Rakenteiden Mekaniikka
Vol. 46, Nro 3, 2013, s. 55-69

Palkin teknisen taivutusteorian historiasta

Timo Saksala

Tiivistelmä. Tässä artikkelissa tarkastellaan palkin teknisen (Eulerin-Bernoullin) taivutusteorian historiaa. Teksti pureutuu palkkiteorian kehitykseen siihen vaikuttaneiden henkilöiden kautta kronologisessa järjestyksessä, mutta tekstin painopiste on kuitenkin asioissa, ei niinkään henkilöissä.

Avainsanat: tekninen taivutusteoria, Eulerin-Bernoullin palkkiteoria, mekaniikan historia

Johdanto

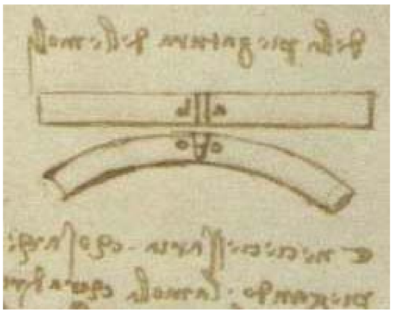
Palkin teknistä taivutusteoriaa kutsutaan nykyisin Eulerin-Bernoullin palkkiteoriaksi. Palkkiteorian historia, johon ovat vaikuttaneet useat henkilöt, on kuitenkin lähes 400 vuotta vanha. Tässä artikkelissa tarkastellaan suoran palkin taivutusteorian historiaa 400 vuoden takaa aina 1800-luvun loppuun. Käsittely rajoittuu yksiakseliseen taivutukseen eli taivutukseen, jossa kuormitustaso sisältää palkin kaikkien poikkileikkauksien toisen pääakselin. Tekstissä käydään läpi palkkiteorian kehitykseen vaikuttaneet henkilöt ja heidän ansionsa kronologisessa järjestyksessä, mutta siitä huolimatta teksti keskittyy ennen kaikkea asioihin, ei niinkään henkilöihin.[1]

Palkin taivutusteoria 1400-luvulla

Da Vinci (1452–1519)

Galileo Galileita pidetään ensimmäisenä julkaistun palkkiteorian kehittäjänä. Sen jälkeen kun *Codex Madrid* [5] löydettiin Espanjan kansalliskirjastosta vuonna 1967, selvisi kuitenkin, että Leonardo da Vinci oli jo sata vuotta Galileita aiemmin löytänyt taivutetun palkin poikkileikkauksen oikean venymä- ja jännitysjakauman, päinvastoin kuin Galilei [6]. Da Vinci havaitsi taivutetun palkin leveyden kasvavan poikkipinnan puristetulla ja kutistuvan sen vedetyllä puolella. Kuva 1 esittää da Vincin hahmotelman taivutetusta palkista, joka osoittaa hänen oivaltaneen poikkileikkaustason pysyvän tasona myös taivutetussa tilassa.

[1] Esitys perustuu suurelta osin Timoshenkon kirjaan *History of Strength of Materials* [1], joten siihen ei erikseen viitata. Muita rakenteiden mekaniikan historiaa käsitteleviä kirjoja ovat esimerkiksi [2-4].

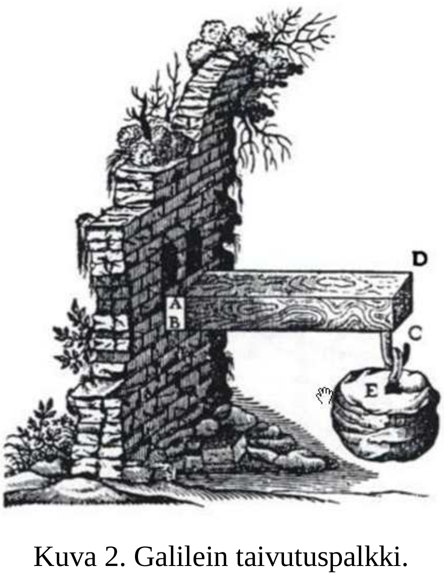


Kuva 1. Leonardo da Vincin käsitys taivutetusta palkista (*Codex Madrid I*, folio 84).

Palkin taivutusteoria 1600-luvulla

Galilei (1564–1642)

Teoksessaan *Kaksi uutta tiedettä* (1638) Galilei esittelee suoran sauvan vetoa tutkiessaan käsitettä ”absoluuttinen murtumisen vastustuskyky”, jolla hän tarkoittaa absoluuttista lujuutta vetokokeessa eli $S = \sigma_{ult}A$. Hän käyttää käsitettä tarkastellessaan vetosauvaa kuvan 2 mukaisena ulokepalkkina.

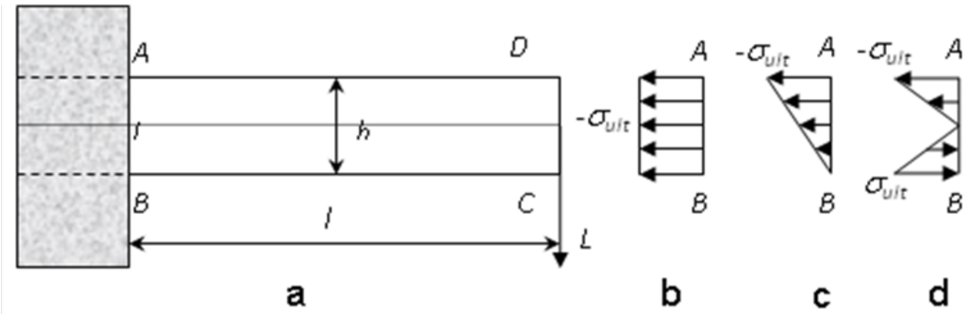


Kuva 2. Galilein taivutuspalkki.

Galilei käsittelee uloketta vipuna, jonka varret ovat *BA ja BC*. Ensimmäiseen näistä, BA:han, vaikuttaa edellä mainittu vastustuskyky (kuvat 2 ja 3). Galilei olettaa, että murtumahetkellä vastustuskyky, joka estää seinän ulkopuolella olevaa palkin osaa irtoamasta seinän sisäpuolella olevasta, on tasaisesti jakautunut (kuva 3b) ja saa maksimikuormaksi

$$L = \frac{Sh}{2l}. \tag{1}$$

Oikea tulos pisteessä C palkille, jonka jännitysjakauma on kuvan 3d mukainen, on $Sh/(6l)$. Galilein tulos (1) on siis kolminkertainen ”todelliseen” kuormaan verrattuna.



Kuva 3. Galilein ja Mariotten taivutuskokeen periaate (a), Galilein olettama ”tasainen vastustuskyky” eli sisäisten voimien jakauma murtumahetkellä (b), Mariotten 1. (c) ja 2. jännitysjakauma (d).

Todellisuudessa materiaalit eivät noudata Hooken lakia murtoon asti, joten jännitysjakauma poikkeaa kuvan 3d jakaumasta. Tämä parantaa Galilein tulosta jonkin verran.

Galilei päättelee teoriansa pohjalta oikein, että prismaattinen uloke, jonka leveys b on suurempi kuin sen paksuus h, antaa suuremman vastustuskyvyn murtoa vastaan kuormitettuna leveyden suunnassa kuin kuormitettuna samalla kuormalla paksuussuunnassa, kun suhde on $b/h = (h \cdot b^2/6)/(b \cdot h^2/6)$. Käsitellessään geometrisesti samanlaisia ulokepalkkeja Galilei havaitsee, että oman painonsa vuoksi taivutusmomentti tuella kasvaa pituuden neljännessä potenssissa, kun taas tasaisen vastustuskyvyn mukainen momentti (sisäisen voimajakauman momentti) pisteen B suhteen kasvaa poikkileikkauksen mittojen kolmannessa potenssissa. Tämän takia geometrisesti samanmuotoiset ulokepalkit eivät ole yhtä lujia.

Galilei käsittelee myös staattisesti määrättyä kaksitukista palkkia, jota kuormittaa poikittainen pistevoima, ja saa selville, että taivutusmomentti on suurimmillaan kuorman kohdalla ja että se on verrannollinen voiman tuilta mitattujen etäisyyksien tuloon. Hän myös – todennäköisesti ensimmäisenä – huomaa mahdollisuuden materiaalin säästöön lähellä tukia. Galilei johti suorakulmiopoikkileikkaukselle myös tasalujan ulokepalkin muodon, joka on paraabeli palkin korkeuden suhteen.

Mariotte (1620–1684)

Ranskalainen Edme Mariotte olettaa, että murtumahetkellä ulokepalkin oikeanpuoleinen osa kiertyy pisteen B suhteen (kuva 3). Tämän perusteella hän päättelee, että palkin pitkittäissäikeissä vaikuttavat voimat ovat verrannollisia niiden etäisyyteen pisteestä B (kuva 3c). Tästä seuraa, että suorakulmiopoikkileikkaukselle näiden voimien summa on

$S/2$, jossa S on vastaavan palkin absoluuttinen lujuus vetokokeessa. Lisäksi näiden voimien momentti B:n suhteen on $S/2 \cdot 2/3h = Sh/3$, jossa h on palkin korkeus. Kun tämä momentti asetetaan yhtä suureksi kuin kuorman L aiheuttama momentti Ll, saadaan maksimikuormitukseksi

$$L = \frac{Sh}{3l}. \tag{2}$$

Siten, käyttäen samaa rotaatiopistettä kuin Galilei, Mariotten maksimikuorma on 2/3 Galilein saamasta arvosta.

Mariotte jatkaa analyysiaan ja huomaa, että suorakulmiopoikkileikkauksessa palkin alemman puoliskon IB säikeet ovat puristustettuja, kun taas ylemmän puoliskon IA säikeet ovat vedettyjä. Laskeakseen kuormituksen L, joka tarvitaan kumoamaan vedossa olevien säikeiden vastustus, Mariotte käyttää kaavaa (2) ja sijoittaa siihen arvon $h/2$. Näin hän saa kuorman

$$L_1 = \frac{Sh}{6l}. \tag{3}$$

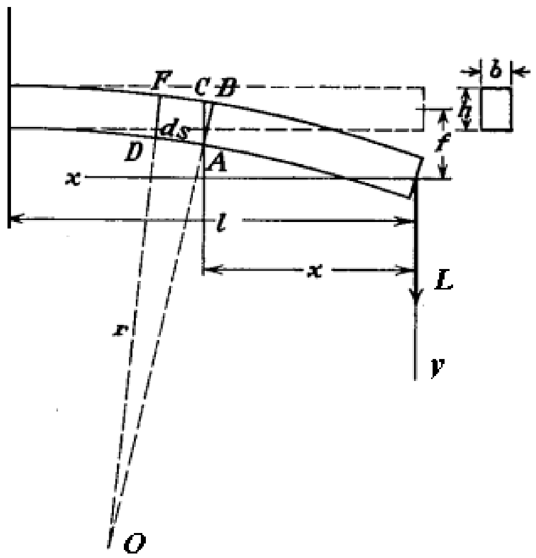
Osan ID puristuksessa oleviin säikeisiin hän olettaa pätevän saman voimajakauman kuin vedossa oleviin säikeisiin. Näin hän saa niille kaavan (3) mukaisen lujuuden ja kokonaislujuudeksi edelleen kaavan (2) mukaisen arvon. On siis selvää, että Mariotten käyttämä voimajakauma säikeissä on oikea. Mutta laskiessaan vetävien voimien aiheuttamaa momenttia pisteen I suhteen ei riitä, että hän sijoittaa h:n tilalle $h/2$:n kaavaan (2), vaan hänen täytyy sijoittaa myös S:n tilalle $S/2$. Tämä virhe esti Mariottea pääsemästä oikeaan tulokseen Hooken lakia murtoon asti noudattavan palkin murtokuormasta.

Mariotte piti neutraaliakselin sijaintia merkityksettömänä. Hän yritti kokeellisesti todistaa teoriaansa pyöreällä palkilla, jonka pituus, halkaisija ja lujuus olivat $l = 4$ ”, $d = 1/4$ ” ja $S = 330$ lb. Koe antoi maksimikuorman $L = 6$ lb, kun kaava (2) antaa $L = 55/8$ lb $\approx 6{,}9$ lb. Mariotte yritti selittää eroa ”aikaefektin” avulla, jonka mukaan näyte voi ajan kuluessa heikentyä, niin että se lopulta murtuu myös pienemmällä kuormalla (tässä kuormalla $S = 300$ lb). Hänen teoriansa on kuitenkin tarkempi kuin Galilein, jonka teoria tässä tapauksessa antaa tuloksen $L = 115/16$ lb $\approx 10{,}3$ lb.

Bernoulli (1654–1705)

Jacob Bernoulli käsitteli kimmoisen palkin taipumaviivaa seuraten Mariotten oletusta neutraaliakselin sijainnista (poikkileikkauksen piste B kuvassa 3). Lisäksi Bernoulli olettaa, että poikkileikkauksen konkaavin puoleisen reunan tangentti on kohtisuorassa ulkoisten voimien vaikutustasoa vastaan.

Bernoulli tarkastelee kuvan 4 mukaista ulokepalkkia ja sen elementtiä $ABFD$, jonka pituus on ds. Taivutuksessa poikkileikkaus AB kiertyy pisteen A ympäri poikkileikkauksen FD suhteen. Tällöin vierekkäisten poikkileikkausten pidentymä on verrannollinen etäisyyteen pisteestä A. Jos oletetaan Hooken lain mukainen materiaali ja merkitään konveksin puolen uloimman säikeen pidentymää symbolilla Δds, vedossa oleviin säikeisiin vaikuttavien voimien resultantti poikkileikkauksessa AB on



Kuva 4.Jacob Bernoullin tarkastelema ulokepalkki.

$$R_{AB} = \frac{1}{2}\frac{m\Delta ds}{ds}bh\,, \tag{4}$$

jossa *bh* on poikkileikkauksen pinta-ala ja *m* on materiaalin kimmo-ominaisuuksista riippuva vakio. Tämän resultantin momentti pisteen *A* suhteen on yhtä suuri kuin ulkoisen voiman momentti saman pisteen suhteen, josta saadaan

$$\frac{1}{2}\frac{m\Delta ds}{ds}bh \cdot \frac{2}{3}h = Lx\,. \tag{5}$$

Kun lisäksi otetaan huomioon, että nyt $\Delta ds / ds = h / r$, saadaan yhtälö (5) muotoon

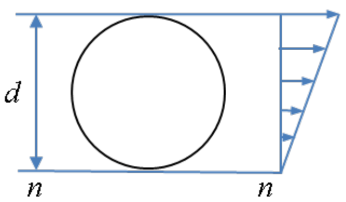
$$\frac{C}{r} = Lx\,, \tag{6}$$

jossa $C = mbh^3/3$. Näin on selvää, että termi *C* on oikeaan verrattuna nelinkertainen, mikä johtuu neutraaliakselin sijainnin virheellisyydestä kaavan johdossa. Kuitenkin kaavan (6) muoto, jonka mukaan palkin taipumaviivan kaarevuus on verrannollinen taivutusmomenttiin, on oikea.

Palkin taivutusteoria 1700-luvulla

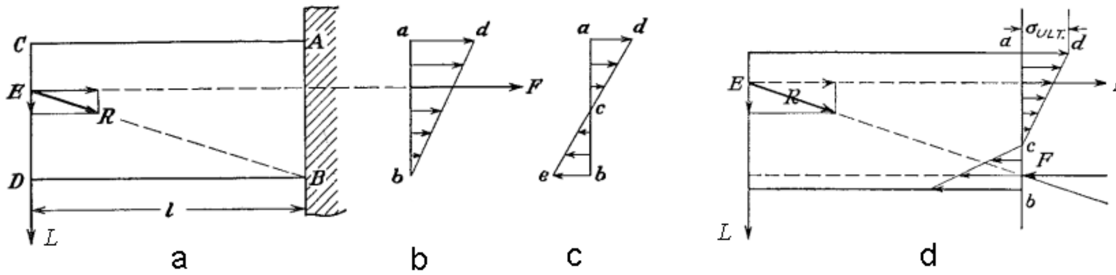
Parent (1666–1716)

Antoine Parent oletti Mariottea seuraten palkin alapinnan reunan tangentin kohtisuoraksi voimien vaikutustasoa vastaan. Hän osoitti, että Mariotten johtamaa kaavaa (1) ei voida soveltaa pyöreille tai pyöreille putkimaisille palkeille. Parent kuitenkin olettaa kuvan 5 mukaisen pitkittäissäikeiden voimajakauman ja saa selville, että pitkittäissäikeiden voimien maksimimomentti akselin *nn* (jonka ympäri poikkileikkaus oletetusti kiertyy) suhteen on 5*Sd*/16, jossa *S* on palkin ”absoluuttinen lujuus”. Tämän mukaan siis kaavassa (2) on käytettävä arvoa 5*d*/16 arvon *h*/3 sijaan.



Kuva 5. Parent’n oletus poikkileikkauksen voimajakaumasta.

Myöhemmin Parent käsittelee neutraaliakselin paikkaa ja tarkastelee kuvan 6a mukaista suorakulmiopoikkileikkauksista ulokepalkkia. Hän olettaa ensin, että poikkileikkaus kiertyy pisteen *B* ympäri, jolloin vastaava jännitysjakauma (kuva 6b) voidaan korvata resultantilla *F*. Kun tämä resultantti jatketaan pisteeseen *E*, saadaan tasapainotarkasteluilla selville, että voimien *F* ja *L* resultantin *R* täytyy kulkea pisteen *B* kautta. Nyt Parent väittää, että pisteellä *B* ei ole riittävästi vastustuskykyä toimia tukipisteenä resultantille *R*. Tästä hän päättelee, että huomattavan osan poikkileikkausta *AB* täytyy toimia tukena tälle resultantille ja olla siten puristuksessa. Näin Parent päätyy kuvan 6c mukaiseen jakaumaan.



Kuva 6. Parent’n tarkastelema ulokepalkki (a), hänen 1. jännitysjakaumansa ja sen resultantti (b), 2. jännitysjakauma (c), 3. jännitysjakauma (d).

Kuvan 6c jännitysjakauman ja sen tiedon perusteella, että murtumahetkellä palkin yläpinnan säikeiden jännitys poikkileikkauksessa *AB* on σ_{ult}, hän päättelee, että kuorman *L* taivutusta vastustava jännitysjakauman mukainen sisäinen momentti on vain puolet kuvan 6b vastaavasta momentista. Täten Parent korjaa Mariotten virheen, joka esiintyi vielä Bernoullilla.

Nykyään tiedetään, että kuvan 6c mukainen jännitysjakauma pätee vain Hooken lakia noudattavalle materiaalille ja sitä ei voida käyttää maksimikuorman laskemiseen. Parent tiesi Mariotten kokeiden perusteella, että maksimimomentin todellinen arvo on kuvien 6b ja 6c jännitysjakaumista saatavien arvojen välissä. Hän korjaa teoriaansa olettamalla, että murtumahetkellä neutraaliakseli ei ole poikkileikkauksen keskellä ja jännitysjakauma on kuvan 6d mukainen. Hän korvaa poikkileikkauksessa *ab* vaikuttavat voimajakaumat resultanteillaan ja laskee yhteen vetävän voiman *F* sekä ulkoisen voiman L kuvan 6d mukaisesti. Tästä hän päättelee tasapainotarkastelun avulla, että osuudella bc puristusta aiheuttavien voimien resultantti on yhtä suuri kuin osuudella ac vaikuttava resultantti F. Parent huomauttaa lisäksi, että normaalivoimien ohella leikkauksessa ab vaikuttaa myös leikkausvoima, jonka suuruus on L. Voidaan siis todeta, että Parent on ratkaissut täydellisesti palkin staattisen taivutuksen ongelman. Ennen näitä tuloksia hän oli jo päätynyt siihen, että neutraaliakseli voi siirtyä kuormitusta lisättäessä siten, että se murtohetkellä saavuttaa poikkileikkauksen alapinnan tangentin.

Parent tarkastelee myös tapausta, jossa materiaali ei noudata Hooken lakia, ja päättelee oikein, että tällöin sisäinen maksimimomentti tulee kuvan 6d jännitysjakaumasta saatavaa arvoa pienemmäksi, jos materiaali on sellaista, jossa venymät kasvavat pienemmässä suhteessa kuin jännitykset.

Voidaan siis todeta, että Parent'n ajatukset jännitysten jakautumisesta palkin poikkileikkauksessa olivat huomattavasti selkeämpiä kuin hänen edeltäjillään. Parent'n päätulokset jäivät kuitenkin pitkään tuntemattomiksi, koska niitä ei julkaistu Ranskan tiedeakatemiassa, vaan ainoastaan hänen huonosti editoiduissa, kootuissa töissään.

Euler (1707–1783)

Leonhard Euler tunnetaan matemaatikkona, mutta hän vaikutti myös palkkiteoriaan. Matemaatikkona hän oli kiinnostunut rakenteiden taipumaviivoista. Kimmoisen palkin tapauksessa hän ratkaisi Bernoullin ”suoralla menetelmällä” johtaman ulokepalkin taipumaviivan yhtälön (5) käyttäen ”lopullisten syiden menetelmää”. Tämän menetelmän mukaisesti hän ratkaisee Bernoullin hänelle esittämän potentiaalienergian $\int_0^s ds/R^2$ ”absoluuttisen minimin” variaatiolaskentaa käyttäen. Ulokepalkin tapauksessa Euler saa ratkaisuksi yhtälön

$$C\frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}} = Lx\,. \tag{7}$$

Hän esittää yhtälön (7) sarjaratkaisun ja osoittaa, että jos siirtymät ovat pieniä, saadaan

$$C = \frac{Ll(2l-3f)}{6f}\,. \tag{8}$$

Jos edellisessä lisäksi jätetään termi $3f$ huomiotta, saadaan tuttu ulokepalkin pään taipuman kaava

$$f = \frac{Ll^3}{3C}\,. \tag{9}$$

Pois jätetyn termin merkitys on ottaa huomioon taipumasta johtuva pituuden l:n jonkin verran pienempi arvo palkin alkupituuteen verrattuna.

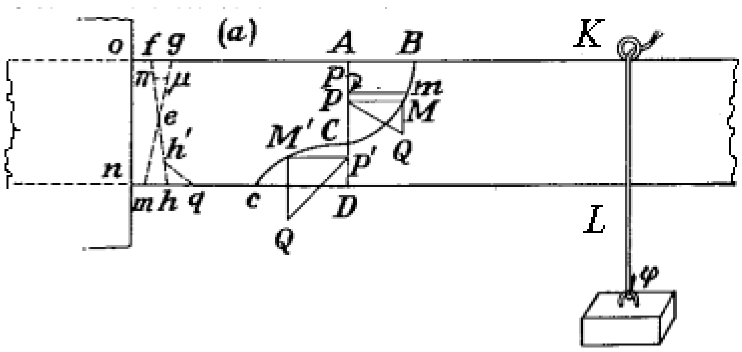
Euler ei käsittele termin C fysikaalista merkitystä sen enempää kuin sanoo, että se riippuu palkin kimmo-ominaisuuksista ja suorakulmiopoikkileikkaukselle se on lineaarisesti verrannollinen palkin leveyteen b ja kvadraattisesti palkin korkeuteen h. Oletus on siis virheellinen, sillä riippuvuus on kuutiollista korkeuteen nähden.

Coulomb (1736–1806)

Myös ranskalainen Charles-Augustin de Coulomb käsitteli ulokepalkin taivutusta. Vaikka Coulomb ei tuonut teoriaan merkittävästi uutta, hänet mainitaan tässä, koska Parent'n työt näyttävät olleen hänelle tuntemattomia. Tarkastellessaan kuvan 7 mukaista ulokepalkkia Coulomb olettaa materiaalin noudattavan Hooken lakia murtoon asti ja johtaa palkin maksimikuormalle L kaavan

$$\frac{Sh}{6} = Ll\,, \tag{10}$$

jossa S on ulokepalkin lujuus, kun se toimii vetosauvana, h palkin syvyys (korkeus) ja l sen pituus. Coulomb huomauttaa, että leikkausvoimien vaikutuksen voi jättää huomiotta, jos palkin syvyys on pieni leveyteen verrattuna.



Kuva 7. Coulomb'n tarkastelema ulokepalkki.

Coulomb tarkasteli myös palkkia, joka on täysin jäykästä materiaalista, ja johti sen lujuudelle, olettaen poikkileikkauksen kiertymisen pisteen h ympäri ja tasaisen jännitysjakauman, kaavan

$$\frac{Sh}{2} = Ll\,. \tag{11}$$

Kokeisiin verrattuna Coulomb sai tällä kaavalla jossain määrin liian suuren tuloksen ja päätteli sen perusteella, että poikkileikkaus kiertyykin jonkin pisteen *h'* ympäri siten, että poikkileikkauksen osa *hh'* on puristuksessa.

Palkin taivutusteoria 1800-luvulla

Navier (1785–1836)

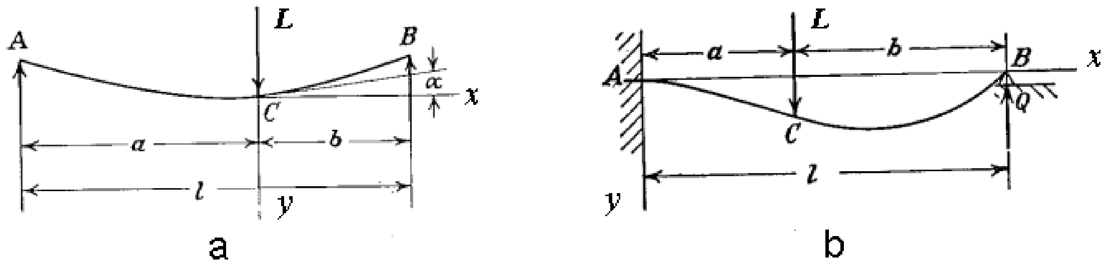
Ranskalainen Claude-Louis Navier ei tuntenut Parent'n eikä Coulomb'n töitä. Hän ajatteli aluksi Mariotten ja Bernoullin tavoin, että neutraaliakselin sijainti ei ole tärkeä, ja asetti sen palkin alareunaan (kun palkki taipuu alaspäin). Navier ajatteli myös, että Mariotten ensimmäinen kaava on riittävän tarkka palkin lujuuden laskemiseksi.

Myöhemmin (1819) Navier korjasi teoriaansa joiltain osin, mutta hänen neutraaliakselin paikan määritysmenetelmänsä jäi vielä virheelliseksi. Navier oletti, että neutraaliakseli jakaa poikkileikkauksen osiin siten, että veto- ja puristusjännitysten momentit ovat yhtä suuria. Vasta vuonna 1826 hän korjaa tämän virheen ja osoittaa, että Hooken lakia noudattavilla materiaaleilla neutraaliakseli kulkee poikkileikkauksen pintakeskiön kautta.

Käsitellessään prismaattisten palkkien taivutusta Navier olettaa, että taivutus tapahtuu voimien vaikutustasossa. Näin hänen analyysinsa on voimassa vain palkeille, joilla on symmetriataso, jossa voimat vaikuttavat. Hän olettaa, että poikkileikkaukset säilyvät taivutuksessa tasoina, ja päättelee statiikan tasapainoehtoja käyttäen, että neutraaliakseli kulkee pintakeskiön kautta. Tällöin palkin kaarevuus saadaan yhtälöstä

$$\frac{EI}{\rho} = M \,, \tag{12}$$

jossa I on poikkileikkauksen neliömomentti neutraaliakselin suhteen. Kun Navier lisäksi oletti muodonmuutokset pieniksi, hän sai tutun kaavan $EIy'' = M$, jota Eulerin ajoista lähtien on käytetty taipuman laskemiseen. Navier käyttää tätä yhtälöä minkä tahansa poikittaisesti kuormitetun yksinkertaisen palkin ongelmaan. Tässä esimerkkinä on kuvan 8a palkki.



Kuva 8. Navier’n tarkastelema kaksitukinen palkki (a) ja hyperstaattisesti tuettu ulokepalkki (b).

Navier johtaa kulman α (taipumaviivan tangentin pisteessä C ja vaakatason välinen kulma) ja pisteiden A ja B siirtymien välille yhtälöt

$$\begin{aligned} f_b &= \frac{La}{l}\frac{b^3}{3EI} + b\tan\alpha, \\ f_a &= \frac{Lb}{l}\frac{a^3}{3EI} - a\tan\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$

Koska näiden taipumien täytyy olla yhtä suuria, saadaan

$$\tan\alpha = \frac{Lab(a-b)}{3EIl}. \tag{14}$$

Tämän ja ulokepalkin tunnetun taipuman avulla voidaan kirjoittaa palkin osien taipuman lausekkeet.

Navier käsitteli vastaavalla tavalla jatkuvaa kuormaa. Laskiessaan maksimijännitystä hän tässä tapauksessa virheellisesti oletti, että maksimitaivutusmomentti esiintyy kuorman painopisteen kohdalla.

Edelleen Navier käsitteli kuvan 8b hyperstaattista palkkia. Hän poistaa tuen B ja korvaa sen ulkoisella tukireaktiolla Q sekä kirjoittaa ja integroi saadun staattisesti määrätyn palkin taipumaviivan erikseen palkin osille AC ja CB. Sen jälkeen hän käyttää hyväkseen sitä, että kuorman L kohdalla C taipuman ja sen tangentin arvot, laskettuna palkin eri osille lausutuista kaavoista, ovat yhtä suuria, ja näin hän saa tuntemattomalle tukireaktiolle tuella B arvon $Q = L(3a^2 l - a^3)/(2l^3)$. Tämän jälkeen palkin taipumaviiva voidaan määrittää. Navier käsitteli myös mutkikkaampia hyperstaattisia palkkeja.

Poncelet (1788–1867)

Jean-Victor Poncelet lienee ensimmäinen, joka otti huomioon leikkausvoimien vaikutuksen palkin taipumaan. Tasaisen jatkuvan kuorman q alaiselle ulokepalkille, jolla on suorakulmiopoikkileikkaus, hän johti kaavan

$$f = \frac{3}{2}\frac{ql^4}{Ebh^3} + \frac{27}{16}\frac{ql^2}{Ebh}, \tag{15}$$

jossa l, h ja b ovat palkin pituus, korkeus ja leveys. Kaavassa (15) toinen termi vastaa siis leikkausvoiman vaikutusta, joka on pieni suhteellisen hoikille palkeille.

Timoshenkon palkkiteorialla saadaan tulos (johto liitteessä A)

$$f_T = \frac{3}{2}\frac{ql^4}{Ebh^3} + \frac{ql^2}{2kGA}, \tag{16}$$

jossa k on leikkauskerroin, A on poikkileikkauksen pinta-ala ja G on liukumoduli. Suorakulmiolle $k = 5/6$ (katso [7] s. 288) ja $A = bh$, joten (16) saadaan muotoon

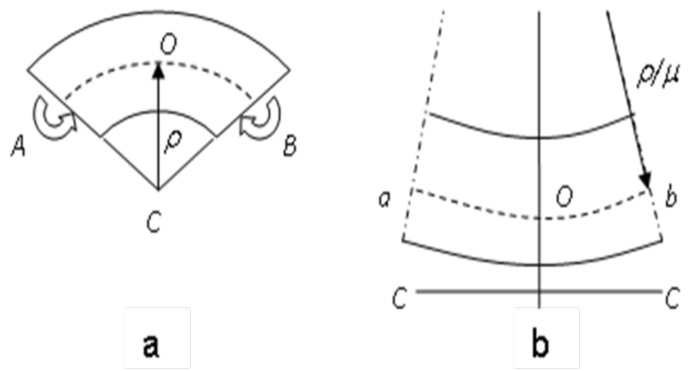
$$f_T = \frac{3}{2}\frac{ql^4}{Ebh^3} + \frac{3}{5}\frac{ql^2}{Gbh}. \tag{17}$$

Verrataan tuloksia liuku- ja kimmomodulin välisen yhteyden, $G = E/2(1+\nu)$, avulla. Materiaalille, jonka $\nu = 0{,}3$, saadaan ratkaisun (17) toisen termien kertoimeksi $6(1+\nu)/5 = 1{,}56$, kun kaavassa (15) $27/16 = 1{,}6875$.

Saint-Venant (1797–1886)

Barré de Saint-Venant tutki ensimmäisenä teknisen taivutusteorian perusoletusten tarkkuutta. Nämä perusoletukset ovat: (1) palkin poikkileikkaukset säilyvät taivutuksessa tasoina ja (2) palkin pitkittäissäikeet eivät puristu toisiaan vasten taivutuksen aikana ja ne ovat joko puhtaassa veto- tai taivutustilassa.

Saint-Venant osoittaa, että kyseiset oletukset ovat tarkasti voimassa vain puhtaassa taivutuksessa (palkin päissä pistemomentit). Tarkastellessaan kuvan 9 mukaista suorakulmiopoikkileikkauksista palkkia hän osoittaa, että säikeiden pituuden muutokset ja vastaavat poikittaiset deformaatiot täyttävät yllä mainittujen oletusten lisäksi deformaation jatkuvuusehdon.

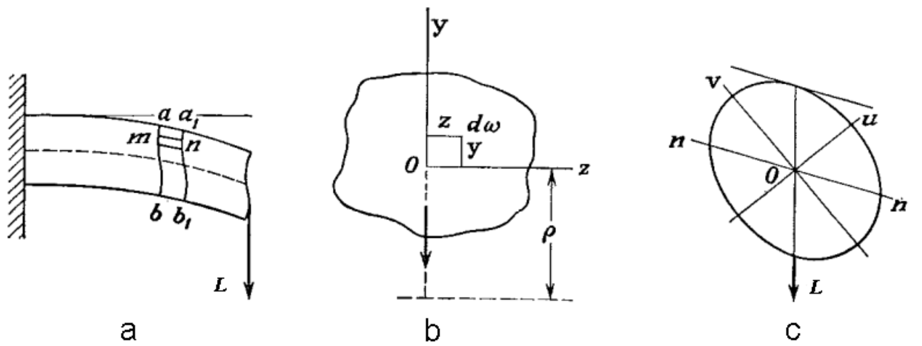


Kuva 9. Palkki puhtaassa taivutuksessa (a) ja sen poikkileikkauksen muodonmuutos (b).

Edelleen Saint-Venant osoittaa, että alun perin suorakulmion muotoinen poikkileikkaus muuttaa taivutuksessa muotonsa kuvan 9 mukaisesti. Poikittaiskutistuman (konveksilla puolella) ja -laajeneman (konkaavilla puolella) takia alun perin suora viiva *ab* taipuu hieman kaarevuussäteen ollessa ρ/μ, jossa jakaja on Poisson'n vakio. Tämän poikittaismuodonmuutoksen vuoksi neutraaliakselin *ab* etäisyys palkin ylä- ja alapinnasta muuttuu hieman kuvan 9 mukaisesti (voimakkaasti liioiteltu). Siten palkin ylä- ja alapinta muotoutuvat antiklastisiksi pinnoiksi.

Saint-Venant osoitti kuvan 10a ulokepalkkia tarkastellessaan, että leikkausjännitykset vaikuttavat poikkileikkausten (kuten *ab* ja a_1b_1) tasoissa ja näiden jännitysten läsnä ollessa poikkileikkaukset eivät säily tasoina, vaan vääristyvät kuvan 10a mukaisesti. Koska vääristymä on sama kaikille poikkileikkauksille, se ei venytä pitkittäissäikeitä, eikä siten vaikuta taivutusjännityksiin, jotka lasketaan olettaen poikkileikkausten säilyvän tasoina.

Navier oletti, että neutraaliakseli on kohtisuorassa taivuttavien voimien tasoa vastaan. Nicolas Persy puolestaan (katso [1], s. 136) osoitti ensimmäisenä, että se on voimassa vain, jos taivuttavien voimien taso *xy* leikkaa palkin poikkileikkaukset pitkin jotakin poikkileikkauksen päähitausakselia (kuva 10b). Vain silloin sisäisten voimien momentti *y*-akselin suhteen häviää, ja samojen voimien momentti *z*-akselin suhteen tasapainottaa ulkoisen momentin. Saint-Venant puolestaan osoitti, kuinka määrittää neutraaliakselin suunta, jos taivuttavien voimien taso ei kulje poikkileikkausten pääakselin kautta. Hän esittää kuvan 10c mukaisen poikkileikkauksen hitausellipsin,



Kuva 10. Leikkausjännitysten aiheuttama poikkileikkausten vääristymä (a), sisäisten voimien momentin laskenta (b) ja hitausellipsi (c).

jonka pääakselit ovat *ou* ja *ov*. Jos *OP* on nyt ulkoisten voimien vaikutustaso, neutraaliakseli *nn* on yhdensuuntainen ellipsin ja tason *OP* leikkauspisteisiin piirretyn tangentin kanssa.

Saint-Venant esitti ulokepalkin taipuman laskemismenetelmän, joka ei käytä taipumaviivan differentiaaliyhtälön integrointia. Nykyään kyseinen menetelmä tunnetaan nimellä momenttipintamenetelmä. Hän tutki myös ulkopalkin suuria taipumia, joissa kaarevuutta ei voida korvata taipuman toisella derivaatalla, ja esitti niille sarjaratkaisuja. Mainittakoon vielä, että Saint-Venant tutki myös epä-hookelaisesta materiaalista olevan palkin taivutusta.

Jourawski (1821–1891)

Coulomb kiinnitti huomioita ulokepalkin leikkausjännityksiin ja huomautti, että ne tulevat merkityksellisiksi vain suhteellisen syvillä palkeilla. Myös Navier käsitteli leikkausjännityksiä lyhyen palkin taivutuksessa. Hän laski kiinnitetyn pään leikkausjännitysjakaumasta keskiarvon ja yhdisti sen epätyydyttävällä tavalla taivutusjännityksiin. Tarkan ratkaisun palkin leikkausjännityksille esitti puolestaan Saint-Venant, mutta hänen ratkaisunsa sisälsivät vain muutaman yksinkertaisimman poikkileikkauksen.

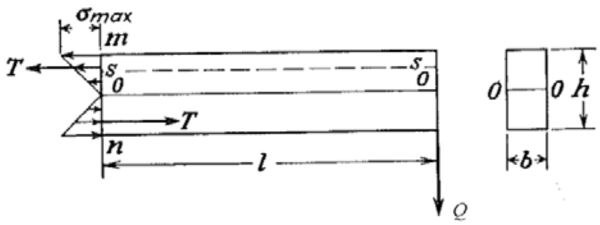
Dmitri Ivanovich Jourawski esitti monimutkaisemmille poikkipinnoille suuntaa-antavan ratkaisun työskennellessään syvistä puupalkeista koostuvan sillan suunnittelussa. Hän aloittaa kuvan 11 mukaisen suorakulmiopoikkileikkauksisen ulokepalkin tarkastelulla. Jourawski tarkastelee neutraalitasoa *OO* ja päättelee, että poikkileikkaukseen *mn* jakautuneet normaalijännitykset pyrkivät tuottamaan tasoon *OO* leikkausvoimaa *T*, jonka suuruus on

$$T = \frac{\sigma_{\max} bh}{4} = \frac{3Ql}{2h}, \tag{18}$$

ja vastaava leikkausjännitys, joka on jakautunut tasaisesti yli neutraalitason *OO*, on

$$\tau = \frac{T}{lb} = \frac{3Q}{2bh}. \tag{19}$$

Samoin hän laskee leikkausjännityksen, joka vaikuttaa missä tahansa neutraalitason suuntaisessa tasossa.



Kuva 11. Jourawskin tarkastelema ulokepalkki.

Jourawski osoittaa myös, että jos kuormitus on tasaisesti jakautunut yli palkin pituuden, leikkausjännitykset eivät enää ole tasaisesti jakautuneet yli neutraaliakselin. Tässä tapauksessa ne kasvavat, kun etäisyys vapaasta päästä kasvaa.

Rankine (1820–1872)

Maamekaniikasta tuttu William John Macquorn Rankine mainitaan tässä, koska hän esitti teorian, joka ottaa huomioon leikkausjännitysten vaikutuksen palkin taipuman suuruuteen. Hän esittää, että leikkausjännityksestä palkin taipumaviivan kulmakertoimeen aiheutuva lisä on

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{VS}{GIb}, \tag{20}$$

jossa V on leikkausvoima, S on poikkileikkauksen neutraaliakselin alapuoleisen osan staattinen momentti neutraaliakselin suhteen ja b poikkileikkauksen leveys neutraaliakselin kohdalla. Tasaisesti kuormitetulle, kaksitukiselle palkille, jonka poikkileikkaus on suorakulmio, hän saa leikkausjännityksen aiheuttaman lisän ja ”tavallisen” taipuman ($5/384ql^4/EI$) väliseksi suhteeksi $6Eh^2/(5Gl^2)$.

Timoshenkon palkkiteoriassa vastaava yhtälö on (katso liite A)

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{V}{kGA}, \tag{21}$$

jossa k on leikkauskerroin. Se voidaan määrittää (esimerkiksi) kaavalla (katso [7] s. 288 ja liite A)

$$\frac{1}{k} = \frac{A}{V^2}\int_A \tau^2 dA, \tag{22}$$

jossa $\tau = VS/Ib$. Suorakulmiopoikkeileikkaukselle kaava (22) antaa siis arvon 5/6, kuten aiemmin jo mainittiin. Kaavalla (21) leikkausvoiman aiheuttaman lisätaipuman ja ”tavallisen” taipuman suhteeksi saadaan nyt $(5/384ql^4/EI)/(ql^2/8kGA) = 24Eh^2/(25Gl^2)$, jossa on käytetty tietoja $I = bh^3/12$ ja $A = bh$. Tulos on 80 % Rankinen saamasta arvosta. Kaavan (20) voi johtaa esimerkiksi[2] tarkastelemalla taivutetussa palkissa olevan differentiaalialkion muodonmuutosta ja käyttämällä yhteyttä $\tau = G\gamma = VS/Ib$. Kaavan (21) johto lähteessä [7] tarkastelee koko poikkileikkausta (paksuussuunnassa) ja huomioi leikkausjännityksen epätasaisesta jakaumasta johtuvan poikkipintatasojen käyristymisen (kertoimen $1/k$ avulla).

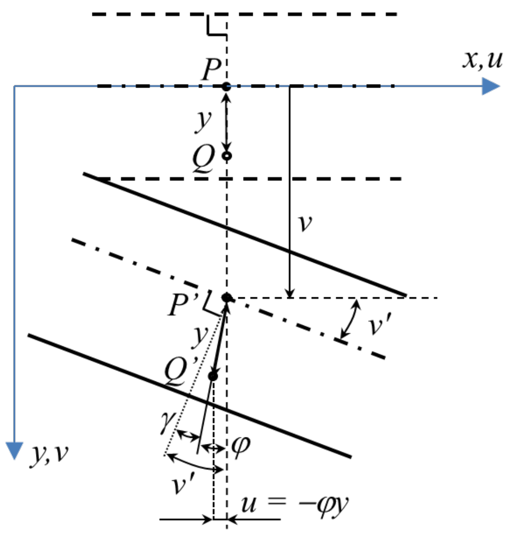
Lopuksi

Yksiakselisen, yhdestä fysikaalisesti lineaarisesta materiaalista valmistetun palkin taivutusteoria päätyi nykyiseen tilaansa 1800-luvun loppuun mennessä. 1900-luvulla palkkiteoriaa kehitti, muiden muassa, Stephen P. Timoshenko (1878-1972) esittämällä teorian, jossa leikkausmuodonmuutos on otettu huomioon (liite A). Muita tutkimuksia tarkempien palkkiteorioiden kehittämiseksi on esitelty esimerkiksi lähteessä [8].

[2] Kirjoittajalla ei ole Rankinen alkuperäistä artikkelia, josta hänen johtonsa selviäsi.

Liite A

Tarkastellaan kuvassa A1 esitetyn palkin muodonmuutoksia.



Kuva A1. Palkin muodonmuutos Timoshenkon teoriassa.

Timoshenkon palkkiteoriassa palkin akselia vastaan kohtisuora materiaaliviiva *PQ* säilyy palkin taipuessa suorana viivana *P'Q'*, mutta sen suunta muuttuu kulman γ verran (Euler-Bernoullin palkkiteoriassa $\gamma = 0$). Taipuman v, kiertymän φ ja liukuman γ (kaikki x:n funktioita) välille saadaan kuvasta yhteys

$$v' = \varphi + \gamma \,. \tag{A1}$$

Kaarevuuden κ ja taivutusmomentin M sekä liukukulman ja leikkausvoiman Q väliset yhteydet ovat

$$\kappa = \frac{M}{EI}, \quad \gamma = \frac{Q}{kGA}, \tag{A2}$$

missä k on leikkauskerroin, joka määritellään poikkileikkauksen siirtymäkertoimen ζ käänteislukuna. Siirtymäkerrointa käytetään Timoshenkon teoriassa korjaamaan virhettä, joka aiheutuu leikkausmuodonmuutokselle γ_{xy} (y:n funktio) käytetystä vakioapproksimaatiosta[3] γ. Nyt taipumalle saadaan differentiaaliyhtälö

$$v' = -\frac{M}{EI} + \frac{Q}{kGA} = \underbrace{v'_M}_{\varphi} + \underbrace{v'_Q}_{\gamma} \,. \tag{A3}$$

Soveltamalla teoriaa tasaisen kuorman q kuormittamaan ulokepalkkiin (pituus l), jonka taivutusmomentti ja leikkausvoima ovat $Q = q(l-x)$ ja $M = -1/2q(l-x)^2$, saadaan lopulta (reunaehtojen käytön jälkeen)

[3] Todellisuudessa poikkileikkaus ei säily suorana, koska leikkausjännitysjakauma ei ole vakio, vaan deformoituu kuvan 10a mukaisesti.

$$v(x)=\frac{q}{2EI}\left(\frac{l^2}{2}x^2-\frac{l}{3}x^3+\frac{x^4}{12}\right)+\frac{q}{kGA}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right). \qquad \text{(A4)}$$

Viitteet

[1] S. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, Dover Publications, 1983.
[2] J. Heyman, *Structural Analysis: A Historical Approach*, Cambridge University Press, 1998.
[3] K.-E. Kurrer, *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, Ernst & Sohn, 2008.
[4] E. Benvenuto, *An Introduction to the History of Structural Mechanics I & II*, Springer, 1991.
[5] Kinematic Models for Design. Cornell University Library, [WWW] Luettu: 9.11.2013. Saatavissa: http://historical.library.cornell.edu/kmoddl/toc_leonardo1.html
[6] The history of the theory of beam bending – Part 1, [WWW] Luettu: 9.11.2013. Saatavissa: http://newtonexcelbach.wordpress.com/2008/02/27/the-history-of-the-theory-of-beam-bending-part-1/
[7] A. Ylinen, *Kimmo- ja Lujuusoppi I*, Werner Söderström, 1961.
[8] E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo, *Beam Structures, Classical and Advanced Theories*, John Wiley & Sons, 2011.

Timo Saksala
Tampereen teknillinen yliopisto
Teknisen suunnittelun laitos
PL 589, 33101 Tampere
timo.saksala@tut.fi