

## Eräs ohutseinämäisen sauvan Saint-Venantin väännön ongelmakohta

Jukka Aalto ja Eero-Matti Salonen

**Tiivistelmä.** Artikkelissa keskitytään tarkastelemaan ohutseinämäisen sauvan Saint-Venantin väännön erästä ristiriitaista tulosta. Ristiriita on seuraava: Suoraan vääntöjännitysfunktion avulla saatu vääntömomentti ja konsistenttien leikkausjännitysten avulla saatu vääntömomentti eroavat oleellisesti toisistaan; jälkimmäinen on vain puolet edellisestä. Ristiriidan sisältöä selostetaan ensin ohuen suorakaidepoikkileikkauksen yhteydessä. Seuraavaksi tarkastellaan vakiopaksuisen kaarevan poikkileikkauksen ja lopuksi paksuudeltaan muuttuvan kaarevan poikkileikkauksen tapausta.

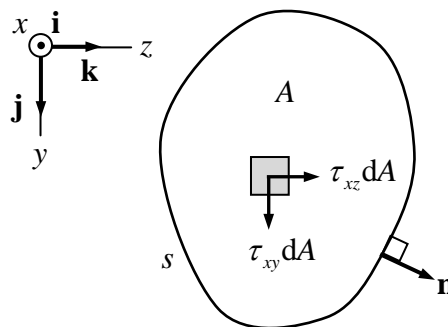
*Avainsanat:* Saint-Venantin vääntö, ohutseinämäinen poikkileikkaus, ristiriitainen tulos

### Johdanto

Artikkelin toisessa luvussa esitetään otsikossa mainittu ongelmakohta. Nyt esillä olevassa ensimmäisessä luvussa kerrataan taustan saamiseksi lyhyesti eräitä väännön käsitteitä.

Tarkastellaan suoraa prismaattista lineaarisesti kimmoista  $x$ -akselin suuntaista sauvaa ja sen poikkileikkausta (kuva 1). Saint-Venantin vääntöteoria eli lyhyesti Saint-Venantin vääntö formuloidaan perinteisesti voimamenetelmällä vääntöjännitysfunktiota hyväksi käyttäen [1]. Käsittely rajoitetaan koskemaan sauvaa, jonka materiaali on homogeenista.

Vääntöjännitysfunktio  $\Phi(y, z)$  määritellään funktiona, jonka avulla leikkausjännityskomponentit saadaan kaavoista



Kuva 1. Sauvan poikkileikkausalue  $A$  ja sen reuna  $s$ .

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (1)$$

Sille saadaan (liite A) differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta \quad A:ssa, \quad (2)$$

jossa  $G$  on sauvan aineen liukukerroin ja  $\theta$  sauvan vääntymä (poikkileikkauksen kiertymä pituutta kohti). Yhdesti yhtenäisen poikkileikkauspinnan tapauksessa reunaehdoksi voidaan asettaa

$$\Phi = 0 \quad s:llä. \quad (3)$$

Kun vääntöjännitysfunktio tunnetaan, voidaan vääntömomentti määrittää kaavalla

$$M = 2 \int_A \Phi \, dA = 2V, \quad (4)$$

jossa  $V$  on siis funktion  $\Phi$  synnyttämän ”kuplan” eli ontelon tilavuus.

### Kapea suorakaidepoikkileikkaus

Kuvan 2 (a) esittämässä tapauksessa on ilmeistä, että etäällä alueen päistä riippuvuus koordinaatista  $z$  häviää ja differentiaaliyhtälö (2) yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} = -2G\theta. \quad (5)$$

Kun reunoilla  $y = -t/2$  ja  $y = t/2$  sovelletaan reunaehtoa (3), ratkaisuksi saadaan

$$\Phi = G\theta \left( \frac{t^2}{4} - y^2 \right). \quad (6)$$

Kaavat (1) antavat vastaaviksi leikkausjännityskomponenteiksi

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 2G\theta y. \quad (7)$$

$z$ -akselin suuntainen leikkausjännitys on siis suoraan verrannollinen  $z$ -akselista mitattuun etäisyyteen  $y$  ja häviää poikkileikkauksen keskiviivalla; kuva 2 (b). Alueen päissä lausekkeet (6) ja (7) eivät luonnollisesti enää päde ja syntyy myös nollasta eroava jännityskomponentti  $\tau_{xy}$ .

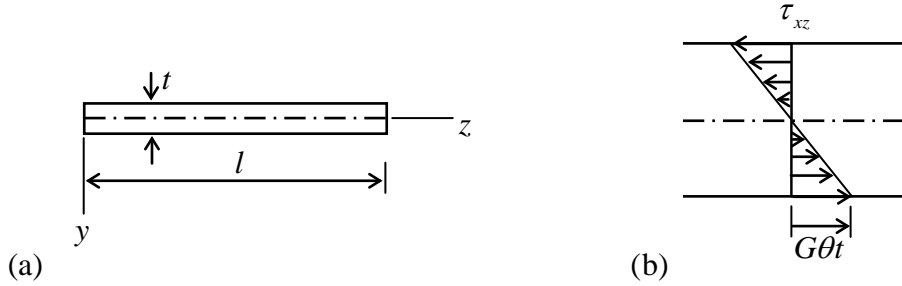
Parabolisen kuvaajan (6) integrointi välin  $(-t/2, t/2)$  yli antaa tuloksen  $1/6 \cdot G\theta t^3$  ja kun tämä kerrotaan poikkileikkauksen pituudella  $l$  saadaan ontelon tilavuus

$$V = \frac{1}{6} G\theta t^3 l. \quad (8)$$

Kaava (4) antaa vääntömomentin

$$M = \frac{1}{3} G\theta t^3 l. \quad (9)$$

Johdossa on siis jätetty alueen päiden muuttunut tilanne otaksuttavasti vaikutuksiltaan vähäisenä huomiotta ja oletettu kaavojen (6) ja (7) pätevän myös päiden alueilla. Tulos (9) on silti kirjallisuudessa esitetty oikea lauseke, kun suhde  $t/l \rightarrow 0$ . Kaavaa (9) käytetään yleisesti ohutseinämäisten poikkileikkausten likikaavana.



Kuva 2. (a) Kapea suorakaidepoikkileikkaus. (b) Jännityskomponentin  $\tau_{xz}$  jakauma.

Kuvan 2 (b) esittämä leikkausjännitys antaa redusoituna akselille  $y = 0$  jakautuneen vääntömomentin (akselin pituutta kohti)

$$m = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} y dy = 2 G \theta \int_{-t/2}^{t/2} y^2 dy = 2 G \theta \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-t/2}^{t/2} = \frac{1}{6} G \theta t^3. \quad (10)$$

Täten ottamatta jälleen alueen päistä syntyviä häiriöitä huomioon päädytään kertomalla pituudella  $l$  nyt resultoivaan vääntömomenttiin

$$M = m \cdot l = \frac{1}{6} G \theta t^3 l. \quad (11)$$

Se, että tämä tulos on vain puolet oikeasta arvosta (9), on tarkastelemamme ristiriita. On melko yllättävää, että lausekkeen (6) kanssa täysin konsistentti jännitys jakauma (7) antaa siis oleellisesti virheellisen tuloksen.

Kyseinen outo tulos on esitetty mm. lähteessä [2, s. 274], jossa mainitaan, että syntyvän ongelman on selvittänyt ensimmäisenä lordi Kelvin [3, s. 267]. Pyrimme seuraavassa selittämään kyseistä ristiriitaa eri tavalla kuin lähteessä [3]. Lisäksi tarkastelu laajennetaan koskemaan kaarevia ja myös paksuudeltaan muuttuvia ohutseinämäisiä poikkileikkauksia.

## Aputuloksia

Johdetaan eräitä jatkossa tarvittavia yleisiä tuloksia. Poikkileikkauksen jännityskomponenttien tulee toteuttaa tasapainoyhtälö (kuva 1)

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad A:ssa \quad (12)$$

ja reunaehto

$$n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} = 0 \quad s:llä. \quad (13)$$

Edellinen esittää  $x$ -akselin suuntaista tasapainoyhtälöä ( $\sigma_x = 0$  Saint-Venantin väännössä) ja jälkimmäinen traktioreunaehto ( $\tau_{nx} = 0$ ). Vääntömomentin lauseke on

$$M = - \int_A \tau_{xy} z dA + \int_A \tau_{xz} y dA. \quad (14)$$

Tämä ei tietenkään saa riippua momenttipisteen (tässä origo) asemasta. Toisin sanoen: leikkausjännityksistä kertyvän voimasysteemin redusoituna mielivaltaisen pisteen suhteen tulee koostua pelkästään voimaparin momentista eli resultoivien voimakomponenttien (eli leikkausvoimakomponenttien) tulee hävitä:

$$Q_y \equiv \int_A \tau_{xy} dA = 0, \quad Q_z \equiv \int_A \tau_{xz} dA = 0. \quad (15)$$

Suoritetaan tähän liittyen seuraava manipulaatio. Kerrotaan yhtälö (12) puolittain termillä  $y$  ja integroidaan saatu yhtälö alueen yli:

$$\int_A \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} y + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} y \right) dA = 0. \quad (16)$$

Osittaisintegrointi tuottaa muodon

$$-\int_A \left( \tau_{xy} \frac{\partial y}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial y}{\partial z} \right) dA + \int_s (n_y \tau_{xy} y + n_z \tau_{xz} y) ds = 0 \quad (17)$$

eli

$$-\int_A \tau_{xy} dA + \int_s y (n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) ds = 0. \quad (18)$$

Reunaehdon (13) perusteella nähdään, että ensimmäinen voimakomponentti (15) tosiaan häviää. Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa voimakomponentin  $Q_z$  häviäminen.

Suoritetaan lisäksi seuraava manipulaatio. Kerrotaan yhtälö (12) puolittain termillä  $yz$  ja integroidaan saatu yhtälö puolittain alueen ylitse:

$$\int_A \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} yz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} yz \right) dA = 0. \quad (19)$$

Osittaisintegrointi tuottaa muodon

$$-\int_A \left( \tau_{xy} \frac{\partial yz}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial yz}{\partial z} \right) dA + \int_s (n_y \tau_{xy} yz + n_z \tau_{xz} yz) ds = 0 \quad (20)$$

eli

$$-\int_A (\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) dA + \int_s yz (n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) ds = 0. \quad (21)$$

Reunaehdon (13) perusteella on saatu mielenkiintoinen tulos

$$-\int_A \tau_{xy} z dA = \int_A \tau_{xz} y dA \quad (22)$$

eli vääntömomentin lausekkeen (14) kaksi integraalia ovat täsmälleen yhtä suuret.

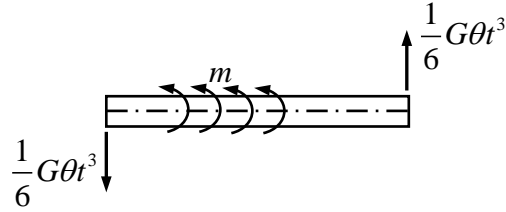
Tämän luvun oleelliset tulokset on esitetty lähteessä [2, s. 262] käyttäen apuna vääntöjännitysfunktiota. Mielestämme käsittely suoraan jännitysten avulla on pelkistetympi.

## Selitys

Tarkastellaan edelleen kapeaa suorakaidepoikkileikkausta (kuva 3). Esimerkiksi lähettä [2] seuraten voidaan todeta, että jännityksistä (7) integroimalla saadusta vääntömomentista puuttuu alueen päissä komponenteista  $\tau_{xy}$  kertyvä osuus. Vaikka nämä jännityskomponentit ovat pieniä, niiden keskinäinen momenttivarsi on suuri ja niillä on merkittävä osuus kokonaisvääntömomentista.

Kuvassa 3 jännitysten  $\tau_{xz}$  momenttiosuus

$$\int_A \tau_{xz} y dA = \int_0^l \left( \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} y dy \right) dz = \int_0^l m dz = m \int_0^l dz = ml = \frac{1}{6} G \theta t^3 l \quad (23)$$



Kuva 3. Kapea suorakaidepoikkileikkaus. Jännityskomponentti  $\tau_{xz}$  redusoituna jakautuneeksi vääntömomentiksi  $m$  ja jännityskomponentista  $\tau_{xy}$  kertyvät parittaiset poikittaiset lisävoimat.

on esitetty jo redusoituna kaavan (10) mukaan jakautuneeksi momentiksi  $m$  josta seuraa kokonaismomentti (23). Tämä tulos on siis saatu otaksuen jännityksen lausekkeen olevan voimassa koko poikkileikkausalueella. Kaavan (22) perusteella tiedetään nyt, että ”unohdetun” jännityskomponentin  $\tau_{xy}$  momenttiosuuden tulee olla seuraava

$$-\int_A \tau_{xy} z \, dA = \frac{1}{6} G\theta t^3 l \quad (24)$$

eli oikea puoli on yhtä suuri kuin kaavan (23) antama oikea puoli. Näin saadaan resultoivaksi kokonaismomentiksi etsitty tulos

$$M = \frac{1}{3} G\theta t^3 l. \quad (25)$$

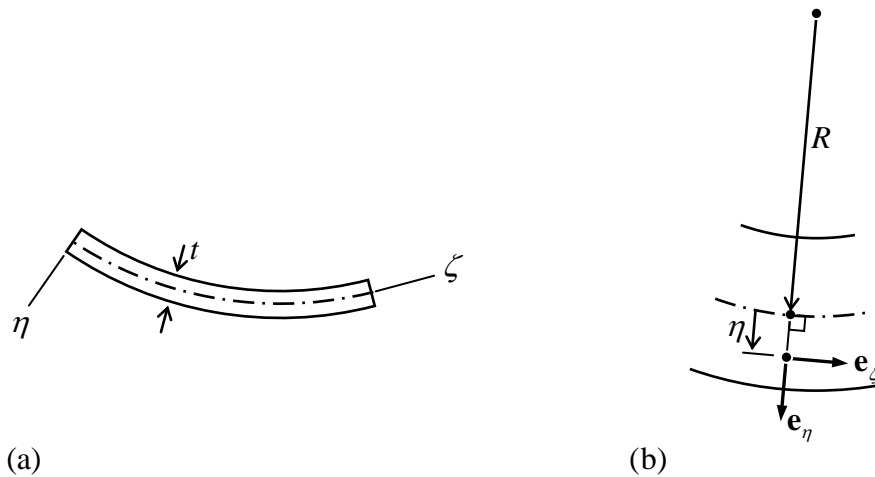
Lausekkeen (24) synty voidaan tulkita havainnollisemmin kuin pelkän kaavan (22) soveltamisena seuraavasti. Oleelliset, nolasta eroavat jännityskomponentit  $\tau_{xy}$  vaikuttavat vain alueen päiden välittömässä läheisyydessä ja niiden vaikutussuunta on  $y$ -akselin suuntainen. Kussakin päässä jännitysten  $\tau_{xy}$  redusointituloksen otaksutaan nyt olevan päätepisteisiin redusoituna pelkkä poikittainen voimaresultantti, jonka itseisarvo on  $G\theta t^3 / 6$  (kuva 3). On syntynyt voimapari, jossa voimien välinen etäisyys on  $l$ , joten tämän voimaparin momentti on juuri puuttuva osuus

$$\frac{1}{6} G\theta t^3 l. \quad (26)$$

Voimien itseisarvon valinta  $G\theta t^3 / 6$  on siis tietenkin saatu siten, että kertominen luvulla  $l$  tuottaa täsmälleen halutun puuttuvan osuuden (24).

Todellisuudessa päiden läheisyydessä vaikuttavien jännitysten redusointitulo juuri päätepisteisiin pelkkänä resultanttina ole tietenkään täysin realistinen, mutta suhteen  $t/l \rightarrow 0$  ilmeisesti yhä tarkempi.

Voidaan lopuksi välittömästi kuvan 3 perusteella havaita, että esitetyn voimasyntymän voimaresultantit  $Q_y$  ja  $Q_z$  tosiaan häviävät.



Kuva 4. (a) Kaareva vakiopaksuinen kapea poikkileikkaus. (b) Detalji.

## Kaareva vakiopaksuinen kapea poikkileikkaus

### $\eta, \zeta$ - koordinaatisto

Siirrytään äskeisen käsittelyn johdattelemana tarkastelemaan kuvan 4 esittämää kaarevaa poikkileikkaustapausta. Käytetään riippumattomia koordinaatteja  $\eta$  ja  $\zeta$  ja vastaavasti yksikkökantavektoreita  $\mathbf{e}_\eta$  ja  $\mathbf{e}_\zeta$ . Suure  $\eta$  on yleisen pisteen kohtisuora suunnattu etäisyys keskiviivasta ja  $\zeta$  on poikkileikkauksen keskiviivaa seuraava kaarenpituuskoordinaatti (ks. huomautus 1). Muuttuja  $\eta$  vaihtelee välillä  $(-t/2, t/2)$  ja  $\zeta$  välillä  $(0, l)$ , jossa  $l$  on siis keskiviivan pituus. Keskiviivan kaarevuussädettä merkitään tunnuksella  $R$  ja se on positiivinen, kun kaarevuuskeskipiste on  $\eta$ -koordinaatin negatiivisella puolella.

**Huomautus 1.** Itse asiassa kaarenpituuden tunnus  $s$  olisi muuten tässä osuvampi, mutta se on varattu jo kuvan 1 esityksen mukaisesti poikkileikkauksen reunan tunnukseksi. Suureiden  $\eta$  ja  $\zeta$  soveltaminen saattaa olla opetuksellisesti jo tuttua eri merkityksessä kaarevien tasosauvojen käsittelystä, jossa siis  $\zeta$ :n rooli on sauvan akselin pituuskoordinaatti.  $\square$

### Yleisiä kaavoja

Tässä luvussa käsitellään poikkileikkauksia, joissa seinämäpaksuus  $t$  on vakio. Alla esitetyt  $\eta, \zeta$ -koordinaatistoon liittyvät kaavat (27)-(30) ovat kuitenkin yleisesti voimassa. Jännityskomponentteja merkitään tunnuksilla  $\tau_{x\eta}$  ja  $\tau_{x\zeta}$ . Tasapainoyhtälön (12) voidaan osoittaa muuttuvan (liite B) muotoon

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right) \tau_{x\eta} \right] + \frac{\partial \tau_{x\zeta}}{\partial \zeta} = 0 \quad (27)$$

ja reunaehto (13) on nyt

$$n_\eta \tau_{x\eta} + n_\zeta \tau_{x\zeta} = 0, \quad (28)$$

jossa siis  $\mathbf{n} = n_\eta \mathbf{e}_\eta + n_\zeta \mathbf{e}_\zeta$ .

Vääntöjännitysfunktion  $\Phi(\eta, \zeta)$  differentiaaliyhtälö on

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{1 + \eta/R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) = -2G\theta \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right) \quad (29)$$

ja jännityskomponentit saadaan kaavoista

$$\tau_{x\eta} = \frac{1}{1 + \eta/R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad \tau_{x\zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \quad (30)$$

### Approksimaatio

Jännitysfunktion lausekkeen ilmeinen muoto on nyt kaavan (6) perusteella

$$\Phi = G\theta \left( \frac{t^2}{4} - \eta^2 \right). \quad (31)$$

Tästä tulee kaavojen (30) avulla jännityskomponentit

$$\tau_{x\eta} = 0, \quad \tau_{x\zeta} = 2G\theta\eta. \quad (32)$$

Poikkileikkauksen kaarevuuden johdosta kyseessä on approksimaatio, sillä yhtälö (29) ei toteudu, jos  $1/R \neq 0$ . Tasapainoyhtälö (27) ja reunaehto (28) reunoilla  $\eta = -t/2$  ja  $\eta = t/2$  kylläkin toteutuvat, joten lausekkeet ovat ilmeisesti kuitenkin melko realistiset. (Muistetaan, että jännitysten on toteutettava myös kompatibiliteettiehto, jota edustaa yhtälö (29).)

Vääntöjännitysfunktion otaksutun lausekkeen (31) avulla saadaan samaan tapaan kuin suoran poikkileikkauksen tapauksessa arvioimalla syntyvän ontelon tilavuus välittömästi vääntömomentin oikea arvo

$$M = \frac{1}{3} G\theta t^3 l, \quad (33)$$

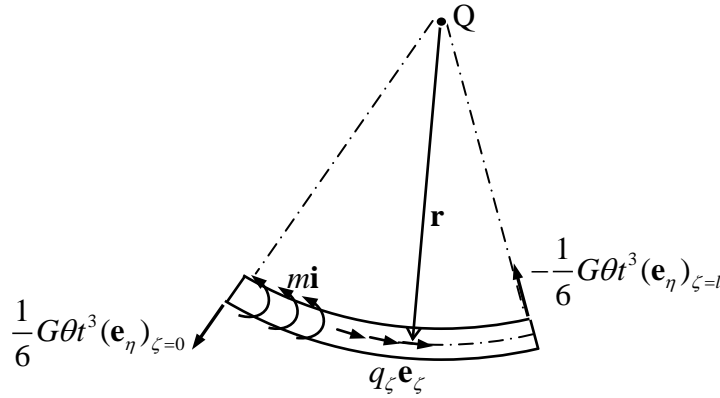
jossa  $l$  on siis poikkileikkauksen keskiviivan kokonaispituus.

Pyritään nyt saamaan sama tulos jännityskomponenttien avulla. Tarkastellaan kuvaa 5, joka on kuvan 3 mutkikkaampi vastine.

Redusoidaan jännityskomponentista  $\tau_{x\zeta}$  kertyvä voimasysteemi keskiviivalle. Saadaan jakautunut momentti

$$\begin{aligned} m &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\zeta} \eta \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right) d\eta = 2G\theta \int_{-t/2}^{t/2} \eta^2 \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right) d\eta = 2G\theta \int_{-t/2}^{t/2} \left( \eta^2 + \frac{\eta^3}{R} \right) d\eta \\ &= 2G\theta \left[ \frac{\eta^3}{3} + \frac{\eta^4}{4R} \right]_{-t/2}^{t/2} = \frac{1}{6} G\theta t^3. \end{aligned} \quad (34)$$

Integraalissa oleva kerroin  $1 + \eta/R$  selittyy sillä, että poikkileikkauksen yleinen pinta-alkio on kaarevuuden johdosta muotoa  $(1 + \eta/R) d\eta d\zeta$ . On siis saatu sama vakioarvoinen jakautunut vääntömomentti kuin suorakaidepoikkileikkauksen tapauksessa.



Kuva 5. Voimasysteemi.

Määritetään lisäksi jakautunut  $\zeta$ -suuntainen voimakomponentti

$$\begin{aligned} q_\zeta &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\zeta} \left(1 + \frac{\eta}{R}\right) d\eta = 2G\theta \int_{-t/2}^{t/2} \eta \left(1 + \frac{\eta}{R}\right) d\eta = 2G\theta \int_{-t/2}^{t/2} \left(\eta + \frac{\eta^2}{R}\right) d\eta \\ &= 2G\theta \left[ \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{3R} \right]_{-t/2}^{t/2} = \frac{1}{6} G\theta \frac{t^3}{R}. \end{aligned} \quad (35)$$

Nyt siis kaarevalla osalla syntyy nolasta eroava jakautunut voimakomponentti  $q_\zeta$ , joka ei ole myöskään vakio, jos kaarevuus vaihtelee (ks. huomautus 2).

Kuvassa 5 on esitetty jakautuneiden suureiden  $m$  ja  $q_\zeta$  osuudet. Lisäksi on vielä otettava huomioon jännitysten  $\tau_{x\eta}$  osuus. Nämä jännitykset vaikuttavat oleellisina vain alueen päissä. Yleistetään suorakaidepoikkileikkauksella saatu asetelma: otaksutaan päihin itseisarvoltaan suuruudeltaan  $1/6 \cdot G\theta t^3$  olevat poikittaiset lisävoimat (tässä on kätevintä siirtyä vektorimerkintöihin)

$$\frac{1}{6} G\theta t^3 (\mathbf{e}_\eta)_{\zeta=0} \quad (36)$$

ja

$$-\frac{1}{6} G\theta t^3 (\mathbf{e}_\eta)_{\zeta=l}. \quad (37)$$

On siis otaksuttu, että poikkileikkauksen kaarevuus ei vaikuta voimien arvoon.

Nyt olisi siis osoitettava, että kuvan 5 voimasysteemi tosiaan tuottaa kokonaisvääntömomentin (33) ja että lisäksi voimasysteemin redusointituloksen voimaresultantti

$$\mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (38)$$

Voimajakauma  $q_\zeta$  antaa resultantin

$$\begin{aligned} \int_0^l q_\zeta \mathbf{e}_\zeta d\zeta &= \frac{G\theta t^3}{6} \int_0^l \frac{1}{R} \mathbf{e}_\zeta d\zeta = \frac{G\theta t^3}{6} \int_0^l \frac{d\mathbf{e}_\eta}{d\zeta} d\zeta = \frac{G\theta t^3}{6} [\mathbf{e}_\eta]_{\zeta=0}^{\zeta=l} \\ &= -\frac{G\theta t^3}{6} (\mathbf{e}_\eta)_{\zeta=0} + \frac{G\theta t^3}{6} (\mathbf{e}_\eta)_{\zeta=l}. \end{aligned} \quad (39)$$



On käytetty apuna Frenet'n kaavaa  $d\mathbf{e}_\eta/d\zeta = 1/R \cdot \mathbf{e}_\zeta$ . Vertaamalla lausekkeita (36), (37) ja (39) havaitaan voimasysteemin resultantin todella häviävän.

Määritetään seuraavaksi voimasysteemin momentti. Momenttipisteeksi on helpointa valita poikittaisten lisävoimien leikkauspiste Q, jolloin näiden voimien momentti kyseisen pisteen suhteen häviää. Lisäksi on helpointa ottaa keskiviivan paikkavektorin  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\zeta)$  alkupiste myös pisteeseen Q. Jakautunut vakiomomentti (34) antaa integroituna koordinaatin  $\zeta$  yli nyt vektorimuodossa esitetyn tuloksen

$$\frac{1}{6}G\theta t^3 l \mathbf{i}, \quad (40)$$

jossa  $\mathbf{i}$  on x-akselin suuntainen yksikkövektori. Vastaavasti voimajakaukumasta  $q_\zeta$  saadaan mutkikkaampi esitys

$$\begin{aligned} \int_0^l \mathbf{r} \times q_\zeta \mathbf{e}_\zeta d\zeta &= \frac{G\theta t^3}{6} \int_0^l \mathbf{r} \times \frac{1}{R} \mathbf{e}_\zeta d\zeta = \frac{G\theta t^3}{6} \int_0^l \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{e}_\eta}{d\zeta} d\zeta \\ -\frac{G\theta t^3}{6} \int_0^l \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} \times \mathbf{e}_\eta d\zeta + \frac{G\theta t^3}{6} [\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\eta]_{\zeta=0}^{\zeta=l} &= \frac{G\theta t^3}{6} \int_0^l \mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta d\zeta + \mathbf{0} \\ &= \frac{G\theta t^3}{6} \mathbf{i} \int_0^l d\zeta = \frac{1}{6}G\theta t^3 l \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (41)$$

Manipuloinnissa on sovellettu Frenet'n kaavaa ja osittaisintegrointia. Lisäksi on huomattava, että arvoilla  $\zeta = 0$  ja  $\zeta = l$   $\mathbf{r}$  ja  $\mathbf{e}_\eta$  ovat yhdensuuntaiset. Täten termien (40) ja (41) yhteensä tuottaman vääntömomentin skalaariarvo on oikea:

$$M = \frac{1}{3}G\theta t^3 l. \quad (42)$$

**Huomaus 2.** Tämän luvun käsittelyn yhteydessä on ilmeinen mahdollisuus tiettyyn virhepäätelmään, jonka myös tämän kirjoittajat aluksi tekivät. Siirtämällä vain suorakaidetapauksen jakautunut momentti suoraan kuvan 5 asetelmaan ja ottamalla nimenomaan piste Q momenttipisteeksi saadaan pelkästään vajaa momenttiosuus (40). Tässä on siis muistettava, että poiketen suoran keskiviivan tapauksesta kaarevuuden johdosta syntyy lisäksi jakautunut voimakomponentti  $q_\zeta$ , jonka momenttivaikutus on myös otettava huomioon.  $\square$

## Paksuudeltaan muuttuva kaareva kapea poikkileikkaus

Tarkastellaan nyt tapausta, jossa kapean poikkileikkauksen seinämäpaksuus  $t$  ei ole vakio:  $t = t(\zeta)$  (kuva 6). Tämä tapaus olisi voitu sisällyttää jo edelliseen lukuun, mutta tässä on pyritty asteittain mutkistuvaan esitykseen.

Kuvassa 6 (b) on esitetty paksuudeltaan muuttuvan tapauksen asetelma, jossa keskiviiva on suora ja voidaan käyttää mukavuussyistä  $y, z$ -koordinaatistoa. Jos tehdään jännitysotaksuma (7), on ilmeistä, että jännitysreunaehto (13) rikotaan, koska resultoiva jännitys ei ole reunoilla reunojen suuntainen (kuva 6 (b)). Mukana tulisi ilmeisesti olla myös jokin nollasta eroava osuus  $\tau_{xy}$ . Olkoon koordinaatiston origo tilapäisesti kuvan 6 (b) pisteessä O. Approksimoidaan paksuuden muutosta tässä kohdin katkaistulle Taylorin sarjalla

$$t(z) = t(0) + \frac{dt}{dz}(0)z. \quad (43)$$

Sijoitetaan tämä vääntöjännitysfunctio (6) lausekkeeseen:

$$\begin{aligned} \Phi &= G\theta \left( \frac{1}{4}t^2 - y^2 \right) = G\theta \left( \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t \cdot \frac{dt}{dz}z + \frac{1}{4} \left( \frac{dt}{dz}z \right)^2 - y^2 \right) \\ &\approx G\theta \left( \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t \cdot \frac{dt}{dz}z - y^2 \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Tässä on jätetty viittaus paikalliseen origoon jo pois, jolloin on muistettava, että kaavan oikealla puolella  $t$  ja  $dt/dz$  ovat vakioita. Approksimaatiota on vielä yksinkertaistettu jättämällä  $z$ :n suhteen neliöllinen termi pois. Jännitysten lausekkeet (1) antavat nyt

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = G\theta \left( \frac{1}{2}t \frac{dt}{dz} \right) = \frac{1}{2}G\theta t \frac{dt}{dz}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -G\theta(-2y) = 2G\theta y. \quad (45)$$

Tämä on etsitty kohtuullisen realistinen jännitysten approksimaatio, jossa on nyt mukana nolasta eroava termi  $\tau_{xy}$ .

Tehdään vastaava approksimaatio nyt  $\eta, \zeta$  -koordinaatistossa:

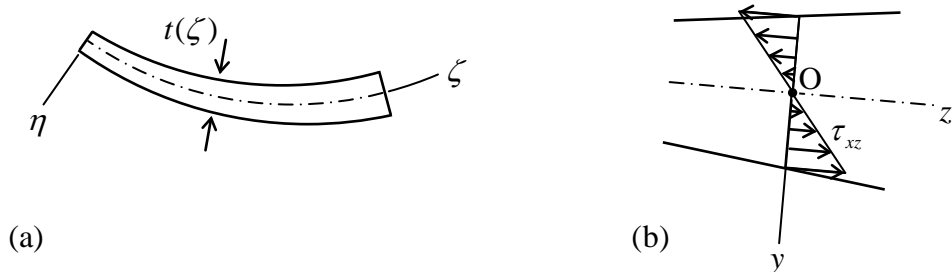
$$\Phi = G\theta \left( \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t \cdot \frac{dt}{d\zeta} \zeta - \eta^2 \right), \quad (46)$$

jossa jälleen  $t$  ja  $dt/d\zeta$  ovat tilapäisesti vakioita. Vastaavat jännityskomponentit (30) ovat

$$\begin{aligned} \tau_{x\eta} &= \frac{1}{1+\eta/R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \frac{1}{1+\eta/R} G\theta \left( \frac{1}{2}t \frac{dt}{d\zeta} \right) = \frac{1}{2}G\theta \frac{1}{1+\eta/R} t \frac{dt}{d\zeta}, \\ \tau_{x\zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -G\theta(-2\eta) = 2G\theta\eta. \end{aligned} \quad (47)$$

Sijoitus kaavaan (27) osoittaa, että tasapainoyhtälö on jälleen voimassa (ks. huomautus 3).

**Huomautus 3.** Tämä vain, jos sijoituksen yhteydessä myös kaarevuussäde  $R$  otaksutaan tilapäisesti vakioksi; siis käytetään  $R$ :lle hyvin karkeaa Taylorin kehittelmää. Todettakoon lisäksi seuraavaa. Käsittelyn tässä vaiheessa on käytetty apuna paikallisia Taylorin kehittelmiä. Myöhemmin sitten määritetään integroimalla muuttujan  $\eta$  suhteen



Kuva 6. (a) Paksuudeltaan muuttuva kaareva kapea poikkileikkaus. (b) Detalji.

kullakin  $\zeta$  :n arvolla esimerkiksi jakautuneet voimasuureet  $m$ ,  $q_\eta$ ,  $q_\zeta$ . Koska sovellettu paikallinen origo voidaan valita mielivaltaisesti, saadaankin siis loppujen lopuksi riippuvuudet  $m = m(\zeta)$ ,  $q_\zeta = q_\zeta(\zeta)$ ,  $q_\eta = q_\eta(\zeta)$ . Samoin näiden suureiden sovellusten yhteydessä myös  $t = t(\zeta)$  ja  $R = R(\zeta)$ .  $\square$

Komponentin  $\tau_{x\eta}$  lauseke (47) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\tau_{x\eta} = G\theta \frac{1}{1 + \eta/R} t \frac{d(t/2)}{d\zeta}. \quad (48)$$

Esimerkiksi reunalla  $\eta = t/2$  yksikkönormaalien komponentit ovat likimain  $n_\eta \approx 1$  ja  $n_\zeta \approx -d(t/2)/d\zeta$ . Lyhyt tarkastelu osoittaa nyt, että jännitysreunaehto (28) toteutuu kohtuullisella tarkkuudella.

Vääntöjännitysfunktion avulla saadaan sen muodostaman onkalon tilavuuden avulla samaan tapaan kuin edellä välittömästi tulos

$$M = \frac{1}{3} G\theta \int_0^l t^3 d\zeta. \quad (49)$$

Tämä vääntömomentin arvo olisi nyt johdettava suoraan poikkileikkauksen leikkausjännitysten avulla.

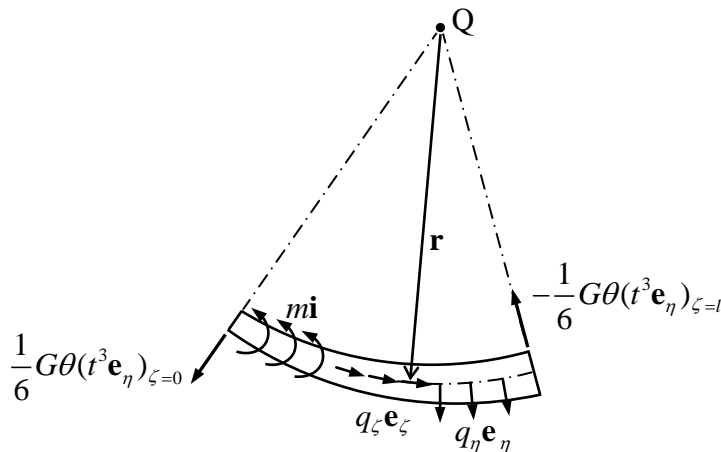
Kuvassa 7 on esitetty poikkileikkauksessa vaikuttava voimasysteemi. Alueen päihin on liitetty jännityksistä  $\tau_{x\eta}$  — siis jälleen ns. unohdetusta osuudesta — syntyvät poikittaiset lisävoimat. Niiden arvoiksi on otettu

$$\frac{1}{6} G\theta (t^3 \mathbf{e}_\eta)_{\zeta=0} \quad (50)$$

ja

$$-\frac{1}{6} G\theta (t^3 \mathbf{e}_\eta)_{\zeta=l}. \quad (51)$$

On toisin sanoen käytetty suorakaidepoikkileikkauksen antamia arvoja soveltamalla vain päiden paikallisia paksuuksia.



Kuva 7. Voimasysteemi.

Nyt mukana keskiviivalle redusoituna on jakautunut momentti  $m$ , jakautunut voimakomponentti  $q_\zeta$  ja uutena jakautunut voimakomponentti  $q_\eta$ , joka siis syntyy reunaehtojen tarkentamiseksi kehitetyn jännityskomponentin  $\tau_{x\eta}$  johdosta. Saadaan (käytetyt manipuloinnit ovat vastaavia kuin edellisessä luvussa)

$$q_\eta = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{x\eta} \left(1 + \frac{\eta}{R}\right) d\eta = \frac{1}{2} G\theta t \frac{dt}{d\zeta} \int_{-t/2}^{t/2} d\eta = \frac{1}{2} G\theta t^2 \frac{dt}{d\zeta} = \frac{1}{6} G\theta \frac{dt^3}{d\zeta}. \quad (52)$$

Tämä synnyttää resultoivan voiman

$$\int_0^l q_\eta \mathbf{e}_\eta d\zeta = \frac{1}{6} G\theta \int_0^l \frac{dt^3}{d\zeta} \mathbf{e}_\eta d\zeta = -\frac{1}{6} G\theta \int_0^l t^3 \frac{d\mathbf{e}_\eta}{d\zeta} d\zeta + \frac{1}{6} G\theta \left[ t^3 \mathbf{e}_\eta \right]_{\zeta=0}^{\zeta=l}. \quad (53)$$

Voimajakauma  $q_\zeta$  on edelleen lausekkeen (35) mukainen antaa resultantin

$$\int_0^l q_\zeta \mathbf{e}_\zeta d\zeta = \frac{G\theta}{6} \int_0^l \frac{t^3}{R} \mathbf{e}_\zeta d\zeta = \frac{G\theta}{6} \int_0^l t^3 \frac{d\mathbf{e}_\eta}{d\zeta} d\zeta. \quad (54)$$

Täten yhteensä jää jäljelle voimaosuus

$$\frac{1}{6} G\theta \left[ t^3 \mathbf{e}_\eta \right]_{\zeta=0}^{\zeta=l} = -\frac{1}{6} G\theta \left( t^3 \mathbf{e}_\eta \right)_{\zeta=0} + \frac{1}{6} G\theta \left( t^3 \mathbf{e}_\eta \right)_{\zeta=l}. \quad (55)$$

Ottamalla nyt vielä huomioon poikittaiset lisävoimat (50) ja (51) havaitaan, että kuvan 7 voimasysteemin resultantti häviää.

Seuraavaksi tarkastellaan voimasysteemin momenttia. Momenttipisteeksi otetaan jälleen piste Q. Jakautunut momentti  $m$  antaa vääntömomentin

$$\int_0^l m d\zeta = \frac{1}{6} G\theta \int_0^l t^3 d\zeta, \quad (56)$$

joka on vain puolet oikeasta arvosta (49). Voimajakauma  $q_\xi$  antaa momentin

$$\begin{aligned} \int_0^l \mathbf{r} \times q_\xi \mathbf{e}_\xi d\zeta &= \frac{1}{6} G\theta \int_0^l \mathbf{r} \times \frac{t^3}{R} \mathbf{e}_\xi d\zeta = \frac{1}{6} G\theta \int_0^l t^3 \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{e}_\eta}{d\zeta} d\zeta \\ &= -\frac{1}{6} G\theta \int_0^l \frac{d}{d\zeta} \left( t^3 \mathbf{r} \right) \times \mathbf{e}_\eta d\zeta + \frac{1}{6} G\theta \left[ t^3 \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\eta \right]_{\zeta=0}^{\zeta=l} = -\frac{1}{6} G\theta \int_0^l \frac{d}{d\zeta} \left( t^3 \mathbf{r} \right) \times \mathbf{e}_\eta d\zeta + \mathbf{0} \\ &= -\frac{1}{6} G\theta \int_0^l \frac{dt^3}{d\zeta} \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\eta d\zeta - \frac{1}{6} G\theta \int_0^l t^3 \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} \times \mathbf{e}_\eta d\zeta \\ &= -\frac{1}{6} G\theta \int_0^l \frac{dt^3}{d\zeta} \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\eta d\zeta + \frac{1}{6} G\theta \int_0^l t^3 d\zeta \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (57)$$

Vastaavasti voimajakauma  $q_\eta$  antaa

$$\int_0^l \mathbf{r} \times q_\eta \mathbf{e}_\eta d\zeta = \frac{1}{6} G\theta \int_0^l \frac{dt^3}{d\zeta} \mathbf{r} \times \mathbf{e}_\eta d\zeta. \quad (58)$$

Lausekkeissa (57) ja (58) nähdään kahden termin kumoutuvan ja suureiden  $q_\xi$  ja  $q_\eta$  yhteiseksi momentiksi tulee siis

$$\frac{1}{6} G\theta \int_0^l t^3 d\zeta \mathbf{i}. \quad (59)$$

Kun otetaan vielä huomioon lauseke (56), saadaan yhteensä skalaarinen vääntömomentti (49).

## Loppuhuomautuksia

Kelvin tarkastelee lähteessä [3] suorakaidepoikkileikkauksen sarjamoitoista analyttistä ratkaisua ja johtaa taitavalla päättelyllä rajatapauksessa  $t/l \rightarrow 0$  leikkausjännityksistä määritetyn oikean vääntömomentin lausekkeen (9). Käsittely on eksakti, mutta raskas. Tässä artikkelissa esitetty vastaava päättely perustuu lähinnä kaavan (22) soveltamiseen. Lähestymistapa ei ehkä ole täysin aukoton. Kuitenkin se yllättävä tulos, että ns. unohdettujen jännitysten osuus on täsmälleen puolet oikean momentin arvosta, tulee suoraviivaisesti esille. Siten tätä lähestymistapaa voitaisiin käyttää ainakin opetuksessa tukemaan poikittaisten lisävoimien arvojen valintaa.

## Kiitokset

Tekijät kiittävät käsikirjoituksemme arvioijaa huolellisesta työstä ja perustelluista muutosehdotuksista. Niiden ansiosta uskomme lopputuloksen parantuneen huomattavasti.

## Liite A: Saint-Venantin väännön yhtälöitä

Tässä liitteessä johdetaan lyhyesti artikkelissa tarvittavat Saint-Venantin väännön yhtälöt  $x, y, z$ -koordinaatistossa. Saint-Venantin väännön siirtymäotaksuma on [2]

$$\begin{aligned}u &= \theta\psi(y, z), \\v &= -\varphi(x)z, \\w &= \varphi(x)y,\end{aligned}\tag{A.1}$$

missä  $\varphi(x)$  on vääntökulma ja  $\theta = d\varphi/dx$  on vääntymä. Tarkastelussa otaksutaan, että  $\varphi(x)$  on paikallisesti  $x$ :n suhteen lineaarinen, joten  $\theta$  on vakio. Liukumille saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &\equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right), \\ \gamma_{xz} &\equiv \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right).\end{aligned}\tag{A.2}$$

Muodostamalla erotus

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \theta \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \right] = -2\theta\tag{A.3}$$

ja käyttämällä Hookeen lakia saadaan tulos

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tau_{xy}}{G} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau_{xz}}{G} \right) = -2\theta.\tag{A.4}$$

Tämä on leikkausjännitysten avulla lausuttu Saint-Venantin väännön kompatibiliteetti-yhtälö. Sijoittamalla siihen vääntöjännitysfunktion avulla lausutut leikkausjännitykset (1)

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{A.5})$$

ja otaksumalla materiaali homogeeniseksi, saadaan

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta. \quad (\text{A.6})$$

Tämä on vääntöjännitysfunktion differentiaaliyhtälö (2).

### Liite B: Saint-Venantin väännön yhtälöitä $\eta, \zeta$ -koordinaatistossa.

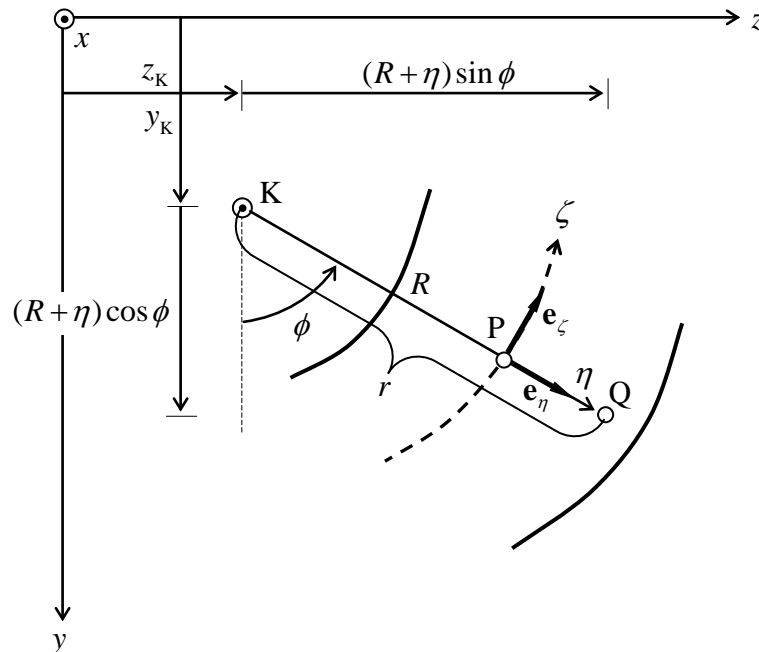
Tässä liitteessä johdetaan lyhyesti artikkelissa tarvittavat Saint-Venantin väännön yhtälöt  $\eta, \zeta$  -koordinaatistossa. Käytetään apuna keskiviivan ( $\zeta$  -käyrän) pisteeseen P liittyvään kaarevuuskeskipisteeseen K asetettua paikallista sylinterikoordinaatistoa. Oleelliset vääntöön liittyvät sylinterikoordinaatiston kaavat on esitetty yleisesti alan kirjallisuudessa; esimerkiksi [2].

Kuvan B.1 perusteella koordinaateilla  $y, z, r$  ja  $\phi$  on yhteydet

$$\begin{aligned} y &= y_K + r \cos \phi, \\ z &= z_K + r \sin \phi. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Siirtymille  $x, r, \phi$  -koordinaatistossa saadaan käyttäen liitteen A kaavoja (A.1)

$$\begin{aligned} u_x &= \theta \psi, \\ u_r &= v \cos \phi + w \sin \phi = \varphi(-z \cos \phi + y \sin \phi), \\ u_\phi &= -v \sin \phi + w \cos \phi = \varphi(z \sin \phi + \cos \phi). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$



Kuva B.1. Yleinen piste Q, vastaava keskiviivan ( $\zeta$  -viivan) piste P, kaarevuuskeskipiste K ja siihen asetettu sylinterikoordinaatisto  $x, r, \phi$ .

Kaavoja (B.1) soveltaen saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
u_x &= \theta\psi, \\
u_r &= \varphi(-z_K \cos \phi + y_K \sin \phi) + \varphi(-r \sin \phi \cos \phi + r \cos \phi \sin \phi) \\
&= \varphi(-z_K \cos \phi + y_K \sin \phi), \\
u_\phi &= \varphi(z_K \sin \phi + y_K \cos \phi) + \varphi(r \sin^2 \phi + r \cos^2 \phi) \\
&= \varphi[(z_K \sin \phi + y_K \cos \phi) + r].
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Siirtymäotaksuma tarkasteltavassa sylinterikoordinaatistossa saa täten muodon

$$\begin{aligned}
u_x &= \theta(x)\psi(r, \phi), \\
u_r &= -\varphi(x)r_{Pr}(\phi), \\
u_\phi &= \varphi(x)[r_{P\phi}(\phi) + r],
\end{aligned} \tag{B.4}$$

missä

$$\begin{aligned}
r_{Pr}(\phi) &= -z_K \cos \phi + y_K \sin \phi, \\
r_{P\phi}(\phi) &= z_K \sin \phi + y_K \cos \phi.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Liukumien  $\gamma_{xr}$  ja  $\gamma_{x\phi}$  lausekkeet sylinterikoordinaatistossa ovat

$$\begin{aligned}
\gamma_{xr} &= \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}, \\
\gamma_{x\phi} &= \frac{\partial u_\phi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \phi}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Käyttäen lausekkeitä (B.4) nämä saavat muodon

$$\begin{aligned}
\gamma_{xr} &= \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} - r_{Pr} \right), \\
\gamma_{x\phi} &= \theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + r_{P\phi} + r \right).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Käyttäen hyväksi koordinaattien  $\eta$  ja  $\zeta$  sekä sylinterikoordinaattien  $r$  ja  $\phi$  välisiä yhteyksiä

$$d\xi = R d\phi, \quad r = R + \eta, \quad dr = d\eta \tag{B.8}$$

sekä vaihtamalla samalla alaindeksit:  $r \rightarrow \eta$  ja  $\phi \rightarrow \zeta$  saadaan liukumille tulos

$$\begin{aligned}
\gamma_{x\eta} &= \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - r_{P\eta} \right), \\
\gamma_{x\zeta} &= \theta \left( \frac{1}{1 + \eta/R} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + r_{P\zeta} + \eta \right).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Muodostamalla erotus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_{x\eta}}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left(1 + \frac{\eta}{R}\right) \gamma_{x\zeta} \right] &= \theta \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - r_{P\zeta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \left(1 + \frac{\eta}{R}\right) (r_{P\eta} + \eta) \right] \right\} \\
&= -2\theta \left(1 + \frac{\eta}{R}\right)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

ja käyttämällä Hooken lakia saadaan tulos

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\tau_{x\eta}}{G} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right) \frac{\tau_{x\zeta}}{G} \right] = -2\theta \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right). \quad (\text{B.11})$$

Tämä on leikkausjännitysten avulla lausuttu Saint-Venantin väännön kompatibiliteetti-yhtälö  $\eta, \zeta$  -koordinaatistossa.

Vääntöjännitysfunktio sylinterikoordinaatistossa määritellään kaavoilla

$$\tau_{xr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \quad \tau_{x\phi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (\text{B.12})$$

Käyttämällä yhteyksiä (B.8) ja vaihtamalla alaindeksit:  $r \rightarrow \eta$  ja  $\phi \rightarrow \zeta$  saadaan vastaavat kaavat  $\eta, \zeta$  -koordinaatistossa:

$$\tau_{xr} = \frac{1}{1 + \eta/R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad \tau_{x\zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \quad (\text{B.13})$$

Sijoittamalla leikkausjännitykset (B.13) kompatibiliteetti-yhtälöön (B.11) ja otaksumalla materiaali homogeeniseksi, saadaan vääntöjännitysfunktion differentiaaliyhtälölle  $\eta, \zeta$  -koordinaatistossa tulos (29):

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{1 + \eta/R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) = -2G\theta \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right). \quad (\text{B.14})$$

Saint-Venantin väännön tasapainoyhtälö sylinterikoordinaatistossa on

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{xr}) + \frac{\partial \tau_{x\phi}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{B.15})$$

Käyttämällä yhteyksiä (B.8) ja vaihtamalla alaindeksit:  $r \rightarrow \eta$  ja  $\phi \rightarrow \zeta$  saadaan tasapainoyhtälölle  $\eta, \zeta$  -koordinaatistossa tulos (27):

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( 1 + \frac{\eta}{R} \right) \tau_{x\eta} \right] + \frac{\partial \tau_{x\zeta}}{\partial \zeta} = 0. \quad (\text{B.16})$$

## Viittet

- [1] A. Ylinen, *Kimmo- ja lujuusoppi* osa II, Werner Söderström, 1970.
- [2] S.T. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, 1951.
- [3] W. Thomson (Lord Kelvin) and P. T. Tait, *Principles of Mechanics and Dynamics, Part II*, Dover, 1962. (formerly titled *Treatise on Natural Philosophy, Vol 2*, Cambridge University Press, 1879).

Jukka Aalto, Eero-Matti Salonen  
Aalto yliopisto, Insinööritieteiden korkeakoulu  
Rakennustekniikan laitos  
PL 12100, 00076 Aalto  
jukka.aalto@aalto.fi, eero-matti.salonen@aalto.fi