}{\rho^2 \bar{u}^2} = \frac{1}{2} \left(\coth \frac{pe}{2} - \frac{2}{pe} \right) \frac{h}{\rho \bar{u}}. \quad (69)$$

Vastaavalla tavalla kuin diffuusio-konvektioyhtälön yhteydessä, lauseke (69) voidaan korvata käytännön laskelmissa mukavammalla approksimaatiollaan

$$\tau_u = \frac{h}{2} \min \left(\hat{\tau} \frac{h}{12\mu}, \frac{1}{\rho |\bar{u}|} \right). \quad (70)$$

Koska lauseke (69) perustuu suoraan diffuusio-konvektioyhtälöanalogiaan, jossa mm. painotermin mahdollinen vaikutus tilanteeseen on sivuutettu, kerroin $\hat{\tau}$ ajatellaan jatkossa numeerisen menetelmän ominaisuuksiin vaikuttavaksi parametriksi. Haasteena on löytää arvo, joka kombinoi stabiiliuden ja tarkkuuden sopivasti. Hieman yksinkertaistaen, liian suuri arvo johtaa numeeriseen diffuusion ja liian pieni arvo epäfyysikaaliseen heilahteluun.

Huomataan kaavan (68) perusteella, että verkon tihentyessä Péclet luvut pienenevät ja siis vastaavasti pienemmän neliön keinon antaman osuudet pienenevät. Jos \bar{u} on täsmälleen nolla eli konvektio häviää, yhtälön (69) jälkimmäinen muoto ja sen approksimaatio (70) palautuvat Stokesin probleeman yhteydessä käytettyyn muotoon (47). Näin ollen painotus tuottaa termin $d\delta p/dx \cdot \tau_u \cdot dp/dx$, joka havaittiin edellä tarpeelliseksi jo ilman konvektiota olevassa virtauksessa.

Tähän lukuun ei ole liitetty esimerkkitausta, koska se ei toisi mitään oleellisesti uutta tässä pelkistetyssä yhden dimension tapauksessa. Luku palvelee kuitenkin lähinnä kaavan (70) perusteella seuraavaa lukua.

Kaksi dimensiota

Yhtälöt

Siirrytään nyt kahden dimension tapaukseen ja kirjataan kaavat (8), (9) ja (10) uusin merkinnöin sekä merkinvaihdoin stationaarisessa tapauksessa:

$$R_u \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \rho \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho b_x = 0, \quad (71)$$

$$R_v \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \rho \left(\bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho b_y = 0, \quad (72)$$

$$R_p \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (73)$$

Tarvittavat manipulaatiot ovat vastaavia kuin yhdessä dimensiossa; lausekkeista vain tulee pitempiä. Galerkinin keinossa lähdetään heikosta muodosta

$$F_G \equiv \int_A (\delta u R_u + \delta v R_v + \delta p R_p) dA = 0, \quad (74)$$

jossa integrointi on siis tarkastelualueen yli. Diffuusio- ja painegradienttitermien suhteen suoritetaan osittaisintegroinnit. Reunaehtojen (5) perusteella asetetaan nopeusreunalla s_v , $\delta u = 0$ ja $\delta v = 0$. Reunaehtojen (6) perusteella sijoitetaan traktioreunalla esiintyviin reunatermeihin annetut traktiokomponentit \bar{t}_x ja \bar{t}_y . Saadaan

$$\begin{aligned} F_G \equiv \int_A & \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \delta u \rho \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial \delta u}{\partial x} p - \delta u \rho b_x \right. \\ & + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta v}{\partial y} 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \delta v \rho \left(\bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \delta v}{\partial y} p - \delta v \rho b_y \\ & \left. + \delta p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dA - \int_{s_t} (\bar{t}_x \delta u + \bar{t}_y \delta v) ds = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Pienimmän neliön keinon heikko muoto on ilmeisin merkinnöin

$$F_{LS} \equiv \int_A (\delta R_u \tau_u R_u + \delta R_v \tau_v R_v + \delta R_p \tau_p R_p) dA = 0, \quad (76)$$

jossa, kun hylätään jälleen diffuusiotermit,

$$R_u \approx \rho \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho b_x, \quad \delta R_u \approx \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial x}, \quad (77)$$

$$R_v \approx \rho \left(\bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho b_y, \quad \delta R_v \approx \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial y}, \quad (78)$$

$$R_p = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \delta R_p = \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y}. \quad (79)$$

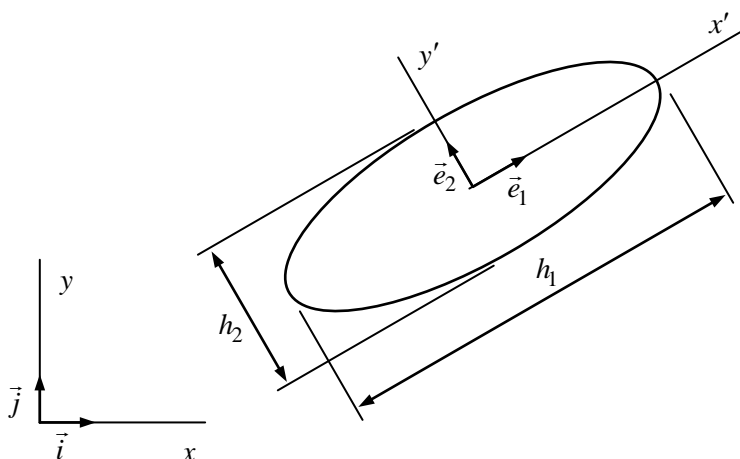
Galerkin-pienimmän neliön keinon heikko muoto on siis

$$F_G + F_{LS} = 0. \quad (80)$$

Kun otetaan huomioon, että δu , δv ja δp ovat riippumattomia, saadaan lopulliset kolme heikkoa muotoa. Ne jätetään tässä esittämättä.

Painotekijät

Painotekijöiden τ_u , τ_v ja τ_p sopivien arvojen valinta ei ole kahdessa (tai kolmessa) dimensiossa itsestään selvää. Tässä toimitaan seuraavalla ad hoc-menetelyllä. Otetaan jälleen heti $\tau_p = 0$. Tyypillinen elementti korvataan lähteessä [6] esitetyllä tavalla tilapäisesti elliptisellä korvike-elementillä (Kuva 3).



Kuva 3. Korvike-elementti.

Esimerkiksi kiinteän seinämän (jossa nopeus häviää) läheisyydessä virtaus voi olla rajakerrostyyppistä ja tehokas elementtiverkko voi johtaa reunan suunnassa pitkänomaisiin elementteihin. Täten elementin vallitsevien pituusmittojen suuruuksilla ja suunnilla voi olla oleellista merkitystä. Kuvan 3 x' , y' -koordinaatisto yhtyy korvike-elementin pääsuuntiin. Olkoot \vec{e}_1 ja \vec{e}_2 x' - ja y' -akselien suuntaiset yksikkövektorit ja siis

$$\vec{h}_1 \equiv h_1 \vec{e}_1 \equiv h_1 (e_{1x} \vec{i} + e_{1y} \vec{j}), \quad \vec{h}_2 \equiv h_2 \vec{e}_2 \equiv h_2 (e_{2x} \vec{i} + e_{2y} \vec{j}), \quad (81)$$

joissa \vec{i} ja \vec{j} ovat x - ja y -akselien suuntaiset yksikkövektorit. Vastaavat nopeuskomponentit olkoot u' ja v' . Saadaan siis $u' = \vec{e}_1 \cdot \vec{v}$ ja $v' = \vec{e}_2 \cdot \vec{v}$, joissa \vec{v} on nopeusvektori. Lisäksi nopeuskomponenttien välinen riippuvuus

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad (82)$$

jossa

$$[L] = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} \\ e_{2x} & e_{2y} \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Pienimmän neliön funktionaalien liikemääräyhtälöihin liittyvä integrandi on matriisimerkinnöin

$$\begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_u & \tau_{uv} \\ \tau_{vu} & \tau_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \end{Bmatrix}. \quad (84)$$

Tässä on otaksuttu edellä esitettyä lävistäjätyyppistä painotusta yleisempi esitys; siis mukana painotekijät $\tau_{uv} = \tau_{vu}$. Kun toimitaan x', y' -koordinaatistossa, saadaan vastaavasti integrandi

$$\begin{Bmatrix} R_{u'} \\ R_{v'} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_{u'} & 0 \\ 0 & \tau_{v'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{u'} \\ R_{v'} \end{Bmatrix}. \quad (85)$$

Tässä siis nyt nimenomaan valitaan lävistäjätyyppinen painotus. Kuvitellaan yksidimensioiset virtaustapaukset pääsuunnissa ja saadaan vastaavat Péclet luvut

$$pe_1 = \frac{\rho h_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{v}}{2\mu}, \quad pe_2 = \frac{\rho h_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{v}}{2\mu} \quad (86)$$

sekä painotekijät

$$\tau_{u'} \equiv \tau_1 \approx \frac{h_1}{2} \min \left(\hat{\tau} \frac{h_1}{12\mu}, \frac{1}{\rho |\vec{e}_1 \cdot \vec{v}|} \right), \quad \tau_{v'} \equiv \tau_2 \approx \frac{h_2}{2} \min \left(\hat{\tau} \frac{h_2}{12\mu}, \frac{1}{\rho |\vec{e}_2 \cdot \vec{v}|} \right). \quad (87)$$

Liikemääräyhtälöiden komponenttien välillä on myös riippuvuus

$$\begin{Bmatrix} R_{u'} \\ R_{v'} \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} R_u \\ R_v \end{Bmatrix}. \quad (88)$$

Vaaditaan, että lausekkeet (84) ja (85) tietyssä pisteessä saavat saman arvon; kyseessä on ns. invariantti skalaari. Tästä seuraa yhteys

$$\begin{bmatrix} \tau_u & \tau_{uv} \\ \tau_{vu} & \tau_v \end{bmatrix} = [L]^T \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} [L]. \quad (89)$$

Koska käsittely on spekulatiivinen, on ehkä kuitenkin liioittelua ottaa painotekijät $\tau_{uv} = \tau_{vu}$ mukaan. Ainakin alustavasti voidaan tyytyä kaavan (89) antamiin arvoihin τ_u ja τ_v . Joka tapauksessa esitetty menettely antaa painotuksille tiettyä anisotropisuutta, joka tuntuu probleeman luonteen huomioon ottaen mielekkäältä.

Epälineaarisuus

Konvektiotermeissä esiintyy nopeuksien tuloja, joten tehtävä on epälineaarinen. Eräs yksinkertainen tapa on päivittää edellä artikkelissa esiintyvien termien kuten $\bar{u} \partial u / \partial x$

osuuksia \bar{u} ns. Picardin iteraatiolla. Yleensä tehokkaammin toimiva menettely on Newtonin menetelmä, jossa yhtälöt linearisoidaan ratkaisun $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}$ kohdalla suorittamalla heikossa muodossa korvaukset

$$R_u \approx \rho \left(-\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho b_x, \quad (90)$$

$$R_v \approx \rho \left(-\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho b_y, \quad (91)$$

joissa yläviiva viittaa siis lähtöarvoon tai edellisellä iteraatiolla saatuun arvoon. Yläviivalla varustetut suureet ajatellaan vakioiksi varioinnin suhteen, joten

$$\delta R_u \approx \rho \left(\delta u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \delta v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial x}, \quad (92)$$

$$\delta R_v \approx \rho \left(\delta u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \delta v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta p}{\partial y}. \quad (93)$$

Iterointi tunnetusti suppenee neliöllisesti, mikäli arvaus \bar{u}, \bar{v} on riittävän lähellä ratkaisua ja heikko muoto täyttää tietyt jatkuvuusvaatimukset. Käytännössä neliöllinen suppeneminen tarkoittaa oikeiden desimaalien lukumäärän kaksinkertaistumista kullakin iteroinnilla. Lopetusehtona voidaan käyttää esimerkiksi suhteellista muutosta

$$\max \left(\frac{\|u - \bar{u}\|_\infty}{U}, \frac{\|v - \bar{v}\|_\infty}{U} \right) \leq \varepsilon, \quad (94)$$

joissa U on sopivasti valittu vertailunopeus (annettu nopeus reunalla tms.) ja ε on valittu muutoksen maksimiarvo. Käytännössä vaaditaan, että solmuarvojen muutoksen maksimi alittaa annetun arvon εU . Ehdossa (94) yläviivalla varustetut suureet viittaavat siis edellisen iteraation arvoihin.

Hyvän alkuarvauksen löytäminen saattaa tuottaa ongelmia virtausprobleeman yhteydessä. Eräs tapa hoitaa ongelma on jakaa kuormituspolku (tässä Reynoldsin luku tai tiheys) useaan osaan siten, että lähtötilanteena on lineaarinen Stokesin probleema. Kunkin iteraation lähtöarvaus saadaan riittävän hyväksi yksinkertaisesti kuormituspolun jakoa tihentämällä olettaen, että ratkaisu riippuu jatkuvasti Reynoldsin luvusta.

Reunaehdoista

Kun jatkuvuusyhtälö (4) integroidaan puolittain alueen yli, saadaan Gaussin lausetta soveltamalla tulos

$$\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA \equiv \int_s (n_x u + n_y v) ds = 0, \quad (95)$$

joissa n_x ja n_y ovat reunan ulos suunnatun yksikkövektorin komponentit. Jos reuna on kokonaan tyyppiä s_v , tulee siis annettujen suureiden \bar{u} ja \bar{v} toteuttaa yhtälö (95). Tässä tapauksessa paine jää vakiota vaille määräämättömäksi.

Tämä ymmärretään fysikaalisesti esimerkiksi seuraavan ajatuskokeen avulla. Otetaan pelkistetty staattinen tapaus, jolloin reunalla $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$. Olkoon reunan jollain osalla ”pieni mäntä”, jolla voidaan selvästi vaikuttaa paineen arvoon kuitenkin (teoriassa) siirtämättä mäntää, koska kyseessä on kokoonpuristumaton ainemalli. Kyseessä on ns. ”piston action” [7, s. 126]. Paine ei siis määräydy yksikäsitteisesti.

Tavanomainen tapa edetä on kiinnittää paineen taso vaatimalla, että paineen keskiarvo on nolla:

$$\int_A p \, dA = 0. \quad (96)$$

Tämä voidaan käsittää esitettyjen heikkojen muotojen kannalta rajoiteyhtälönä ja hoitaa siten tutun Lagrangen kertojamenettelyn avulla. Varioimalla (96) ja ottamalla käyttöön Lagrangen kertoja λ saadaan yhtälö

$$\lambda \int_A \delta p \, dA = 0, \quad (97)$$

jossa λ on tehtävän uusi tuntematon (vakio). Rajoiteyhtälö (96) voidaan kirjoittaa variaatiohenkisesti vaihtoehtoisessa muodossa

$$\delta \lambda \int_A p \, dA = 0, \quad (98)$$

jossa $\delta \lambda$ on mielivaltainen. Yhteisesti ehdot (97) ja (98) saadaan mukaan lisäämällä varsinaiseen heikkoon muotoon termi

$$F_L \equiv \delta \left(\lambda \int_A p \, dA \right) \equiv \delta \lambda \int_A p \, dA + \lambda \int_A \delta p \, dA. \quad (99)$$

Seuraavassa esimerkissä 3 reuna on kokonaan tyyppiä s_v ja ratkaisussa sovelletaan Lagrangen kertojamenettelyä.

Esimerkki 3

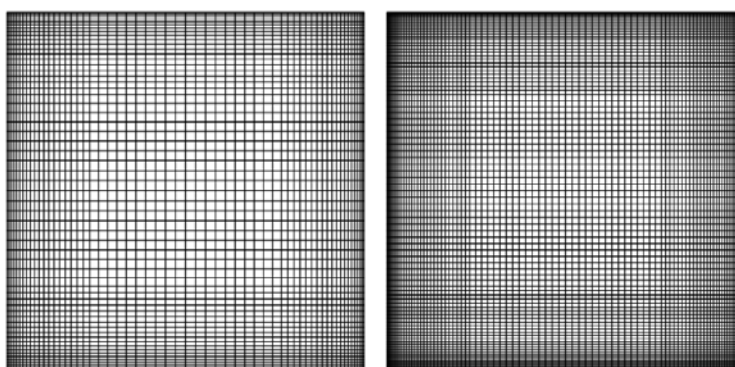
Eräs tavanomainen uusien koodien tai numeeristen menetelmien testitapaus on kiertovirtaus suljetussa alueessa (eng. lid driven cavity flow, driven cavity flow), jossa geometria on yksinkertainen neliö [8], [9], [10], [11]. Tehtävässä neliön sivun pituus on L ja reunaehtona annetaan tangenciaalinen nopeus U yhdellä sivulla. Kaikilla muilla sivuilla nopeus häviää. Annettu nopeus reunalla on epäjatkuva kahdessa nurkkapisteessä, josta seuraa mm. paineen singulaarisuus [10]. Fysikaalisesti ajatellen massallinen nestepartikkeli pakotetaan muuttamaan nopeuttaan hyvin lyhyellä matkalla, mikä edellyttää hyvin suurta painegradienttia. Lähellä nurkkaa paine on kääntäen verrannollinen etäisyyteen nurkasta eli $p \sim r^{-1}$, josta seuraavien mahdollisten numeeristen ongelmien pohtiminen sivuutetaan esimerkissä. Tehtävässä traktiota ei anneta millään reuanosalla, joten lisäehtona vaaditaan, että paineen keskiarvo on nolla.

Ratkaisun luonne riippuu vahvasti Reynoldsin luvusta

$$\text{Re} = \frac{UL\rho}{\mu}, \quad (100)$$

jossa L on tehtävään liittyvä mitta (tässä neliön sivunpituus). Pienillä Reynoldsin luvun arvoilla tehtävä on lähellä lineaarista Stokesin problemaa. Reynoldsin luvun kasvaessa ratkaisualueen nurkkiin syntyy vastakkaisuuntaisia pyörteitä ja reunoille jyrkkä rajakerros. Käytännössä elementtiverkkoa pitää tihentää vahvasti reunojen ja nurkkien kohdalla pyörrerakenteiden yksityiskohtien esiin saamiseksi. Vertailun helpottamiseksi esimerkkiin on valittu lähteessä [9] käytetyt Reynoldsin luvut 100, 1000, 3200, 5000, 7500 ja 10000.

Todettakoon, että todellisuudessa virtaus ei ole suurilla Reynoldsin luvuilla enää välttämättä ajasta riippumatonta eikä edes kaksi-dimensioista, vaan virtaus muuttuu turbulenttiseksi. Kyseessä on vain suosittu teoreettinen testitapaus, josta on suuri määrä eri menetelmillä saatuja numeerisia tuloksia.



Kuva 4. Elementtiverkot.

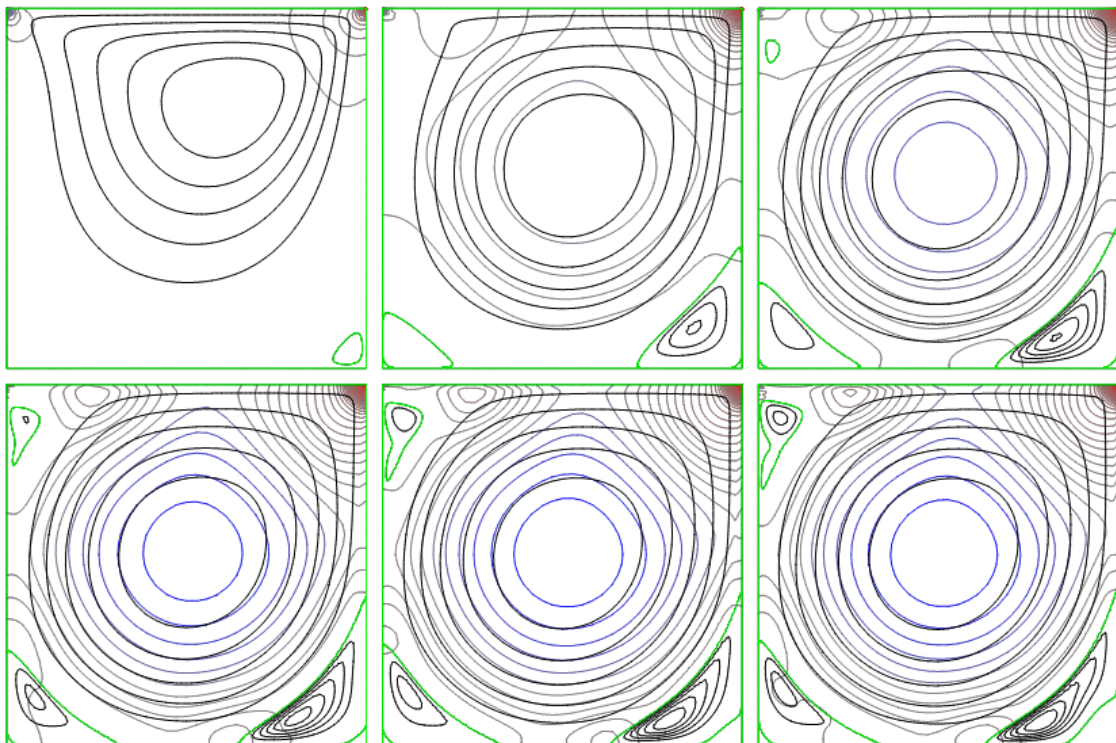
Laskentaesimerkin reunoja ja nurkkia kohden tihennetyt 60×60 ja 90×90 elementtiverkot esitetään kuvassa 4. Sekä nopeuskomponenteille että paineelle käytetään bilineaarista approksimaatiota ja heikon muodon integraaleihin sovelletaan ko. approksimaation suhteen tarkkaa kvadratuurua. Syntyvän epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaisussa Reynoldsin lukua kasvatetaan vaiheittain Stokesin probleeman arvosta 0, jolloin Newtonin menetelmän lähtöarvaus kullekin lisäykselle on riittävän lähellä ratkaisua. Laskelmissa käytettiin kymmentä Reynoldsin lukua väliltä 0-10000 (0, 100, 400, 1000, 2000, 3200, 4000, 5000, 7500, 10000). Iteroinnin lopetuskriteerissä (94) valittu muutoksen maksimiarvo $\varepsilon = 10^{-5}$, joka saavutettiin maksimissaan kuudella iteraatiolla. Laskelmissa käytettiin stabilointiparametrin vakioarvoa $\hat{\tau} = 1/10$. Mathematica-kielellä koodattu ratkaisija perustui tavanomaiseen elementtimenetelmän algoritmiin, jossa systeemyhtälöt kootaan elementtiosuuksista jne.

Elementtiverkkoja 60×60 ja 90×90 vastaavat paine- ja virtafunktioratkaisut esitetään kuvissa 5a ja 5b. Vihreät käyrät kuvaavat virtafunktion arvoa nolla. Näiden käyrien rajaamissa alueissa virtafunktio saa joko positiivisia tai negatiivisia arvoja, jotka liittyvät myötäpäivään ja vastapäivään kiertäviin pyörteisiin. Keskellä aluetta sijaitsevan pyörteen suunta on myötäpäivään. Virtafunktio ψ määritettiin ratkaisemalla yhtälöt

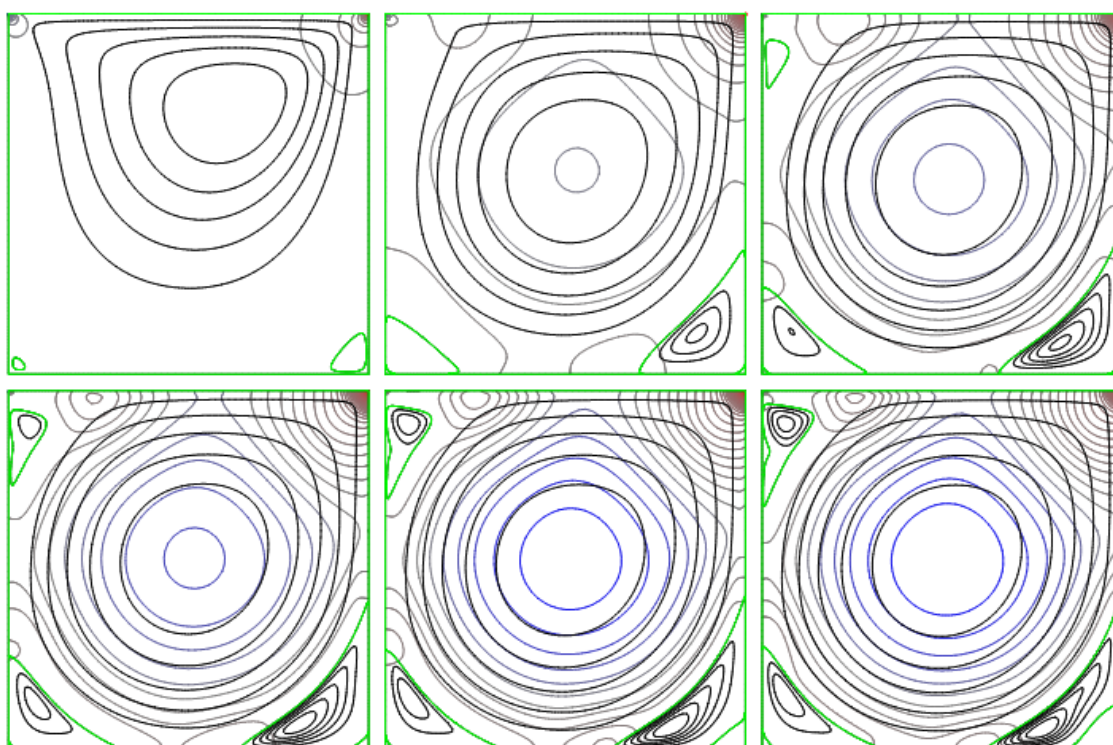
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad (101)$$

elementtimenetelmällä käyttäen pienimmän neliösumman funktionaalia ja bilineaarista approksimaatiota. Virtafunktion arvo asetettiin nolaksi reunoilla.

Paineen tasa-arvokäyrissä sininen väri kuvaa pienintä negatiivista arvoa ja punainen suurinta positiivista arvoa tietylle Reynoldsin luvun arvolle. Harmaa väri vastaa paineen arvoa nolla. Harmaan ja sinisen sekä harmaan ja punaisen värin sekoitukset kuvaavat paineen arvoa nollan sekä minimin ja maksimin välillä. Reynoldsin luvun arvolla 0 paineratkaisu on antisymmetrinen geometrisen keskipisteen kautta kulkevan pysty akselin suhteen. Suurilla Reynoldsin luvun arvoilla paineen maksimi sijoittuu oikeaan ylänurkkaan ja minimi on geometrisessa keskipisteessä. Partikkelimekaniikan käsitteitä käyttäen pyörteen keskipisteestä ulospäin suunnattu painegradientti edustaa keskeisvoimaa nestepartikkelin kiertoliikkeessä.

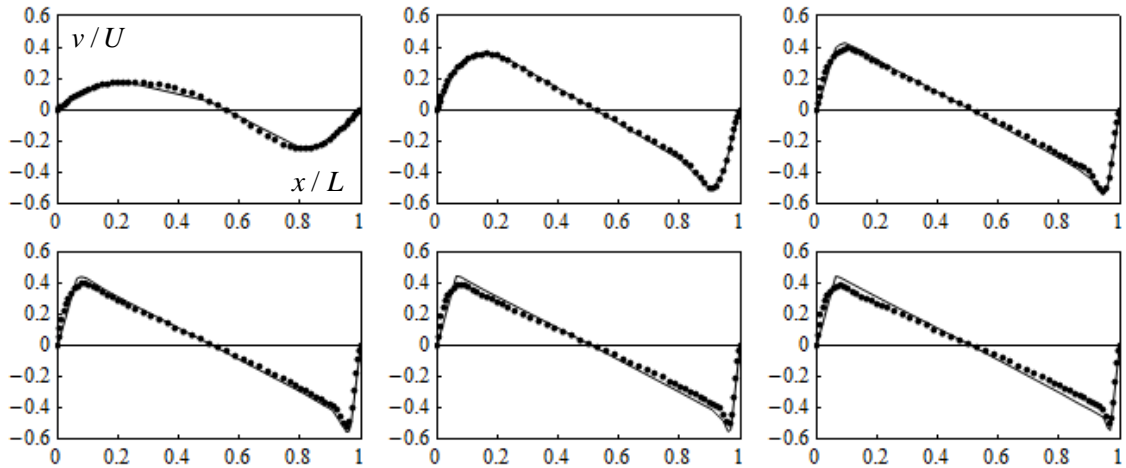


Kuva 5a. Paineen (sininen-harmaa-punainen) ja virtafunktion (musta, vihreä) tasa-arvokäyrät Reynoldsin luvun funktiona (60×60 elementtiä). Reynoldsin luvut 100, 1000, 3200, 5000, 7500 ja 10000 vasemmalta oikealle ja ylhäältä alaspäin.

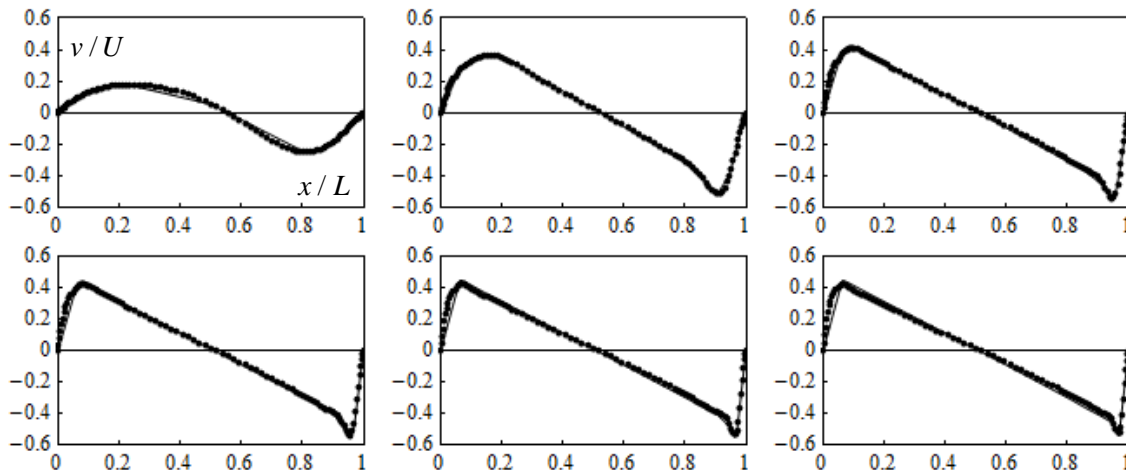


Kuva 5b. Paineen (sininen-harmaa-punainen) ja virtafunktion (musta, vihreä) tasa-arvokäyrät Reynoldsin luvun funktiona (90×90 elementtiä). Reynoldsin luvut 100, 1000, 3200, 5000, 7500 ja 10000 vasemmalta oikealle ja ylhäältä alaspäin.

Kuvissa 6a ja 6b esitetään nopeuskomponentille v saatu ratkaisu alueen keskipisteen kautta kulkevalla x -akselin suuntaisella suoralla. Lähteen [9] referenssiratkaisu on laskettu virtafunktio-pyörteisyys formulaatiolla ja differenssimenetelmällä. Kuvasta nähdään että suurilla Reynoldsin luvun arvoilla virtaus alueen sisällä on karkeasti ottaen jäykän kappaleen rotaatiota geometrisen keskipisteen suhteen ja siten nopeuskenttä on hyvin säännöllinen suurimmassa osassa aluetta. Kuitenkin ratkaisuvirhe/numeerinen dissipaatio reunojen läheisyydessä vaikuttaa myös ratkaisun säännölliseen osaan ”virheellisenä reunaehtona”. Tästä johtuen verkkoa pitää tihentää vahvasti reunan läheisyydessä pyrittäessä hyvään tarkkuuteen suurilla Reynoldsin luvun arvoilla. Yhtälön (87) stabilointiparametrin $\hat{\tau}$ arvo vaikuttaa ratkaisuun siten, että numeerinen dissipaatio ja siitä seuraava virhe kasvaa $\hat{\tau}$:n kasvaessa. Laskelmissa käytetty arvo $\hat{\tau} = 1/10$ tuotti selvästi jonkin verran numeerista dissipaatiota. Stabilointiparametrin arvon pienentäminen vähensi virhettä (keskimäärin), mutta johti epäfysikaalisiin heilahteluihin paineratkaisussa lähellä singulaarisia pisteitä. Kuvien 6a ja 6b perusteella Reynoldsin luku vaikuttaa samansuuntaisesti ratkaisun tarkkuuteen. Epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaisussa vaadittu iteraatioiden lukumäärä kasvoi myös jonkin verran stabilointiparametria kasvatettaessa.

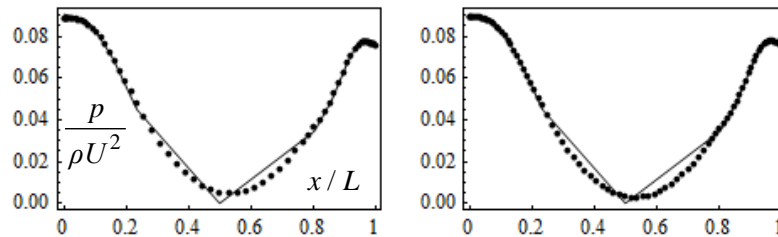


Kuva 6a. Nopeuden y –komponentti (60×60 elementtiä) ratkaisalueen keskellä verrattuna lähteen [9] ratkaisuun (ehyt käyrä). Reynoldsin luvut 100, 1000, 3200, 5000, 7500 ja 10000 vasemmalta oikealle ja ylhäältä alaspäin.



Kuva 6b. Nopeuden y –komponentti ratkaisalueen keskellä (90×90 elementtiä) verrattuna lähteen [9] ratkaisuun (ehyt käyrä). Reynoldsin luvut 100, 1000, 3200, 5000, 7500 ja 10000 vasemmalta oikealle ja ylhäältä alaspäin.

Kuvassa 7 esitetään paineratkaistu alueen keskellä kun $Re = 1000$ verrattuna lähteen [10] referenssiratkaisuun. Lähteen [10] laskelmissa paineen arvo ratkaisalueen keskikohdassa on asetettu nolaksi, kun taas esimerkin laskelmissa paineen keskiarvo on asetettu nolaksi, joten kuvan 7 käyrät on siirretty suunnilleen samaan kohtaan vertailun helpottamiseksi.



Kuva 7. Paine alueen keskellä verrattuna lähteen [10] ratkaisuun (ehyt käyrä). Elementtiverkot 60×60 ja 90×90 vasemmalta oikealle.

Loppuhuomautuksia

Edellä on käsitelty laminaarista virtausta. Käytännön virtaukset ovat yleensä turbulენტtisia. Lainaten jälleen lähdettä [1] voidaan ehkä hieman kärjistäen todeta, että turbulენტtisen virtauksen laskenta tapahtuu samoin kuin laminaarisessa virtauksessa; ns. efektiivinen viskositeetti vain saadaan verrattain mutkikkaalla tavalla. Esimerkiksi ns. $k - \varepsilon$ -mallissa efektiivinen viskositeetti määräytyy turbulenssin kineettisen energian k ja turbulenssin kineettisen energian dissipaation ε paikallisten arvojen perusteella. Näille kahdelle suureelle on omat diffuusio-konvektio-tyyppiset yhtälönsä. Tätä aihetta samoin kuin konvektion ja epälinearisuuden käsittelyä on tarkasteltu perusteellisemmin kuin tässä artikkelissa mm. lähteessä [12].

Esimerkkilaskelmissa käytettiin lineaarista tai bilineaarista approksimaatiota sekä nopeuskomponenteille että paineelle ja integraalit elementtien ylitse määritettiin tarkasti. Samaa tyyppiä olevat approksimaatiot eivät edusta välttämättä parasta mahdollista kombinaatiota tarkkuuden, stabiiliuden ja tehokkuuden välillä. Numeerisen menetelmän ominaisuuksiin voidaan vaikuttaa mm. paineen ja nopeuden approksimaatioiden kertaluvuilla, paineapproksimaation jatkuvuusominaisuuksilla, termien ali-integroinnilla, elementtiverkon valinnalla, sekä stabilointiparametrilla. Esimerkin 3 yhteydessä tehtävä ratkaistiin kahdella eri verkon tiheydellä ja muutamalla stabilointiparametrin arvolla pyrkimättä kuitenkaan systemaattisesti parhaaseen mahdolliseen valintaan.

Viitteet

- [1] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1980.
- [2] O. Pironneau, *Finite Element Methods for Fluids*, Wiley, 1989.
- [3] J. Freund, E.-M. Salonen, Sensitizing according to Courant the Timoshenko beam finite element solution, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1621-1631, 2000.
- [4] R. Courant, Über ein konvergenzerzeugendes Prinzip in der Variationsrechnung, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen*, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1922 (1923), 144-150, 1923.
- [5] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, G. M. Hulbert, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for

- advective-diffusive equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:41-54, 1989.
- [6] J. Freund, E.-M. Salonen, The concept of substitute element, *Journal of Structural Mechanics*, 40(3):15-27, 2007.
- [7] L. Prandtl and O. G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics*, Dover, 1957.
- [8] E. Erturk, Discussions on driven cavity flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60:275–294, 2009.
- [9] U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method, *Journal of Computational Physics*, 48:387–411, 1982.
- [10] O. Botella, R. Peyret, Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow, *Computers & Fluids*, 27(4):421–433, 1998.
- [11] C.-H. Bruneau, S. Mazon, The 2D lid-driven cavity problem revisited, *Computers & Fluids*, 35:326–348, 2006.
- [12] J. Hämäläinen, J. Järvinen, *Elementtimenetelmä virtauslaskennassa, 2. uudistettu painos*, CSC - Tieteellinen laskenta Oy, <http://www.csc.fi/julkaisut/oppaat>, 2006.

Jouni Freund
Aalto Yliopisto, Insinöörیتieteiden korkeakoulu
Sovelletun mekaniikan laitos
PL 14300, Puumiehenkuja 5 A
00076 Aalto
jouni.freund@aalto.fi

Eero-Matti Salonen
Aalto Yliopisto, Insinöörیتieteiden korkeakoulu
Rakennustekniikan laitos
PL 12100, 00076 Aalto
eero-matti.salonen@aalto.fi