

Nurjahduspituudesta

Jussi Jalkanen ja Matti Mikkola

Tiivistelmä. Artikkelissa käsitellään nurjahduspituuden määrittämiseen liittyvää väärinkäsityksen mahdollisuutta. Kyse on sekaisin menevistä puristetun ja taivutetun sauvan momenttijakaumista, minkä seurauksena voi syntyä mielikuva, että nurjahduspituus nähtäisiin suoraan sauvan taivutusmomenttikuvioista. Lujuusopin oppikirjoissa asiaan ei kiinnitetä huomiota, vaikka kirjallisuudesta poimitut esimerkit osoittavat, että väärinkäsitys pääsee käytännössä tapahtumaan.

Avainsanat: nurjahdus, nurjahduspituus, momentin nollakohtien välinen etäisyys, puurakenteet

Johdanto

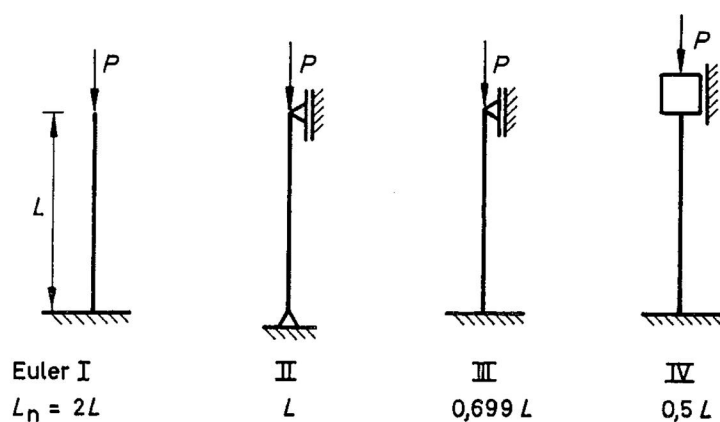
Rakennusten kantavien osien suunnittelussa usein mitoittaviksi tekijöiksi nousevat erilaiset rakenteen stabiiliuteen liittyvät ilmiöt kuten nurjahdus ja kiepahdus. Monestikaan ongelmana ei ole materiaalin kestävyys vaan rakenneosien jäykkyys. Stabiiliusilmiöiden merkitys korostuu sitä enemmän mitä hoikempia rakenteita käytetään. Esimerkiksi teräksen kasvanut lujuus mahdollistaa aikaisempaa hoikemmat rakenteet. Teräksen kimmomoduuli ei ole kuitenkaan kasvanut myötörajan mukana vaan säilynyt samana, mikä korostaa entisestään stabiiliusilmiöiden merkitystä.

Rakenteiden suunnitteluohjeet (normit) antavat periaatteessa yksityiskohtaiset ohjeet siitä, miten rakenneosien lujuusopillinen mitoitus tulee tehdä. Mikäli kuormat on määritetty oikein ja osien sisäiset voimat on osattu laskea, yksittäisen palkin tai pilarin mitoitus on varsin suoraviivaista. Ongelmaksi saattaa kuitenkin nousta nurjahdusvoiman tai kiepahduksen kriittisen momentin laskeminen. Nämä ovat tapauskohtaisia asioita, jotka riippuvat kulloisestakin rakenteesta. Yleisten periaatteiden lisäksi normeissa ei ole mahdollista antaa yksityiskohtaisempaa ohjeistusta, joka toimisi kaikissa sovelluskohteissa. Vaikkapa Eurokoodi 3:ssa (*Teräsrakenteiden suunnittelu*) annetaan nurjahdusvoiman laskennassa tarvittavalle nurjahduspituudelle joitakin ohjeellisia sauvan pituuteen kytköksissä olevia arvoja ja todetaan, että muitakin vähemmän konservatiivisia analyysiin perustuvia nurjahduspituuksia saa käyttää.

Tässä artikkelissa käsitellään puristetun sauvan nurjahduspituutta, jolle suunnittelijan tulisi osata valita kulloisessakin tapauksessa sopiva arvo. Tehtävää vaikeuttaa edellä mainitun suoraviivaisten laskentaohjeiden puutteen lisäksi joidenkin lujuusopin oppikirjojen esitystavan mahdollistama paha väärinkäsityksen mahdollisuus. Suunnitteluohjeissa lähdetään siitä, että rakenneanalyysi on yleensä lineaarinen ja nurjahdukseen liittyvät epälineaarisuudet tulevat huomioituksi sauvan mitoitus ehdoissa. Nurjahduspituus tarkoittaa lujuusopin peruskurssilta tuttua käsitettä.

Nurjahduspituus oppikirjoissa

Suoran sauvan nurjahduspituudella tarkoitetaan sen nurjahdusmuodon kahden peräkkäisen käännepisteen (point of contraflexure) välimatkaa. Käännepisteet voivat sijaita sauvalla tai sen kuvitteellisella jatkeella. Toisaalta nurjahduspituus voidaan käsittää myös sellaisen hypoteettisen sauvan pituudeksi, jolle saadaan sama nurjahduskuorma kuin tarkasteltavalle todelliselle sauvalle. Lujusopin oppikirjoissa käsitellään yleensä vain neljää ns. Eulerin perusnurjahdustapausta (kuva 1). Jos keskeisesti puristava normaalivoima ja poikkileikkaus ovat vakioita sauvan koko pituudella, nurjahduspituus riippuu vain sauvan pituudesta ja tuennan jäykkyydestä. Nurjahduspituus ei riipu sauvan poikittaisesta kuormituksesta tai sen materiaalista.



Kuva 1. Eulerin perusnurjahdustapaukset ja niiden nurjahduspituudet [1].

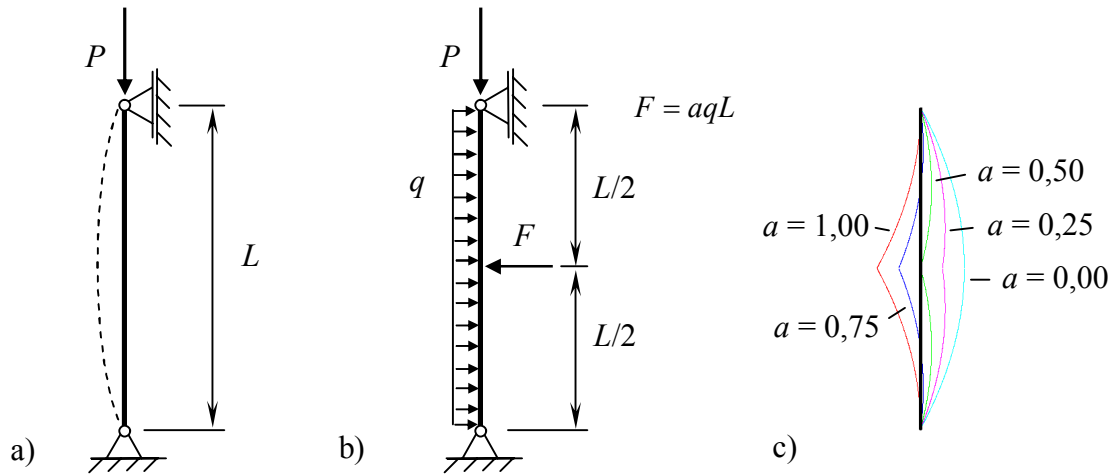
Teknisessä taivutusteoriassa kimmoviivan linearisoitu differentiaaliyhtälö kytkee taipuman v ja taivutusmomentin M_t toisiinsa

$$EI v'' = -M_t. \quad (1)$$

Kimmoviivan käännepisteessä taipuman toinen derivaatta vaihtaa merkkiänsä eli $v'' = 0$, mistä tietysti seuraa, että myös taivutusmomentti M_t on nolla. Asia todetaan nurjahdusta käsiteltäessä monissa lujusopin oppikirjoissa ([2] ja [3]) ja esimerkiksi lähteissä [4] ja [5] sanotaan nurjahduspituuden vastaavan momentin nollakohtien välistä etäisyyttä. Tämä on oikein, kunhan kimmoviiva vastaa nurjahdusmuotoa ja momenttia ei sekoiteta sauvan mahdollisista poikittaisista kuormituksista syntyvään taivutusmomenttiin.

Linearisoitua kimmoviivan differentiaaliyhtälöä (1) käytettäessä puristettu sauva säilyy suorana kunnes se jollakin kuorman arvolla nurjahtaa. Tämä nurjahduskuorma ja sitä vastaava sauvan taipunut muoto ovat yksikäsitteisiä, mutta nurjahdusmuodon taipumien suuruus jää avoimeksi. Siten sauvan nurjahdusmuodosta laskettu vastaava taivutusmomenttijakauma on myös muodoltaan yksikäsitteinen, mutta suuruudeltaan määräämätön. Tällä momenttijakaumalla ei ole kuitenkaan mitään tekemistä poikittaisten kuormitusten aiheuttaman taivutusmomenttijakauman kanssa, jota

käytetään kaikkialla muualla suunnitteluohjeiden mukaisessa rakenteiden mitoituksessa (kuva 2).



Kuva 2. a) Nivelpäisen sauvan nurjahdusmuoto vastaa sinikäyriä, jolloin myös nurjahdusmuodosta laskettu taivutusmomenttijakauma on sinimuotoinen. b) Poikittaisten kuormitusten lisääminen ei muuta sauvan nurjahdusmuotoa tai siitä laskettua taivutusmomenttijakaumaa. c) Poikittaisista kuormituksista riippuen saadaan erilaisia sauvan taivutusmomenttijakaumia ja siinä nollakohtien välisiä etäisyyksiä.

Koska edellä mainituissa lujuusopin oppikirjoissa ei korosteta, mitä momenttia tarkoitetaan puhuttaessa momentin nollakohdista ja niiden välisestä etäisyydestä nurjahduspituutena, syntyy paha väärinkäsityksen mahdollisuus. Asiaan tarkemmin perehtymätön henkilö saattaa luulla, että puristetulla ja taivutetulla sauvalla (esimerkiksi ristikon yläpaarteessa) nurjahduspituus nähtäisiin suoraan sauvan taivutusmomenttikuviosta. Väärinkäsityksen mahdollisuutta lisää se, että varsinkin betonirakenteiden mitoituksessa käsittelevissä kirjoissa puhutaan usein taivutetun palkin yhteydessä käännepisteistä ja niitä vastaavista momentin nollakohdista. Tällöin on kyse palkin todellisista taipumista ja poikittaisten kuormitusten aiheuttamasta taivutusmomentista.

Todellinen alkujaan hieman käyrä ja epäkeskeisesti puristettu sauva käyttäytyy tietysti erilailla kuin edellä on oletettu. Voimakkaasti puristetun sauvan kimmoviivan muoto riippuu hyvinkin poikittaisesta kuormituksesta ja siten sauvan taivutusmomenttijakaumasta. Asian huomioiminen johtaa kuitenkin käytännön suunnittelutyön kannalta laskennallisesti aivan liian raskaaseen tehtävään. Tämän takia suunnitteluohjeissa lähdetään siitä, että rakenneanalyysi on lineaarinen ja epälinearisuudet huomioidaan sauvan mitoituskaavoissa.

Esimerkkejä nurjahduspituuteen liittyvästä väärinkäsityksestä

Oheessa on esitetty joitakin konkreettisia esimerkkejä epäselvästi ilmaistusta tai väärin ymmärretystä nurjahduspituudesta. Ne kaikki liittyvät puurakenteiden suunnitteluun, koska asiaa on varta vasten selvitetty puurakenteiden yhteydessä.

Eurokoodi 5:n ”Puurakenteiden suunnittelu” [6] kohdan 9.2.1(2) mukaan ”Puristettujen sauvojen tehollisena nurjahduspituutena käytetään yleensä momenttipinnan nollakohtien väliä.” Tarkasti ottaen nurjahduspituus on oikein määritelty, mutta samalla teksti on hyvin harhaanjohtava. Puurakenteita mitoittavan insinöörin mieleen ei välttämättä tule kaiken jokapäiväisen kiireen keskellä, että momenttipinnaksi tulisi ottaa nurjahdusmuotoon liittyvä kuvitteellinen momenttipinta, eikä suinkaan poikittaisten kuormitusten aiheuttama taivutusmomenttijakauma. Alkuperäinen englanninkielinen teksti ”For members in compression, the effective column length for in-plane strength verification should generally be taken as the distance between two adjacent points of contraflexure” jättää vielä jonkinlaisen väärinkäsityksen mahdollisuuden, jonka saksalaiset ovat poistaneet omassa täsmällisessä käännöksessään ”Für Druckstäbe sollte beim Knicknachweis in Fachwerkebene im Allgemeinen die wirksame Knicklänge als der Abstand zwischen zwei benachbarten Wendepunkten der Knickbiegeline zugrunde gelegt werden.”.

Selvästi ennen eurokoodiaikaa kirjoitetussa kotimaisessa puurakenteiden suunnitteluun opastukseksi tarkoitettussa kirjassa [7] todetaan, että puuristikoiden yhteydessä nurjahduspituutena voidaan käyttää momenttikuvion nollakohtien väliä tai paarteiden solmupisteiden väliä.

Naulalevyristikoiden suunnitteluun tarkoitetuissa ohjeissa [8] vuodelta 1983 paarteiden nurjahduspituutena neuvotaan käyttämään vähintään momenttikuvion nollakohtien väliä tai paarteiden solmupisteiden väliä. Vastaavassa nykyisessä naulalevyrakenteiden suunnitteluohjeessa [9] nurjahduspituus määritellään, Eurokoodin hengessä, yleensä taivutusmomentin nollapisteiden väliksi ja tulkinta on ollut, että momenttipinnalla tarkoitetaan nimenomaan poikittaisten kuormitusten aiheuttamaa taivutusmomenttijakaumaa.

Nurjahduspituutta ei ole käsitetty väärin pelkästään Suomessa, vaan löytyy myös ulkomainen tapaus. Englantilaisessa kirjassa [10] on laskuesimerkki, jossa ristikkoa kannattelevan puristetun ja taivutetun pilarin nurjahduspituus on määritetty virheellisesti poikittaiskuormien aiheuttaman momenttipinnan nollakohdan perusteella.

Yhteenveto

Lujuusopin oppikirjoissa, joissa nurjahduspituuden yhteydessä puhutaan momentin nollakohdista, tulisi selkeästi korostaa, mitä tällä momentilla tarkoitetaan. Muuten voi syntyä virheellinen käsitys, että puristetulla ja taivutetulla sauvalla nurjahduspituus nähtäisiin suoraan poikittaisten kuormitusten aiheuttamasta taivutusmomenttikuviosta. Ilmeisesti oppikirjojen tekijöillä on ollut oletuksena, että kun käsitellään pelkästään puristettuja pilareita, ei ole väärinkäsityksen vaaraa, tai sitten asiaa on jotenkin muuten pidetty itsestään selvänä. Käytäntö on kuitenkin osoittanut, että väärinkäsitys pääsee syntymään, ainakin kun käsitellään puristettuja ja taivutettuja puurakenteita.

Viitteet

- [1] Outinen H., Salmi T., *Lujuusopin perusteet*, Pressus, 2004.
- [2] Pennala E., *Lujuusopin perusteet*, Otatieto, 2000.

- [3] Karhunen J., Lassila V., Pyy S., Ranta A., Räsänen S., Saikkonen M., Suosara E. *Lujuusoppi*, Otatieto, 1993.
- [4] Hibbeler R.C., *Mechanics of Materials*, Prentice Hall, 2005.
- [5] Higdon A., Ohlsen E., Stiles W., Weese J., Riley, W. *Mechanics of Materials*, John Wiley & Sons, 1976.
- [6] *Eurokoodi 5. Puurakenteiden suunnittelu. Osa 1-1: Yleiset säännöt ja rakennuksia koskevat säännöt*, Suomen standardoimisliitto SFS, 2008.
- [7] *RIL 162-1 Puurakenteet II*, Suomen rakennusinsinöörien liitto, 1987.
- [8] *Naulalevyrakenteiden suunnitteluohjeet*, Puurakenteiden laadunvarmistusyhdistys ry, 1983.
- [9] *Naulalevyrakenteiden suunnittelu, Eurokoodi 5 EN 1995:2004+A1:2008, Sovellusohje*, Inspecta Sertifiointi, 2009.
- [10] McKenzie W., Zhang B. *Design of Structural Timber to Eurocode 5*, Palgrave Macmillan, 2007.

Jussi Jalkanen, Matti Mikkola
KPM-Engineering Oy,
Kalevantie 7 C, 33100 Tampere
jussi.jalkanen@kpmeng.fi
matti.mikkola@kpmeng.fi