

Painonnoston matemaattinen malli

Matti A Ranta ja Ulf Holmlund

Tiivistelmä: Painonnostossa kilpailijat on jaettu eri painosarjoihin. Kilpailuissa nostomuotoja on kaksi: tempaus ja työntö. Molemmissa nostomuodoissa on tyypillistä, että ensimmäisessä vaiheessa paino tulee saada tietylle korkeudelle h , jotta nostaja pääsisi tangon alle. Toinen vaihe on nouseminen kyykystä tangon kanssa. Koska ensimmäinen vaihe on noston onnistumisen kannalta tärkein, tarkastellaan seuraavassa vain sitä. Dynaaminen malli voidaan helpoiten johtaa energiaperiaatteella. Tangon nostamisessa painovoimaa vastaan tehty työ muuttuu lopulta potentiaalienergiaksi. Mallissa kannattaa pyrkiä nostajan kokoon referoituun dimensiottomaan esitysmuotoon. Noston hyvyttä kuvataan performanssi-indeksillä, jolla voidaan vertailla suoritusta eri nostomuotojen ja painosarjojen välillä.

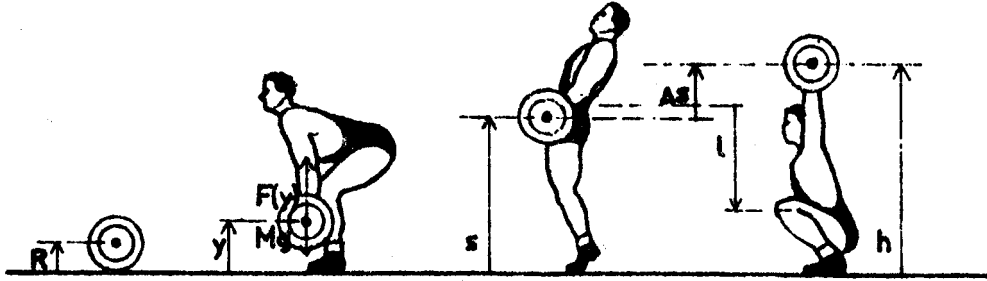
Avainsanat: nostajien tietynlainen yhdenmuotoisuus, dimensioton esitysmuoto, nostoa karakterisoivat parametrit, noston performanssi-indeksi.

Johdanto

Kokemuksesta tiedetään, että mitä suurempikokoinen mies on, sitä voimakkaampi hän myös on. Poikkeukset ovat mahdollisia luontaisista ominaisuuksista ja ennen kaikkea harjoittelusta johtuen. Jotta muillakin kuin isoilla miehillä olisi menestymisen mahdollisuus, on otettu käyttöön painosarjat eli -luokat. Näin on asian laita kamppailulajeissa kuten nyrkkeily ja paini sekä ennen kaikkea painonnostossa. Näistä vain painonnosto soveltuu teoreettiseen tarkasteluun, koska siinä tulos voidaan ilmoittaa täsmällisesti eli nostettuina kiloina. Eripainoisten nostajien tulosten vertailu ei myöskään ole itsestään selvää. Yksinkertaisin malli, nostotulos jaettuna nostajan painolla eli massasuhde, suosii keveitä nostajia. Jos edellä esitetty suhde kerrotaan nostajan pituudella, saadaan jo huomattavasti parempi malli. Sitä tai sen modifikaatiota kutsutaan *Rigert*'in luvuksi eli *Ri*-luvuksi. Neuvostoliittolainen David Rigert, silloisessa sarjassa alle 90 kg, oli aikanaan arvostettu maailman parhaaksi nostajaksi. Rigert'in luvun avulla ei kuitenkaan voida vertailla tempaus- ja työntötuloksia keskenään.

Painonnoston dynaaminen malli

Painonnoston vetovaiheen dynaamista mallia on käsitelty viitteissä [1-4]. Mallin johtamiseksi riittää tarkastella jommankumman nostomuodon ensimmäistä vaihetta eli maastavetoa. Kuvassa 1 on tempauksen maastavedon kolme vaihetta: (i) vedon alku, (ii) vedon loppu ja tangon alle syöksyn alku ja (iii) syöksyn loppu ja kyykky.



Kuva1. Tempausnoston alun skemaattinen kuva.

Tangon, jonka massa on M , painopiste on aluksi suurimman levykiekon säteen R korkeudella lavasta. Nostaja, massa m ja pituus L , tarttuu tankoon ja kohottaa sitä voimalla $F(y)$, kun tangon korkeus lavasta on y . Veto jatkuu korkeudelle s , jolloin tangolla on nopeus $v(s)$ ylöspäin. Tällä vauhdilla tanko nousee lisämatkan

$$\Delta s = v^2(s)/2g \quad (1)$$

ajassa

$$\Delta t = v(s)/g. \quad (2)$$

Tänä aikana nostajan tulee syöksyä tangon alle siirtämällä painopistettään matkan ℓ alaspäin. Jos V on keskimääräinen nopeus, jolla nostaja siirtää painopistettään alaspäin, kuluu tähän siirtoon aika

$$\Delta t(\ell, V) = \ell/V \geq \Delta t(s). \quad (3)$$

Nosto on teknisesti onnistunut, jos aikavälit (2) ja (3) ovat yhtä suuret eli

$$\Delta t(\ell, V) \equiv \Delta t(s). \quad (4)$$

Asetetaan lausekkeet (2) ja (3) kaavaan (4) ja ratkaistaan

$$v(s) = g\ell/V \quad (5)$$

sekä sijoitetaan kaavaan (1). Tarvittava lisämatka on nostajasta riippuvien suureiden avulla lausuttuna

$$\Delta s = g\ell^2/2V^2. \quad (6)$$

Alin korkeus h , jonka nostaja tarvitsee mennäkseen tangon alle, on summa vetomatkaa s ja vauhdilla nousevasta lisämatkasta Δs eli

$$h = s + \Delta s. \quad (7)$$

Tästä saadaan tarvittavaksi vetomatkaa

$$s = h - \Delta s \equiv h - g\ell^2/2V^2. \quad (8)$$

Energian säilymisen periaate antaa nyt

$$Mg(h - R) = \int_R^s F(y) dy. \quad (9)$$

Jaetaan tämä yhtälö puolittain suureella MgR ja määritellään laadun performanssi-indeksi lausekkeilla

$$PI = \frac{(h - R) M}{R m} = \int_R^{(h-g\ell^2)/2V^2} \frac{F(y)}{mgR} dy. \quad (10)$$

Dimensioton esitysmuoto

Muunnetaan kaavan (10) vasen puoli sekä integrandi ja rajat dimensiottomaan muotoon valitsemalla tangon suurimman levyn säde $R = 0,225$ m referenssipituudeksi. Dimensiottomat muuttujat on koottu taulukkoon 1.

Taulukko 1. Dimensiottomat muuttujat ja niiden likimääräiset vaihteluvälit.

merkintä	nimike	määritelmä	vaihteluväli
p	nostajan suhteellinen pituus	$p = L/R$	$6 \dots 9$
z	tangon suhteellinen korkeus	$z = y/L$	$0,1 \dots 0,7$
f	nostajan suhteellinen voima	$f = Fp/mg$	$15 \dots 30$
η	noston tekniikkaparametri	$\eta = h/L$	$0,5 \dots 0,6$
λ	noston tekniikkaparametri	$\lambda = \ell/L$	$0,3 \dots 0,5$
u	nostajan nopeusparametri	$u = V/\sqrt{gR/2}$	$1 \dots 3$
q	yhdistetty parametri	$q = (\lambda/u)^2$	$0,01 \dots 0,1$

Nostajan kokoon referoitujen dimensiottomien suureiden vaihteluväli on usein huomattavasti ahtaampi kuin vastaavien dimensiollisten. Lähteen [5, s. 91–92] perusteella huippunostajien parametrien tyypillisistä arvoista seuraa vaihteluväli $0,35 \leq \lambda \leq 0,36$ ja likimääräiset arvot

$$u \approx 2,7 \text{ ja } q \approx 0,017. \quad (11)$$

Ihmisen mittasuhteista seuraa arviot

$$\eta \approx 0.60 \text{ (tempaus) ja } \eta \approx 0,52 \text{ (työntö)}. \quad (12)$$

Painonnostajien paino-pituus -riippuvuus

Lähteen [6, s. 279] taulukosta 18 “Urheilumestarin paino ja pituus”, jonka tilastot ovat vuodelta 1970, saadaan vanhan sarjajaon mukainen data mestariluokan nostajan massan m ja pituuden L välisestä riippuvuudesta hajontoineen. Jos nostajat olisivat samanmuotoisia, olisi riippuvuus muotoa $m = k(L/R)^3 \equiv kp^3$. Mutta koska isot miehet ovat suhteessa painavampia kuin pienet, kirjoitetaan riippuvuus muotoon

$$m = kp^\alpha \quad (13)$$

missä $k = 0,0151$ ja $\alpha = 4,254$. Vakioiden arvot on saatu em. tilastoon sovittamalla. Kaavan (13) mukaan laskettujen massojen poikkeaman neliöllinen keskiarvo on alle kaksi kiloa. Vain kolmessa tapauksessa yhdeksästä pituudesta laskettu massa ei sovi annettuihin taulukon rajoihin vaan menee siitä yli luokkaa kilon. Massasta laskettu pituus sen sijaan sopii kaikissa tapauksissa annettuihin rajoihin.

Performanssi-indeksi

Performanssi-indeksille saadaan kaavasta (10) kaksi vaihtoehtoista esitysmuotoa määrittäenä joko nostotuloksesta

$$PI = (\eta p - 1) \frac{M}{m} \quad (14)$$

tai suhteellisesta voimasta integraalilausekkeena

$$PI = \int_{1/p}^{\eta-qp} f(z) dz. \quad (15)$$

Performanssi-indeksi riippuu periaatteessa vain voimasta ja nostotekniikan hallinnasta. Integraalin (15) ylärajassa on lyhennys $qp = (g/2L)(\ell/V)^2 = g\Delta t^2 / 2L = \Delta s/L$, joka voidaan formuloida monella tavalla. Nostajan painopisteen sijainti on asennosta riippuvainen eikä suoraan määrity tangon liikkeistä. Suureiden ℓ ja V suuruusluokan määrittämiseksi olisi suoritettava mittauksia.

Kaavan (15) integrandissa olevan dimensiottoman voiman $f(z)$ jakautuma on mitaustulosten puuttuessa tuntematon. Käytettäkään sen keskiarvosta merkintää

$\bar{f} > pM/m = Ri$. Se on selvästi suurempi kuin Rigert'in luku. Kaava (15) voidaan nyt esittää muodossa

$$PI = (\eta - qp - 1/p) \bar{f}. \quad (16)$$

Tangon kohottamiseen tarvittava dimensioton vetomatka on

$$d = \eta - qp - 1/p. \quad (17)$$

Erilaisia tunnuslukuja

Taulukoissa 2 ja 3 on annettu nostajien massa m ja 1.1.2010 voimassa oleva maailmanennätystulos M lähteestä [7]. Lisäksi on laskettu kaavasta (13) nostajien pituus L

Taulukko 2. Tempauksen ($\eta = 0,60$) maailmanennätykset ja niistä lasketut suureet.

sarja	m (kg)	L (m)	p	M (kg)	M/m	pM/m	PI	\bar{f}	d
56	55,96	1,56	6,92	138,0	2,47	17,05	7,77	22,99	0,3378
62	62,00	1,59	7,08	153,0	2,47	17,48	8,02	23,72	0,3384
69	68,92	1,63	7,26	165,0	2,39	17,39	8,04	23,72	0,3388
77	76,35	1,67	7,44	174,0	2,28	16,95	7,89	23,28	0,3391
85	83,99	1,72	7,62	187,0	2,21	16,83	7,89	23,26	0,3392
94	93,62	1,76	7,81	188,0	2,01	15,67	7,40	21,80	0,3392
105	103,96	1,80	8,01	200,0	1,91	15,30	7,27	21,45	0,3390
+105	161,60	2,00	8,87	213,0	1,32	11,70	5,70	16,94	0,3365

Taulukko 3. Työnnön ($\eta = 0,52$) maailmanennätykset ja niistä lasketut suureet.

sarja	m (kg)	L (m)	p	M (kg)	M/m	pM/m	PI	\bar{f}	d
56	56,00	1,56	6,92	168,0	3,00	20,75	7,79	30,21	0,2578
62	61,50	1,59	7,07	182,0	2,96	20,92	7,92	30,66	0,2584
69	68,90	1,63	7,26	197,0	2,86	20,76	7,94	30,67	0,2588
77	76,65	1,68	7,45	210,0	2,74	20,40	7,87	30,37	0,2591
85	82,40	1,70	7,57	218,0	2,65	20,04	7,77	29,99	0,2592
94	93,86	1,76	7,81	232,0	2,47	19,30	7,57	29,19	0,2592
105	105,00	1,80	8,02	237,0	2,26	18,10	7,15	27,63	0,2590
+105	162,95	2,00	8,89	263,0	1,62	14,35	5,85	22,81	0,2564

ja vastaava parametrin p arvo sekä seuraavat tunnusluvut: massasuhde M/m , Rigert'in luku $Ri = pM/m$ ja performanssi-indeksi PI kaavasta (14). Lopuksi on laskettu dimensioton keskimääräinen voima \bar{f} ja vetomatka d kaavoista (16) ja (17).

Taulukoista 2 ja 3 nähdään, että valituilla parametrin η arvoilla ovat performanssi-indeksit sarjoittain sekä tempauksessa että työnnössä samaa suuruusluokkaa. Se vastaa olettamusta, että näiden nostomuotojen maailmanennätykset ovat sarjoittain yhtä hyvät. Vain sarja +105 kg poikkeaa muista.

Taulukko 4. Tempauksen ja työnnön kaikkien sarjojen keskimääräinen performanssi-indeksi ja dimensioton voima sekä näiden keskimääräinen neliöllinen hajonta (rms-arvo).

	\overline{PI}	RMS	\bar{f}	RMS
tempaus	7,50	0,73	22,14	2,11
työntö	7,48	0,66	28,94	2,50

Taulukko 5. Tempauksen ja työnnön keskimääräinen performanssi-indeksi ja dimensioton voima sekä näiden keskimääräinen neliöllinen hajonta, kun raskain sarja +105 kg on jätetty huomioon ottamatta.

	\overline{PI}	RMS	\bar{f}	RMS
tempaus	7,76	0,28	22,79	0,83
työntö	7,75	0,21	29,92	0,83

Taulukossa 4 on esitetty keskimääräinen performanssi-indeksi ja dimensioton voima. Taulukossa 5 on vastaavat luvut kun ylin sarja +105 kg on jätetty huomioon ottamatta keskiarvoa laskettaessa.

Kuten taulukoista 4 ja 5 nähdään, teoria selittää varsin hyvin maailmanennätystulokset raskainta sarjaa lukuun ottamatta. Sen sarjan edustajat ovat muihin sarjoihin nähden "ylilihavia". Laskemalla nähdään, että parametrien η tempaus ja η työntö suhde on $0,60/0,52 = 1,15 \approx 1,2$. Jos sekä tempaus- että työntötulokset ovat suhteellisesti ottaen yhtä hyviä, seuraa siitä, että työntötuloksien tulisi olla 1,2-kertaisia vastaaviin tempaus-tuloksiin nähden. Taulukoista 2 ja 3 voidaankin laskemalla todeta, että sarjoittain työntötuloksen suhde tempaustulokseen on juuri suuruusluokkaa 1,2.

Nostotekniikan vaikutus tulokseen

Kaavoista (14) ja (15) saadaan nostettavalle massalle lauseke

$$M = \frac{m}{\eta p - 1} \int_{1/p}^{\eta - q p} f(z) dz \quad (18)$$

Jos nostaja muuttaa nostotekniikkaa, vain η ja q muuttuvat, mutta p pysyy vakiona. Muodostetaan osittaisderivaatat

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} = -\frac{m}{\eta p - 1} \left[p \frac{M}{m} - f(\eta - qp) \right] > 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial M}{\partial q} = -\frac{mp}{\eta p - 1} f(\eta - qp) < 0. \quad (20)$$

Ensinnäkin nostava voima on aina positiivinen, joten epäyhtälö (20) on aina voimassa. Todetaan myös, että pienentämällä parametria q (eli $dq < 0$) saadaan tulos paranemaan. Myöhemmin näytetään nostotuloksista mallin avulla laskemalla, että $f(\eta - qp) > f(1/p) \geq pM/m$, joten epäyhtälö (19) on aina voimassa. Parametrin η suuruus määräytyy nostajan nostotekniikasta.

Nyt voidaan nostotekniikkaa koskien todeta: (i) tangon suurin korkeus tulee olla mahdollisimman matalalla, (ii) vetomatkan s tulee olla mahdollisimman pitkä, (iii) nostajan painopisteen siirron tangon alle tulee olla nopea ja lyhyt.

Nostajan koon äärirajat ja ideaalinen koko

Kaavalla (17) oli määritelty dimensioton tangon vetomatka noston kuluessa

$$d = \eta - qp - 1/p.$$

Tällä on ääriarvo, kun sen derivaatta $\partial d / \partial p = -q + 1/p^2 = 0$ häviää. Nyt saadaan nostajan ideaalinen pituus

$$p = 1/\sqrt{q} \quad \Rightarrow \quad p = 7,67. \quad (21)$$

Ideaalinen koko on:

$$\text{pituus } L = 1,73 \text{ m ja paino } m = 86,90 \text{ kg}. \quad (22)$$

Taulukoiden mukaan performanssi-indeksin maksimi on sarjoissa: tempaus 69 kg (taulukko 2) ja työntö 62 kg (taulukko 3), joten eroa on jonkin verran tulokseen (22) nähden. Tähän palataan myöhemmin.

Performanssi-indeksin sarjakehitelmä

Tarkastellaan kaavan (15) diskreettejä performanssi-indeksin arvoja eri pituisilla nostajilla. Kun nostajan suhteellinen pituus on p_i , saadaan kaavasta (15)

$$PI_i = \int_{1/p_i}^{\eta - qp_i} f(z) dz \quad (i = 1, \dots, n). \quad (23)$$

Jokainen näistä voidaan jakaa kolmeen osaintegraaliin

$$PI_i = \int_{1/p_i}^{1/p_1} f(z) dz + \int_{1/p_1}^{\eta-qp_n} f(z) dz + \int_{\eta-qp_n}^{\eta-qp_i} f(z) dz. \quad (24)$$

Keskimmäinen integraali on yhteinen jokaisella indeksin i arvolla. Ensimmäinen ja kolmas integraali arvioidaan käyttämällä integraalilaskennan väliarvolausetta ja sarjakehitelmiä. Otetaan käyttöön lyhennykset ($n = 7$)

$$A_{-1} = f(1/\tilde{p}_1), \quad (25a)$$

$$A_0 = \int_{1/p_1}^{\eta-qp_n} f(z) dz, \quad (25b)$$

$$A_{+1} = f(\eta - q\tilde{p}_n). \quad (25c)$$

Suuret \tilde{p}_1 ja \tilde{p}_n ovat tuntemattomia väliltä $p_1 \leq \tilde{p}_1 < \tilde{p}_n \leq p_n$. Performanssi-indeksi kaavasta (24) voidaan nyt esittää sarjakehitelmänä

$$PI_i = A_{-1}(1/p_1 - 1/p_i) + A_0 + A_{+1}q(p_n - p_i). \quad (26)$$

Ratkaistaan kertoimet (25a, b, c) käyttäen pienimmän neliösumman menetelmää. Muodostetaan virhefunktio

$$e^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[A_{-1} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_i} \right) + A_0 + A_{+1}q(p_n - p_i) - PI_i \right]^2. \quad (27)$$

Mathematica-laskentaohjelman proseduurilla *FindMinimum* saadaan kertoimien numeeriset arvot helposti ratkaistua. Lisäksi saadaan sovituksen tarkkuutta kuvaava RMS-arvo eli virhe e kaavassa (27). Tulos on taulukossa 6, kun $n = 7$ (sarja +105 kg on jätetty pois) ja $n = 8$ (sarja +105 kg on mukana). Molemmissa nostomuodoissa sovituksen (26) tarkkuus on erittäin hyvä. Vain kertoimen A_0 lievä negatiivisuus on ristiriidassa kaavan (25b) kanssa, mutta se ei häirinne, koska kyseessä on sovitus.

Voimasuhde A_{+1}/A_{-1} ei välttämättä kuvaa tarkasti todellista voimasuhdetta $f(\eta - qp) / f(1/p)$. Se antaa kuitenkin aiheutta päätellä, että juohevan vedon alun $f(1/p) \geq pM/m$ jälkeen seuraa räjähtävä voiman käyttö, joka todennäköisesti hieman hiipuu kohden vedon loppua, kuitenkin niin että $f(\eta - qp) > f(1/p) \geq pM/m$. Vertaa kaava (19).

Taulukko 6. Performanssi-indeksin sarjakehitelmän (26) kertoimet ja voimasuhde.

$n = 7$	Tempaus	Työntö	$n = 8$	Tempaus	Työntö
A_{-1}	585,1	527,6	A_{-1}	352,2	298,8
A_0	-4,407	-3,305	A_0	-5,573	-3,780
A_{+1}	654,7	592,6	A_{+1}	404,5	346,9
RMS	0,0878	0,0223	RMS	0,1049	0,0688
A_{+1}/A_{-1}	1,119	1,123	A_{+1}/A_{-1}	1,148	1,142

Relatiivisen voiman skemaattinen kuva

Kun oletetaan paloittain lineaarinen voimajakauma, ovat Rigert'in luku R_i ja relatiivisen voiman tärkeät tunnusarvot

$$s p M/m \leq f(1/p) = \frac{2}{1+r} \bar{f} < \bar{f} < r f(1/p) = f(\eta - qp) = \frac{2r}{1+r} \bar{f} \quad (28)$$

Taulukoista 2...5 saa käsityksen keskimääräisen voiman \bar{f} suuruudesta eri tapauksissa. Voimasuhde

$$s = \frac{f(1/p)}{pM/m} \quad (29)$$

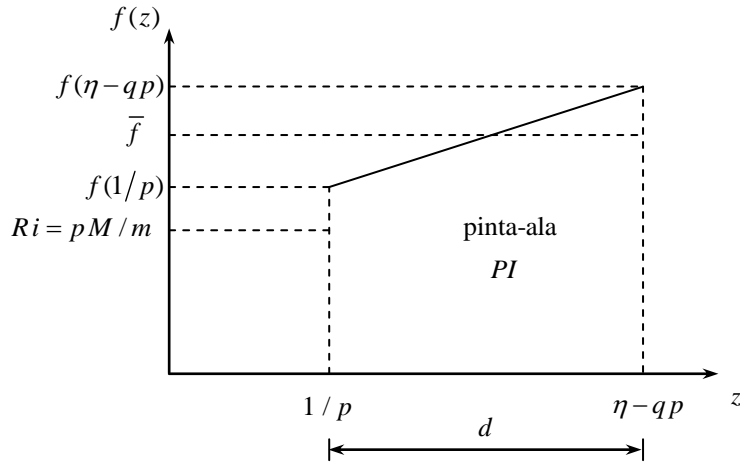
on laskujen mukaan luokkaa 1,2...1,3 tempauksessa ja 1,4...1,5 työnnössä. Voimasuhde

$$r = \frac{f(\eta - qp)}{f(1/p)} \approx \frac{A_{+1}}{A_{-1}} \quad (30)$$

saadaan taulukosta 6 ja se on luokkaa 1,13...1,16. Performanssi-indeksi

$$PI = \int_{1/p}^{\eta - qp} f(z) dz \equiv \bar{f} d \quad (31)$$

esittää voimakuvion pinta-alaa, ks. kaavat (15)-(17) ja kuva 2.



Kuva 2. Relatiivisen nostovoiman periaatteellinen kuva.

Performanssi-indeksin yleistyksen käyttö

Yleistetään diskreetti kehitemä (26) koskemaan jatkuvaa parametria p eli

$$PI(p) = A_{-1}(1/p_1 - 1/p) + A_0 + A_{+1}q(p_n - p). \quad (32)$$

Tämän derivaatta on

$$\frac{d(PI)}{dp} = A_{-1} \frac{1}{p^2} - A_{+1}q. \quad (33)$$

Asettamalla derivaatta nolaksi löydetään performanssi-indeksille maksimeja kohdista

$$p = \frac{1}{\sqrt{q}} \sqrt{\frac{A_{-1}}{A_{+1}}} = \begin{cases} n=7 & n=8 \\ 7,236 & 7,157 \text{ tempaus} \\ 7,251 & 7,118 \text{ työntö} \end{cases} \quad (34)$$

Yleistetään samoin paino-pituus -kaava (13) sarjojen 56kg ja 105kg ulkopuolelle. Ratkaistaan kaavasta (13) pituus p

$$p = \sqrt[\alpha]{m/k}, \quad (35)$$

ja sijoitetaan kaavaan (32)

$$PI(m) = A_{-1}(1/p_1 - \sqrt[\alpha]{k/m}) + A_0 + A_{+1}q(p_n - \sqrt[\alpha]{m/k}). \quad (36)$$

Kaavan (14) avulla saadaan nostotulos M joko nostajan suhteellisen pituuden p funktiona

$$M = \frac{k p^\alpha}{\eta p - 1} PI(p) \quad (37)$$

tai nostajan massan m funktiona

$$M = \frac{m}{\eta^\alpha \sqrt{m/k} - 1} PI(m) \quad (38)$$

Nostotuloksen absoluuttinen maksimi ja muita erikoistapauksia

Taulukoissa 7 ja 8 on esitetty tietyjä erikoistapauksia tempaukselle ja työnnölle olettaen kaavojen (13), (32), (37) ja (38) olevan voimassa myös sarjarajojen 56 kg-105 kg ulkopuolella. Parametrit on määritetty taulukon 6 tapauksessa $n=7$ eli sarja +105 kg ei ole mukana. Siitä huolimatta oletetaan, että nostajien yhden-muotoisuusolettaamus pätee yleisesti.

Esitettyjen erikoistapausten kriteerit ovat:

- $\min m$: pienin ruumiinpaino, jolla jaksaa nostaa pelkän tangon eli 20kg
- $\max PI$: performanssi-indeksillä on maksimiarvo
- $\max d$: nostajan dimensiottomalla vetomatalla on maksimi (ideaalinostaja)
- $\max M$: nostotulos on suurin mahdollinen koosta riippumatta
- $\max m$: suurin ruumiinpaino, jolla vielä jaksaa nostaa pelkän tangon eli 20kg.

Taulukko 7. Erikoistapauksia tempaukselle

kriteeri	L (m)	m (kg)	M (kg)
$\min m$	1,16	16,05	20,0
$\max PI$	1,61	64,74	156,0
$\max d$	1,73	86,90	186,0
$\max M$	1,94	144,40	214,0
$\max m$	2,38	342,19	20,0

Taulukko 8. Erikoistapauksia työnnölle

kriteeri	L (m)	m (kg)	M (kg)
$\min m$	1,11	13,54	20,0
$\max PI$	1,60	63,25	185,0
$\max d$	1,73	86,90	223,0
$\max M$	1,98	155,49	262,0
$\max m$	2,45	383,82	20,0

Performanssi-indeksin maksimiarvot osuvat painosarjaan 69 kg. Dimensiottoman vetomatkan maksimin omaavat ns. ideaaliset nostajat ovat sarjassa 94 kg, mutta hyvin lähellä sen alarajaa. Vertailemalla taulukoiden 7 ja 8 arvoja vastaaviin taulukoissa 2 ja 3 havaitaan, että $\max M$ -tulokset sopivat hyvin sarjaan +105 kg kuten arvata saattoikin.

Todetaan vielä, että äärimmäiset kriteerit, että henkilö jaksaisi nostaa vain pelkän tangon, johtavat varsin mielikuvituksellisiin nostajiin.

Laskettujen ja nostettujen tulosten vertailu

Laskettu nostotulos nostajan massan funktiona seuraa kaavoista (38) ja (36)

$$M = \frac{m}{\eta \sqrt[\alpha]{m/k} - 1} \left[A_{-1} (1/p_1 - \sqrt[\alpha]{k/m}) + A_0 + A_{+1} q (p_n - \sqrt[\alpha]{m/k}) \right] . \quad (39)$$

Erikseen tempausta ja työntöä varten on kertoimet A_{-1} , A_0 ja A_{+1} otettu taulukosta 6, kun $n=8$ eli sarja +105 kg on mukana. Sen sijaan p_1 ja p_n on otettu taulukoiden 2 ja 3 äärimmäisistä sarjoista (56 kg ja +105 kg). Nostajan ennätystulos ja hänen oma painonsa nostohetkellä ovat myös taulukoista 2 ja 3. Oletetaan nostajien yhdenmuotoisuusotaksuman eli kaavan (13) olevan yleisesti voimassa. Sijoitetaan sekä tempaus- että työntölaskelmaa varten nostajan paino kaavaan (39). Laskettu tulos pyöristetään lähimpään puoleen kiloon, koska ennätyksetkin kirjataan puolen kilon tarkkuudella. Taulukoissa 9 ja 10 verrataan laskettuja tuloksia nostettuihin [7] tuloksiin.

Taulukko 9. Tempaus: nostajan oma massa, nostettu ennätystulos, nostajan massasta laskettu tulos, nostetun ja lasketun tuloksen ero sekä neliöllisen eron keskiarvon neliöjuuri ja virheprosenttien neliöllisen keskiarvon neliöjuuri.

sarja	punnittu	nostettu	laskettu	ero	ero
(kg)	m (kg)	M (kg)	M (kg)	(kg)	(%)
56	55,96	138,0	140,5	-2,5	-1,6
62	62,00	153,0	151,5	+1,5	+1,0
69	68,92	165,0	163,0	+2,0	+1,2
77	76,80	174,0	173,5	+0,5	+0,2
85	83,99	187,0	184,0	+3,0	+1,8
94	93,62	188,0	192,5	-4,5	-2,4
105	103,96	200,0	201,5	-1,5	-0,7
+105	161,60	213,0	211,5	+1,5	+0,6

RMS=2,5 RMS = 1,4

Taulukon 9 perusteella voidaan todeta, että olemassa oleviin faktoihin sovitettu tempauksen malli selittää ennätykset parin kolmen kilon tarkkuudella virheprosenttien neliöllisen keskiarvon neliöjuuren ollessa prosentin luokkaa.

Taulukon 10 perusteella voidaan todeta, että olemassa oleviin faktoihin sovitettu työntömalli selittää ennätykset noin kilon tarkkuudella prosentuaalisen RMS-arvon ollessa liki puolet tempauksen vastaavasta. Työntömalli toimii selvästi paremmin kuin tempauksen. Tämä johtunee perimmältään siitä, että työntö nostomuotona on tasapainoltaan vakaampi kuin tempaus eli sattuman vaikutus on pienempi.

Taulukko 10. Työntö: nostajan oma massa, nostettu ennätystulos, nostajan massasta laskettu tulos, nostetun ja lasketun tuloksen ero sekä neliöllisen eron keskiarvon neliöjuuri ja virheprosenttien neliöllisen keskiarvon neliöjuuri.

sarja	punnittu	nostettu	laskettu	ero	ero
(kg)	m (kg)	M (kg)	M (kg)	(kg)	(%)
56	56,00	168,0	169,5	-1,5	- 1,0
62	61,50	182,0	181,5	+0,5	+0,3
69	68,90	197,0	195,5	+1,5	+0,7
77	76,65	210,0	208,5	+1,5	+0,7
85	82,40	218,0	217,0	+1,0	+0,5
94	93,86	232,0	231,0	+1,0	+0,4
105	105,00	237,0	242,0	-5,0	- 2,1
+105	163,95	263,0	261,5	+1,5	+0,6

RMS=2,0 RMS = 0,93

Yhteenveto

Tässä työssä esitetyn matemaattisen mallin perusolettamukset ovat nostajien tietynlainen yhdenmuotoisuus ja fysiologinen samankaltaisuus maailmanennätystasolla sarjan yli 105 kg nostajia lukuun ottamatta. Näistä olettamuksista, sopivia dimensiottomia muuttujia käyttäen, seuraa yleispätevä dimensioton relatiivinen voima $f(z) = p F(z)/mg$ ja että on olemassa vakiot: ruumiin pituuden ja massan välinen riippuvuus $m = kp^\alpha$, nostotekniikan parametrit η ja λ , nopeusparametri u , yhdistetty parametri $q = (\lambda/u)^2$. Näiden nostajan parametrien arvot voivat muuttua hitaasti ajan mukana.

Matemaattinen malli käsittää noston ensimmäisen vaiheen eli tangon maastavedon ja kyykyn sen alle. Tällöin tanko on tempauksessa suorilla käsillä ja työnnössä rinnalla. Dimensioton suhteellinen nostotuloksen lauseke eli performanssi-indeksi PI voidaan esittää kahdessa samanarvoisessa muodossa: joko nostotuloksesta laskettuna tai relatiivisesta voimasta integroituna. Performanssi-indeksi sallii tulosten vertailun eri painosarjojen ja eri nostomuotojen välillä. Malli kertoo myös eri parametrien roolin tärkeyden ja kuinka nostotulosta voidaan parantaa. Parametrien η arvojen erisuuruus (tempaukselle 0,60 ja työnnölle 0,52) selittää, miksi työntötulos on 1,2-kertainen tempaustulokseen nähden. Nostajan tukeva ruumiinrakenne, nopeat liikkeet ja poikkeuksellinen voimakkuus sekä tieteellinen valmennus tekevät mahdolliseksi, että hän kykenee nostamaan todella suuria painoja.

Mallin avulla voidaan tutkia, millainen nostaja on kyseessä ja mitkä ovat nostotulokset, kun performanssi-indeksillä on maksimi-arvo ($\max PI$), nostajan dimensiottomalla vetomatalla on maksimi ($\max d$) ja nostotulos on suurin mahdollinen koosta riippumatta ($\max M$). Nämä kriteerit johtavat seuraaviin mittoihin:

- $\max PI$: nostajan pituus 1,62 m ja paino noin 66 kg
- $\max d$: nostajan pituus 1,73 m ja paino 87 kg
- $\max M$: nostajan pituus 1,96 m ja paino noin 150 kg.

Sarjan 56 kg ennätykset ovat heikommät kuin teoria edellyttää. Tämä johtunee siitä, että pituus-paino -kaava ei pienille miehille päde. Sarjoissa 69 kg nostetut tulokset ovat tällä hetkellä suhteellisesti parhaat. Sarjojen 94 kg ja 105 kg tuloksissa on eniten parantamisen varaa. Sarjan +105 kg ennätykset ovat paremmat kuin kriteeri max M ennustaa. Tämä johtunee siitä, että sarjan +105 kg ennätysten haltija on lihottanut itsensä ulos paino-pituus -kaavan (13) piiristä.

Kun käytetään sovituksessa nostajan punnittua massaa riippumattomana muuttujana ja otetaan sovitukseen mukaan molemmissa nostomuodoissa, tempaus ja työntö, kaikki maailmanennätykset, saadaan tempaus- ja työntömalli, jotka molemmat kuvaavat nostettuja maailmanennätyksiä alle viiden kilon tarkkuudella prosentuaalisen eron ollessa enimmillään kaksi ja puoli prosenttia. Tempausennätysten parantumista on odotettavissa sarjoissa 56, 94 ja 105 kg sekä työntöennätysten parantumista sarjoissa 56 ja 105 kg.

Kirjoittajat esittävät lopuksi toivomuksen tulevaisuutta ajatellen. Olisi hyvä, jos painonnostajien pituus ilmoitettaisiin painon ohella, niin ei tarvitsisi turvautua yhdenmuotoisuusotaksumaan, vaan performanssi-indeksi voitaisiin laskea mitatuista suureista. Hyvä olisi myös määrittää filmaamalla tai jollain muulla tavalla ainakin kunkin nostajan henkilökohtainen η -parametrin arvo eri nostomuodoissa. Myös yhdistetyn parametrin q suuruus olisi lisätutkimisen arvoinen asia.

LÄHTEITÄ

- [1] Ranta, M. A., *Voimaurheilun teoriaa*. Oulun yliopisto, koneinsinööriosasto. Raportti No. 2, 1969. 52 s.
- [2] Ranta, M. A., *Simple Mathematical Model of Weightlifting*. Biomechanics V-B. International Series of Biomechanics. University Park Press 1B (1976), s. 337-343.
- [3] Ranta, M. A., *A Mathematical Model of Weightlifting*. Invited general lecture in the General Assembly of IUTAM at Herrenalb BRD on 5th September 1978, 28s.
- [4] Ranta, M. A., *Biomekaniikka*. Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 13 1980 NO. 2, s. 2-15.
- [5] O'Shea, J.P., *Scientific Principles and Methods of Strength Fitness*. Addison-Wesley Publishing Company, USA 1968, 165s.
- [6] *Painonnoston käsikirja*, Suomen Painonnostoliitto ry 1986, 301s.
Käännös kirjasta: *A Textbook on Weightlifting*, Prof. Dr. A. N. Vorobyev. 1970.
- [7] International Weightlifting Federation, <http://www.iwf.net>

Matti A Ranta
Aalto-yliopiston teknillinen korkeakoulu
matti.ranta@aalto.fi

Ulf Holmlund
holmlund.ulf@gmail.com