

Katsaus mikropolaariseen kontinuumimalliin

Reijo Kouhia

Tiivistelmä. Mikropolaarinen kontinuumimalli eli Cosserat'n kontinuumi on eräs yleistetyistä kontinuumimalleista. Tässä mallissa jokainen kontinuumin piste on varustettu siirtymävapausasteiden lisäksi myös kiertymävapausasteilla, jotka kuvaavat materiaalin mikrorakenteen käyttäytymistä. Lineaarisesti kimmoisen isotrooppisen aineen tapauksessa tarvittavia materiaalivakioita on kuusi. Konformisti invariantti mikrokäyristymätila redusoi materiaalivakioiden lukumäärän neljään. Myös rajoitetussa polaarikontinuumiteoriassa, jota kutsutaan myös momenttijännitysten teoriaksi, riippumattomia kimmovakioita on neljä. Tässä artikkelissa tarkastellaan isotrooppista lineaarisesti kimmoisaa polaarikontinuumimallia, sen ominaisuuksia ja materiaaliparametrien määrittämistä.

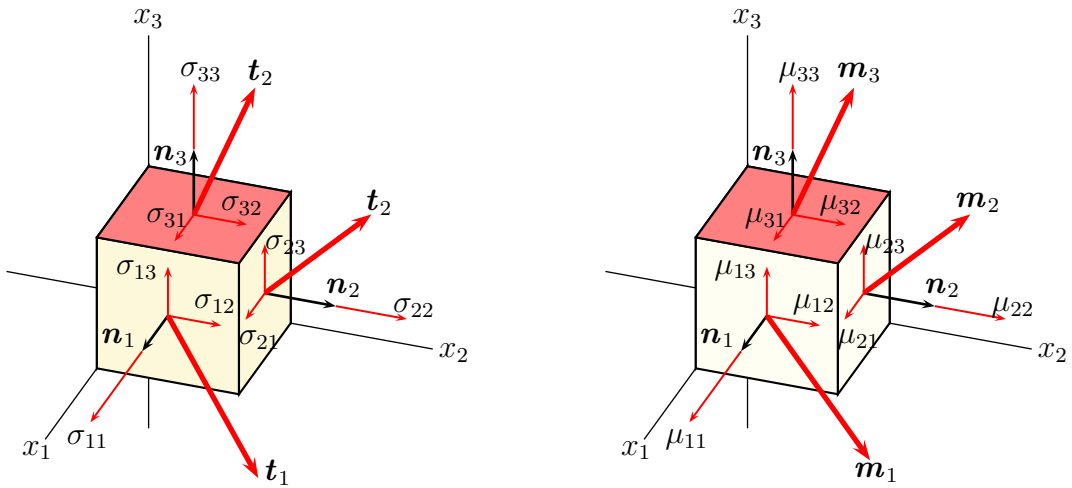
Avainsanat: polaarikontinuumimalli, mikrorakenne, momenttijännitys, voimajännitys, kimmoisuus, isotropia

Johdanto

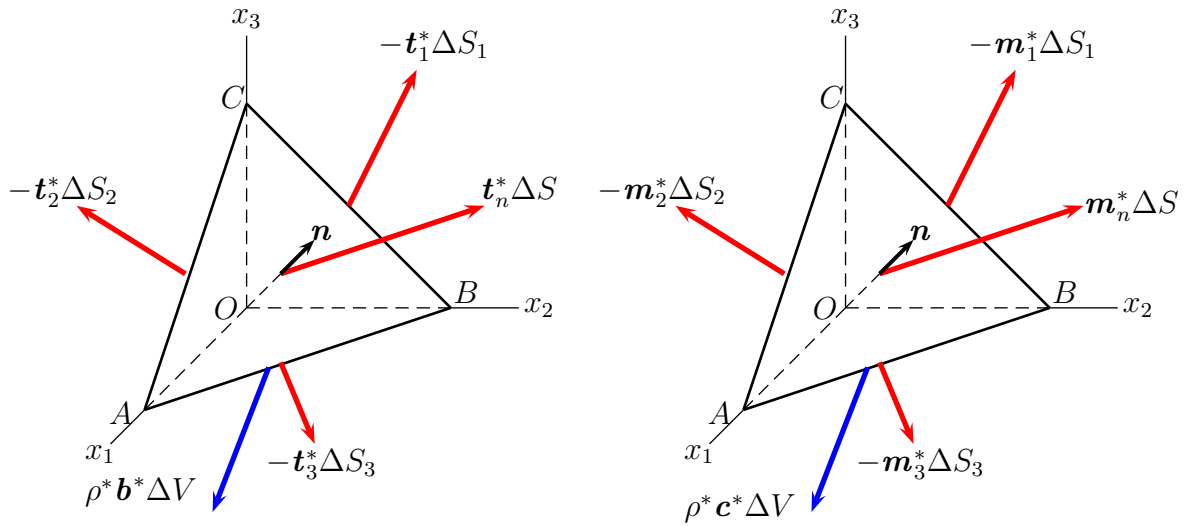
Tavanomainen Cauchyn kontinuumimalli ei kykene kuvaamaan materiaalin mikrorakenteesta johtuvia ilmiöitä kuten kokovaikutusta. Mikropolaarinen, eli Cosserat'n kontinuumimalli on jatkuva kokoelma suunnattuja partikkeleja, jotka käyttäytyvät kuin jäykkä kappale. Täten kontinuumin jokainen piste on varustettu tavanomaisten siirtymävapausasteiden lisäksi myös kiertymävapausasteilla. Tavanomaisten voimajännitysten lisäksi kappaleen jännitystilaa karakterisoivat myös momenttijännitykset. Tällaisen laajennetun tai yleistetyn kontinuumimallin ensimmäisiä kehittelijöitä olivat Woldemar Voigt ja veljekset Eugene ja François Cosserat 1800 ja 1900 lukujen taitteessa. Nämä yritykset kuvata tarkemmin materiaalin käyttäytymistä jäivät unohtuiksi kunnes 1960-luvulla virisi kiinnostus yleistettyihin kontinuumimalleihin [1, 7, 17, 21].

Yleistettyjen kontinuumimallien voidaan otaksua ennustavan tarkemmin vastetta esimerkiksi korkeataajuisen herätteen tapauksessa, jossa aallonpituus on samaa suuruusluokkaa kuin materiaalin mikrorakenteen mitta. Käytännössä tällaisia aineita ovat rakeiset ja kuitumaiset materiaalit, kuten polymeerit, lasikuitu, puu ja betoni. Myös nesteiden käyttäytymisen mallintamiseen yleistettyjä kontinuumimalleja on sovellettu menestyksellisesti.

Tässä artikkelissa tarkastellaan mikropolaarista kontinuumimallia – tai lyhyesti polaarikontinuumimallia – ja sen rajoitettua muotoa. Polaarikontinuumimallissa materiaalipartikkeliin voidaan ajatella liitetyn kolme toisiaan vastaan kohtisuoraa deformatiota suuntaajavektoria, eli direktoria. Mikäli näiden suuntaajavektoreiden annetaan myös venyä ja kiertyä toisistaan riippumatta, päädytään malliin, jossa on 12 kinemaattista kenttäsuuretta. Eringen käyttää tällaisesta mallista nimeä *mikromorfinen kontinuumi* ja



Kuva 1. Traktiovektorit ja niiden komponenttien positiiviset suunnat kolmella toisiaan vastaan kohtisuoralla pinnalla. Vasemmalla voimatraktiot ja oikealla momenttitraktiot.



Kuva 2. Cauchyn tetraedri.

rajoitetumman mallin jossa suuntaajavektorit voivat vain venyä hän on nimennyt *mikrovenymämalliksi* [5].

Voima- ja momenttijännitykset

Polaarikontinuumimallissa oletetaan, että vuorovaikutukset mielivaltaisella materiaalin sisäisellä pinnalla tapahtuvat pinnalla vaikuttavan voimatraktion ja momenttitraktion välityksellä. Kuvasta 1 selviää tässä artikkelissa käytetty voimajännitys- sekä momenttijännitystensorin indeksien merkitys, joka on insinöörikirjallisuudessa tavanomaisesti käytetty valinta: ensimmäinen indeksi osoittaa tason normaalin suunnan ja jälkimmäinen itse komponentin suunnan. Kuvassa 2 on esitetty Cauchyn tetraedrin pinnoilla keskimääräiset voima- ja momenttitraktiovektorit t_i^* ja m_i^* . Karteesisessa koordinaatistossa Cauchyn tetraedrin kolme tahkoa yhtyvät koordinaattiakseleiden määrittelemiін tasoihin ja neljäs tahko on mielivaltaisessa suunnassa n .

Rajankäynnillä saadaan momenttijännityksillä laajennettu Cauchyn jännitysteoreema,

eli traktiovektoreiden lineaarinen riippuvuus pinnan normaalista, joka samalla määrittelee jännitystensorit $\boldsymbol{\sigma}$ ja $\boldsymbol{\mu}$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{n}. \quad (1)$$

Taseyhtälöt

Liikemäärän taseen periaate

Polaarikontinuumimallin liikemäärän taseyhtälö ei poikkea klassisesta Cauchyn kontinuumimallista

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_S \mathbf{t} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV, \quad (2)$$

jossa ρ on tiheys, \mathbf{v} nopeusvektori, \mathbf{t} ulkoinen traktiovektori, \mathbf{b} voima massaa kohden ja merkintä d/dt tarkoittaa materiaalista aikaderivaattaa. Tarkasteltavan kappaleen rajoittamaa aluetta on merkitty V :llä ja sen pintaa symbolilla S . Ottamalla huomioon Cauchyn jännitysteoreema, $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$ ja muuntamalla Gaussin divergenssilauseen avulla pintaintegraali tilavuusintegraaliksi, sekä siirtämällä termejä, saadaan yhtälö¹

$$\int_V \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T - \rho \mathbf{b} \right) dV = 0. \quad (3)$$

Koska yhtälön (3) on oltava voimassa mielivaltaisessa alueessa V , saadaan liikeyhtälön paikallinen muoto

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{b} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0, \quad (4)$$

joka karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa kirjoitettuna indeksimuodossa on²

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \frac{dv_i}{dt} = 0, \quad (5)$$

jossa kahdesti toistuvan indeksin suhteen noudatetaan Einsteinin summaussääntöä.

Klassisessa Cauchyn kontinuumimallissa voimajännitystensori $\boldsymbol{\sigma}$ osoittautuu symmetriseksi liikemäärän momentin taseen periaatteen nojalla. Polaarikontinuumimallissa näin ei kuitenkaan ole, joten erityistä huomiota on kiinnitettävä siihen miten jännitystensorin komponentit ja divergenssioperaattori on määritelty. Tässä kirjoituksessa divergenssioperaattorin kohdistaminen toisen kertaluvun tensoriin on määritelty kuten lähteessä [8, sivu 49]: karteesisessa kannassa \mathbf{e}_i ilmaistun tensorin $\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ divergenssi on

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i. \quad (6)$$

Liikemäärämomentin taseen periaate

Liikemäärämomentin taseyhtälö on

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{l}) dV = \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{t} + \mathbf{m}) dS + \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} + \rho \mathbf{c}) dV, \quad (7)$$

¹Kirjallisuudessa jännityksen transpoosi puuttuu usein liikeyhtälöstä 5. Syynä tähän on joko (i) jännitystensorin indeksien järjestyksen erilainen valinta, [8], tai (ii) ero divergenssioperaattorin määrittelyssä [15].

²Yhtälöitä (4) ja (5) kutsutaan Cauchyn (1827) tai Eulerin (~1740) ensimmäiseksi liikeyhtälöksi.

jossa \mathbf{m} on momenttijännitystraktio, \mathbf{c} momentti massaa kohden, \mathbf{l} mikrokulmaliikemäärä³ ja $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ on paikkavektori, jonka alkupiste \mathbf{x}_0 on mielivaltainen vakiovektori. Vastaa-
vanlaisella menettelyllä kuin klassisen Cauchyn kontinuumimallinkin tapauksessa saadaan
liikemäärämomentin taseen paikalliseksi muodoksi karteesisessa suorakulmaisessa koordi-
naatistossa lausuttuna yhtälö

$$\frac{\partial \mu_{ji}}{\partial x_j} + \rho c_i + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} - \rho \frac{d\ell_i}{dt} = 0, \quad (8)$$

joss ϵ_{ijk} on permutaatio-symboli eli Levi-Civita-symboli. Mikrokulmaliikemäärälle otak-
sutaan jatkossa isotrooppinen esitys $\ell_i = J \dot{\varphi}_i$, jossa J on materiaalipartikkelin mikro-
kiertymähitauus ja φ_i mikrokiertymä. Piste symbolin yläpuolella merkitsee materiaalista
aikaderivaattaa. Jatkossa käytetään paikkakoordinaattien suhteen otetuille osittaisderi-
vaatoille myös kompaktaa merkintää $(\bullet)_{,j}$, esimerkiksi $\mu_{ji,j} = \partial \mu_{ji} / \partial x_j$.

Energiatase

Termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö eli energian taseen periaate voidaan kirjoittaa
muodossa

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E} + \mathcal{K}) = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_h, \quad (9)$$

jossa \mathcal{E}, \mathcal{K} ovat tarkasteltavan kappaleen sisä- ja kineettinen energia, jotka määritellään
yhtälöillä

$$\mathcal{E} = \int_V \rho e \, dV, \quad (10)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V (\rho v_i v_i + J \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_i) \, dV, \quad (11)$$

jossa e on ominaissisäenergia. Kineettisessä energiassa on klassiseen kontinuumimalliin
verrattuna lisätermi $J \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_i$. Ulkoisten voimien mekaaninen teho, \mathcal{P}_m , koostuu tilavuus- ja
traktiovoimien tuottamasta tehosta

$$\mathcal{P}_m = \int_V \rho (b_i v_i + c_i \dot{\varphi}_i) \, dV + \int_S (t_i v_i + m_i \dot{\varphi}_i) \, dS. \quad (12)$$

Vastaavasti ei-mekaaninen teho, \mathcal{P}_h , joka tässä otaksutaan vain termisten prosessien te-
hona, on muotoa

$$\mathcal{P}_h = \int_V \rho r \, dV - \int_S q_i n_i \, dS, \quad (13)$$

jossa r on lämmöntuottonopeus massaa kohden ja q_i lämpövuovektori. Muutamien väli-
vaiheiden jälkeen energiataseyhtälöksi saadaan

$$\int_V \rho \dot{e} \, dV = \int_V [\sigma_{ij} (v_{j,i} - \epsilon_{kij} \dot{\varphi}_k) + \mu_{ij} \dot{\varphi}_{j,i} + \rho r - q_{i,i}] \, dV. \quad (14)$$

Määrittelemällä muodonmuutosta kuvaavat tensorit yhtälöillä

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - \epsilon_{kij} \varphi_k, \quad \text{ja} \quad \kappa_{ij} = \varphi_{j,i}, \quad (15)$$

jossa tensoria γ_{ij} kutsutaan myös Cosserat'n ensimmäiseksi venymätensoriksi ja κ_{ij} on
mikrokäyritysmätensori, energiataseen lauseke (14) voidaan kirjoittaa paikallisessa muo-
dossa [20]

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \mu_{ij} \dot{\kappa}_{ij} + \rho r - q_{i,i}. \quad (16)$$

³Enlanninkielisessä kirjallisuudessa käytetään nimityksiä *spin angular momentum*, *intrinsic angular momentum* tai *micro angular momentum*.

Entropiaepäyhtälö

Termodynamiikan toinen pääsääntö asettaa rajoitteita mahdollisille prosesseille. Määritteliään Rudolf Clausiuksen 1865 käyttöönottama käsite entropia $S = \int \rho s dV$, jossa s on ominaisentropia ja joka kuvaa mikroskooppista satunnaisuutta ja järjestäytymättömyyttä. Entropiaepäyhtälö, eli Clausiuksen-Duhemin epäyhtälö on

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq \int_V \frac{\rho r}{\theta} dV - \int_V \frac{q_i n_i}{\theta} dS, \quad (17)$$

jonka mukaan kappaleen kokonaisentropian kasvunopeuden on oltava suurempi tai yhtäsuuri kuin systeemin lämmönlähteistä ja siihen kohdistuvasta lämpövuosta muodostuva entropiantuotto. Eliminoimalla lämmöntuoton ja lämpövuon osuus ensimmäisen pääsääntö (16) avulla ja ottamalla käyttöön Helmholtzin vapaa ominaisenergia $\Psi = e - s\theta$, saadaan entropiaepäyhtälön paikalliseksi muodoksi epäyhtälö

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ij}} \right) \dot{\gamma}_{ij} + \left(\mu_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_{ij}} \right) \dot{\kappa}_{ij} - \rho \left(s + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - q_i \frac{\theta_{,i}}{\theta} \geq 0. \quad (18)$$

Koska entropiaepäyhtälön on oltava voimassa kaikille mahdollisille luvallisille prosesseille $\dot{\gamma}_{ij}$, $\dot{\kappa}_{ij}$ ja $\dot{\theta}$, saadaan yleiset konstitutiiviset yhtälöt

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ij}}, \quad \mu_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_{ij}}, \quad s = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \text{sekä} \quad -\theta^{-1} q_i \theta_{,i} \geq 0. \quad (19)$$

Konstitutiiviset yhtälöt

Tarkastellaan jatkossa vain isotermistä tilannetta ja valitaan Helmholtzin vapaalle ominaisenergialle neliöllinen lauseke

$$\rho \Psi = \frac{1}{2} (C_{ijkl}^{(\gamma)} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + C_{ijkl}^{(\kappa)} \kappa_{ij} \kappa_{kl}). \quad (20)$$

Rajoittumalla keskeissymmetriseen materiaalmalliin ei energian lausekkeessa voi esiintyä kytkentätermiä Cosserat'n ensimmäisen venymätensorin $\boldsymbol{\gamma}$ ja mikrokäyritysmätensorin $\boldsymbol{\kappa}$ välillä.⁴ Olettamalla lisäksi lineaarisesti kimmoisa isotrooppinen materiaalmalli, voidaan yleinen neljännen kertaluvun isotrooppinen kimmotensori kirjoittaa muodossa

$$C_{ijkl}^{(\gamma)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \mu_c (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (21)$$

jossa λ ja μ ovat tavanomaiset Lamén vakiot ja μ_c on Cosserat'n kytkentämoduuli, joka on klassiseen kimmoteoriaan verrattuna uusi materiaali parametri. Vastaavasti tensorille $C_{ijkl}^{(\kappa)}$ voidaan kirjoittaa⁵

$$C_{ijkl}^{(\kappa)} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \gamma (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (22)$$

On huomattava, että polaarikontinuumimallin materiaali parametreilla α , β ja γ on voiman yksikkö $[\text{Pa} \cdot \text{m}^2] = [\text{N}]$. Täten materiaali parametrit α , β ja γ on mielekäästä esittää muodossa

$$\alpha = \alpha' \mu L_{\text{mat}}^2, \quad \beta = \beta' \mu L_{\text{mat}}^2, \quad \gamma = \gamma' \mu L_{\text{mat}}^2, \quad (23)$$

⁴Mikäli materiaalmalli ei ole keskeissymmetrinen kutsutaan sitä myös kiraaliseksi eli kätiseksi. Kiraalisia polaarikontinuumimalleja on käytetty mm. kennomaisten ja hiilinanoputkista koostuvien materiaalien mallintamiseen.

⁵Eri lähteissä käytetään hieman erilaisia tapoja määrittellä materiaali parametrit α , β ja γ . Näitä on vertailtu liitteessä A. Tässä kirjoituksessa ne on määritelty samoin kuin lähteessä Nowacki [20].

Näistä kaksi ensimmäistä ehtoa ovat tutut klassisen lineaarisen isotrooppisen Cauchyn kontinuumimallin Lamén parametreille asetettavat vaatimukset. Ehdot (32) takaavat muodonmuutosenergian paikallisen positiivisuuden, jolloin konstitutiiviset yhtälöt voidaan myös kääntää. Nämä ehdot otaksutaan usein hyperelastisen aineen staattisten ongelmien matemaattisessa analysoinnissa.

Termodynaamisen stabiiliuden argumentti vaatii toisaalta vain epäyhtälöiden

$$\mu \geq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu_c \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad 3\alpha + 2\beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0 \quad (33)$$

toteutumisen [5, luvut 5.2, 5.3],[11].

Dynaamisissa tehtävissä mallissa esiintyvien aaltojen etenemisnopeuksien on oltava positiivisia. Näitä rajoitteita kutsutaan Legendren-Hadamardin elliptisyys ehdoiksi. Polaarikontinuumimallin monokromaattisten neljän tasoallon nopeuksista saadaan ehdot

$$\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu + \mu_c > 0, \quad \mu > 0, \quad \alpha + 2\beta > 0, \quad \beta + \gamma > 0, \quad \text{sekä} \quad \mu_c > 0. \quad (34)$$

Katso liitteitä B ja C, yhtälöt (99)-(103) sekä (116). Vertaamalla ehtoja (32), (33) ja (34), havaitaan ehtojen (32) olevan rajoittavimmat.

Potentiaalienergian lauseke

Polaarikontinuumimallin muodonmuutosenergian lauseke (28) voidaan jakaa venymä- ja käyritymäenergiaan

$$U_0 = U_{\gamma 0} + U_{\kappa 0}, \quad (35)$$

jossa venymäenergia (tilavuutta kohden) $U_{\gamma 0}$ riippuu vain Cosserat'n ensimmäisestä venymätensorista γ

$$U_{\gamma 0} = \frac{1}{2}\lambda\gamma_{ii}\gamma_{jj} + \mu\gamma_{(ij)}\gamma_{(ij)} + \mu_c\gamma_{[ij]}\gamma_{[ij]}, \quad (36)$$

ja käyritymäenergia vain mikrokäyritymätensorista κ

$$U_{\kappa 0} = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{2}{3}\beta)\kappa_{ii}\kappa_{jj} + \beta\kappa'_{(ij)}\kappa'_{(ij)} + \gamma\kappa_{[ij]}\kappa_{[ij]}, \quad (37)$$

jossa $\kappa'_{(ij)}$ on mikrokäyritymätensorin symmetrisen osuuden deviatorinen osa.

Materiaaliparametrien määrittäminen

Isotrooppisen polaarikontinuumimallin parametrit $\lambda, \mu, \mu_c, \alpha, \beta$ ja γ ovat leikkausmoduulia μ lukuunottamatta fysikaalisesti epähavainnollisia. Fysikaalisesti mielekkäämpi parametrijoukko on

$$\text{kimmomoduuli} \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (38)$$

$$\text{leikkausmoduuli} \quad G = \mu, \quad (39)$$

$$\text{Poissonin suhde} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (40)$$

$$\text{karakteristinen pituus väännössä} \quad \ell_t = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}}, \quad (41)$$

$$\text{karakteristinen pituus taivutuksessa} \quad \ell_b = \sqrt{\frac{\beta + \gamma}{4\mu}}, \quad (42)$$

$$\text{kytkentävakio} \quad N = \sqrt{\frac{\mu_c}{\mu + \mu_c}}, \quad (43)$$

$$\text{polaarisuussuhde} \quad \psi = \frac{\beta}{\beta + \frac{1}{2}\alpha}. \quad (44)$$

Dimensiottomien suureiden N ja ψ sallitut vaihteluvälit ovat

$$0 \leq N \leq 1, \quad \text{ja} \quad 0 \leq \psi \leq \frac{3}{2}, \quad (45)$$

jotka voidaan helposti todeta epäyhtälöistä (32). Mikäli kytkentämoduuli μ_c häviää, on myös $N = 0$, jolloin siirtymäkenttä ja kiertymäkenttä ovat toisistaan riippumattomia ja ongelma palautuu klassisen Cauchyn kontinuumimallin probleemaksi, mikäli kuormituksenä ei ole momenttitraktioita tai massamomenttivoimia.⁶ Kytkentävakion N toinen ääripää saavutetaan kun kytkentämoduuli $\mu_c \rightarrow \infty$. Tällöin kiertymäkenttä yhtyy siirtymäkenttään laskettuun kontinuumikiertymään, jolloin on kyseessä rajoitettu Cosserat'n kontinuumimalli. Eringen käyttää tästä nimitystä määräämätön momenttijännitysten malli, koska tällöin jännitystensorin antisymmetrinen osa on rajoitevoiman luonteinen, eikä siten konstitutiivisen yhtälön avulla määritettävissä, katso yhtälöä (62).

Yksi polaarikontinuumiteorian hankalimpia ongelmakohtia on lukuisten materiaali-parametrien, joita jo isotrooppisessa tapauksessakin on kuusi kappaletta, määrittäminen. Gauthier ja Jahsman [6] ehdottavat vetokoetta tavanomaisille elastisuusparametreille E ja ν , vääntökoetta käyttäen halkaisijamitoiltaan kolmea erilaista sauvaa parametrien μ_c , α ja β määrittämiseksi ja taivutuskoetta ainoan jäljelle jääneen parametrin γ määrittämiseksi.

Mikäli materiaaliparametreilta vaaditaan ehtojen (32) tai (33) toteutuminen, on seurauksena taivutus- ja vääntöjäykkyyksien epäfysikaalisen nopea kasvu koekappaleen koon pienentyessä.⁷ Tämä voidaan välttää vaatimalla mikrokäyristymäkentän olevan konformisesti invariantti [11, 18, 19], jolloin mikrokäyristymäenergia (tilavuutta kohden) lauseke supistuu muotoon

$$U_{\kappa 0}(\boldsymbol{\varphi}) = \beta \kappa'_{(ij)} \kappa'_{(ij)} = \beta (\kappa_{(ij)} \kappa_{(ij)} - \frac{1}{3} \kappa_{kk} \kappa_{pp}), \quad (46)$$

jolloin materiaaliparametrit γ , β ja α ovat⁸

$$\gamma = 0, \quad \beta = \mu \ell_t^2, \quad \alpha = -\frac{2}{3} \mu \ell_t^2. \quad (47)$$

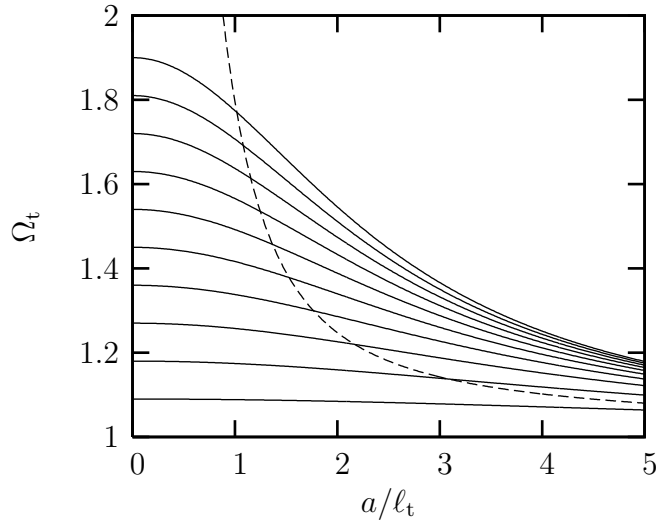
Täten konformisesti invariantissa käyristymätilassa Cosserat'n mallissa on neljä toisistaan riippumatonta materiaaliparametria λ , μ , μ_c ja ℓ_t tai vaihtoehtoisesti ℓ_b . Konformisesti invariantissa käyristymätilassa mikrokäyristymäenergia on invariantti infinitesimaalisten konformikuvausten suhteen, eli kuvausten $\boldsymbol{\varphi}_C$, jotka toteuttavat yhtälön

$$\boldsymbol{\kappa}'(\boldsymbol{\varphi}_C) = \text{dev sym grad } \boldsymbol{\varphi}_C = \mathbf{0}. \quad (48)$$

⁶Tällöin kiertymäkenttä häviää identtisesti.

⁷Metrikine ilmaisee asian artikkelissaan [16, sivu 740] seuraavasti: "Mikään materiaali ei ole missään mittakaavassa täysin jäykkä. Tämän vuoksi myös niiden jäykkyys on rajoitettu kaikissa mittaskaaloissa."

⁸Ensi näkemältä ehto $\gamma = 0$ on ristiriidassa muodonmuutosenergian positiivisuusvaatimuksen (32) kanssa. Näin ei kuitenkaan ole, sillä konformisesti invariantissa käyristymätilassa mikrokäyristymätensori on symmetrinen. Tällöin mallissa on vain viisitoista riippumatonta siirtymäkomponenttia ja materiaalin jäykkyysmatriisin lohko \mathbf{C}_4 supistuu 1×1 lohkoksi, jonka ainoana alkiona on moduuli β .



Kuva 3. Vääntöjäykkyyksien suhde Ω_t sauvan poikkileikkauksen säteen a funktiona. Yhtenäisellä viivalla on esitetty konformisesti invariantin käyritysmätilan ($\psi = 1,5$) ratkaisut eri kytkentämoduulin μ_c arvoilla; alhaalta ylöspäin $\mu_c/\mu = 0,01; 0,02; 0,03; \dots; 0,09; 0,1$. Katkoviivalla on havainnollistettu ei-konformisesti invariantin tapauksen singulaarinen käyttäytyminen materiaalivakioiden arvoilla $\psi = 1,45$ ja $\mu_c/\mu = 0,01$.

Tällaiset kuvaukset ovat infinitesimaalisesti muotonsa säilyttäviä. Huomataan, että taivutuksen karakteristinen pituus ℓ_b on tällöin puolet väännön karakteristisesta pituudesta ℓ_t ja että momenttijännitystensori $\boldsymbol{\mu}$ on symmetrinen.

Neff et al. [19, luku 4] ehdottavat parametrien μ_c ja ℓ_t määrittämistä vääntökokeesta ja taivutuskokeen käyttämistä ainoastaan varmentamaan saadut tulokset. Tätä käsitellään seuraavassa luvussa.

Joitain tunnettuja ratkaisuja

Vääntösauva

Polaarikontinuumimallin mukaisen ympyräpoikkileikkauksisen sauvan vääntötehtävän analyttinen ratkaisu tunnetaan [6]. Polaarikontinuumimallin ja klassisen Cauchyn kontinuumimallin mukaisten vääntöjäykkyyksien suhteeksi saadaan

$$\Omega_t = 1 + 6 \left(\frac{\ell_t}{a} \right)^2 \frac{1 - \frac{4}{3}\psi\chi(pa)}{1 - \psi\chi(pa)}, \quad (49)$$

jossa ψ on polaarisuussuhde, a poikkileikkauksen säde ja funktio χ sekä vakio p määritellään seuraavasti

$$\chi(x) = \frac{I_1(x)}{xI_0(x)}, \quad p^2 = \frac{2\mu_c\psi}{\mu\ell_t^2}, \quad (50)$$

jossa I_0 ja I_1 ovat ensimmäisen lajin modifioituja Besselin funktioita. On huomionarvoista, että funktio $\Omega_t(a)$ on singulaarinen pisteessä (0) mikäli $0 \leq \psi < \frac{3}{2}$.

Kuvassa 3 on esitetty vääntöjäykkyyksien suhde Ω_t poikkileikkauksen säteen funktiona erilaisilla kytkentämoduulin μ_c arvoilla konformisesti invariantissa käyritysmätilassa, jolloin polaarisuussuhde $\psi = 3/2$. Kuvassa on myös esitetty vääntöjäykkyyden singulaarinen käyttäytyminen rajalla $a \rightarrow 0$ kun $0 \leq \psi < \frac{3}{2}$ polaarisuussuhteen arvolla $\psi = 1,45$.

Konformisti invariantissa käyritystilassa vääntöjäykkyyssuhteella Ω_t on äärellinen raja-arvo kun $a \rightarrow 0$ [19]

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Omega_t = \Omega_t|_{a=0} = 1 + 9 \frac{\mu_c}{\mu}. \quad (51)$$

Raja-arvo (51) on materiaalin sisäisestä mitasta ℓ_t riippumaton, joten Cosserat'n kyt-kentämoduuli voidaan häiriöttömästi arvioida kokeesta saatuna maksimaalisena jäykkyyden kasvuna

$$\mu_c = \frac{1}{9}(\Omega_t|_{a=0} - 1)\mu. \quad (52)$$

Materiaalin karakteristinen pituus ℓ_t saadaan sovittamalla koetulokset yhtälön (49) tulokseen. Tuloksesta (51) havaitaan, että jäykkyyden muutos on pieni, mikäli $\mu_c/\mu \ll 1$, joka näyttäisi pätevän monille materiaaleille [5]. Vääntökokeiden vähimmäismäärä on kaksi koetta halkaisijaltaan eri mittaisilla sauvoilla.

Suoran palkin puhdas taivutus

Ieşan [9] on esittänyt yleisen ratkaisutavan poikkileikkaukseltaan ympyränmuotoisen polaarikontinuumimallia noudattavan momenttikuormitetun suoran palkin ratkaisemiseksi. Lähteessä [13] on esitetty siirtymäkentän ratkaisu taivutusjäykkyyden kokotekijän ratkaisemiseksi. Polaarikontinuumimallin ja klassisen Cauchyn kontinuumimallin mukaisten taivutusjäykkyyksien suhteeksi saadaan lauseke

$$\Omega_b = 1 + \frac{8N^2}{1 + \nu} \left[\frac{1 - (\beta - \gamma)/(\beta + \gamma)}{(\delta a)^2} + \frac{[(\beta - \gamma)/(\beta + \gamma) + \nu]^2}{\zeta(\delta a) + 8N^2(1 - \nu)} \right], \quad (53)$$

jossa N on Cosserat'n kytkentäväkio, $\delta^2 = 4\mu_c\mu/(\beta + \gamma)(\mu + \mu_c)$, a on palkin poikkileikkauksen säde ja funktio ζ on muotoa

$$\zeta(x) = \frac{x^2(xI_0(x) - I_1(x))}{xI_0(x) - 2I_1(x)}, \quad (54)$$

jossa I_0 ja I_1 ovat ensimmäisen lajin modifioituja Besselin funktioita. Konformisti invariantissa käyritystilassa taivutusjäykkyyksien suhteelle saadaan lauseke

$$\Omega_b = 1 + \frac{8N^2(1 + \nu)}{\zeta(\delta a) + 8N^2(1 - \nu)}. \quad (55)$$

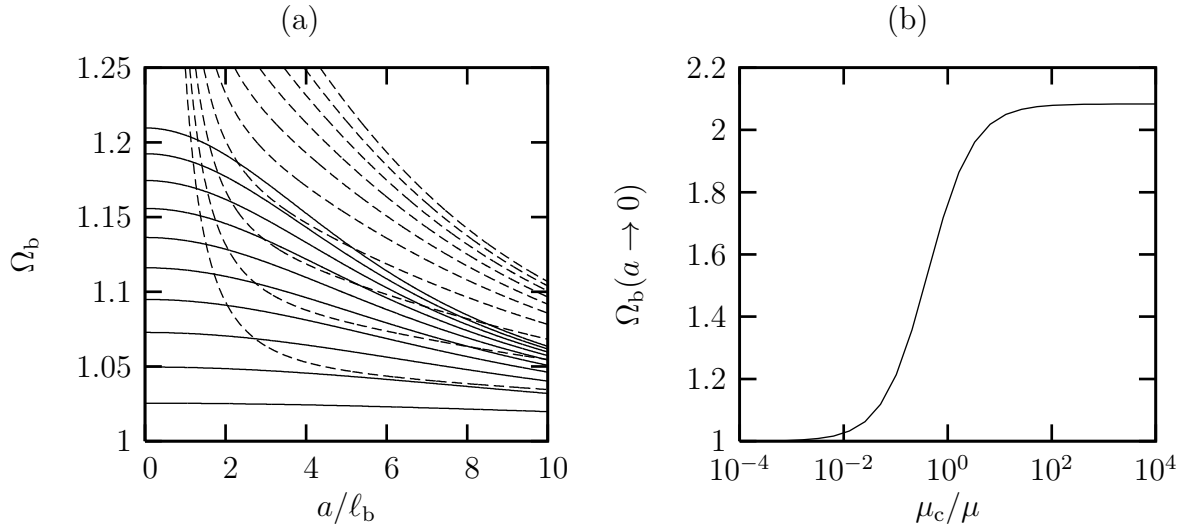
Kytkentämoduulin μ_c vaikutus on esitetty kuvassa 4(a). Havaitaan, että kokovaikutus taivutuksessa on pienempi kuin väännössä. Sillä on myös äärellinen raja-arvo kun $\mu_c \rightarrow \infty$, katso kuvaa 4(b). Huomataan myös, että konformisesti invariantissa käyritystilassa $\ell_b = \frac{1}{2}\ell_t$, joten kuvissa 3 ja 4 on vaaka-akselilla esitetty sama poikkileikkauksien sädeväli.

Poikkileikkaukseltaan suorakaiteen muotoisen palkin taivutustehtävän polaarikontinuumimallin mukaista analyttistä ratkaisua ei tunneta. Epätyydyttävä rajoitetun polaarikontinuumimallin – katso seuraavaa lukua – mukainen ratkaisu perustuen klassisen Cauchyn kontinuumimallin siirtymäkenttään

$$u = \frac{1}{R}xy, \quad v = -\frac{1}{2R} [x^2 + \nu(y^2 - z^2)], \quad w = -\frac{\nu}{R}yz, \quad (56)$$

voidaan johtaa helposti olettamalla kiertymäkentän φ yhtyvän siirtymäkentästä laskettuun kiertymään $\frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{u}$. Kiertymien lausekkeiksi saadaan

$$\varphi_x = -\nu \frac{z}{R}, \quad \varphi_y \equiv 0, \quad \varphi_z = -\frac{x}{R}, \quad (57)$$



Kuva 4. (a) Taivutusjäykkyyksien suhde Ω_b palkin poikkileikkauksen säteen a funktiona kytkenämoduulin μ_c arvoilla $\mu_c/\mu = 0,01$ (alin) ... $0,1$ (ylin) $0,01:n$ välein. Poissonin suhteella on arvo $0,3$. Konformisesti invariantin käyritystilassa, $\gamma = 0$, ratkaisut on esitetty ehyellä viivalla ja tapaus $\gamma = 0,01\beta$ katkoviivalla. (b) Suhteen Ω_b raja-arvo kun $a \rightarrow 0$ kytkenämoduulin μ_c funktiona konformisesti invariantissa käyritystilassa.

joissa termi $1/R$ on palkin akselin kaarevuus. Tämä siirtymäkenttä kuitenkin ei toteuta momenttitraktion μ_{zx} reunaehtoa palkin xy -tason suuntaisissa sivutahkoissa

$$\mu_{zx} = (\beta + \gamma)\kappa_{zx} + (\beta - \gamma)\kappa_{xz} = -\nu(\beta + \gamma)/R - (\beta - \gamma)/R. \quad (58)$$

Momenttitraktio reunatahkoilla häviää vain jos materiaalivakiot ν, β ja γ toteuttavat ehdon

$$\nu = -\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}, \quad \text{tai} \quad \beta = \frac{1 - \nu}{1 + \nu}\gamma. \quad (59)$$

Taivutusmomentin lausekkeeksi saadaan

$$M = \int_A (\sigma_{xxy} - \mu_{xz}) dA = \left[\frac{1}{12} E b h^3 + ((1 + \nu)\beta + (1 - \nu)\gamma) b h \right] \frac{1}{R}. \quad (60)$$

Näin saadun rajoitetun polaarikontinuumimallin ja klassisen Cauchyn kontinuumimallin mukaisten taivutusjäykkyyksien suhteeksi saadaan lauseke

$$\Omega_b^* = \frac{MR}{EI_z} = 1 + \frac{12[(1 + \nu)\beta + (1 - \nu)\gamma]}{E h^2}. \quad (61)$$

On kuitenkin syytä huomata, että yllä oleva lauseke on jäykkyyssuhteen yläraja-arvo, sillä ratkaisu perustuu kinemaattisesti luvalliseen siirtymätilaan.

Rajoitettu polaarikontinuumimalli

Kun Cosserat'n kytkenämoduuli $\mu_c \rightarrow \infty$, lähestyy riippumaton kiertymäkenttä siirtymävektorista laskettua infinitesimaalista kiertymää, eli $\boldsymbol{\varphi} \rightarrow \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{u}$, indeksimuodossa kirjoitettuna $\varphi_i \rightarrow \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} u_{k,j}$. Tällaista kontinuumimallia kutsutaan usein rajoitetuksi tai määräämättömäksi polaarikontinuumimalliksi. Kerrotaan liikemäärämomentin taseyhtälö (8) puolittain permutaatiotensorilla ϵ_{imn} ja jaetaan voimajännitystensori $\boldsymbol{\sigma}$ symmetriseen

ja antisymmetriseen osaan $\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)} + \sigma_{[ij]}$. Tällöin saadaan antisymmetriselle osalle lauseke

$$\sigma_{[mn]} = -\frac{1}{2}\epsilon_{imn}(\mu_{ji,j} + \rho c_i - \rho \dot{\ell}_i). \quad (62)$$

Jatkoa silmälläpitäen on edullista jakaa momenttijännitystensori isotrooppiseen ja deviatoriseen osaan

$$\mu_{ij} = m\delta_{ij} + \mu'_{ij}, \quad \text{jossa} \quad m = \frac{1}{3}\mu_{ii}. \quad (63)$$

Sijoitetaan (62) ja (63) liikeyhtälöön (5), jolloin saadaan

$$\rho \dot{v}_i - \frac{1}{2}\epsilon_{kji}(\rho \dot{\ell}_k)_{,j} = \sigma_{(ji),j} - \frac{1}{2}\epsilon_{kji} [\mu'_{pk,pj} - (\rho c_k)_{,j}] + \rho b_i, \quad (64)$$

jossa on otettu huomioon relaatio $\epsilon_{kji}m_{,kj} = 0$. Momenttijännitystensorin deviatoriselle osalle saadaan konstitutiivinen yhtälö

$$\mu'_{pk} = (\beta + \gamma)\epsilon_{klm}u_{m,lp} + (\beta - \gamma)\epsilon_{plm}u_{m,lk}. \quad (65)$$

Sijoittamalla liikeyhtälöön (64) voimajännityksen symmetrisen osan konstitutiivinen yhtälö $\sigma_{(ij)} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$ ja kirjoittamalla mikrokulmaliikemäärän lauseke siirtymävektorin avulla $\ell_k = J\dot{\varphi}_k = \frac{1}{2}J\epsilon_{kpq}\dot{u}_{q,p}$ saadaan liikeyhtälö ilmaistua siirtymien avulla

$$\rho \ddot{u}_i - \frac{1}{4}[\rho J(\ddot{u}_{i,j} - \ddot{u}_{j,i})]_{,j} = (\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} - \frac{1}{2}\beta^*(u_{j,ij} + u_{i,jj})_{,kk} + \frac{1}{2}\epsilon_{kji}(\rho c_k)_{,j} + \rho b_i, \quad (66)$$

jossa on myös otettu huomioon identiteetti $\epsilon_{kji}\epsilon_{plm}u_{m,lk}p_j = 0$. Tosiasiallisesti liikeyhtälössä esiintyy vain toinen rajoitetun Cosserat'n mallin lisäparametreistä $\beta^* = \beta + \gamma$. Toisen parametrin $\gamma^* = \beta - \gamma$ vaikutus tulee luonnollisten, eli voimareunaehtojen kautta [12]. Osittais-differentiaaliyhtälö (66) on paikkakoordinaattien suhteen neljättä kertalukua ja malli voidaan assosoida gradientti-elastisuusmalliksi. Kuten Kirchhoffin laattamallinkin tapauksessa on rajoitetun polaarikontinuumimallin reunaehtojen asettaminen hankala tehtävä [12].

Numeerinen ratkaisu

Tavanomaisen siirtymäperusteisen elementtimenetelmän lähtökohtana oleva heikko muoto saadaan, kun liikeyhtälöt (4) ja (8) kerrotaan vastaavasti virtuaalisilla siirtymävektorilla $\delta \mathbf{u}$ ja mikrokiertymävektorilla $\delta \boldsymbol{\varphi}$ sekä integroidaan ratkaisualan yli

$$\int_V [(\rho \ddot{\mathbf{u}} - \text{div } \boldsymbol{\sigma}^T - \rho \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\rho J \ddot{\boldsymbol{\varphi}} - \text{div } \boldsymbol{\mu}^T - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{c}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}] dV = 0. \quad (67)$$

Osittaisintegroinnin ja Gaussin lauseen avulla virtuaalisen työn lauseke saa muodon

$$\begin{aligned} \int_V [\rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \rho J \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\sigma} : ((\text{grad } \delta \mathbf{u})^T - \text{skew}(\delta \boldsymbol{\varphi})) + \boldsymbol{\mu} : (\text{grad } \delta \boldsymbol{\varphi})^T] dV \\ - \int_V (\mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) \rho dV - \int_S (\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) dS = 0, \end{aligned} \quad (68)$$

jossa $\text{skew}(\delta \boldsymbol{\varphi})$ tarkoittaa vektoriin $\delta \boldsymbol{\varphi}$ assosioitua antisymmetristä tensoria. Elementtimenetelmässä siirtymäsuureita approksimoidaan yleensä alhaisasteisilla polynomeilla

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{q}_u, \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{N}_\varphi \mathbf{q}_\varphi, \quad (69)$$

jossa \mathbf{N}_u ja \mathbf{N}_φ ovat siirtymän ja mikrokiertymän interpolaatiofunktioista koostuvia matriiseja ja \mathbf{q}_u ja \mathbf{q}_φ ovat vastaavasti solmuisiirtymistä ja -kiertymistä koostuvia pystyvektoreita. Virtuaalisen työn lausekkeen diskretoitu muoto on

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{f}) = 0, \quad (70)$$

jossa \mathbf{M} , \mathbf{K} ovat diskretoidun rakennemallin massa- ja jäykkyyssmatriisi ja \mathbf{f} on ulkoisten kuormien voimavektori. Rakenteen massamatriisi saadaan elementtiosuuksista

$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_u^{(e)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_\varphi^{(e)} \end{bmatrix}, \quad (71)$$

jossa

$$\mathbf{M}_u^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u dV, \quad \mathbf{M}_\varphi^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \rho J \mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{N}_\varphi dV, \quad (72)$$

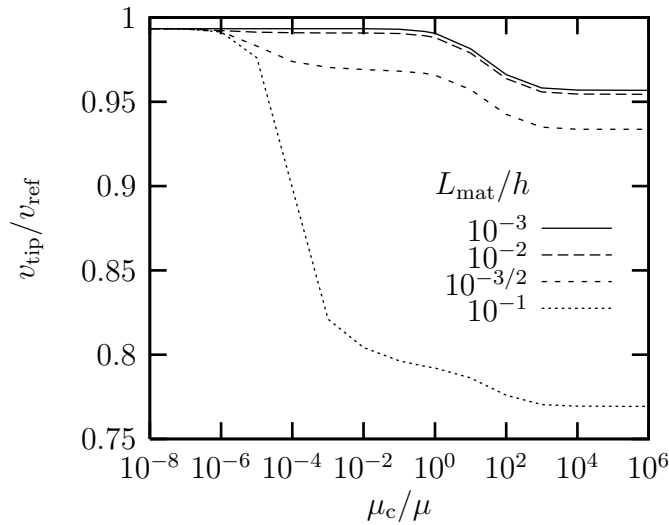
ja vastaavasti jäykkyyssmatriisin elementtiosuus on

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV, \quad (73)$$

jossa solmuisiirtymävektorin \mathbf{q} ja muodonmuutoksen \mathbf{e} , yhtälö (27), välistä kinemaattista matriisia on merkitty symbolilla \mathbf{B} . Materiaalin jäykkyyssmatriisi \mathbf{C} on esitetty yhtälössä (29). Mikäli sekä siirtymille että mikrokiertymille käytetään samoja interpolaatiofunktioita ja kun solmun i vapausasteet asetetaan järjestykseen $\mathbf{q}_i = [u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \varphi_{zi}]^T$, on siirtymä-muodonmuutosmatriisin solmuun i liittyvä lohko muotoa

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & -N_i \\ N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \\ 0 & 0 & N_{i,y} & -N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,z} & 0 & N_i & 0 & 0 \\ N_{i,z} & 0 & 0 & 0 & -N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Kuvassa 5 on esitetty ulokepalkin pään taipuma ulokepäässä vaikuttavasta tasan jakautuneesta leikkausjännitys jakaumasta Cosserat'n kytkentämoduulin μ_c funktiona ja erilaisilla mittaparametrin L_{mat} arvoilla. Yhtälöiden (23) avulla määritellyillä dimensiottomille parametreille on valittu arvo $\alpha' = \beta' = \gamma' = 1$. Numeerinen ratkaisu on laskettu tavanomaisella variaatioyhtälöön (68) perustuvalla elementtimenetelmällä, jossa jokaista siirtymäkomponenttia interpoloidaan trikvadraattisilla C_0 -interpolaatiofunktioilla. Palkki on jaettu pituussuunnassa kymmeneen yhtäsuureen elementtiin. Yksi elementti muodostaa palkin neliöpoikkileikkauksen. Kaikki siirtymä- ja kiertymäkomponentit on esitetty palkin kiinnitettyssä päässä.



Kuva 5. Cosserat'n kytkentämoduulin μ_c ja materiaalin mittaparametrin L_{mat} vaikutus palkin pään taipumaan. Viitearvo on Eulerin-Bernoullin palkkimallin mukainen taipuma-arvo $v_{\text{ref}} = FL^3/3EI$. Materiaaliparametreilla on arvot $\alpha = \beta = \gamma = \mu L_{\text{mat}}^2$. Palkin poikkileikkaus on neliö, jonka sivumitta on h .

Loppupäätelmät

Cosserat'n eli mikropolaarinen kontinuumimalli on yksi yleistetyistä kontinuumimalleista, joka pystyy ottamaan huomioon materiaalin suuntautuneen mikrorakenteen. Mallissa on sisäänrakennettuna materiaalin sisäinen mitta, eli materiaalin karakteristinen pituus. Linearisesti kimmoisassa isotrooppisessa tapauksessa mallissa on kuusi materiaalivakiota, joiden määrittäminen on ongelmallista. Mikäli mikrokäyritystilä oletetaan konformisesti invariantiksi, riippumattomien materiaalivakioiden lukumäärä on neljä. Tavanomaisen Cauchyn kontinuumimallin kahden elastisuusvakion määrittämisen lisäksi tarvitaan lisäkoe, joka voi olla vääntökoe halkaisijaltaan eri mittaisilla sauvoilla. Näistä kokeista voidaan kytkentämoduuli μ_c ja materiaalin karakteristinen mitta ℓ_t määrittää.

Polaarikontinuumimallin numeerinen ratkaisu voi olla vaikeaa. Kenttäsuureissa esiintyy usein reunahäiriön luonteisia nopeita muutoksia. Näiden ratkaisu edellyttää elementtiverkon tihentämistä reuna-alueilla, jonka pituusskaala on luokkaa ℓ_t . Ratkaisu on myös huomattavasti tavanomaista kontinuumimallia työläämpi johtuen kaksinkertaisesta määrästä interpoloitavia kenttäsuureita.

Rakenteiden kantokyvyn analyyseissä joudutaan usein käyttämään myötöpehmeneviä materiaalimalleja, joita ei voida analysoida klassisella Cauchyn kontinuumimallilla, josta puuttuu materiaalin sisäinen mitta. Cosserat'n kontinuumimallia käytettäessä muodonmuutoksen lokalisoitumisvyöhykkeellä on äärellinen paksuus vain, jos deformaatio aktivoi kiertymäkomponentteja [2]. Yksinkertaisin deformaatiomuoto jossa Cosserat'n kontinuumimalli epäonnistuu myötöpehmenevällä alueella on yksiakselinen veto- tai puristuskoe. Tämä tietenkin edellyttää, että reunaehdot sallivat poikittaissuuntaisten deformaatioiden tapahtuvan vapaasti ja että mikrokiertymille ei aseteta epähomogeenisia reunaehtoja. Täten polaarikontinuumimallistakaan ei ole ongelman täydelliseksi ratkaisijaksi.

Liite A. Konstitutiiviset parametrit

Kirjallisuudessa määritellään konstitutiiviset materiaalin jäykkyystensorit (21) ja (22) hieman eri tavoin. Tässä artikkelissa on käytetty Nowackin esittämää tapaa [20, sivu 17], tosin käyttäen Neffin symboleita [19]. Esitetään materiaalin jäykkyystensorit (21) ja (22) vertailun helpottamiseksi uudestaan:⁹

$$C_{ijkl}^{(\gamma)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \mu_c (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (21)$$

$$C_{ijkl}^{(\kappa)} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \gamma (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (22)$$

Eringen [5, sivu 110] määrittelee voimajännitysten ja Cosserat'n ensimmäisen venymä-tensorin välisen jäykkyystensorin seuraavasti

$$C_{ijkl}^{(E\gamma)} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + (\mu^* + \kappa) \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu^* \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (75)$$

$$= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + (\mu^* + \frac{1}{2} \mu^*) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{1}{2} \mu^* (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (76)$$

Eringen ja Neff et al. [19] määrittelevät isotrooppisen lineaarisesti kimmoisan moment-tijännitysten ja mikrokäyritysten välisen jäykkyystensorin seuraavasti

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{(E\kappa)} &= \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \gamma^* \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta^* \delta_{il} \delta_{jk} \\ &= \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\gamma^* + \beta^*) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{1}{2} (\gamma^* - \beta^*) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (77)$$

Käyttämällä Nowackin tapaa määritellä jäykkyystensori (22) saadaan momenttijänni-tyksille lauseke

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= C_{ijkl}^{(\kappa)} \kappa_{kl} = \alpha \kappa_{kk} \delta_{ij} + (\beta + \gamma) \kappa_{ij} + (\beta - \gamma) \kappa_{ji} \\ &= \alpha \kappa_{kk} \delta_{ij} + 2\beta \kappa_{(ij)} + 2\gamma \kappa_{[ij]} \\ &= (\alpha + \frac{2}{3} \beta) \kappa_{kk} \delta_{ij} + 2\beta \kappa'_{(ij)} + 2\gamma \kappa_{[ij]}, \end{aligned} \quad (78)$$

jossa $\kappa'_{(ij)}$ on mikrokäyritysmätensorin symmetrisen osuuden deviatorinen osa. Vastaavasti käytettäessä Eringenin ja Neffin määrittelyä saadaan lauseke

$$\mu_{ij} = [\alpha + \frac{1}{3} (\gamma^* + \beta^*)] \kappa_{kk} \delta_{ij} + (\gamma^* + \beta^*) \kappa'_{(ij)} + (\gamma^* - \beta^*) \kappa_{[ij]}. \quad (79)$$

Nowackin [20] ja Neffin määrittelyssä [19] tavanomaiset kimmovakiot kuten kimmo- ja leikkausmoduuli sekä Poissonin vakio ovat lausuttavissa klassisten relaatioiden (38) – (40) avulla, kun taas Eringenin parametrien avulla ilmoitettuna ne ovat

$$E = \frac{(2\mu^* + \kappa)(3\lambda + 2\mu^* + \kappa)}{2\lambda + 2\mu^* + \kappa}, \quad (80)$$

$$G = \mu^* + \frac{1}{2} \kappa, \quad (81)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu^* + \kappa}. \quad (82)$$

Nowackin ja Eringenin parametreilla on siten seuraavat relaatiot:

$$\mu = \mu^* + \frac{1}{2} \kappa, \quad \mu^* = \mu - \mu_c, \quad (83)$$

$$\mu_c = \frac{1}{2} \kappa, \quad \kappa = 2\mu_c, \quad (84)$$

$$\beta = \frac{1}{2} (\gamma^* + \beta^*), \quad \beta^* = \beta - \gamma, \quad (85)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} (\gamma^* - \beta^*), \quad \gamma^* = \beta + \gamma. \quad (86)$$

⁹Neff [11, 19] käyttää $C^{(\gamma)}$:lle Nowackin, mutta $C^{(\kappa)}$:lle Eringenin esitysmuotoa.

Liite B. Liiketyhtälöt siirtymäkomponenttien ja -potentiaalien avulla lausuttuna

Sijoittamalla liiketyhtälöihin (5) ja (8) isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisan materiaalin konstitutiiviset yhtälöt (24) ja (25), sekä ottamalla huomioon kinemaattiset yhtälöt (15), saadaan siirtymäsuureiden avulla lausutut liiketyhtälöt kirjoitettua muotoon

$$\rho\ddot{u}_i = (\lambda + \mu - \mu_c)u_{k,ki} + (\mu + \mu_c)u_{i,kk} + 2\mu_c\epsilon_{ijk}\varphi_{k,j} + \rho b_i, \quad (87)$$

$$\rho J\ddot{\varphi}_i = (\alpha + \beta - \gamma)\varphi_{k,ki} + (\beta + \gamma)\varphi_{i,kk} + 2\mu_c\epsilon_{ijk}u_{k,j} + 4\mu_c\varphi_i + \rho c_i. \quad (88)$$

Koordinaatistoinvariantein merkinnöin ne ovat

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu - \mu_c) \text{grad div } \mathbf{u} + (\mu + \mu_c)\Delta\mathbf{u} + 2\mu_c \text{curl } \boldsymbol{\varphi} + \rho\mathbf{b}, \quad (89)$$

$$\rho J\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = (\alpha + \beta - \gamma) \text{grad div } \boldsymbol{\varphi} + (\beta + \gamma)\Delta\boldsymbol{\varphi} - 4\mu_c\boldsymbol{\varphi} + 2\mu_c \text{curl } \mathbf{u} + \rho\mathbf{c}, \quad (90)$$

jossa Δ on Laplace-operaattori, $\Delta\mathbf{u} = \text{div grad } \mathbf{u}$.

Siirtymä- ja mikrokiertymävektorit voidaan jakaa pyörteettömään ja lähteettömään osaan

$$\mathbf{u} = \text{grad } h + \text{curl } \mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (91)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \text{grad } \phi + \text{curl } \boldsymbol{\Phi}, \quad \text{div } \boldsymbol{\Phi} = 0. \quad (92)$$

Sijoittamalla nämä lausekkeet liiketyhtälöihin (89) ja (90) päädytään systeemiin

$$\text{grad} \left[(\lambda + 2\mu)\Delta h - \rho\ddot{h} \right] + \text{curl} \left[(\mu + \mu_c)\Delta\mathbf{H} + 2\mu_c \text{curl } \boldsymbol{\Phi} - \rho\ddot{\mathbf{H}} \right] = \mathbf{0}, \quad (93)$$

$$\text{grad} \left[(\alpha + 2\beta)\Delta\phi - 4\mu_c\phi - \rho J\ddot{\phi} \right] + \text{curl} \left[(\beta + \gamma)\Delta\boldsymbol{\Phi} - 4\mu_c\boldsymbol{\Phi} + 2\mu_c \text{curl } \mathbf{H} - \rho J\ddot{\boldsymbol{\Phi}} \right] = \mathbf{0}. \quad (94)$$

Huomataan, että skalaaripotentialit h ja ϕ ovat kytkemättömiä kun taas vektori-potentiaalit \mathbf{H} ja $\boldsymbol{\Phi}$ kytkeytyvät toisiinsa Cosserat'n kytkentämoduulin kautta. Tästä saadaan systeemi

$$c_1^2\Delta h - \ddot{h} = 0, \quad (95)$$

$$c_3^2\Delta\phi - \omega_0^2\phi - \ddot{\phi} = 0, \quad (96)$$

$$c_2^2\Delta\mathbf{H} + \frac{1}{2}J\omega_0^2 \text{curl } \boldsymbol{\Phi} - \ddot{\mathbf{H}} = \mathbf{0}, \quad (97)$$

$$c_4^2\Delta\boldsymbol{\Phi} - \omega_0^2\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2}J\omega_0^2 \text{curl } \mathbf{H} - \ddot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{0}, \quad (98)$$

jossa on käytetty merkintöjä

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (99)$$

$$c_2^2 = \frac{\mu + \mu_c}{\rho}, \quad (100)$$

$$c_3^2 = \frac{\alpha + 2\beta}{\rho J}, \quad (101)$$

$$c_4^2 = \frac{\beta + \gamma}{\rho J}, \quad (102)$$

$$\omega_0^2 = \frac{4\mu_c}{\rho J}. \quad (103)$$

Liite C. Dispersioanalyysi

Otaksutaan potentiaalifunktiolle harmoniset yritteet

$$h = a \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (104)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (105)$$

$$\phi = b \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (106)$$

$$\Phi = \mathbf{B} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (107)$$

joissa \mathbf{k} on aaltolukuvektori, \mathbf{x} paikkavektori ja ω ominaiskulmataajuus. Sijoitetaan harmonisuusoletus yhtälöihin (95)-(98). Skalaaripotentiaalien yhtälöistä (95) ja (96) saadaan suoraan ratkaisut

$$\omega_1 = c_1 k, \quad \text{ja} \quad \omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 + c_3^2 k^2}, \quad (108)$$

jossa $k = |\mathbf{k}|$. Vektoripotentialit (105) ja (107) kytkeytyvät toisiinsa yhtälöiden

$$\begin{cases} (\omega^2 - c_2^2 k^2) \mathbf{A} + \frac{1}{2} J \omega_0^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B} i & = 0 \\ \frac{1}{2} \omega_0^2 \mathbf{k} \times \mathbf{A} i + (\omega^2 - \omega_0^2 - c_4^2 k^2) \mathbf{B} & = 0 \end{cases}, \quad (109)$$

välityksellä, joista huomataan, että $\mathbf{k} \perp \mathbf{A}$, $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ ja $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$. Kertomalla yhtälöiden vasemmat puolet liittoluvuillaan saadaan tuloksena homogeeninen lineaarinen yhtälösystemi, jolla on ei-triviaali ratkaisu vain jos kerroinmatriisi on singulaarinen. Asettamalla kerroinmatriisin determinatti häviämään saadaan ehto

$$4 \frac{(\omega^2 - c_2^2 k^2)(\omega^2 - \omega_0^2 - c_4^2 k^2)}{J \omega_0^4} - k^2 = 0. \quad (110)$$

Tämä dispersioyhtälö voidaan kirjoittaa myös kauniimmassa muodossa

$$\omega^4 - 2pk^2\omega^2 + qk^4 = 0, \quad (111)$$

jossa

$$2p = \omega_0^2 k^{-2} + c_2^2 + c_4^2, \quad \text{ja} \quad q = c_2^2 c_4^2 + \omega_0^2 k^{-2} (c_2^2 - \frac{1}{4} J \omega_0^2). \quad (112)$$

Dispersioyhtälön (111) ratkaisut ovat

$$\omega_{2,4}^2 = (p \pm \sqrt{p^2 - q}) k^2, \quad (113)$$

jossa diskriminantti osoittautuu aina positiiviseksi

$$p^2 - q = \frac{1}{4} (\omega_0^2 k^{-2} + c_4^2 - c_2^2)^2 + \frac{1}{4} J \omega_0^4 k^{-2}. \quad (114)$$

Dispersioyhtälön ratkaisujen (113) vaihenopeuksille antamat asymptoottiset arvot kun $k \rightarrow \infty$ ovat

$$v^2 = p \pm \sqrt{p^2 - q} = \frac{1}{2} (c_2^2 + c_4^2) \pm \frac{1}{2} |c_4^2 - c_2^2| = c_4^2 \quad \text{tai} \quad c_2^2. \quad (115)$$

Merkitään alaindeksillä 2 aaltoa, jonka asymptoottinen vaihenopeus on c_2 ja vastaavasti alaindeksi 4 viittaa aaltoon, jonka asymptoottinen vaihenopeus on c_4 .

Cosserat'n kontinuumimallissa voi siten esiintyä neljä erilaista harmonista aaltomuotoa, jotka ovat seuraavat.

1. Pitkittäinen aaltolukuvektorin k suunnassa etenevä siirtymäaalto, jonka vaihenopeus on $v_1 = \omega_1/k = c_1$. Tätä aaltoa kutsutaan pitkittäiseksi akustiseksi aalloksi, eli LA-aalloksi. Tämä on identtinen klassisen Cauchyn kontinuumimallin monokromaattisen taso-aallon kanssa.
2. Pitkittäinen aaltolukuvektorin suunnassa nopeudella $v_3 = \omega_3/k$ etenevä mikrokierymäaalto. Tätä aaltoa kutsutaan pitkittäiseksi optiseksi, eli LO-aalloksi.
3. Tasossa, joka on kohtisuorassa aaltolukuvektoria vastaan nopeudella $v_2 = \omega_2/k$ etenevä aalto, jota kutsutaan poikittaiseksi akustiseksi, eli TA-aalloksi.
4. TA-aallon kanssa kytkeytyneenä nopeudella $v_4 = \omega_4/k$ etenevä poikittainen optinen, eli TO-aalto.

Lukuunottamatta LA-aaltoa, kaikki muut aallot ovat dispersiivisiä. TA-aallon asymptoottinen nopeus hyvin pitkille aallonpituuksille ($k \rightarrow 0$) on

$$c_T = \sqrt{\mu/\rho}, \quad (116)$$

joka on sama kuin klassisen Cauchyn kontinuumimallin leikkausaallon etenemisnopeus, katso kuva 6. On myös syytä huomata, että optiset aallot esiintyvät vain rajataajuutta ω_0 suuremmilla taajuuden arvoilla.

Konformisesti invariantissa käyritysmätilassa nopeuksien $c_i, i = 1, \dots, 4$ lausekkeet materiaaliparametrien avulla kirjoitettuna ovat seuraavat

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = \frac{2(1-\nu)\mu}{1-2\nu}\frac{\mu}{\rho}, \quad (117)$$

$$c_2^2 = \frac{\mu + \mu_c}{\rho}, \quad (118)$$

$$c_3^2 = \frac{4}{3}\frac{\beta}{\rho J} = \frac{4}{3}\frac{\mu\ell_t^2}{\rho J}, \quad (119)$$

$$c_4^2 = \frac{\beta}{\rho J} = \frac{\mu\ell_t^2}{\rho J}. \quad (120)$$

Tällöin ainakin $c_3 > c_4$. Eringenin mukaan [5, luku 5.11] näyttäisi olevan voimassa järjestys

$$c_3 \geq c_4 \geq c_1 \geq c_2. \quad (121)$$

Jotta yllä oleva nopeuksien järjestys olisi mahdollinen, on seuraavien materiaaliparametrien väliset ehdot oltava voimassa

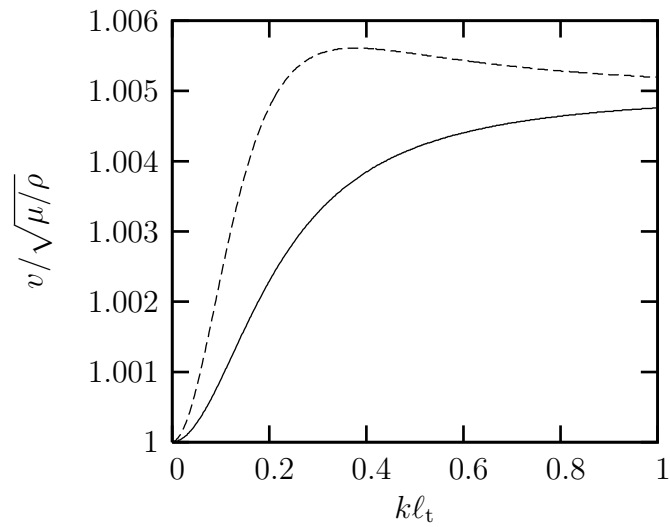
$$c_1 \geq c_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_c}{\mu} \leq \frac{1}{1-2\nu}, \quad (122)$$

ja

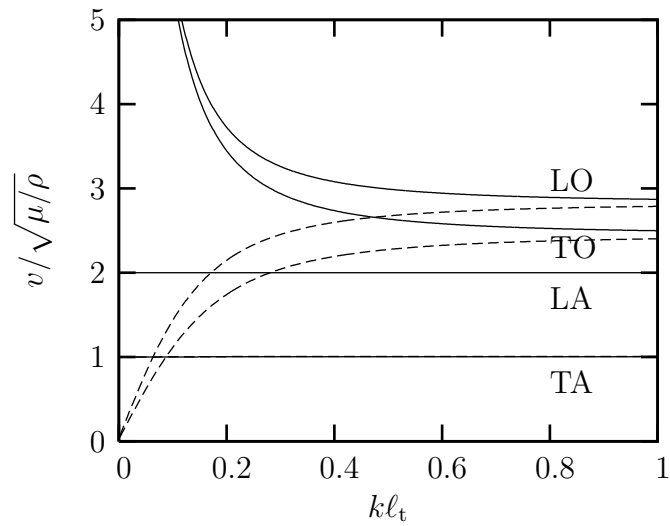
$$c_4 \geq c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell_t^2}{J} \geq \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}. \quad (123)$$

Lähestyttäessä kokoonpuristumatonta ainetta, eli $\nu \rightarrow 0,5$, ehtoa $c_4 \geq c_1$ on vaikea perustella.

Kuvassa 7 on esitetty edellä kuvattujen neljän aallon vaihe- ja ryhmänopeudet $v_R = d\omega/dk$. Poikittainen akustinen aalto riippuu vain vähäisessä määrin aaltoluvusta ja sen ryhmänopeus on suurempi kuin vaihenopeus, katso kuvaa 6. Optisten aaltojen vaihenopeus on suurempi kuin ryhmänopeus, joten niiden dispersiökäyttäytyminen on normaalia.



Kuva 6. TA-aallossa esiintyy poikkeava dispersiokäyttäytyminen. Ryhmänopeus on piirretty katkoviivalla. Konformisesti invariantin käyrästätilan materiaaliparametreilla on arvot $\mu_c/\mu = 0,01$, $\ell_t^2/J = 6$.



Kuva 7. Vaihenopeudet ja ryhmänopeudet (merkitty katkoviivoilla) dimensiottoman aaltoluvun funktiona konformisesti invariantissa käyrästätilassa $\mu_c/\mu = 0,01$, $\ell_t^2/J = 6$, $\nu = 1/3$.

Kiitokset

Jouni Freundille, Martti Mikkolalle, Jari Mäkiselle ja Eero-Matti Saloselle kommenteista ja keskusteluista.

Viitteet

- [1] E.L. AERO, E.V. KUVSHINSKII, Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. *Soviet Physics, Solid State*. **2**, 1961, 1272–1281.
- [2] R. DE BORST, A generalisation of J_2 -flow theory for polar continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **103**, 1993, 347–362.
- [3] E. COSSERAT, F. COSSERAT, *Théorie des Corps Déformables*, A. Herman & Sons, Paris, 1909. *Theory of Deformable Bodies* käänös D.H. Delphenich, saatavilla www.uni-due.de/hm0014/Cosserat_files/Cosserat09_eng.pdf
- [4] A.C. ERINGEN, *Theory of micropolar elasticity*, Luku 7 teoksessa *Fracture, An Advanced Treatise*, Vol. II, Mathematical Fundamentals, s. 621–729, Academic Press, New York, 1968.
- [5] A.C. ERINGEN, *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*, Springer, New York, 1999.
- [6] R.D. GAUTHIER, W.E. JAHSMAN, A quest for micropolar elastic constants, *Journal of Applied Mechanics*, **42**, 1975, 369–374.
- [7] A.E. GREEN, R.S. RIVLIN, Multipolar continuum mechanics. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*. **17** (2), 1964, 113–147.
- [8] G. HOLZAPFEL, *Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering*, John Wiley & Sons, 2000.
- [9] D. IEŞAN, Bending of micropolar elastic beams by terminal couples, *Analele Ştiinţifice ale Universităţii Al. I. Cuza din Iaşi*, **17**, 1971, 483–490.
- [10] W. JAUNZEMIS, *Continuum Mechanics*, MacMillan, New York, 1967.
- [11] J. JEONG, P. NEFF, Existence, uniqueness and stability in linear Cosserat elasticity for weakest curvature conditions, *Mathematics and Mechanics of Solids*, **15**, 2010, 78–95.
- [12] W.T. KOITER, Couple-stresses in the theory of elasticity I, II. *Proeedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen B*, **67**, 1964, 17–44.
- [13] G.V. KRISHNA REDDY, N.K. VENKATASUBRAMANIAN, On the flexural rigidity of a micropolar elastic circular cylinder. *Journal of Applied Mechanics*, **45**, 1978, 429–431.
- [14] R.S. LAKES, Experimental methods for study of Cosserat elastic solid and other generalized elastic continua. *Continuum Models for Materials with Microstructure*, H.B. Mühlhaus (toim.), Wiley, 1995, 1–25.
- [15] L.E. MALVERN, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [16] A.V. METRIKINE, On causality of the gradient elasticity models. *Journal of Sound and Vibration*, **297**, 2006, 727–742.
- [17] R.D. MINDLIN, Micro-structure in linear elasticity. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*. **16** (1), 1964, 51–78.

- [18] P. NEFF, J. JEONG, A new paradigm: the linear isotropic Cosserat model with conformally invariant curvature energy. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **89**(2), 2009, 107–122.
- [19] P. NEFF, J. JEONG, A. FISCHLE, Stable identification of Linear isotropic Cosserat parameters: bounded stiffness in bending and torsion implies invariance of curvature. *Acta Mechanica*, **211**, 2010, 237–249.
- [20] W. NOWACKI, *Theory of Asymmetric Elasticity*, PWN - Polish Scientific Publishers, Varsova, Pergamon Press, Oxford, 1986. (Puolankielinen alkuperäisteos 1971.)
- [21] R.A. TOUPIN, Theories of elasticity with couple-stress. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*. **17** (2), 1964, 85–112.
- [22] W. VOIGT, Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Vol. 24, Göttingen, 1887.

Reijo Kouhia
 Tampereen teknillinen yliopisto
 Teknisen suunnittelun laitos
 PL 589, 33101 Tampere
 reijo.kouhia@tut.fi