

Akustisen aallon sironta elastisesta kappaleesta

Timo Lähivaara ja Tomi Huttunen

Tiivistelmä. Työssä tutkitaan aikatason aalto-ongelmien (akustinen ja elastinen aaltoyhtälö) ratkaisuja kolmidimensionaalisissa sirontaongelmissa. Esimerkkiongelmana tarkastellaan meren pohjassa olevista sylinterinmuotoisista elastisista kappaleista heijastuvaa akustista painekenttää. Laskentamallissa aaltoyhtälöä approksimoidaan käyttäen epäjatkovaa Galerkinin (engl. *discontinuous Galerkin*) menetelmää ja eksplisiittistä *low-storage Runge-Kutta* aikaintegrointia. Paikkadiskretoinnin polynomikannan asteluku valitaan erikseen jokaiselle laskentaverkon elementille.

Avainsanat: epäjatkuva Galerkinin menetelmä, eksplisiittinen aikaintegrointi, korkea-asteiset kantafunktiot, numeerinen vaimennuskerroin, sirontaongelmat

Johdanto

Useilla fysiikan ja tekniikan osa-alueilla on tarpeen simuloida värähtelypulssien etenemistä elastisessa tai akustisessa väliaineessa. Näitä tutkimuskohteita ovat esimerkiksi rakenteiden mekaaniset värähtelyt, seismologia tai ultraäänellä tehtävä rakennetutkimus. Viime vuosikymmenten aikana useita numeerisia menetelmiä on esitetty edellä mainittujen ongelmien ratkaisemiseksi. Esimerkkeinä käytetyistä menetelmistä mainittakoon elementti menetelmä (engl. *finite element (FE)*) sekä differenssimenetelmät. Usein aaltoilmiöitä simuloidaan myös säteenseuranta tai kovalähdemenetelmiä käyttäen. Kuitenkin valitettavan usein, varsinkin korkeilla taajuuksilla ja monimutkaisissa geometrioissa, perinteiset lähestymistavat tuottavat liian epätarkkoja tuloksia tai ovat laskennallisesti liian raskaita tutkittaville ongelmille.

Yksi lupaava lähestymistapa aaltoilmiöiden simulointiin on epäjatkuva Galerkinin (engl. *discontinuous Galerkin (DG)*) [1] menetelmä. FE menetelmien tapaan laskenta-alue jaetaan elementteihin, joissa ongelman ratkaisua approksimoidaan käyttäen polynomikantafunktioita. FE menetelmästä poiketen, kanta on epäjatkuva elementtirajapintojen yli. Rajapinnoilla, ratkaisun jatkuvuus pakotetaan numeerista vuotermejä (engl. *numerical flux*) käyttäen. Menetelmän etuina ovat muun muassa geometrinen joustavuus ja tehokas rinnakkaistuminen moniprosessoritietokoneille. Hyvä lähdeos DG menetelmän analyysiin ja sovelluksiin on Hesthavenin ja Warburtonin vuonna 2007 kirjoittama kirja [2].

Laskentamallin kuvaus

Tässä työssä käytetyssä DG laskentamallissa polynomikannan asteluku valitaan erikseen jokaiselle laskentaverkon elementille. Kantafunktioiden asteluvun valintakriteerin tavoitteena on tuottaa ratkaisulle vakiosuuruinen virhetaso riippumatta käytetystä laskentaverkosta, ja toisaalta, minimoida kunkin simulointitehtävän vaatima laskentakapasiteetti. Kannan asteluvun valintakriteerin tehokkuutta ja rajoituksia on analysoitu viitteessä [3].

Paikkaderivaattojen diskretoinnin lisäksi ratkaisun tarkkuuteen vaikuttaa useat eri tekijät. Näitä on esimerkiksi fysikaalisesti rajoittamattoman laskentageometrian katkaisu-
minen äärelliseksi. Yleisesti käytetään absorboivaa (ensimmäisen kertaluvun Engquist-
Majda [14]) reunaehto tutkittavan alueen ulkoreunalla. Valitettavasti absorboiva reu-
naehto tuottaa ei-haluttuja heijastuksia takaisin tutkittavaan alueeseen. Paljon käytetty
menetelmä heijastusten vähentämiseen on numeerinen vaimennuskerroin PML (engl. *per-
fectly matched layer* [12]).

Alunperin Bérengerin julkaisemalle numeeriselle vaimennuskerrokselle [12] on lukuisia
eri esitystapoja. Esimerkkeinä mainittakoon; Hu, joka on tutkinut PML:ä Euler yhtälöille
[13] ja Martin *et al.* [5], jotka käyttävät vaimennuskerrosta elastisessa väliaineessa. Yh-
teinen tekijä molemmissa edellä mainituissa tutkimuksissa [13] ja [5] on, että formuloin-
ti tuottaa termejä, joissa ratkaistaan gradientti vaimennuskerroksen sisällä. Abarbanelin
[11] lähestymistavassa uusia gradientteja ei tarvitse laskea ja on näin ollen laskennallisesti
kevyempi. Viimeksi mainittua lähestymistapaa on käytetty myös tässä työssä.

Reunaehtojen lisäksi ratkaisun tarkkuuteen vaikuttaa käytetty aikaintegrointimenet-
elmä ja aika-askeleen pituus. Tässä tutkimuksessa aika-askeleen pituus esitetään Courant-
Friedrichs-Lewy (CFL) luvun avulla. CFL luku huomioi väliaineen fysikaaliset ominaisuu-
det, asetettujen kantafunktioiden asteluvun ja laskentaverkon. Kirjallisuudessa on esitetty
menetelmiä, joissa aika-askeleen pituus valitaan erikseen jokaiselle laskentaverkon elemen-
tille (nk. lokaali aika-askellus [16, 18]), mutta valitettavasti menetelmät eivät ole tehok-
kaita rinnakkaislaskennassa [17]. Tässä työssä käytetään vakiosuuruista aika-askelta yh-
dessä eksplisiittisen *low-storage Runge-Kutta* [15] menetelmän kanssa. Tarkempi analyysi
aikaintegrointimenetelmästä (*low-storage Runge-Kutta*) on esitetty viitteessä [2].

Sirontaongelma

Esimerkkiongelman tutkimuksessa simuloidaan meren pohjaan sijoitettujen kappaleiden
heijastamia akustisia sirontakenttiä. Työn tavoitteena on tutkia kuinka sirottavan kappaleen
rakenne muuttaa sironnutta kenttää. Sironnutta kenttää voidaan käyttää kappaleiden
tunnistamiseen esimerkiksi kaikuluotauksessa. Kun sironnutta kenttää tarkastellaan
aika-taajuuskuvaajana (spektrogrammi), saadaan tietoa kappaleen koosta, materiaalis-
ta ja sisäisestä rakenteesta. Voidaankin sanoa, että kaikilla kappaleella on tunnistettava
akustinen sormenjälki (engl. *acoustic fingerprint*).

Tarkasteltava ongelma on yleisesti tutkittu esimerkkitapaus vedenalaisen akustiikan
mallinnusmenetelmien tutkimuksessa [4]. Sirontakenttien perusteella saadaan tietoa si-
rottavan kappaleen muodosta ja materiaaleista. Tutkimuksessa käytetään kolmea erilais-
ta geometriaa, joista ensimmäisessä, sirottavan kappaleen pinta mallinnetaan akustisesti
kovana. Toisessa geometriassa sirottavaan kappaleeseen lisätään ohut elastinen kerros.
Viimeisessä esimerkissä, ohuen elastisen kerroksen lisäksi, kappaleen sisäosaan lisätään
elastinen väliaine. Numeerisissa esimerkeissä esitellään sironneen paineen spektrogram-
meja.

Kytkeyty ongelma (akustinen ja elastinen aaltoyhtälö)

Tässä paperissa kytkeytyllä ongelmalla tarkoitetaan fysikaalista mallia, jossa tutkitaan me-
kaanisen aaltopulssin etenemistä/sirontaa akustisessa ja elastisessa väliaineessa. Tarkem-
min sanoen, työssä tarkastellaan vesi/sedimentti rajapinnalla olevan sylinterinmuotoisen
kappaleen heijastamia akustisia kenttiä. Kuitenkin tässä kappaleessa kuvattu matemaat-
tinen formulointi on esitetty mahdollisimman yleisessä muodossa.

Määritellään aluksi tarkasteltavaksi alueeksi $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ja sen reunaksi $\partial\Omega$. Seuraavassa tarkastelussa käytetään seuraavia merkintöjä: aika t , paikkamuuttujat x, y ja z ja Lamé vakiot λ ja μ . Edelleen merkitään jännityksen normaalikomponentteja symboleilla τ_{xx}, τ_{yy} ja τ_{zz} ja nopeuskomponentteja u, v ja w . Edellisiä merkintöjä käyttäen, jännityksen normaalikomponentit voidaan kirjoittaa muodossa [6, 7, 8]

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial t} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial v}{\partial y} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Vastaavasti jännityksen pinnansuuntaiset komponentit τ_{xy}, τ_{yz} ja τ_{xz}

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Merkitään seuraavaksi väliaineen tiheys symbolilla ρ , jolloin liikemäärän taseen lokaalit muodot voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Edellä ollut tarkastelu pätee elastiseen väliaineeseen, josta akustisen väliaineen yhtälöt saadaan asettamalla Lamé vakio μ nolllaksi [6].

Nesteessä jännitystensori τ voidaan jakaa kahteen osaan: p (paine) ja σ (jännityksen pinnansuuntaiset komponentit), jolloin saadaan [10]

$$\tau = -pI + \sigma,\tag{4}$$

missä I on yksikkömatriisi. Näin ollen ei-viskoottisessa nesteessä ($\sigma = 0$) paineelle saadaan yhteys jännityksen normaalikomponentteihin seuraavasti

$$p = -\tau_{xx} = -\tau_{yy} = -\tau_{zz}.$$

Yhtälöryhmät (1), (2) ja (3) voidaan kirjoittaa kompaktisti matriisimuodossa seuraavasti

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A \frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Q}{\partial y} + C \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,\tag{5}$$

missä $Q = (\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w)$. Edelleen, systeemissä (5) matriisit A, B ja C ovat kooltaan 9×9 . Esimerkkinä tarkastellaan matriisia A , joka voidaan kirjoittaa

parametrien ρ , λ ja μ avulla muodossa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriiseissa B ja C on samat nolasta poikkeavat arvot $-\lambda$, $-(\lambda + 2\mu)$ ja $-1/\rho$, mutta eri paikoissa [7, 8]. Edelleen P - ja S -aaltojen nopeudet voidaan esittää Lamé vakioiden ja väliaineen tiheyden avulla seuraavasti

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{ja} \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (6)$$

Sekä akustisen että elastisen aaltoyhtälön yksikäsitteinen ratkaisu vaatii alkuehdot (tässä työssä oletetaan nolaksi) ja reunaehtojen määrittelyä laskenta-alueen reunoille. Tämän tutkimuksen kannalta keskeisiä ovat nk. absorboivat reunaehdot, joilla ääretön fysikaalinen alue voidaan rajata äärelliseksi laskenta-alueeksi. Absorboiva reunaehto [14] määritellään seuraavasti

$$\frac{1}{c_P} \frac{\partial p}{\partial t} + n \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right]^\top = 0, \quad (7)$$

missä $n = [n_x, n_y, n_z]^\top$ on pinnan ulospäin osoittava yksikkönormaali ja \top tarkoittaa transpoosia. Lisäksi työssä käytetään sirottavan kappaleen pinnalla *sound-hard* [9] (akustinen väliaine)

$$n \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right]^\top = 0 \quad (8)$$

tai *traction-free* [7, 20] (elastinen väliaine)

$$\tau n = 0 \quad (9)$$

reunaehtoa. Kattava yleiskatsaus elastisten aaltojen reunaehdoista löytyy esimerkiksi viitteestä [7]. Akustiikan reunaehtoja esitellään viitteessä [9].

Alkuehtojen ja reunaehtojen lisäksi jatkuvuusehdot materiaalien rajapinnoilla tulee määrittellä. Kahden elastisen materiaalin väliselle rajapinnalle jatkuvuusehdot kirjoitetaan [20]

$$\begin{aligned} \tau^+ n &= \tau^- n \\ [u^+, v^+, w^+]^\top &= [u^-, v^-, w^-]^\top \end{aligned} \quad (10)$$

Akustisen ja elastisen tai kahden akustisen väliaineen väliselle rajapinnalle jatkuvuusehdot määritellään seuraavasti [20]

$$\begin{aligned} \tau^+ n &= \tau^- n \\ n \cdot [u^+, v^+, w^+]^\top &= n \cdot [u^-, v^-, w^-]^\top \end{aligned} \quad (11)$$

Akustisessa materiaalissa termi τn redusoituu paineeksi p [20]. Jatkuvuusehdoissa (10) ja (11) $+$, $-$ yläindeksit tarkoittavat fysikaalisten parametrien arvoja materiaalirajapinnan molemmilla puolin.

Käytettäessä epäjatkuvaa Galerkinin menetelmää, tulee jatkuvuusehto kirjoittaa jokaisen elementin rajapinnalle, sillä menetelmän heikkomuoto kirjoitetaan erikseen jokaiselle laskentaverkon elementille ja kommunikointi elementtien välillä toteutetaan numeerisella vuolla. Tässä työssä käytetty numeerinen vuo on esitelty tarkemmin viitteessä [6].

Numeeriset esimerkit: Sironta sylinterinmuotoisesta kappaleesta

Esimerkissä tarkastellaan tasoallon sirontaa merenpohjaan sijoitetusta sylinterinmuotoisesta kappaleesta (ongelman geometria on nähtävissä Kuvassa 1). Kyseistä ongelmaa on tutkinut Zampolli kollegoineen viitteessä [4]. Heidän tutkimuksessa ongelmaa tarkastellaan taajuustasossa, mutta tässä työssä aallon etenemistä ja sirontaa käsitellään aikatason ongelmana.

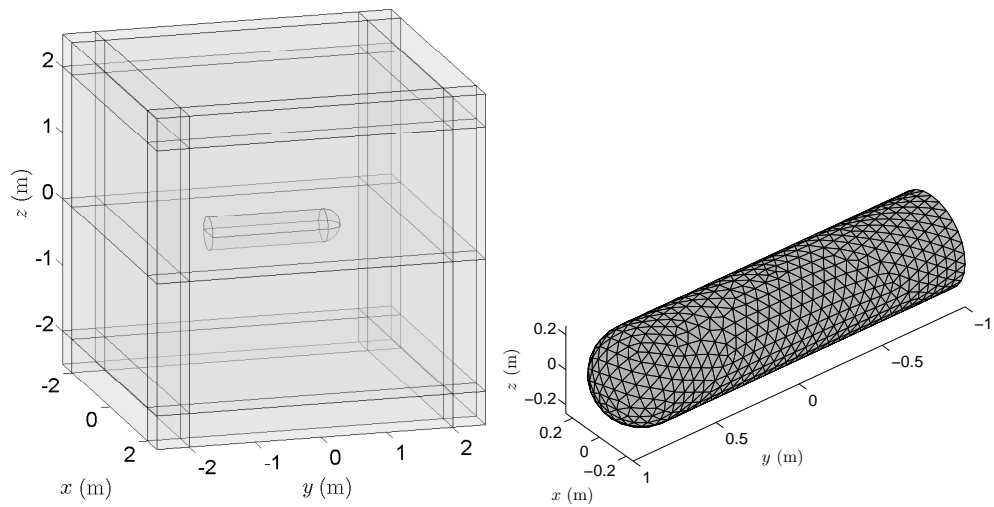
Kuvassa 1 on esitetty tutkittavan esimerkkiongelman geometria (ongelman fysikaaliset parametrit on listattu Taulukossa 1). Alueet on määritelty seuraavasti vesi: $\Omega_1 = [-2, 2] \times [-2, 2] \times [0, 2] \text{ m}^3$ ja sedimentti: $\Omega_2 = [-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 0] \text{ m}^3$. Geometriasta nähdään, että alueen ulkoreunalle on lisätty numeerinen vaimennuskerros, jonka paksuus on 50 cm. Tutkittavan alueen ulkoreunalle asetetaan absorboiva reunaehto (7). Edelleen Kuvasta 1 havaitaan, kuinka sirottava sylinterinmuotoinen kappale on sijoitettu vesi/sedimentti rajapinnalle. Kuvassa esitetty geometria on visualisoitu tyyppin I (ks. Kuva 2) sirottajalla.

Taulukko 1. Tutkittavan sirontaongelman fysikaaliset parametrit [4].

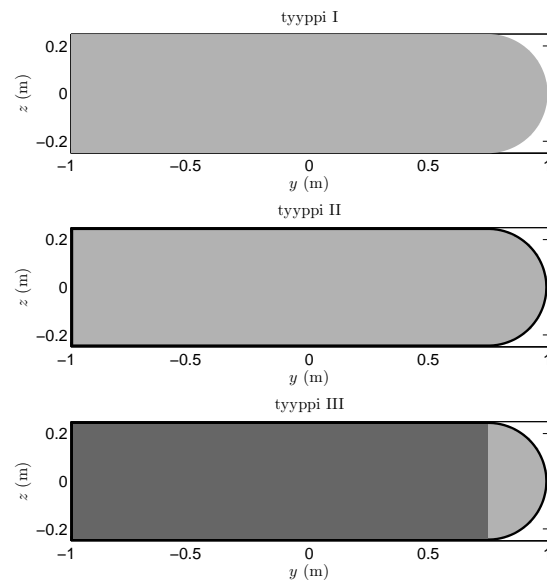
	c_P (m/s)	c_S (m/s)	ρ (kg/m ³)
vesi	1500	-	1000
sedimentti	1600	-	1800
kuori	3500	1400	3000
täyte	2500	1200	2000

Käytetty laskentamalli edellyttää, että tutkittava geometria (Kuva 1) tulee verkottaa. Laskennassa käytetään tetraedri-verkkoja, jotka on luotu kaupallisella Gambit-ohjelmistolla. Käytetyssä laskentamallissa kantafunktioiden asteluku valitaan erikseen jokaiselle tetraedri-elementille. Valintakriteerin tarkoituksena on minimoida laskentakapasiteetin tarve, sillä pienemmissä elementeissä voidaan käyttää matalampaa kantafunktioiden astelukua (pitäen virheen ”hyväksyttävällä” tasolla). Kannanvalintakriteeri on kuvattu tarkemmin lähteessä [3]. Kuvassa 1 on esitetty sirottavan kappaleen pintaverkko. Kuvan pintaverkko on tyyppin I (Kuva 2) tapauksesta.

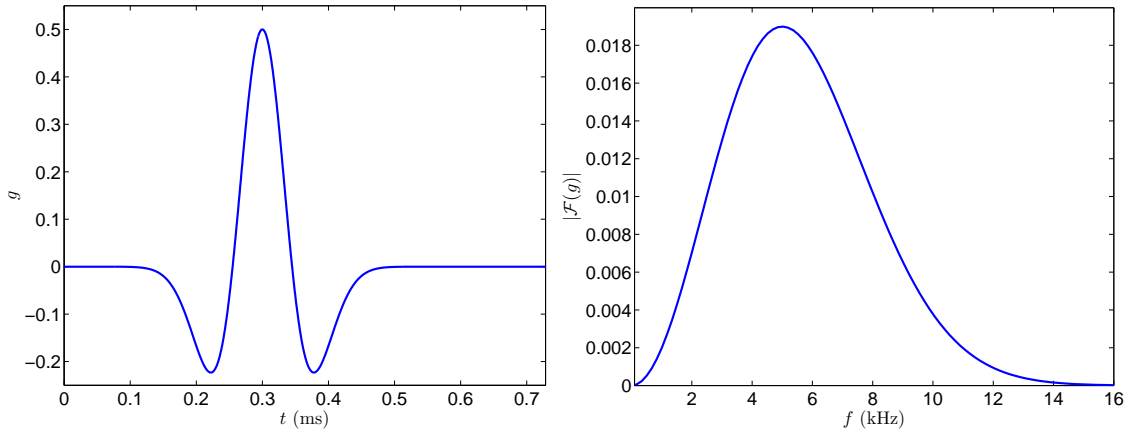
Kuvassa 2 on esitetty kolme laskennassa käytettyä mallia sirottavalle kappaleelle. Tyyppi I tarkoittaa tilannetta, jossa sirottaja (pituus 2 m ja halkaisija 50 cm) on oletettu täysin läpäisemättömäksi. Näin ollen tyyppin I ongelma on täysin akustinen, koska vain sylinterinmuotoisen kappaleen sisäosa on mallinnettu elastisena materiaalina. Tyyppi II sisältää 1 cm paksuisen elastisen kuoren sirottavan sylinterin pinnalla (Kuvassa 2 esitetty mustalla). Tyyppi III sisältää elastisen kuoren lisäksi myös toisen elastisen materiaalin (kuvattu tummanharmaalla Kuvassa 2). Kaikissa tapauksissa sylinterinmuotoinen



Kuva 1. Tutkittavan ongelman geometria (Vasen) ja sirottavan sylinterin pintaverkko (Oikea).



Kuva 2. Sirottavan kappaleen erityyppiset geometriat. Vaaleanharmaa alue tarkoittaa eristettyä aluetta, tummanharmaa täytettä ja musta kuorta. Alueiden fysikaaliset parametrit on esitetty Taulukossa 1.



Kuva 3. Herätteenä käytetty *Ricker-wavelet* ajan funktiona (Vasen) ja lähdefunktion Fourier-muunnoksen itseisarvo taajuuden funktiona (Oikea).

kappale sisältää alueen, jonka reunalle asetetaan joko *sound-hard* (8) (akustinen, tyyppi I) tai *traction-free* (9) (elastinen, tyypit II ja III) reunaehto.

Tutkittavan alueen ulkoreunalla käytettävä numeerinen vaimennuskerros estää tasoaltoherätteen tuottamisen alueen ulkoreunalta (esimerkiksi epähomogeenisella reunaehdolla). Tämän vuoksi tässä työssä tasoalto tuotetaan PML ja ei-PML alueiden väliseltä rajapinnalta Γ_{vesi} . Koska käytetyssä laskentamallissa jatkuvuus kahden akustisen väliaineen rajapinnalla määritellään jatkuvuusehtojen (11) avulla, voidaan tätä rajapintaa käyttää myös tuottamaan akustinen heräte alueeseen. Tämä toteutetaan lisäämällä herätefunktio g (ks. yhtälö (12)) paineen jatkuvuusehtoon ja termi

$$n \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial z} \right]^T$$

nopeuden jatkuvuusehtoon.

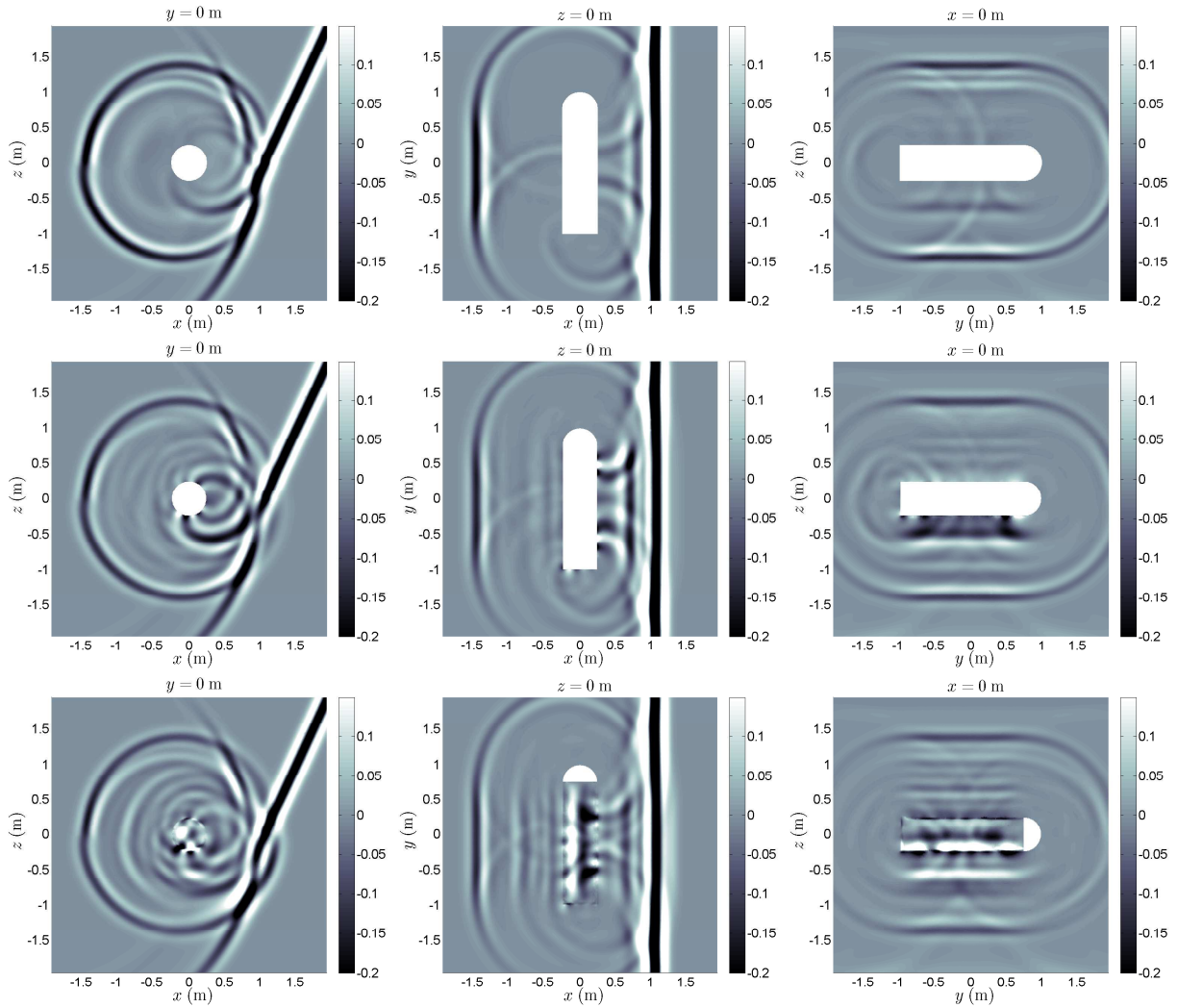
Tutkimuksessa herätteenä käytetään *Ricker-wavelet*tä (normalisoitu Gaussin funktion toinen derivaatta), joka voidaan kirjoittaa seuraavasti

$$g(t, r) = \left(0.5 + \alpha \left\{ t - \frac{r}{c_P} - t_0 \right\}^2 \right) \exp \left(\alpha \left\{ t - \frac{r}{c_P} - t_0 \right\}^2 \right) \quad \forall \left(t - \frac{r}{c_P} \right) \geq 0, \quad (12)$$

missä $\alpha = -(f_c \pi)^2$, $r = k_x(x + x_0) + k_y(y + y_0) + k_z(z + z_0)$ ja $t_0 = 0.3$ ms. Komponenteilla (k_x, k_y, k_z) määritellään tasoallon tulosuunta ja komponenteilla (x_0, y_0, z_0) lähdepinnan sijainti. Keskitajuudeksi f_c valitaan 5 kHz. Vastaavaa lähdefunktiota vedenalaisen akustiikan tutkimuksessa on käytetty viitteessä [19], jossa sirontaongelmia tarkastellaan kaksidimensionaalisissa tapauksissa. Yleisesti *Ricker-wavelet* on paljon käytetty heräte seismologiassa [8, 6, 17, 18].

Lähdefunktio (12) ajan funktiona ($r = 0$) ja Fourier-muunnoksen \mathcal{F} itseisarvo taajuuden funktiona on esitetty Kuvassa 3. Tutkittavan ongelman loppuaika on määrätty arvoon $t_{\max} = 5$ ms, jonka aikana pulssi etenee kokonaisuudessaan tutkittavan alueen lävitse. Tasoallon tulosuunta määritellään $(k_x, k_y, k_z) = (0.91, 0, -0.42)$ ja $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, -2)$, joka tarkoittaa käytännössä 25-asteen tulokulmaa xz -tasossa (ks. Kuva 4).

Kuvassa 4 on esitetty jännityskomponentti τ_{xx} (ks. yhtälöryhmä (1)) ajanhetkellä $t = 2.6$ ms kolmessa tasossa. Komponentti τ_{xx} on visualisoitu jokaiselle sirottajatyypille

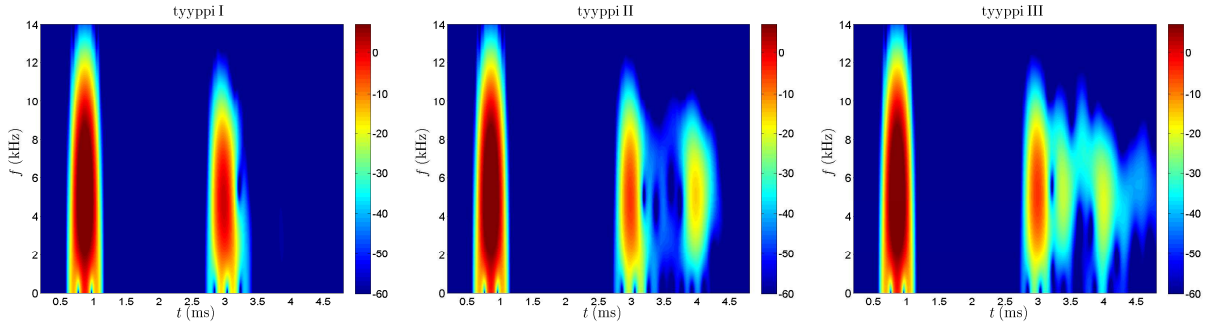


Kuva 4. Jännityksen τ_{xx} komponentti ajanhetkellä $t = 2.6$ ms kolmessa tasossa kuvattuna. Yllä: sirottajatyypin I, keskellä: sirottajatyypin II ja alla: sirottajatyypin III.

I, II ja III. Erityisesti kuvasta erottuu sirottajatyypin I tulokset (sirottajatyypeille II ja III on havaittavissa sylinterin elastisissa rakenteissa syntyvät aallot). Lisäksi kuvasta havaitaan, kuinka numeerinen vaimennuskerros estää ylimääräisten heijastusten syntymisen ulkoreunalta. Edelleen voidaan todeta, että käytetty epähomogeeninen hyppyehto PML ja ei-PML rajapinnalle toimii hyvin.

Paineen spektrogrammit (kaikille sirottajatyypeille) havaintopisteessä $(x_o, y_o, z_o) = (-1.6, 0, 0.8)$ m on esitetty Kuvassa 5. Spektrogrammien laskentaan käytetään Matlabin funktiota *spectrogram*, jossa asetetaan aikaikkunaksi 0.38 ms ja päällekkäisten havaintojen ajaksi 0.37 ms. Kuvaajat on esitetty havaitulle signaalille $p_{total} = p_{tuleva} + p_{siroonnut}$, joten jokaisessa kuvaajassa havaitaan samanmuotoinen herätesignaali (ajanhetkellä ~ 0.9 ms). Edelleen, ajanhetkellä ~ 1.4 ms havaintaan vesi-sedimentti rajapinnasta syntynyt heijastus ja ajanhetkellä ~ 3.0 ms sylinterin pinnasta syntyvä ensimmäinen takaisinheijastus. Sirottavan kappaleen pinnalta heijastunut aalto on amplitudiltaan hieman pienempi tyyppin II ja III tapauksessa (verrattuna tyyppin I tulokseen). Syynä on tyyppin I kappaleen ideaalinen akustisesti kova pinta.

Kuvassa 5 esitetyt spektrogrammit osoittavat elastisen kuorikerroksen ja täytema-



Kuva 5. Paineen spektrogrammi havaintopisteessä $(x_o, y_o, z_o) = (-1.6, 0, 0.8)$ m. dB-asteikko määritellään $SPL(\text{dB}) = 20 \log_{10} (|p|/p_{ref})$, missä $p_{ref} = 10^{-6}$ Pa. Tulokset on esitetty jokaiselle Kuvan 2 sirottaja-tyypille.

teriaalin tuottavan kappaleiden tunnistamista helpottavan runsaamman spektrisisällön. Lisäksi elastinen välinen tuottaa pidemmän heijastuneen signaalin johtuen kappaleessa tapahtuvista moninkertaisista heijastuksista.

Pohdinta

Työssä tutkittiin aalto-ongelmia kytketyissä ongelmissa. Tutkimuksessa kytketyillä malleilla tarkoitetaan mallinnusongelmia, jotka sisältävät akustisen ja elastisen väliaineen. Työssä tarkasteltiin sirontaongelmia tapauksissa, joissa sirottava kappale sijoitetaan vesisedimentti rajapinnalle. Akustinen heräte tuotettiin laskenta-alueeseen PML ja ei-PML rajapinnalta (vain vesialueessa). Herätteenä käytettiin *Ricker*-wavelettia (12), jolla tuotettiin ”leveä” spektrinen signaali (ks. Kuva 3).

Tutkimuksen tavoitteena oli tarkastella kuinka sirottavan kappaleen rakenne muuttaa sironnutta kenttää. Työssä tarkasteltiin kolme erilaista sirottajageometriaa (ks. Kuva 2). Sirottajatyypeistä ensimmäinen tarkoitti ongelmaa, jossa sylinteri oletettiin täysin läpäisemättömäksi (ongelmassa vain akustisia väliaineita; vesi ja sedimentti). Sirottajatyypit II ja III sisälsivät sekä elastisia kerroksia että läpäisemättömiä alueita. Tuloksista havaittiin (ks. Kuvat 5 ja 4), että kappaleen rakenteella merkittävä vaikutus sironneisiin aaltoihin. Esimerkiksi elastisen kuoren sisällä olevalla täytteellä on hyvin havaittava vaikutus sironneen aallon spektrogrammiin.

Laskentamallina aaltoyhtälön approksimointiin käytettiin epäjatkovaa Galerkinin menetelmää ja *low-storage Runge-Kutta* aikaintegrointia. Laskentamalli on rinnakkaistettu MPI:llä (engl. *message passing interface*), joten se soveltuu hyvin käytettäväksi supertietokoneissa ja laskentaklustereissa. Laskentaympäristönä käytettiin Tieteen tietotekniikka keskuksen (CSC) *Louhi* supertietokonetta.

Tutkimuksen seuraavassa vaiheessa tuloksia verrataan myös muilla laskentamalleilla laskettuihin ratkaisuihin. Lisäksi julkaisussa kuvatulla mallilla laskettuja ratkaisuja verrataan mittaushavaintoihin. Työn tavoitteena on tutkia ja kehittää uusia tapoja tunnistaa kappale siitä sironneiden akustisten aaltojen perusteella.

Viitteet

- [1] W. Reed ja T. Hill, *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*, Technical report, Los Alamos National Laboratory, 1973.

- [2] J. Hesthaven ja T. Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*, Springer, 2007.
- [3] T. Lähivaara ja T. Huttunen, A non-uniform basis order for the discontinuous Galerkin method of the 3D dissipative wave equation with perfectly matched layer, *Journal of Computational Physics*, 229(13):5144–5160, 2010.
- [4] M. Zampolli, F.B. Jensen ja A. Tesei, Benchmark problems for acoustic scattering from elastic objects in the free field and near the seafloor, *Journal of the Acoustical Society of America*, 125(1):89–98, 2009.
- [5] R. Martin, D. Komatitsch, S.D. Gedney ja E. Bruthiaux, A high-order time and space formulation of the unsplit perfectly matched layer for the seismic wave equation using Auxiliary Differential Equations (ADE-PML), *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 56(1):17–42, 2010.
- [6] M. Käser ja M. Dumbser, A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids, *Geophysics*, 73(3):23–35, 2008.
- [7] R.J. Leveque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2002.
- [8] M. Dumbser ja M. Käser, An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - II. The three-dimensional isotropic case, *Geophysical Journal International*, 167(1):319–336, 2006.
- [9] A.D. Pierce, *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*, The Acoustical Society of America, 1981.
- [10] L.D. Landau ja E.M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Pergamon Press, 1959.
- [11] S. Abarbanel ja D. Gottlieb, On the construction and analysis of absorbing layers in CEM, *Applied Numerical Mathematics*, 27:331:340, 1998.
- [12] J-P. Bérenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics*, 114(2):185–200, 1994.
- [13] F.Q. Hu, A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables, *Journal of Computational Physics*, 173(2):455–480, 2001.
- [14] B. Engquist ja A. Majda, Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Mathematics of Computation*, 31(139):629–651, 1977.
- [15] M.H. Carpenter ja C.A. Kennedy, *Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes*, Technical report, NASA-TM-109112, 1994.
- [16] S. Piperno, Symplectic local time-stepping in non-dissipative DGTD methods applied to wave propagation problems, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 40(5):815–841, 2006.
- [17] M. Käser, C.E. Castro, V. Hermann, J. de la Puente ja C. Pelties, Recent Developments of the ADER-discontinuous Galerkin scheme for computational seismology: A critical view on its advantages and disadvantages, *The 9th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves Propagation*, 2009.

- [18] M. Dumbser, M. Käser ja E.F. Toro, An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - V. Local time stepping and p -adaptivity, *Geophysical Journal International*, 171(3):695–717, 2007.
- [19] D.C. Calvo, K.E. Rudd, M. Zampolli, W.M. Sanders ja L.D. Bidee, Simulation of acoustic scattering from an aluminum cylinder near a rough interface using the elastodynamic finite integration technique, *Wave Motion*, 47(8):616–634, 2010.
- [20] L.C. Wilcox, G. Stadler, C. Burstedde ja O. Ghattas, A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic-acoustic media, *Journal of Computational Physics*, 229(24):9373–9396, 2010.

Timo Lähivaara
Itä-Suomen yliopisto
Sovelletun fysiikan laitos
PL 1627
70211 Kuopio
timo.lahivaara@uef.fi

Tomi Huttunen
Kuava Oy
PL 1188
70211 Kuopio
Itä-Suomen yliopisto
Sovelletun fysiikan laitos
PL 1627
70211 Kuopio
tomi.huttunen@uef.fi