

Väsymislaskenta taajuustasossa

Jukka Lähdeniemi ja Jari Mäkinen

Tiivistelmä. Artikkelissa perehdytään taajuustason väsymislaskentaan, jonka avulla on mahdollista päästä eroon hitaasta ja työlästä aikatasosimuloinnista. Nykyään luotettavin tapa toteuttaa väsymislaskenta on mitata rakenteesta venymäliuskojen avulla jännityksiä laitteen käyttöolosuhteissa, joiden avulla tehdään väsymislaskenta aikatasossa. On myös mahdollista toteuttaa väsymislaskenta simulointimallien avulla. Valitettavasti kuormitusten määrittämiseen simuloinnissa ei ole käytännöllistä ja helppoa lähestymistapaa tai se edellyttää laitteen ja käyttöympäristön täydellistä mallintamista. Tässä artikkelissa ongelmaan yritetään hakea ratkaisuja käyttäen taajuustason väsymislaskentaa.

Avainsanat: väsymislaskenta, todennäköisyyslaskenta, taajuustaso

Väsymislaskenta aikatasossa

Jos rakenneosaa on staattisen kuormituksen alaisena, se murtuu, kun vertailujännitys saavuttaa materiaalin murtorajan. Usein kuormitus on vaihtuvaa, kuten esimerkiksi kallioporalaitteessa, jolloin rakenteen murtuminen on selvästi monimutkaisempi prosessi. Tällöin jokainen kuormitusvaihto aiheuttaa tietyn suuruisen mikroskooppisen vaurion, jotka summautuvat keskenään. Tällainen vaurioiden kumuloituminen on väsymistä, jota säätelevät kimmo- ja plastisuusteorian sekä muut materiaaliopin lait. Väsymiseen vaikuttavat myös rakenneosan valmistusprosessi, pinnan käsittelytapa ja pinnan viimeistely, [11] ja [1].

Minerin vaurioteorian mukaan jokainen kuormitusyksi kuluttaa rakenneosan eliniästä osuuden, joka on tätä kuormitusyksiä vastaavan keston N käänteisluku. Vaurio tapahtuu, kun kaikkien kuormituskertojen eliniästä kuluttamien osuuksien summa on yksi. Säännöstä käytetään myös nimitystä Palmgrenin Minerin kumulatiivinen vauriosääntö ja se voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots + \frac{n_k}{N_k}, \quad (1)$$

missä n_k on tietyllä jännitystasolla tapahtuvien kuormituskertojen lukumäärä ja N_k tätä vastaava kestonluku Wöhlerin käyrältä (SN-käyrä).

Wöhlerin käyrä voidaan esittää muodossa

$$N = 10^{-\frac{\alpha}{b}} \sigma_a^{\frac{1}{b}}, \quad \alpha = \log \frac{\sigma_{1000}^2}{\sigma_w}, \quad b = -\frac{1}{3} \log \frac{\sigma_{1000}}{\sigma_w}, \quad (2)$$

missä σ_{1000} on jännityksen arvo, jolla materiaali kestää 1000 jännityssykliä. Tämä yhtälö laskee vain Wöhlerin käyrän vinon osuuden, joten vaihtojännitys pitää ottaa huomioon erikseen. Jännitysamplitudi σ_a on Wöhlerin käyrässä mitattu siten, että keskijännitys on nolla. Jos keskijännitystä on, se pitää ottaa erikseen huomioon. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi Goodmanin mallin avulla.

Laskennassa SN-käyrän yhtälönä käytettiin kaavaa

$$N = CS^{\frac{1}{b}}, \quad (3)$$

missä N on keistoluku, C on SN-käyrän kerroin, S on jännitysvaihtelu ja b on SN-käyrän kulmakertoimeen liittyvä luku siten, että $b = -1/m$, jossa $m > 0$ on kulmakerroin. Tämän käyrän avulla voidaan laskea kestoikiä Minerin kaavan (1) avulla. Tässä artikkelissa valittiin parametrien arvoiksi $C = 1 \cdot 10^{15}$ ja $m = 4,2$. Näitä materiaaliparametreja on käytetty myös artikkelissa [4], ja ovat tavanomaisia normaalille teräkselle.

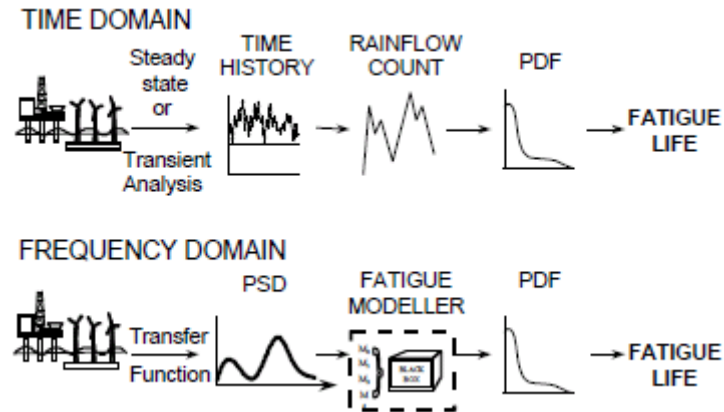
Taajuustasolaskenta

Taajuustasolaskentaa käsitellään monessa julkaisussa ja ainakin kahdessa kirjassa. Bishopin, [4], mukaan on olemassa tapauksia, joissa aikatasosignaalin avulla ei voida helposti määrittää väsymisilmiötä. Tällöin kannattaa siirtyä testaamiseen tai taajuustasolaskentaan. Yksi tällainen tapaus on akustinen väsyminen. Muita kohteita ovat esimerkiksi moottorin värähtely ja lentokoneen laskutelineiden kokemat kuormat. Lähteet [4] ja [2] mainitsevat taajuustasoisien väsymislaskennan käyttökohteiksi myös kohteet, joissa on aaltojen ja tuulen aiheuttamia jännityksiä, jollaisia kokevat tuulimyllyt ja laivat. Mahdollisia kohteita ovat myös ajoneuvot, jotka kokevat epäsäännöllistä jännitystä tienprofiilin takia. Jälkimmäinen sopii hyvin diplomityön kohteena olleeseen poralaitteeseen [8], koska siirtoajossa oleva poralaitte on ajoneuvo, jolla ajetaan maastossa. Maaston pinta voidaan esittää tehosppektrin avulla, joka toimisi herätteenä liikkuvalla koneelle, [13]. Toisaalta konerakenteelle voidaan määrittää taajuusvastefunktio, jonka avulla voidaan laskea rakenteen vaste maaston herätteistä.

Taajuustason väsymislaskennalla on monia hyviä puolia, kun sitä vertaa perinteiseen aikatason väsymislaskentaan. Järjestelmä ymmärretään paremmin, kun lasketaan taajuustasossa. Taajuustasossa on helpompi sisällyttää laskentaan rakenteen todellinen käyttäytyminen. Lisäksi laskenta on nopeampaa taajuustasossa. Aikatasossa rakenne-malli pitää ratkaista jokaisella kuormalla erikseen eli 20 tapausta kestää 20 kertaa kauemmin laskea kuin yksi tapaus. Taajuustasossa taajuusvastefunktio lasketaan vain kerran ja 20 tapauksen laskenta kestää vain vähän kauemmin kuin yhden.

Kuvasta 1 nähdään väsymislaskennan periaatteelliset erot aika- ja taajuustasoissa. Perinteisessä aikatasolaskennassa mitataan laskettavasta kohteesta yleensä venymien kautta jännitystä aikatasosignaalinä, jolle tehdään rainflow-analyysi. Tämän avulla

muodostetaan pdf eli todennäköisyystiheysfunktio jännityksille, jonka jälkeen kestoikä lasketaan normaalisti Minerin säännöllä. Taajuustasolaskennassa pitää saada selville rakenteen vasteen tehosppektri eli PSD. Tämä saadaan taajuusvastefunktion avulla herätteestä. Sen avulla arvioidaan jännitysten todennäköisyystiheysfunktio, jonka kautta päästään väsymislaskentaan aivan kuten aikatasossakin.



Kuva 1. Väsymislaskenta aikatasossa ja taajuustasossa [4].

Tyypillisessä epäsäännöllisen jännityksen tapauksessa jännitysamplitudi vaihtelee jatkuvasti ja sen vuoksi Minerin kaava korvataan integraalilla

$$E(D) = \int_0^{\infty} \frac{n(S)}{N(S)} dS, \quad (4)$$

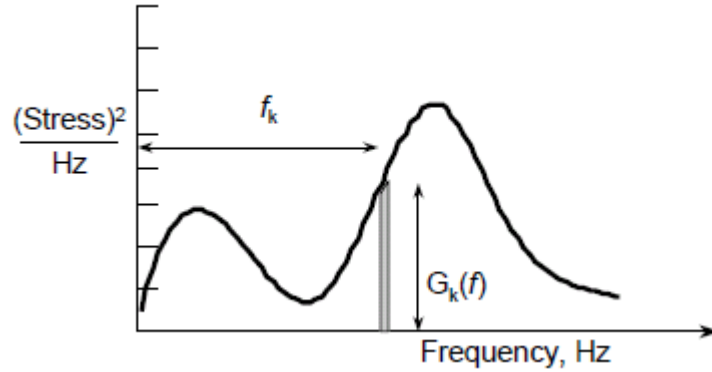
missä $E(D)$ on vaurion odotusarvo, $n(S)$ on syklien lukumäärä tietyllä jännitysamplitudin arvolla ja $N(S)$ on vastaava keistoluku. Syklien lukumäärä $n(S)$ voidaan esittää muodossa

$$n(S) = E(P)T p(S), \quad (5)$$

missä $E(P)$ on huippujen odotusarvo sekunnissa, T on aika ja $p(S)$ on jännityksen todennäköisyystiheysfunktio. Huippujen odotusarvo sekunnissa tarkoittaa siis huippujen määrää aikatasosignaalin, [4] ja [7].

Koska tavoitteena on taajuustasolaskenta, pitää huippujen lukumäärä pystyä laskemaan taajuustasossa. Se on mahdollista tehosppektrin eli PSD:n momenttien avulla. PSD:n momentit määritellään kuvan 2 merkinnöillä

$$m_n := \int_0^{\infty} f^n G(f) df. \quad (6)$$



Kuva 2. Momenttien laskenta tehospektristä, [4].

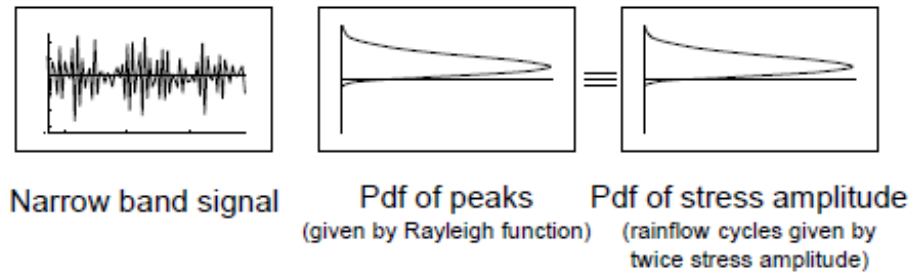
Huippujen odotusarvo $E(P)$ voidaan laskea, [10], [4] ja [7]

$$E(P) = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}. \quad (7)$$

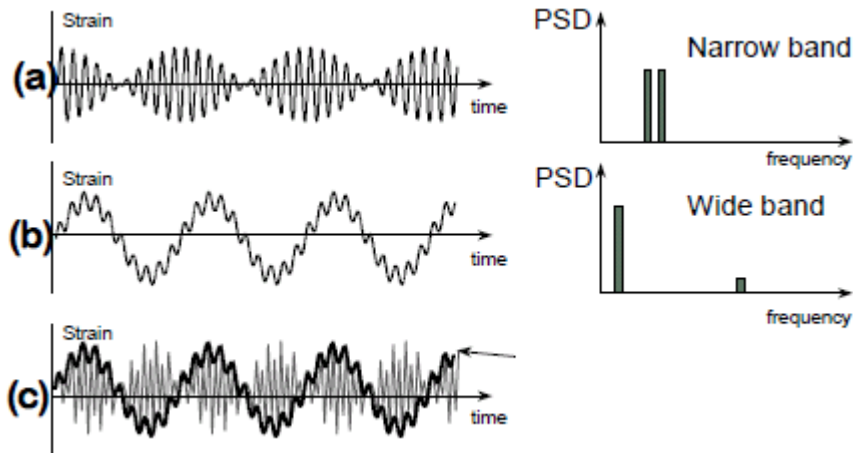
Yhdistämällä kaavat (4) ja (5) sekä (3), saadaan tulos

$$E(D) = E(P)T \int_0^\infty \frac{p(S)}{N(S)} dS = \frac{E(P)T}{C} \int_0^\infty S^m p(S) dS. \quad (8)$$

Taajuustasolaskennan haasteena on ilmaista jännityksen todennäköisyystiheysfunktio $p(S)$. Siihen on keksitty monia eri ratkaisuja, jotka perustuvat PSD:n momentteihin. Ensimmäinen ratkaisu $p(S)$:n ilmaisemiseen oli JS Bendatin kehittämä kapeakaistaratkaisu (Narrow Band solution). Sen laskemiseen tarvitaan PSD:n momenteja m_4 :ään asti. Siinä oletetaan, että huippujen todennäköisyystiheysfunktio, joka noudattaa Rayleighin funktiota, on sama kuin amplitudien todennäköisyystiheysfunktio, kuten kuvasta 3 voidaan nähdä. Tämä toimii siis, jos kyseessä on kapeakaistainen prosessi, mutta todellisuudessa kuormitus ei ole yleensä kapeakaistaista, vaan leveäkaistaista. Leveäkaistaiselle prosessille kapeakaistaratkaisu antaa liian lyhyitä kestoikiä, koska se olettaa, että jokaista huippua vastaa yhtä suuri laakso negatiivisella puolella, kuten kuvassa 4 on esitetty. Kuvassa 4 a-signaali on kapeakaistainen signaali, joka koostuu taajuudeltaan lähes samanlaisista signaaleista, kuten PSD osoittaa. Kuvan 4 b-signaali on laajakaistainen signaali, jossa on kaksi selvästi eri taajuista signaalia ja c-signaali kuvaa, miten kapeakaistaratkaisu vääristää laajakaistaista signaalia. c-signaali näkyy alkuperäinen signaali ja harmaalla vääristynyt signaali, joten on selvä, että kapeakaistaratkaisu ei ole sopiva laajakaistaiseen tehtävään, [4].



Kuva 3. Kapeakaistaratkaisun oletamus [4]



Kuva 4. Kuva siitä, miksi kapeakaistaratkaisu on liian konservatiivinen laajakaistaiselle prosessille, [4]

Signaalin kapea- tai laajakaistaisuus voidaan arvioida myös PSD:n momenttien avulla laskettavan epäsäännöllisyyskertoimen avulla kaavalla.

$$\gamma = \frac{E(0)}{E(P)} = \sqrt{\frac{m_2^2}{m_0 m_4}}, \quad (9)$$

missä $E(0)$ on nollan ylityksien odotusarvo sekunnissa, joka lasketaan kaavalla (10), [10], ja huippujen odotusarvo sekunnissa $E(P)$ yhteydellä (7),

$$E(0) = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}. \quad (10)$$

Jos epäsäännöllisyyskerroin on lähellä arvoa yksi, kyseessä on kapeakaistainen prosessi, koska silloin lähes jokaista nollan ylitystä vastaa huippu. Epäsäännöllisyyskertoimen lähestyessä nollaa prosessi on laajakaistainen, koska silloin huippuja on paljon enemmän kuin nollan ylityksiä, [4] ja [5].

Kapeakaistaratkaisun konservatismia on yritetty korjata monissa tutkimuksissa. Esimerkiksi Wirsching, Chaudhury & Dover, Tunna ja Hancock ovat kehittäneet kaavo-

ja, joiden avulla voitaisiin laskea kestoikä taajuustasossa laajakaistaiselle prosessille. Kaikki nämä kaavat perustuvat Bendatin kapeakaistaratkaisuun, johon on lisätty korjaukskertoimia. Nämä eivät kuitenkaan näytä toimivan kovinkaan hyvin, vaan nekin ovat hyvin konservatiivisia. On kehitetty myös täysin kapeakaistaratkaisusta riippumattomia laajakaistaisen prosessin ratkaisuja. Ne yrittävät esittää alkuperäisen todennäköisyystiheysfunktion erilaisten jakaumien, kuten Rayleighin, Weibullin ja eksponenttijakauman avulla, [4] ja [5].

Näistä tärkein on Dirlikin v. 1985 esittämä kaava, [6] ja [5]. Dirlikin kaavan perusteella laskettava todennäköisyystiheysfunktio muodostuu kahdesta Rayleigh-jakaumasta ja yhdestä eksponenttijakaumasta. Rayleigh-jakaumien avulla kuvataan matalan amplitudin syklejä ja eksponenttijakaumalla korkean amplitudin syklejä. Dirlik minimoi kaavansa ja rainflow-jakauman välisen normalisoidun virheen, jonka avulla kaavaan liittyvät parametrit saatiin, [6] ja [5]. Dirlikin todennäköisyystiheysfunktion kaava muotoa ([5], [6], [4], [7] ja [2]).

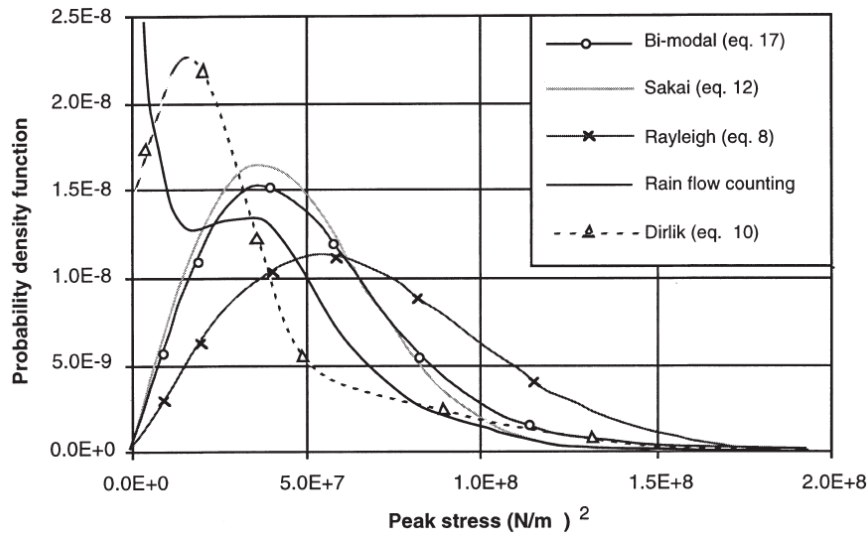
$$p(S) = \frac{1}{2\sqrt{m_0}} \left(\frac{D_1}{Q} e^{-\frac{z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{R^2} e^{-\frac{z^2}{2R^2}} + D_3 Z e^{-\frac{z^2}{2}} \right), \quad (11)$$

missä

$$\begin{aligned} Z &= \frac{S}{2\sqrt{m_0}}, \quad D_1 = \frac{2(x_m - \gamma^2)}{1 + \gamma^2}, \quad x_m = \frac{m_1}{m_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}}, \quad D_2 = \frac{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}{1 - R}, \\ R &= \frac{\gamma - x_m - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 + D_1^2}, \quad D_3 = 1 - D_1 - D_2 \quad \text{ja} \quad Q = \frac{1,25(\gamma - D_3 + D_2 R)}{D_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Muita Dirlikin tapaan PSD:hen perustuvia approksimaatiokaavoja rainflow-jakauman jännitysten todennäköisyystiheysfunktiolle ovat esimerkiksi Zhao-Baker, Fu & Cebon ja Sakai-Osamura. Braccesi et al., [5], vertailivat näitä menetelmiä Dirlikin menetelmän kanssa ja totesivat, että Dirlikin kaava on kaikkein luotettavin. Toisaalta Fu & Cebon, [7], toteavat, että heidän menetelmänsä ja Dirlikin menetelmä ovat parhaat, kun niitä verrattiin Sakai-Osamuran ja Rayleigh eli kapeakaistaratkaisun kanssa. Heidän mukaansa Dirlikin menetelmä on paras matalan jännityksen alueella, mutta heidän menetelmänsä puolestaan korkeilla jännityksillä. Fu & Cebon toteavat myös, että korkeiden jännitysten arvioiminen on tärkeämpää, ja siksi he pitävät omaa menetelmänsä Dirlikin menetelmää parempana.

Fu & Cebon vertailut näyttävät olevan ristiriidassa Braccesi et al. vertailujen kanssa, koska Braccesi et al. väittivät Dirlikin menetelmää parhaaksi, vaikka Fu & Cebon -menetelmä oli myös mukana vertailussa. Tähän löytyy kuitenkin selitys lähteestä [5], jossa sanotaan, että joissakin tapauksissa huonompi arvio todennäköisyystiheysfunktion voi antaa parempia vastauksia kuin toinen menetelmä. Syy tähän on se, että arvio voi aliarvioida jännityksen jollain taajuusalueella, mutta yliarvioida puolestaan taas toisella alueella, jolloin virheet kompensoivat toisiaan. Esimerkiksi materiaalin vaihtaminen voisi muuttaa elinikäarviota joissakin tapauksissa, [5]. Kuvassa 5 on esitetty



Kuva 5. Todennäköisyystiheysfunktioita eri menetelmillä laskettuna, [7].

todennäköisyystiheysfunktioita laskettuna Fu & Cebon (Bi-modal), Sakai-Osamura ja Dirlikin menetelmillä.

Lisäksi kuvassa 5 näkyy Rayleighin jakauma, joka vastaa kapeakaistaratkaisua sekä rainflow-menetelmän avulla laskettu ”oikea” jakauma. Kuvasta nähdään, että Dirlikin menetelmällä saadaan keskimäärin paras arvio todennäköisyystiheysfunktioista.

Bishop, [4], esittää yksinkertaisen laskentaesimerkin, jossa vertaillaan kapeakaistaratkaisua ja Dirlikin menetelmää aikatasolaskentaan. Esimerkin aikatasosignaali on vain kahta eri sinimuotoista taajuuskomponenttia, joten PSD:ssä on kaksi piikkiä. Rainflow-laskennan avulla Bishop saa kestoiksi 8462 sekuntia. Kapeakaistaratkaisu antaa 1472 sekuntia ja Dirlikin menetelmällä 7650 sekuntia. Voidaan havaita, että Dirlik on hyvin lähellä oikeaa vastausta ja kapeakaistaratkaisu on todella konservatiivinen.

Dirlikin menetelmän käytössä on muutama rajoite, joista ensimmäinen on se, että käsiteltävän systeemin pitää olla lineaarinen. Diplomityön,[8], tapauksessa tämä ehto täyttyy, koska poralaitteen siirtymät ovat pieniä, josta seuraa, että systeemi on lineaarinen. Lisäksi elementtimenetelmämallikin on tehty lineaarisilla elementeillä, jolloin sitä voidaan käyttää taajuustasolaskennassa apuna. Toinen ehto on se, että prosessin on oltava satunnainen. Tämäkin ehto täyttyy poralaitteen tapauksessa hyvin. Viimeinen rajoite on se, että systeemin pitää käyttäytyä Gaussin prosessin mukaisesti, [3]. Sandvikin tekemät pitkät kenttätestit osoittavat, että poralaitteen jännitykset noudattavat melko tarkasti Gaussin prosessia. Pitää kuitenkin muistaa, että esimerkiksi poralaitteen käyttökohde vaikuttaa tähän asiaan. Koska kaikki ehdot täyttyvät, Dirlikin menetelmää voi kokeilla poralaitteen väsymislaskentaan.

On olemassa myös uudempia menetelmiä todennäköisyystiheysfunktion arvioimiseen taajuustasossa. Yksi näistä on Tovon ja Benasciuttin menetelmä vuodelta 2005. Benasciutti & Tovo [2] sanovat, että heidän menetelmänsä on yhtä tarkka kuin Dirlikin menetelmä ja heidän menetelmällään on teoreettinen tausta, kun taas Dirlikin menetelmä on vain approksimaatio. Lisäksi Tovon ja Benasciuttin menetelmällä voidaan ottaa huomioon keskijännitys ja signaalin epänormaalius, [2]. Epänormaalius tarkoittaa sitä, että jännitysvaihtelu ei noudata Gaussin prosessia. Toinen uudemmista taa-

juustasomenetelmistä on Park et al. v. 2011 kehittämä menetelmä, [9]. Tehdyssä diplomityössä, [8], päädyttiin kuitenkin kokeilemaan taajuustasolaskentaa vain Dirlikin menetelmällä, koska näyttää siltä, että se on uusienkin lähteiden mukaan vielä suhteellisen tarkka, [2] ja [9]. Lisäksi se näyttää olevan useissa lähteissä vertailukohtana muille menetelmille. Tämän jälkeen yksi jatkokehittelymahdollisuus on etsiä Dirlikin menetelmää parempi menetelmä, jos sellaiselle on tarvetta.

Poralaitteen väsymislaskenta taajuustasossa

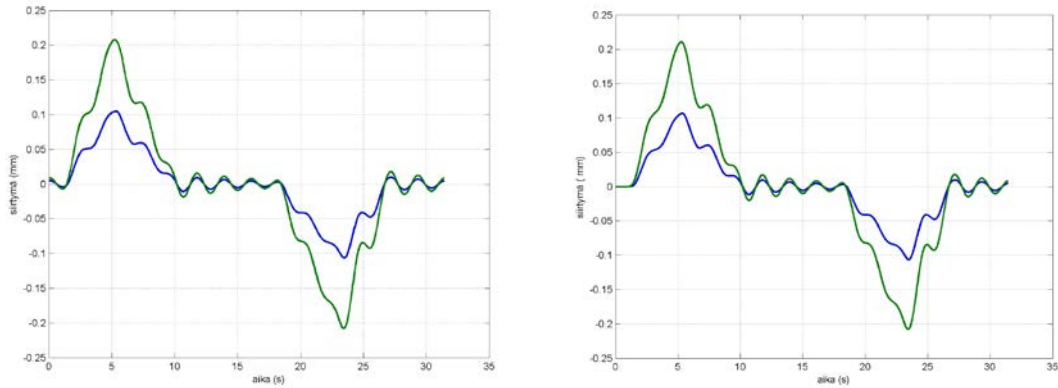
Ensimmäinen asia, kun siirrytään aikatasosta taajuustasoon, on taajuusvastefunktion muodostaminen. Käytettävä taajuusvastefunktio on suhteellisen vaimennuksen mukainen ja sen johtaminen on esitetty yksityiskohtaisesti mm. [12]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \mathbf{\Phi} \text{diag} \left(\frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \Omega^2 + i2\zeta_i\omega_i\Omega)} \right) \mathbf{\Phi}^T \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

missä Ω on herätekulmataajuus, $\mathbf{\Phi}$ on systeemin ominaisvektorimatriisi, m_i on systeemin moodimassa, ω_i on systeemin ominaiskulmataajuus ja ζ_i on systeemin suhteellinen vaimennuskerroin. Taajuusvastefunktion laskennassa käytettiin apuna laskentamallia.

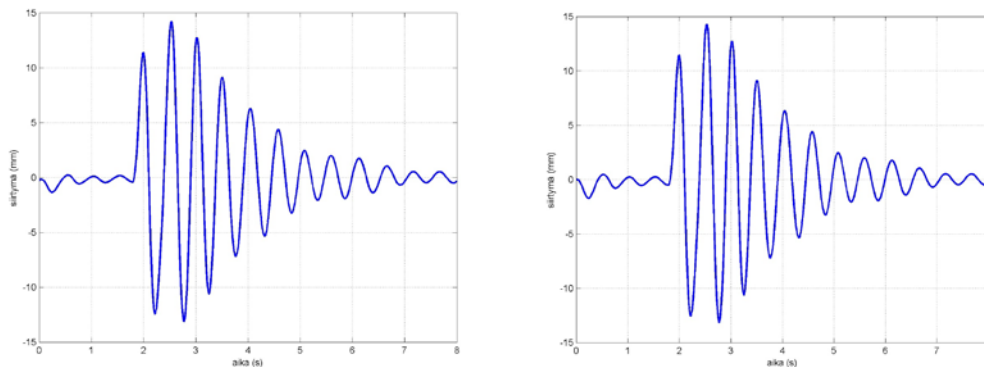
Käsitellään aluksi yksinkertaisen kahden vapausasteen systeemin, jossa on kaksi massaa ja kaksi joustaa, vastetta symmetriseen herätteeseen aika- ja taajuustasoissa. Heräte vaikuttaa suoraan vain toiseen massaan. Aluksi määritellään massat ja jousivakiot, joiden avulla määritetään systeemin jäykkyys- ja massamatriisit. Tämän jälkeen lasketaan ominaisarvot ja määritetään suhteellinen vaimennuskerroin. Sitten lasketaan vaimennusmatriisi samalla kaavalla kuin poralaitteen tapauksessakin. Seuraavaksi määritetään systeemiin vaikuttava voima aikatasossa, joka on tässä tapauksessa x-akselin suhteen symmetrinen ja vaikuttaa toiseen massaan. Sitten määritetään aikavektori aika- ja taajuustasossa käytettävä aika t .

Tämän jälkeen voimavektori muutetaan taajuustasoon MATLABin fft-komennolla. Sitten määritetään herätekulmataajuus ja lasketaan taajuusvastefunktion avulla systeemin vasteen herätteeseen kaikilla herätekulmataajuuden arvoilla. Kun taajuustasoinen vaste on valmis, se käännetään ifft -komennolla aikatasoon, jotta voidaan verrata sitä suoraan aikatasossa tehtyyn laskentaan. Pitää huomata, että johtuen MATLABin laskentamenetelmistä, taajuustason kautta laskettava aikatasosignaali pitää kertoa kahdella lukuun ottamatta ensimmäistä saraketta. Suora aikatasolaskenta tehdään Newmarkin aikaintegrointimenetelmän avulla. Kuvassa 6a on esitetty systeemin vaste aikatasossa taajuusvastefunktion kautta laskemalla ja kuvassa 6b on siirtymävaste suoraan aikatasossa tehtynä. Kuvissa näkyy eri väreillä eri massojen liike.



Kuva 6. Siirtymävaste jousi-massa-systeemin eri massoille taajuusvastefunktion (vasen) ja suoraan aikatasolaskennalla (oikea) kautta laskemalla.

Kuvista 6 voidaan havaita, että taajuusvastefunktion kautta laskemalla päästään todella lähelle samaa siirtymävastetta kuin suoraan aikatasolaskennalla. Tämä osoittaa sen, että käytetty taajuusvastefunktion kaava on toimiva. Kokeillaan taajuusvastefunktion toimintaa vielä kuitenkin poralaitteelle vastaavalla tavalla. Kuvassa 7a on esitetty poralaitteen yhden vapausasteen vaste esteen ylitykselle taajuusvastefunktion avulla laskettuna ja kuvassa 7b on vaste suoraan aikatasolaskennalla. Tarkempi kuvaus esteestä ja porauslaitteesta on esitetty diplomityössä [8]. Esteen ylityksen heräte on kuvan 4 mukainen. Vasteissa ei ole poralaitteen omaa massaa mukana, koska tässä ei haluta ottaa keskijännitystä huomioon.



Kuva 7. Poralaitteen siirtymävaste aikatasossa esteen ylitykselle taajuusvastefunktion (vasen) ja suoraan aikatasossa (oikea) laskemalla

Kuvista 7 voidaan havaita, että signaalien alussa noin kahteen sekuntiin asti on pientä eroa, mutta sen jälkeen signaalit ovat samanlaiset. Tämä osoittaa, että taajuusvastefunktio toimii myös monimutkaisen poralaitteen tapauksessa. Alun pieni eroavaisuus voi johtua siitä, että heräte ei ole täysin jaksollinen. Fourierin sarjoilla voidaan esittää tarkasti vain jaksollisia signaaleja. Eroon vaikuttaa myös esimerkiksi vaimennuskerroin c , mutta ero näyttää tässä tapauksessa niin pieneltä, ettei sillä ole merkitystä väsymisen kannalta.

Seuraavaksi lasketaan kestoikä taajuustasossa ja aikatasossa. Aluksi testataan taajuustasolaskentaa yksinkertaisella esimerkillä ilman poralaitetta, jossa herätteenä on harmoninen voima. Tähän asti aikatasosta taajuustasoon on siirrytty FFT -muunnoksen avulla, mutta kuten yllä olevasta teoriasta selviää, kestoian laskennassa pitää käyttää tehosppektritiheysfunktiota eli PSD:tä. Yksinkertaisen esimerkin avulla nähdään, miten MATLABin PSD -funktio toimii. Esimerkissä heräte on sinimuotoinen heräte:

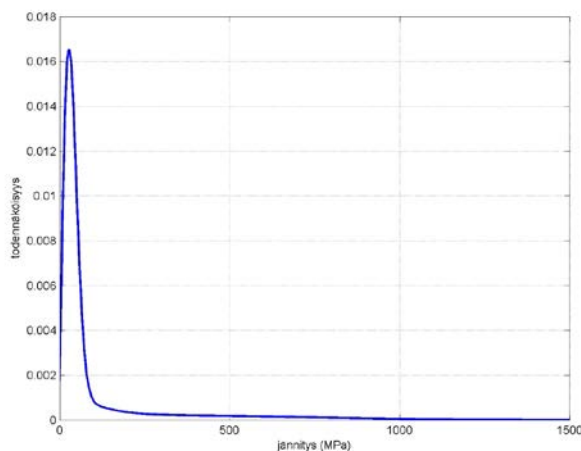
$$F(t) = 300 \sin t + 100 \sin(5t + 1) + 30 \sin(8t + 1) + 20 \sin(20t + 4) \quad (14)$$

ja PSD lasketaan MATLABin omalla psd-funktiolla. PSD:n momentit laskettiin numeerisesti integroimalla puolisuunnikasmenetelmällä MATLAB:in trapz-komennolla. Materiaaliparametreiksi valittiin $C = 1 \cdot 10^{15}$ ja $m = 4,2$. Taulukossa 1 on esitetty kestoajat Dirlikin menetelmällä ja aikatasolaskennalla yksinkertaisen esimerkin tapauksessa.

Taulukko 1. Kestoajat Dirlikin menetelmällä ja aikatasolaskennalla yksinkertaisessa esimerkissä.

menetelmä	kestoikä
Dirlik	$5,46 \cdot 10^4$ s
aikataso	$6,54 \cdot 10^4$ s

Nähdään, että kestoikä Dirlikin menetelmällä on hyvin lähellä aikatasolaskennan elinikää, koska kestoikä Dirlikin menetelmällä on 0,83 kertaa kestoikä aikatasolaskennalla. Elinikään Dirlikin menetelmällä vaikuttaa kuitenkin paljon integroimisväli, joka tässä oli 0-600 MPa. Kuten kuvasta 8 nähdään, todennäköisyysfunktio on tässä tapauksessa sellainen, että erittäin suurilla jännityksillä on jonkin verran todennäköisyyttä. Jos siis integroimisväli olisi esimerkiksi 0-1000 MPa, elinikä olisi paljon lyhyempi. Mutta yleensä voidaan olettaa jännityksen jäävän alle materiaalin murtorajan, koska muuten rakenne hajoaisi käytännössä heti. Kuvasta 8 nähdään myös, että todennäköisyysfunktio on samantapainen kuin kuvan 5 mukaan pitäisikin olla.



Kuva 8. Todennäköisyysfunktio Dirlikin menetelmällä yksinkertaisessa esimerkissä.

Koodin toimivuutta kokeiltiin myös Bishopin, [4], esimerkkiin, josta mainittiin aiemmin artikkelissa. Bishopin mukaan tietokoneella tehdyllä laskennalla saatiin Dirlikin menetelmällä kestoikäksi 7650 sekuntia ja diplomityötä varten tehdyillä koodeilla kestoikä on 7543 sekuntia. Laskennassa käytettiin esimerkin valmiita momenteja.

Näyttää siltä, että Dirlikin menetelmällä voidaan saada hyviä kestoikäarvioita, joten kokeillaan sitä seuraavaksi poralaitteeseen. Laskennassa herätteen voima kerätään matriisiin ja siitä lasketaan voiman tehospektrin (PSD). Dirlikin menetelmä tarvitsee kuitenkin rakenteen vasteen PSD:n, joten se lasketaan taajuusvastefunktion avulla. Vasteen PSD:n pitää olla jännitysvasteen PSD, jotta sen avulla voidaan arvioida jännitysten todennäköisyystiheysfunktiota. Voiman PSD kerrotaan taajuusvastefunktion $\mathbf{H}(\Omega)$ ja kerroinmatriisin \mathbf{B}_{PSD} tulon neliöllä, jolloin saadaan selville rakenteen jännitysvasteen PSD. Jännitysvasteen PSD:n voidaan laskea taajuusvastefunktion avulla

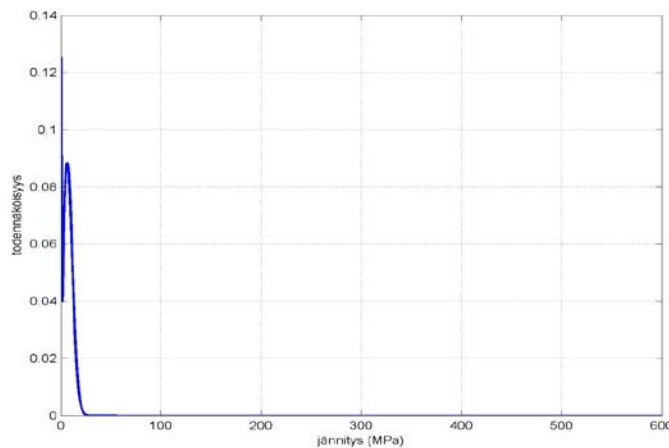
$$\mathbf{PSD}(\sigma) = |\mathbf{B}_{PSD} \mathbf{H}(\Omega)|^2 \mathbf{PSD}(\mathbf{F}). \quad (15)$$

Kerroinmatriisi \mathbf{B}_{PSD} antaa kytkennän siirtymävasteen ja jonkin tarkastelupisteen jännitysvasteen välille. Matriisi kertoo, minkä suuruisen jännityksen siirtymä aiheuttaa jossakin tietyssä kohdassa elementtiä.

Herätteenä käytetään esteeltä putoamista ilman keskijännitystä ja esteen korkeutta vaihdellaan. Taulukossa 2 on esitetty poralaitteen kestoikä esteen korkeuksilla 140 mm ja 200 mm sekä aikatasolaskennalla että taajuustasolaskennalla. Kuvassa 9 on esitetty todennäköisyystiheysfunktio matalan esteen (140 mm) tapauksessa.

Taulukko 2. Kestoikiä eri esteen korkeuksilla taajuustaso- ja aikatasolaskennalla.

menetelmä	esteen korkeus	kestoikä
Dirlik	140 mm	$2,30 \cdot 10^{10}$ s \approx 727,5 vuotta
	200 mm	$3,65 \cdot 10^9$ s \approx 115,6 vuotta
aikataso	140 mm	$8,46 \cdot 10^9$ s \approx 268,4 vuotta
	200 mm	$6,47 \cdot 10^9$ s \approx 205,3 vuotta



Kuva 9. Todennäköisyystiheysfunktio Dirlikin menetelmällä, kun herätteenä on matala este.

Taulukosta 2 voidaan todeta, että kestoikien erot Dirlikin ja aikatasolaskennan välillä eivät ole kovin suuria varsinkaan korkean esteen (200 mm) tapauksessa. Matalalla esteellä Dirlikin menetelmän kestoikä on 2,71 kertaa aikatason kestoikä, mutta korkealla esteellä 0,56 kertaa. Todennäköisyystiheysfunktio näyttää oikeanlaiselta. Yleensä taajuustasomenetelmien pitäisi olla konservatiivisia, joten on erikoista, että Dirlikillä saadaan suurempi kestoikä matalalla esteellä. Tässä tapauksessa esteen ylitys laskettiin ilman oman massan aiheuttamaa keskijännitystä, koska Dirlikin menetelmällä sitä ei voida ottaa suoraan huomioon. Se voitaisiin ottaa huomioon siten, että muutettaisiin koodeissa käytettäviä materiaaliparametreja, jotka lasketaan SN-käyrän avulla. Lisäksi pitää huomata, että tässä laskennassa käytettiin suoraan jännitystä, joka on laskentamallissa liuskan kohdalla. Todellisuudessa tämä jännitys on suurempi liuskan kohdalla. Oikean liuskan jännityskään ei ole vielä korkein hot spot -jännitys, jonka mukaan laskenta pitäisi tehdä. Esimerkiksi äskeisen laskennan suurin jännitys 140 mm esteellä oli vain hieman yli 20 MPa. Tällä ei kuitenkaan ole laskennan tarkkuuden kannalta väliä, koska kyseessä on lineaarinen malli.

Johtopäätökset

Artikkelin tavoitteena oli perehtyä väsymislaskennan menetelmään, minkä avulla päästäisiin eroon aikaa vievästä aikatasosimuloinnista. Taajuustasoisesta väsymislaskennan avulla voidaan päästä kokonaan eroon aikatasosimuloinnista. Artikkelissa esiteltiin ensin taajuustasolaskennan teoriaa ja sitten kokeiltiin menetelmistä perinteisintä eli Dirlikin menetelmää. Aluksi laskettiin vain yksinkertaisia esimerkkejä, jotka näyttivät, että Dirlikin menetelmä voi toimia hyvinkin. Vertailukohtana oli perinteinen aikatasoinen väsymislaskenta. Tämän jälkeen Dirlikin menetelmää kokeiltiin mallinnettavaan poralaitteeseen ja havaittiin, että sen antamat kestoajat eivät eroa aikatasolaskennan vastaavista kovinkaan paljoa. Eroa kylläkin on, mutta suuntaa-antavana menetelmänä Dirlikin menetelmä voisi toimia tulevana suunnittelumenetelmänä.

Jatkossa, jotta päästäisiin kokonaan aikatason simuloinnista eroon, taajuustason väsymislaskentaa voitaisiin kehittää siten, että laskentamallille syötettäisiin tietoja maanpinnan ominaisuuksista, kuten pinnan kuoppien todennäköisyystiheysfunktio tai maanpinnan tehospektri ja tämän avulla laskettaisiin liikkuvan koneen väsymisikä.

Lähdeviitteet

- [1] Bannantine, J., Comer, J., Handrock, J. 1990. *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall. 272 p.
- [2] Benasciutti, D. & Tovo, R. 2005. Comparison of spectral methods of fatigue analysis of broad-band Gaussian random processes. *Probabilistic Engineering Mechanics* 21, 2006. pp. 287-299.
- [3] Bishop, N. 1994. *Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures*. 2. osa. Amsterdam, Elsevier. pp. 1685-1720.
- [4] Bishop, N. 1999. Vibration fatigue analysis in the finite element environment. XVI Encuentro grupo Espanol de fractura, Torremolinos, Spain, 14-16 April 1999.

- [5] Braccresi, C., Cianetti, F., Lori, G. & Pioli, D. 2004. Fatigue behaviour analysis of mechanical components subject to random bimodal stress process: frequency domain approach. *International Journal of Fatigue* 27, 2005. pp. 335-345.
- [6] Dirlik, T. 1985. Application of computers in fatigue analysis. Ph. D. University of Warwick, Coventry, England. 234 p.
http://wrap.warwick.ac.uk/2949/1/WRAP_THESIS_Dirlik_1985.pdf
- [7] Fu, T. & Cebon, D. 1999. Predicting lives for bi-modal stress spectral densities. *International Journal Of Fatigue* 22, 2000. pp. 11-21.
- [8] Lähdeniemi, J. 2011. Kallioporalaitteen värähtelyjen analysointi. Diplomityö. Tampere. TTY.
- [9] Park, J., Kim, K. & Choung, J. 2011. The estimation of stress range distribution due to wide banded random loading obtained by rain-flow method. *Advances in Marine Structures – Guedes Soares & Fricke*.
- [10] Rice, SO. 1952. Mathematical analysis of random noise Technical pub.
<http://handle.dtic.mil/100.2/ADB802399>
- [11] Salmi, T. & Pajunen, S. 2010. Lujuusoppi. Tampere, Pressus Oy. 462 s.
- [12] Toivola, J. 1998. Moodiparametrien estimointimenetelmä ja estimaattien virhearvio. Lisensiaattityö. Tampere. TTKK.
- [13] Wong, J. 1993. Theory of Ground Vehicles. 2. painos. John Wiley & Sons, Inc. 435 p.

Jukka Lähdeniemi
 Puolamäentie 190
 31860 TURSA
 s-posti: jukka.lahdeniemi@gmail.com

Jari Mäkinen
 TTY, Konstruktiotekniikan laitos
 PL 589, 33101 TAMPERE
 s-posti: jari.m.makinen@tut.fi