Rakenteiden Mekaniikka
Vol. 44, Nro 1, 2011, s. 93-97

Pinta-alan variaatio

Eero-Matti Salonen ja Mika Reivinen

Tiivistelmä. Artikkelissa tarkastellaan tasoalueen pinta-alan variaation esittämistä vektorilaskennan avulla. Tarve tähän syntyy mm. eri ainefaasien rajapintojen sijainnin määrittämisessä esimerkiksi virtuaalisen työn periaatetta sovellettaessa, kun kinemaattisena rajoitteena esiintyy annettu pinta-ala. Yksikkövektoreiden differentioinnin ja varioinnin eroja korostetaan.

Avainsanat: pinta-ala, pinta-alan variaatio, vektorilaskenta, yksikkövektorin variaatio

Johdanto

Avaruusalueen tai kappaleen tilavuus V voidaan esittää vektorianalyysistä tutulla tavalla muodossa (esimerkiksi [1])

$$V = \frac{1}{3}\int_S \mathbf{r}\bullet\mathbf{n}\,\mathrm{d}S\,. \tag{1}$$

Tässä $\mathbf{r}$ on alueen pintaan päättyvä paikkavektori, $\mathbf{n}$ alueesta ulospäin suunnattu pinnan yksikkönormaalivektori ja integrointi on alueen pinnan yli. Kahdessa dimensiossa tasoalueen pinta-ala A saadaan vastaavasti kaavasta

$$A = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{s}} \mathbf{r}\bullet\mathbf{n}\,\mathrm{d}s\,, \tag{2}$$

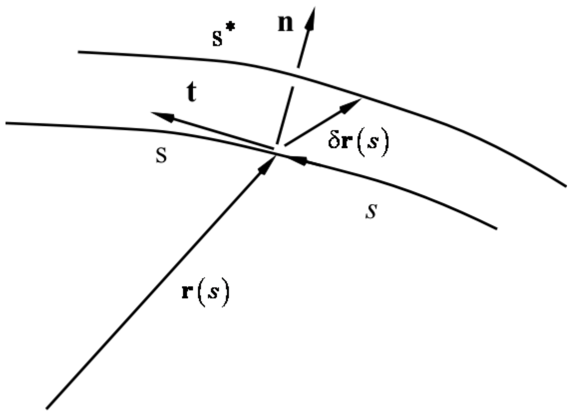
jossa integrointi on alueen reunaviivan yli. Artikkelissa tarkastellaan pinta-alan (2) variaation lausekkeeseen liittyviä eräitä mielenkiintoa omaavia piirteitä. Taustana on tarve määrittää esimerkiksi virtuaalisen työn periaatteen avulla eri ainefaasien rajapintojen sijainteja. Tehtävän kinemaattisina rajoitteina voi esiintyä annettuja tilavuuksia tai tasotapauksissa annettuja pinta-aloja. Tällöin tarvitaan tasotapauksessa paitsi pinta-alan A lauseketta (2) myös sen variaation δA lauseketta.

Variaatio

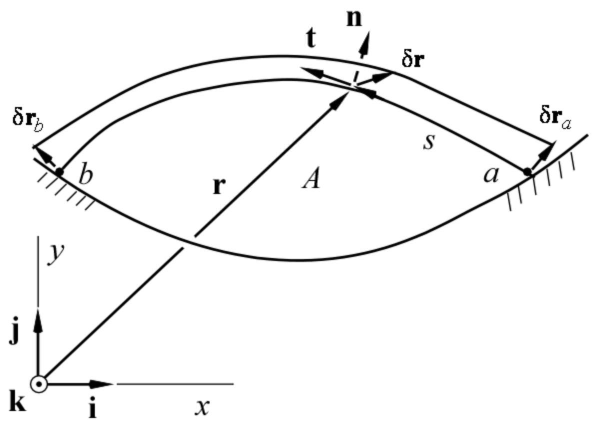
Kuva 1 esittää tasoalueen reunaviivaa s ja s* paikkavektorin $\mathbf{r}$ variaation johdosta syntyvää naapurikäyrää. Merkintää s käytetään tässä kaarenpituuskoordinaatin tunnuksena. Paikkavektori voidaan esittää s:n funktiona, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, ja samoin siis paikkavektorin variaatio $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}(s)$. Kuvassa näkyy lisäksi reunan yksikkö-tangenttivektori $\mathbf{t}$ ja yksikkönormaalivektori $\mathbf{n}$. Intuitiivisesti voidaan kirjoittaa välittömästi tulos

$$\delta A = \int_s \delta\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}\, \mathrm{d}s \,. \tag{3}$$

Suure $\delta\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}$ kuvaa nimittäin aivan ilmeisesti varioinnin johdosta syntyvän ”ohuen” kerroksen paksuutta ja muutospinta-ala saadaan integroimalla tämä alueen reunan yli. Mutta tulos (3) pitää saada johdettua myös eksaktisti lausekkeesta (2) lähtien ja tätä käsitellään seuraavassa.



Kuva 1. Alueen alkuperäistä ja variaation tuottamaa reunaviivaa.



Kuva 2. Alkuperäinen ja liioiteltu variaation tuottama geometria.

Tarkastellaan kuvaa 2. Se voisi esittää kaaviollisesti esimerkiksi kiinteään seinämään tukeutuvaa kaasun ympäröimää sylinterimäistä nesteosuutta, jonka poikkileikkauspinta-ala on A. Nesteen ja kaasun rajapinnan asema on tehtävässä alunperin tuntematon. Varioitaessa vain tälle otaksutulle nesteen ja kaasun rajapinnalle annetaan nollasta eroava virtuaalinen siirtymä $\delta\mathbf{r}$. Lausekkeesta (2) lähtien saadaan alustava esitys

$$\delta A=\frac{1}{2}\int_s \delta\mathbf{r}\bullet\mathbf{n}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_s \mathbf{r}\bullet\delta\mathbf{n}\,\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\mathbf{r}\bullet(\delta\mathbf{r}\times\mathbf{k})\Big|_{s=s_b}+\frac{1}{2}\mathbf{r}\bullet(\delta\mathbf{r}\times\mathbf{k})\Big|_{s=s_a} \tag{4}$$

Kaksi ensimmäistä integraalia seuraavat suoraan integrandin variaatiosta. Lisäksi integroimisalue rajoittuu siihen s:n osaan, jolla $\delta\mathbf{r}$ on nollasta eroava; tässä siis alueeseen $s_a = 0 \le s \le s_b$ Alueen päistä johtuvat termit seuraavat vertaamalla varioitua ja alkuperäistä geometriaa. Paikkavektorit $\mathbf{r}_a$ ja $\mathbf{r}_b$ saavat variaatiot $\delta\mathbf{r}_a$ ja $\delta\mathbf{r}_b$. Suureiden $\delta\mathbf{r}_a\times\mathbf{k}$ ja $-\delta\mathbf{r}_b\times\mathbf{k}$ havaitaan olevan arvoiltaan vastaavasti yhtä kuin ulkoinen yksikkönormaalivektori kerrottuna osan pituudella $|\delta\mathbf{r}_a|$ tai $|\delta\mathbf{r}_b|$. Edellä yksikkövektori $\mathbf{k}$ on positiivisen z-koordinaatin suuntainen. Jos $\delta\mathbf{r}$ on jatkuva ja ulottuu koko alueen ympäri, kaavan (4) kaksi integraalia antavat jo sellaisinaan variaation.

Kaavan (4) ensimmäinen integraali on jo halutussa muodossa. Toinen integraali

$$\frac{1}{2}\int_s \mathbf{r}\bullet\delta\mathbf{n}\,\mathrm{d}s \tag{5}$$

vaatii lisäkehittelyä. Ensinnäkin yksikkötangenttivektori

$$\mathbf{t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \tag{6}$$

ja täten yksikkönormaalivektori

$$\mathbf{n}=\mathbf{t}\times\mathbf{k}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{k}\,. \tag{7}$$

Tämän variointi antaa

$$\delta\mathbf{n}=\delta\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{k}=\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{k} \tag{8}$$

ja integraali lausekkeessa (5) saa muodon

$$\int_s \mathbf{r}\bullet\delta\mathbf{n}\,\mathrm{d}s=\int_s \mathbf{r}\bullet\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\times\mathbf{k}\,\mathrm{d}s=\int_s \frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\bullet\mathbf{k}\times\mathbf{r}\mathrm{d}s\,. \tag{9}$$

Integrandin muokkauksessa on käytetty tuttuja skalaarikolmitulon kierto- ja vaihtosääntöjä. Tämän jälkeen sovelletaan osittaisintegrointia:

$$\int_s \frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\bullet\mathbf{k}\times\mathbf{r}\mathrm{d}s=-\int_s \delta\mathbf{r}\bullet\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\,\mathrm{d}s+\Big|_{s_a}^{s_b}\delta\mathbf{r}\bullet\mathbf{k}\times\mathbf{r}\,. \tag{10}$$

Vielä yksityiskohtaisemmin saadaan

$$-\int_s \delta\mathbf{r}\bullet\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{k}\times\mathbf{r})\,\mathrm{d}s=-\int_s \delta\mathbf{r}\bullet\mathbf{k}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=-\int_s \delta\mathbf{r}\bullet\mathbf{k}\times\mathbf{t}\,\mathrm{d}s=\int_s \delta\mathbf{r}\bullet\mathbf{n}\,\mathrm{d}s \tag{11}$$

ja täten lopuksi (sijoitustermissä sovelletaan jälleen skalaarikolmitulon laskentasääntöjä)

$$\frac{1}{2}\int_s \mathbf{r}\bullet\delta\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_s \delta\mathbf{r}\bullet\mathbf{n}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\Big|_{s_a}^{s_b} \mathbf{r}\bullet\left(\delta\mathbf{r}\times\mathbf{k}\right). \tag{12}$$

Kun tämä lauseke sijoitetaan yhtälön (4) oikealle puolelle, havaitaan päätepisteisiin liittyvien termien kumoavan toisensa ja saadaan tosiaankin variaation lauseke (3). Huomautettakoon vielä, että jos $\delta\mathbf{r}$ on jatkuva ja ulottuu koko alueen ympäri, osittaisintegroinnin (10) sijoitustermit lasketaan samassa pisteessä (piste *a* yhtyy pisteeseen *b*) ja osuudet kumoavat toisensa.

Huomautuksia

Edellä on jouduttu käsittelemään erityisesti yksikkövektorin **n** variointia. Differentiointi ja variointi ovat jossain mielessä analogisia operaatioita. Tältä pohjalta on ehkä yllättävää — ainakin tämän kirjoittajille — havaita, kuinka eri tavoin differentiointi ja variointi vaikuttavat yksikkövektoreihin. Differentiointi antaa muutoksen $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{t}\,\mathrm{d}s$ johdosta vektorin $\mathrm{d}\mathbf{n}$, joka on tunnettuun tapaan kohtisuorassa vektoria **n** vastaan tai nolla. Sen sijaan muutos $\delta\mathbf{n}$ muutoksen $\delta\mathbf{r}$ johdosta voi olla esimerkiksi nimenomaan vektorin **n** suuntainen. Differentioinnin tuottaman vektorin $\mathbf{n}^{\times} = \mathbf{n} + \mathrm{d}\mathbf{n}$ pituus on tyyppiä

$$1 + O\left(\left|\mathrm{d}\mathbf{r}\right|^2\right), \tag{13}$$

kun taas varioinnissa vektorin $\mathbf{n}^{*} = \mathbf{n} + \delta\mathbf{n}$ pituus on tyyppiä

$$1 + O\left(\left|\delta\mathbf{r}\right|\right). \tag{14}$$

Hieman epätieteellisesti voitaisiin siis sanoa, että differentiointi säilyttää yksikkövektorin pituuden paremmin kuin variointi.

Kolmessa dimensiossa tilavuuden variaation ilmeinen lauseke on

$$\delta V = \int_S \delta\mathbf{r}\bullet\mathbf{n}\,\mathrm{d}S\,. \tag{15}$$

Tämän tuloksen johtaminen lähtien liikkeelle kaavasta (1) vaatii oleellisesti raskaamman vektorilaskennan harjoitelman kuin edellä käsitelty tasotapaus eikä johtoa esitetä tässä.

Kaavat (1) ja (2) eivät itse asiassa esiinny viitteessä [1] kovinkaan korostetusti. Kaava (1) on esitetty s. 58 harjoitustehtävänä 3. Kaava (2) ei näy suoraan ollenkaan. Kaava (1) syntyy välittömästi soveltamalla Gaussin lausetta s. 57 siten, että suureeksi **U** valitaan paikkavektori **r** ja käytetään hyväksi tulosta $\nabla\bullet\mathbf{r} = 3$. Kaava (2) saadaan kaavasta (1) ottamalla kappaleeksi suora sylinteri, jonka poikkileikkaus on tarkasteltava tasoalue.

Lopuksi voitaneen ehkä perustellusti kysyä, onko jonkin tasoalueen pinta-ala A suure, jota voidaan varioida vai onko δA tulkittava vain suureen A ns. virtuaaliseksi muutokseksi? Emme ota tähän kysymykseen tässä kantaa. Sovellusten suhteen kuitenkin riittää, että käytettävissä on olion δA lauseke (3).

Kiitos

Kiitämme professori Tapio Salmea artikkelimme huolellisesta tarkastamisesta ja kommenteista, joiden huomioonotto on mielestämme parantanut artikkelin laatua.

Viite

[1] K. Väisälä, *Vektorianalyysi*, Werner Söderström, 1954.

Eero-Matti Salonen, Mika Reivinen
Aalto yliopiston insinööritieteiden korkeakoulu
Rakennustekniikan laitos
PL 12100, 00076 Aalto
eero-matti.salonen@tkk.fi, mika.reivinen@tkk.fi