

## Amfora – Klassinen kuorirakenne

Harri Hakula ja Tomi Tuominen

**Tiivistelmä.** Työssä esitetään uusi *hp*-adaptiivinen ratkaisualgoritmi, joka perustuu energia- ja Sobolev-säännöllisyystarkastelujen yhdistelyyn. Algoritmin toimivuutta 1D- ja 2D-tapauksissa demonstroidaan vaikean esimerkkitapauksen, amfora-tehtävän yhteydessä. Elliptisen pyörähdyskuoren, jonka reunojen kinemaattiset rajoitusehdot ovat sekamuotoiset, so. kiinteät toisella ja vapaat toisella, muodonmuutoksia dominoi globaali aaltoilu, kompleksifikaatio, jolle on ominaista aaltoluku, joka on verrannollinen parametriin  $-\log t$ , missä  $t$  on kuoren suhteellinen paksuus. Osoittautuu, että ilmiö tapahtuu myös, jos elliptistä osaa jatketaan hyperbolisella, ja aaltoilu siirtyy hyperbolisen pinnan karakteriskoita pitkin. Numeeristen kokeiden perusteella tehtävään liittyy myös numeerinen lukkiutuminen.

*Avainsanat:* kuoret, elementtimenetelmä, *hp*-adaptiivisuus, numeerinen lukkiutuminen

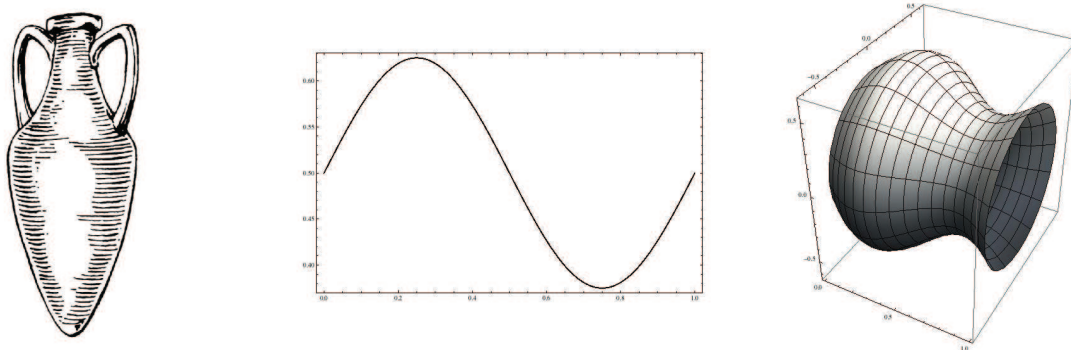
### Johdanto

Kuorirakenteet ja erityisesti ohuet kuoret ovat laskennallisesta näkökulmasta haastavimpia yksinkertaisia rakenteita. Kuorenpaksuudella tarkoitetaan tässä suhteellista suuretta  $t = d/L$ , missä  $d$  on kuorenpaksuuden absoluuttinen mitta ja  $L$  on esimerkiksi kappaaleen halkaisija. Rakennetta voidaan pitää ohuena, jos  $t \ll 1$ . Kuorille on ominaista rikas perhe reunahäiriöitä, jotka voivat olla myös sisäisiä, ja joilla jokaisella on oma, kuoren suhteellisesta paksuudesta riippuva karakteristinen mitta. Lineaarisen kuoritehtävän ratkaisu voidaan tulkita sopivien karakterististen piirteiden lineaariyhdistelyä.

Kuoren geometria, reunaehdot ja kuormat ovat kaikki tekijöitä, jotka vaikuttavat jonkin karakteristisen piirteen aktivoitumiseen ratkaisussa. Siksi pyörähdyskuoret ovatkin erinomainen työkenttä matemaattisessa ohuiden kuorten teoriassa, sillä Gaussin pintateorian yleisluokkien, parabolisten, elliptisten ja hyperbolisten pintojen, edustajia on helppo konstruoida.

Kuoritehtävien numeerisen ratkaisun suuri haaste on numeerisen lukkiutumisen välttäminen, mikä onkin johtanut lukuisten erilaisten erikoiselementtien suunnitteluun FEM-yhteisössä. Aalto-yliopiston teknillisen korkeakoulun matematiikan laitoksen perinteiden mukaisesti valitsimme toisenlaisen lähestymistavan ja annamme korkean kertaluvun elementtien eli elementtimenetelmän *p*-version ratkaista lukkiutumisongelman. Numeeriset ratkaisut pohjautuvat Tomi Tuomisen lisensiaatintutkimuksessaan kehittämään *hp*-adaptiiviseen ohjelmistoon [8].

Työssä tarkastellaan esimerkkipuorta, amforaa, jossa hallitseva piirre ei kuitenkaan ole perinteinen reunahäiriö, vaan kuoressa tapahtuva globaali ilmiö, jota Sanchez nimittää elliptisten kuorten tapauksessa kompleksifikaatioksi [2]. On mahdollista asettaa tehtävä, jonka rajaratkaisu paksuuden mennessä kohti nolaa ei ole hyvin asetettu Shapiron ja Lopatinskin mielessä. Tällöin tehtävän taustalla oleva elliptisen operaattorin koersiivisuus



Kuva 1: Amfora, profiili  $\Phi(x_1)$ , pyörähdyspinta.

katoaa rajalla, eivätkä ratkaisun olemassaolon ehdot täyty. Positiivisilla kuorenpaksuuksilla ratkaisu aaltoilee vapaalla reunalla ja pienenee eksponentiaalisesti siirryttäessä reunan sisänormaalien suuntaan. Paksuuden mennessä kohti nollaa maksimiamplitudi kasvaa rajatta ja tehtävä lähestyy puhdasta taivutustilaa kinemaattisista rajoituksista huolimatta eli taipumaenergian suhde kokonaisenergiaan lähestyy lukua yksi [1].

Amforan tarkastelu ei ole suoraviivaista, sillä geometrialtaan yleisen eli Gaussin mielessä eri tyyppisiä pintoja sisältävän kuoren eksakti analysointi on vaikeaa. Reunahäiriöiden menestyksekkäs luokittelu perustuu oletukseen, että pinnan tyyppi on vakio yli tarkasteltavan alueen [6]. Analyysiä varten tehtävä voidaan yksinkertaistaa äärimmilleen, esimerkiksi ns. matalan kuoren malli olettaa vakiokaarevuudet. Tämä tie on meiltä suljettu. Voimme kuitenkin laatia numeerisen koejärjestelyn, missä eri virhelähteitä voidaan tehokkaasti kontrolloida. Voimme approksimoida kuormaa sen Fourierin sarjalla ja muuntaa aidosti kaksiulotteinen tehtävä sarjaksi yksiulotteisia, jotka ratkaistaan adaptiivisesti hyvin tarkasti. Tämä mahdollistaa pienimpienkin karakteristeiden piirteiden tarkastelun jopa akateemisilla kuorenpaksuuksilla.

Numeeristen kokeiden perusteella kompleksifikaatio tapahtuu myös kuorissa, joissa elliptistä osaa on jatkettu hyperbolisella. Aivan kuten puhtaasti elliptisessäkin tapauksessa, normaalien reunahäiriöiden amplitudit jäävät merkityksettömiksi, mutta hyperbolisen osan luonne sanelee kompleksifikaation etenemisen pinnan karakteristikoita pitkin. Lisäksi tulokset osoittavat kompleksifikaatioon liittyvän myös taipumadominoiduille tehtäville ominaisen numeerisen lukkiutumisen. Toisen asteen standardielementteihin perustuva  $h$ -adaptiivinen algoritmi ei suppene ja vähintään astelukku  $p = 4$  vaaditaan tehokkaaseen standardialgoritmiin.

Artikkelin rakenne on seuraava: Esittelemme ensin esimerkkitehtävän geometrian, jonka jälkeen määrittelemme Naghdin kuorimallin sekä kaksi- että yksiulotteisen muodon pyörähdyskuorille. Tekstin pääosan muodostaa adaptiivisen  $hp$ -FEM algoritmin kuvaus. Numeeristen kokeiden tulokset raportoidaan ennen päätelmiä ja kirjallisuusviitteitä.

## Amfora

Tarkasteltavat kuoret määritellään kolmiulotteisen avaruuden alueena:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \omega, -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \right\},$$

missä  $d$  on kuoren absoluuttinen paksuus, ja  $\omega$  on kuoren keskipinta. Työssä tarkastellaan pyörähdyssymmetrisiä kuoria, joille keskipinta määritellään profilifunktion  $\Phi(x_1)$  avulla

seuraavasti:

$$\omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 = \Phi(x_1)^2, \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < \Phi \in C^1(0, 1)\}.$$

Gaussin pintateorian luokittelun kohdassa  $x_1$  voi esittää profiilin toisten derivaattojen avulla:

Parabolinen:  $\Phi''(x_1) = 0$ ,

Elliptinen:  $\Phi''(x_1) < 0$ ,

Hyperbolinen:  $\Phi''(x_1) > 0$ .

Kuvassa 1 on esitetty mallitehtävän konstruktio: Varsinaisen rakenteen profilia approksimoidaan sini-funktiolla, joka pyörähtäessään  $x$ -askelin ympäri määrittää kuoren geometrian. Amforan pohja mallitetaan kinemaattisilla rajoitteilla, siirtymät estetään vastaavalla reunaviivalla. Kahvojen kautta välittyvät kuormat esitetään kiinnityspisteestä eksponentiaalisesti vaimenevina kuormina.

Olemme erityisen kiinnostuneita siitä, mitä tapahtuu, kun symmetrinen, vapaan reunan pisteestä vaimeneva veto vaikuttaa amforan kaulan tangenttitasossa reunan ulkonormaalien suunnassa. Keskeinen parametri on  $-\log t$ , jonka kokonaislukuapproksimaatioiden tiedetään tällöin olevan verrannollisia ratkaisun aaltolukuun pyörähdysuunnassa,  $K_y$ , puhtaasti elliptisessä tapauksessa [2]. Ratkaisuun liittyy myös toinen, aksiaalinen aaltoluku  $K_x$ , jonka aiheuttavat hyperbolisen osan indusoimat aaltoilut. Teoreettisia ennusteita luvulle  $K_x$  ei ole. Kuvassa 2 on esitetty esimerkkikuoren pinnan normaalin suuntaiset siirtymät laskennallisessa alueessa.

## Kuorimalli

### *Kaksiulotteinen malli*

Kuorimallina käytetään kaksiulotteista Reissner-Naghdin mallia, jossa siirtymät kuoren pintaa vastaan kohtisuorassa suunnassa oletetaan matala-asteisiksi polynomeiksi. Tuloksena on tehtävä, jossa etsitään viisikomponenttista vektorikenttää  $\mathbf{u} = (u, v, w, \theta, \psi)$ . Kolme ensimmäistä komponenttia ovat siirtymäsuureet kuoren pituus-, pyörähdys- ja poikittais-suunnassa. Komponentit  $\theta$  ja  $\psi$  ovat kiertymät kuoren pituus- ja poikittaissuunnassa.

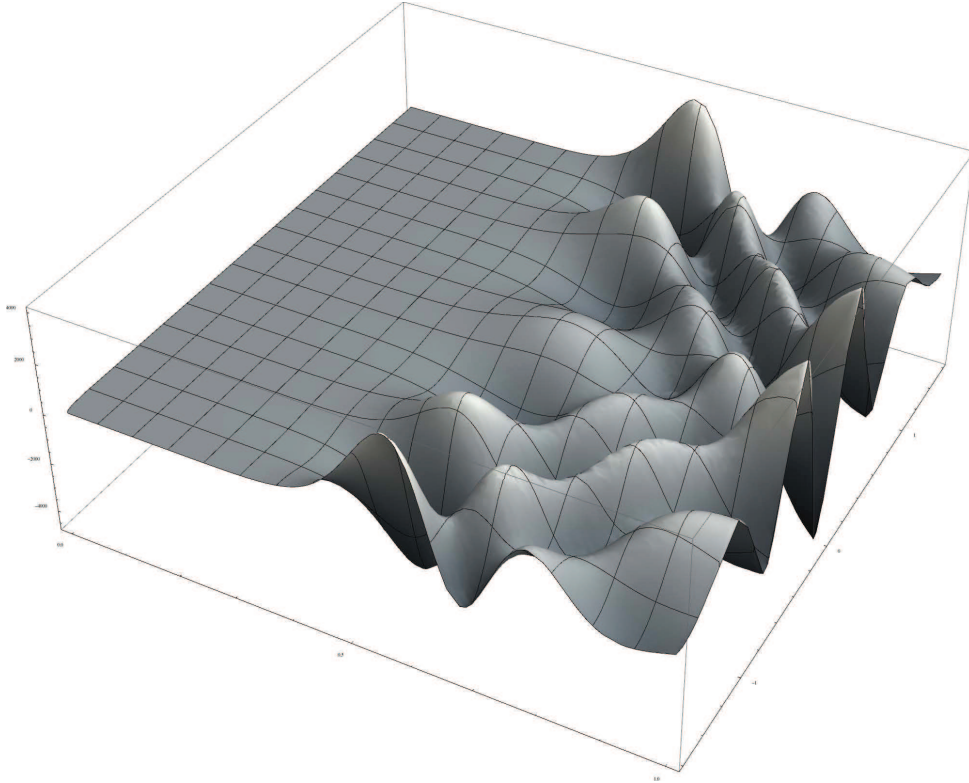
Kokonaisenergiaa kuvataan kvadraattisella funktionaalilla

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \mathcal{Q}(\mathbf{u}), \quad (1)$$

missä  $\mathcal{A}$  esittää muodonmuutosenergiaa ja  $\mathcal{Q}$  on kuorman aiheuttama potentiaalienergia. Muodonmuutosenergia koostuu taipuma- kalvo- ja leikkausenergiasta:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = d^2\mathcal{A}_B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathcal{A}_M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathcal{A}_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (2)$$

Alaindeksit  $B$ ,  $M$  ja  $S$  tulevat englannin kielen sanoista Bending, Membrane ja Shear.



Kuva 2: Kuoren pinnan normaalin suuntaiset siirtymät ( $w$ -komponentti) laskennallisessa alueessa  $[0, 1] \times [-\pi/2, \pi/2]$ , kun  $t = 1/10^6$ . Kuorma vaikuttaa vapaan reunan keskipisteessä. Aallot eivät etene syvälle elliptiseen osaan. Hyperbolisen pinnan karakteristikat erottuvat selvästi.

Taipuma-, kalvo- ja leikkausenergioille on annettu lausekkeet

$$d^2 \mathcal{A}_B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = d^2 \int_{\omega} \left[ \nu(\kappa_{11}(\mathbf{u}) + \kappa_{22}(\mathbf{u}))^2 + (1 - \nu) \sum_{i,j=1}^2 \kappa_{ij}(\mathbf{u})^2 \right] A_1 A_2 dx dy, \quad (3)$$

$$\mathcal{A}_M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 12 \int_{\omega} \left[ \nu(\beta_{11}(\mathbf{u}) + \beta_{22}(\mathbf{u}))^2 + (1 - \nu) \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}(\mathbf{u})^2 \right] A_1 A_2 dx dy, \quad (4)$$

$$\mathcal{A}_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 6(1 - \nu) \int_{\omega} \left[ (\rho_1(\mathbf{u})^2 + \rho_2(\mathbf{u})^2) \right] A_1 A_2 dx dy, \quad (5)$$

missä  $\nu$  on Poissonin luku, joka kuvaa, kuinka paljon materiaali kuroutuu voimaa vastaan kohtisuorassa suunnassa suhteessa kuormituksen suuntaiseen venymään. Tässä Poissonin luvulle käytetään arvoa  $\nu = 1/3$ , joka on lähellä useiden metallien, kuten raudan (0,29) ja alumiinin (0,34) arvoja.  $A_1$  ja  $A_2$  ovat Lamén parametrit, jotka määräytyvät kuoren geometriasta. Pyörähdysymmetrisillä kuorilla Lamén parametrit määritellään pyörähdysfunktion  $\Phi$  avulla:

$$A_1(x) = \sqrt{1 + [\Phi'(x)]^2}, \quad A_2 = \Phi(x).$$

Lisäksi määritellään pääkaarevuussäteet:

$$R_1(x) = -\frac{A_1(x)^3}{\Phi''(x)}, \quad R_2(x) = A_1(x)A_2(x).$$

Taipuma-, kalvo- ja leikkausmuodonmuutoksille  $\kappa_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  ja  $\rho_i$  on annettu lausekkeet [5]

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\psi}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial y}, \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\theta}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x}, \\ \kappa_{12} &= \kappa_{21} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\theta}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial y} - \frac{\psi}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \right], \\ \beta_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{w}{R_1}, \\ \beta_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{w}{R_2}, \\ \beta_{12} &= \beta_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \right), \\ \rho_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R_1} - \theta, \\ \rho_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R_2} - \psi, \end{aligned}$$

Energianormi  $||| \cdot |||$  määritellään muodonmuutosenergian (2) avulla:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) := |||\mathbf{u}|||^2 := \mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (6)$$

Käytetään vastaavia merkintöjä myös taipuma-, kalvo- ja leikkausenergialle:

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) := d^2 \mathcal{A}_B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (7)$$

$$\mathcal{M}(\mathbf{u}) := \mathcal{A}_M(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (8)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}) := \mathcal{A}_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (9)$$

### Variaatiotehtävä

Kuoriyhtälöille haetaan ratkaisua energiaperiaatteen avulla minimoimalla kokonaisenergiaa (1), mikä puolestaan johtaa elementtimenetelmässä käyttökelpoiseen variaatiotehtävään: Etsi  $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset [H^1(\omega)]^5$  siten että

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{Q}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}. \quad (10)$$

Elementtimenetelmässä haetaan ratkaisua  $\mathcal{U}$ :n äärellisulotteisesta aliavaruudesta  $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ : Etsi  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h$  siten että

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = \mathcal{Q}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h. \quad (11)$$

Merkintä  $H^1(\omega)$  tarkoittaa Sobolevin avaruutta, jossa derivaatat ovat ensimmäiseen kertalukuun asti  $L^2(\omega)$ -integroituvia:

$$H^1(\omega) = \{u \in L^2(\omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\omega)\}.$$

Osittaisderivaatat tarkoittavat heikkoja derivaattoja, ja variaatiotehtävälle (10) etsitäänkin ns. heikkoa ratkaisua [3]. Aliavaruudet  $\mathcal{U}$  ja  $\mathcal{U}_h$  asetetaan tehtävän reunaehtojen mukaan:

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in [H^1(\omega)]^5 \mid \text{kinemaattiset reunaehdot toteutuvat}\}.$$

Kuormafunktionaali on muotoa

$$\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \int_{\omega} \mathbf{f}(x, y) \cdot \mathbf{v} A_1 A_2 dx dy.$$

Tarkastellaan tehtäviä, joissa kuormitus tapahtuu kuoren tangenttitason suunnassa, eli  $\mathbf{f}(x, y) = [f_u(x, y), 0, 0, 0, 0]^T$ . Voidaan osoittaa, että jos kuorman jakaumalle pätee  $\mathbf{f} \in [L^2(\omega)]^5$ , tehtävällä (10) on olemassa yksikäsitteinen heikko ratkaisu  $\mathbf{u} \in [H^1(\omega)]^5$ . Vastaava pätee myös äärellisulotteisille avaruuksille, kun sovelletaan elementtimenetelmää.

### Yksiulotteinen malli

Kuorimalli saadaan redusoitua yksiulotteiseksi, kun kuormaksi otetaan pyörähdyssuunnassa jaksollinen kuorma. Tämä mahdollistaa käytännössä tarkan ratkaisun hakemisen juuri pyörähdyssymmetristen kuorien tapauksessa. Kuorma voi olla esimerkiksi  $u$ -komponentin suuntainen, eli  $f_u(x, y) = F(x) \cos(ky)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Tällöin ratkaisu on muotoa

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x) \cos(ky) \\ v(x) \sin(ky) \\ w(x) \cos(ky) \\ \theta(x) \cos(ky) \\ \psi(x) \sin(ky) \end{pmatrix}.$$

Sijoittamalla ratkaisu venymälausekkeisiin ja edelleen energialausekkeisiin saadaan energiakomponentit muotoon

$$\begin{aligned} d^2 \mathcal{A}_B^{1D}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= d^2 \int_0^1 \left[ \nu(\kappa_{11}(\mathbf{u}) + \kappa_{22}(\mathbf{u}))^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \sum_{i,j=1}^2 \kappa_{ij}(\mathbf{u})^2 \right] A_1 A_2 dx, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_M^{1D}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= 12 \int_0^1 \left[ \nu(\beta_{11}(\mathbf{u}) + \beta_{22}(\mathbf{u}))^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}(\mathbf{u})^2 \right] A_1 A_2 dx, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathcal{A}_S^{1D}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 6(1 - \nu) \int_0^1 \left[ (\rho_1(\mathbf{u})^2 + \rho_2(\mathbf{u})^2) \right] A_1 A_2 dx, \quad (14)$$

ja venymälausekkeet ovat

$$\begin{aligned}
\kappa_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\
\kappa_{22} &= \frac{k \psi}{A_2} + \frac{\theta}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x}, \\
\kappa_{12} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{k \theta}{A_2} - \frac{\psi}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{R_1} \left( \frac{k u}{A_2} + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) - \frac{1}{R_2} \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \kappa_{21}, \\
\beta_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \\
\beta_{22} &= \frac{k v}{A_2} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{w}{R_2}, \\
\beta_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{k u}{A_2} - \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) = \beta_{21}, \\
\rho_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R_1} - \theta, \\
\rho_2 &= -\frac{k w}{A_2} - \frac{v}{R_2} - \psi.
\end{aligned}$$

Kuormafunktionaali on tässä tapauksessa

$$\mathcal{Q}^{1D}(\mathbf{v}) = \int_0^1 F(x) u A_1 A_2 dx.$$

Kuormafunktionaalista ja energialausekkeista (12)-(14) on jätetty kerroin  $\pi$  ( $2\pi$ , kun  $k = 0$ ) pois. Tämä täytyy huomioida, kun tuloksia verrataan kaksiulotteisen tehtävän energioihin.

### *Elementtimenetelmä ja kantafunktiot*

Kuoriyhtälöitä ratkaistaan tässä numeerisesti elementtimenetelmällä. Laskenta-alue  $\Omega$  jaetaan elementteihin, ja ratkaisua haetaan paloittain määriteltynä polynomina. Kantapolynomien kertoimet lasketaan siten, että numeerinen ratkaisu olisi paras approksiimaatio energianormissa. Kertoimet saadaan soveltamalla variaatiomuotoa (11), jolloin numeerisen ratkaisun kertoimet saadaan yhtälöryhmästä

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

missä  $\mathbf{A}$  on tehtävän jäykkyysmatriisi ja  $\mathbf{b}$  on kuormavektori. Vektori  $\mathbf{x}$  sisältää kantafunktioiden kertoimet. Jäykkyysmatriisin ja kuormavektorin alkiot saadaan bilineaarimuodosta ja kuormafunktionaalista:

$$A_{ij} = \mathcal{A}(\phi_j, \phi_i), \quad b_i = \mathcal{Q}(\phi_i),$$

missä  $\phi_i$ :t ovat globaaleja kantafunktioita.

## Adaptiivinen algoritmi

### Virheindikaattorit

Adaptiivisessa laskennassa ratkaisua parannetaan vaiheittain minimoimalla virhettä. Tätä varten tarvitaan virheindikaattori, joka kuvaa tarpeeksi hyvin virheen jakaumaa. Tässä käytetään elementin sisävapausasteisiin eli kupliin perustuvia indikaattoreita. Koska kuplafunktioiden kantajana on yksi elementti, voidaan kuplavapausasteet ratkaista aina elementteittäin. Kuplainsidikaattori voidaan määritellä kahdella tavalla. Ylimääräiset sisävapausasteet voidaan lisätä ratkaisuun jälkikäteen tai ne voidaan sisällyttää jo ratkaisuavaruuteen, jolloin tulosta verrataan ilman ylimääräisiä kuplia saatuun ratkaisuun.

### Lisäkupla-indikaattori

Merkitään ratkaisuavaruutta (ilman lisäkuplia)  $\mathcal{U}_h$ :lla ja lisättäviä kuplavapausasteita  $\mathcal{U}_h^+$ :lla. Olkoon  $\mathbf{u}_h$  variaatiotehtävän (11) ratkaisu: Etsi  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{U}_h$  siten, että

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = \mathcal{Q}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h.$$

Lisätään ratkaisuun kuplat  $\mathbf{u}_h^+ \in \mathcal{U}_h^+$ , eli pidetään ratkaisun osa  $\mathbf{u}_h$  tunnettuna. Tällöin tehtävänä on: Etsi  $\mathbf{u}_h^+ \in \mathcal{U}_h^+$  siten, että

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h^+, \mathbf{v}) = \mathcal{Q}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h^+. \quad (15)$$

Kuplafunktioiden kantaja on vain yksi elementti, joten tehtävä (15) voidaan ratkaista elementteittäin:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{v})_e = \mathcal{Q}(\mathbf{v})_e - \mathcal{A}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v})_e \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h^+, \quad (16)$$

$e = 1, \dots, e_{max}$ . Koska ratkaisua haetaan tässä  $\mathcal{U}$ :n aliavaruudesta, voidaan tehtävästä (10) sijoittaa kuormafunktionaali, jolloin (16) saadaan muotoon

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_h^+, \mathbf{v})_e = \mathcal{A}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v})_e \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h^+ \quad (17)$$

Tehtävä (17) voidaan siis tulkita niin, että approksimoidaan virhettä  $\mathbf{u}_{err} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  aliavaruudessa  $\mathcal{U}_h^+ \subset \mathcal{U}$ .

### Kahden ratkaisun erotus indikaattorina

Toinen vaihtoehto arvioida virhettä kuplien avulla on laskea ratkaisun  $u_h \in \mathcal{U}_h$  lisäksi ratkaisu rikastetusta avaruudesta, eli etsitään  $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathcal{U}_h \oplus \mathcal{U}_h^+$  siten, että

$$\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}) = \mathcal{Q}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h \oplus \mathcal{U}_h^+. \quad (18)$$

Virheen approksimaatio saadaan laskemalla ratkaisujen erotus:

$$\mathbf{u}_{err} \approx \Delta \mathbf{u}_h := \tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h.$$

Haittapuolena tässä menetelmässä on se, että globaali tehtävä joudutaan ratkaisemaan kahdesti. Kuplien lisääminen ei tosin kasvata yksittäisen tehtävän kokoa, sillä sisävapausasteet kondensoidaan joka tapauksessa pois globaalista tehtävästä. Tällä tavoin saadaan kuitenkin hieman tarkempi virhearvio edelliseen verrattuna, mutta mitään oleellista eroa esimerkiksi lukkiutumisen kannalta ei ole.



Virhettä mitataan tässä energianormissa, joten määritellään elementin  $K_e$  virheindikaattoreiksi

$$\eta_e^+ := |||\mathbf{u}_h^+|||_{K_e} \quad \text{ja} \quad \eta_e^\Delta := |||\Delta \mathbf{u}_h|||_{K_e}. \quad (19)$$

Globaalit virhe-estimaattorit ovat vastaavasti

$$\eta^+ := \sqrt{\sum_e (\eta_e^+)^2} \quad \text{ja} \quad \eta^\Delta := \sqrt{\sum_e (\eta_e^\Delta)^2} \quad (20)$$

Tässä tarkastellaan virheindikaattoria  $\eta_e^+$  ja  $\eta^+$ .

### *hp -päättös*

Virhejakauman arvioimisen lisäksi *hp*-menetelmässä täytyy päättää, missä tihennetään verkkoa ja missä muutetaan elementin astelukua. Pääpiirteittäin reunahäiriöiden alueella tihennetään verkkoa ja sileällä osalla käytetään korkeampi asteisia elementtejä.

Reunahäiriöitä ei kuitenkaan pyritä suoranaisesti tunnistamaan, vaikka niiden sijainti ja skaalat tunnetaankin melko hyvin. Ratkaisua arvioidaan elementteittäin sen sileyden perusteella. Legendre-kertoimien suppenemisnopeudesta päätellään, kuinka sileä ratkaisu on paikallisesti. Yleisessä tapauksessa arvioidaan funktion Sobolev-säännöllisyyttä, mutta koska elementtiratkaisussa on arvioitavana paloittain määriteltyjä polynomeja, tyydytään arvioimaan mikä on korkein asteluku, jota kulloinkin on kannattavaa käyttää.

### *Sobolev-säännöllisyyden arviointi*

Kattava selostus Sobolev-säännöllisyyden arvioimisesta on esitetty lähteessä [4]. Tässä esitetään vain käytännön laskennan kannalta keskeiset osat. Analyysi on tehty painotehtuilla Sobolev-normeilla, painolla  $w(x) = (1 - x^2)$ . Paino on valittu siten, että reunoilla ei ole vaikutusta arvioon. Toisin sanoen siitä, että ratkaisu  $u \in H_w^s(-1, 1)$  ei välttämättä seuraa  $u \in H^s(-1, 1)$ . Tämä on ilmaistu jatkossa merkinnällä  $H_{loc}$ .

Tarkastellaan aluksi referenssiväliä  $(-1, 1)$  funktiota  $\hat{u} \in L^2(-1, 1)$ . Funktio  $\hat{u}$  voidaan esittää Legendre-sarjana

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i \hat{L}_i(\xi), \quad (21)$$

missä  $\hat{L}_i$  on  $i$ :n asteen Legendre-polynomi. Legendre-polynomit ovat ortogonaalisia,

$$\int_{-1}^1 \hat{L}_i(\xi) \hat{L}_j(\xi) d\xi = \delta_{ij} \frac{2}{2i+1},$$

joten kertoimet  $\hat{a}_i$  saadaan muodossa

$$\hat{a}_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^1 \hat{u}(\xi) \hat{L}_i(\xi) d\xi. \quad (22)$$

Kertoimien analysointiin on esitetty kaksi menetelmää: juuri- ja osamäärämenetelmä. Tässä tarkastellaan juurimenetelmästä saatua testiä. Määritellään kertoimien  $\hat{a}_i$  avulla jono  $\{l_i\}_{i \geq 2}$ :

$$l_i = \frac{\log((2i+1)/(2|a_i|^2))}{2 \log i}. \quad (23)$$

Teorian mukaan, jos raja-arvo  $l = \lim_{i \rightarrow \infty} l_i$  on olemassa ja  $l > 1/2$ , niin

$$u \in H_{loc}^{l-1/2-\epsilon}(-1, 1), \quad 0 < \epsilon < l - 1/2.$$

Kaksiulotteisessa tapauksessa elementit ovat yleisiä kolmioita tai nelikulmioita. Tarkastellaan kolmiota  $K$  ja funktiota  $u \in L^2(K)$ . Funktio esitetään Legendre-sarjana kuten yksiulotteisessa tapauksessa:

$$u(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} L_{ij}(x, y). \quad (24)$$

Kantafunktioiden  $L_{ij}$  täytyy olla myös tässä ortogonaalisia. Määritellään kuvaus  $F$  referenssineliöltä  $\hat{Q} = (-1, 1)^2$  kolmiolle  $K$ . Kuvauksessa  $F$  yksi neliön sivuista kutistuu kolmion kärkipisteeksi. Kantafunktiot  $L_{ij}$  määritellään referenssineliön kannan avulla:

$$L_{ij}(x, y) := (\hat{L}_{ij} |\det J_F|^{-1/2}) \circ F^{-1}(x, y), \quad (25)$$

missä  $\hat{L}_{ij}(\xi, \eta) = \hat{L}_i(\xi) \hat{L}_j(\eta)$  ja  $J_F$  on kuvauksen  $F$  Jacobin matriisi.

Legendre-sarjan kertoimet  $a_{ij}$  lasketaan kuten yksiulotteisessa tapauksessa:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= c_{ij} \int_K u(x, y) L_{ij}(x, y) dx dy \\ &= c_{ij} \int_{\hat{Q}} u \circ F(\xi, \eta) L_{ij} \circ F(\xi, \eta) |\det J_F| d\xi d\eta \\ &= c_{ij} \int_{\hat{Q}} u \circ F(\xi, \eta) \hat{L}_{ij}(\xi, \eta) |\det J_F|^{1/2} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (26)$$

Edellisessä on käytetty merkintää  $c_{ij} = \frac{2i+1}{2} \frac{2j+1}{2}$ . Kertoimien suppenemista tarkastellaan erikseen  $\xi$ - ja  $\eta$ -suunnissa, joten määritellään kertoimet

$$|\alpha_i|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}|^2 \frac{2}{2j+1} \quad \text{ja} \quad |\beta_j|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_{ij}|^2 \frac{2}{2i+1}. \quad (27)$$

Vastaavasti saadaan määriteltyä jonot  $\{l_{\xi,i}\}_{i \geq 2}$  ja  $\{l_{\eta,i}\}_{i \geq 2}$ :

$$l_{\xi,i} = \frac{\log((2i+1)/(2|\alpha_i|^2))}{2 \log i} \quad \text{ja} \quad l_{\eta,j} = \frac{\log((2j+1)/(2|\beta_j|^2))}{2 \log j}. \quad (28)$$

Jos raja-arvot  $l_{\xi} = \lim_{i \rightarrow \infty} l_{\xi,i}$  ja  $l_{\eta} = \lim_{i \rightarrow \infty} l_{\eta,i}$  ovat olemassa ja  $l_{\xi}, l_{\eta} > 1/2$ , funktio  $u$  kuuluu anisotrooppiseen Sobolev-avaruuteen, missä eri muuttujien derivaatat voivat olla integroituvia eri asteisiin saakka;

$$u \in H_{loc}^{k_{\xi}, k_{\eta}}(K),$$

missä

$$k_{\xi} = l_{\xi} - 1/2 - \epsilon, \quad k_{\eta} = l_{\eta} - 1/2 - \epsilon.$$

Menetelmä antaa mahdollisuuden tulkita funktion käyttäytymistä erikseen  $\xi$ - ja  $\eta$ -suunnissa. Tässä Sobolev-säännöllisyyttä tarkastellaan vain isotrooppisessa mielessä, eli asetetaan  $k := \min\{k_{\xi}, k_{\eta}\}$ , jolloin

$$u \in H_{loc}^k(K).$$

*Ratkaisun  $u_h$  sileyden arviointi*

Sobolev-säännöllisyyden määrittäminen edes likimääräisesti edellyttää, että Legendre-kertoimia on tarpeeksi käytettävissä. Tässä numeerinen ratkaisu koostuu polynomeista, joten yleisesti elementillä  $e$  on käytettävissä  $p_e + 1$  kerrointa sekä  $\xi$ - että  $\eta$ -suunnassa. Loput kertoimet ovat nollia. Numeerinen ratkaisu onkin Sobolev-säännöllisyyden mielessä sileä (elementin sisällä), joten sen Legendre-kertoimien suppenemiselle otetaan hieman erilainen tulkinta. Tässä puhutaan kuitenkin ratkaisun sileydestä, vaikka se ei tarkoittaisikaan Sobolev-sileyttä.

Tarkastellaan elementtiä  $e$ . Oletetaan että Legendre-kertoimia on molemmissa suunnissa  $m + 1$  kappaletta;  $a_{ij}$ ,  $i, j = 0, \dots, m$ . Määritellään  $l_{\xi,i}$  ja  $l_{\eta,i}$  kuten (28):ssa. Nyt raja-arvoille valitaan edustajat viimeisistä kertoimista:

$$l_{\xi} := \min\{l_{\xi,m-1}, l_{\xi,m}\}, \quad l_{\eta} := \min\{l_{\eta,m-1}, l_{\eta,m}\}. \quad (29)$$

Kahden viimeisen termin väliltä valitaan pienempi, koska on mahdollista, että funktion parillinen ja pariton komponentti käyttäytyvät eri tavalla. Lukujen  $l_{\xi}$  ja  $l_{\eta}$  avulla määritellään suurin asteluku, jota kannattaa käyttää elementillä:

$$\hat{p}_e := \lfloor \min\{l_{\xi}, l_{\eta}\} - 1/2 \rfloor. \quad (30)$$

Jos elementillä  $e$  asteluku on pienempi kuin suurin kannattava asteluku,  $p_e < \hat{p}_e$ , voidaan astelukua nostaa. Koska lukua  $\hat{p}_e$  käytetään elementtikohtaisen asteluvun valinnassa, voidaan sen määritelmällä vaikuttaa oleellisesti  $hp$ -algoritmin toimintaan. Edellä oleva valinta perustuu siihen, että Sobolev-säännöllisyys määritellään vastaavalla tavalla.

Käyttämällä esitettyä menetelmää sellaisenaan saadaan ratkaisulle  $u_h$  eri sileyks kuin skaalatulle funktiolle  $c_u u_h$  ( $c_u \in \mathbb{R}$ ). Yleisessä tapauksessa, jos kertoimia on riittävästi, tätä ongelmaa ei ole, sillä

$$\tilde{l}_i := \frac{\log((2i+1)/(2|c_u a_i|^2))}{2 \log i} = \frac{-\log |c_u|^2}{2 \log i} + l_i,$$

eli  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{l}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} l_i$ . On kuitenkin perusteltua vaatia, että funktioille  $u_h$  ja  $c_u u_h$  saadaan samat ominaisuudet. Olkoon  $u_h$  numeerinen ratkaisu alueen  $\Omega$  kolmioinnilla. Määritellään alue  $\tilde{\Omega}$  ja vastaava kolmiointi kuvauksen  $G : (x, y) \rightarrow (c_x x, c_y y)$  avulla:

$$\tilde{\Omega} := \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid (\tilde{x}, \tilde{y}) = G(x, y), (x, y) \in \Omega\}.$$

Funktio  $\tilde{u}_h$  määritellään skaalamaalla ratkaisua  $u_h$ :

$$\tilde{u}_h = c_u u_h \circ G^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Lasketaan Legendre-kertoimet  $\tilde{u}_h$ :lle alueen  $\tilde{\Omega}$  kolmiolla  $\tilde{K}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= c_{ij} \int_{\tilde{Q}} \tilde{u}_h \circ \tilde{F}(\xi, \eta) \hat{L}_{ij} |\det J_{\tilde{F}}|^{1/2} d\xi d\eta \\ &= c_{ij} \int_{\tilde{Q}} c_u u_h \circ F(\xi, \eta) \hat{L}_{ij} \left( \frac{|\tilde{\Omega}|}{|\Omega|} \right)^{1/2} |\det J_F|^{1/2} d\xi d\eta \\ &= c_u \left( \frac{|\tilde{\Omega}|}{|\Omega|} \right)^{1/2} a_{ij}, \end{aligned}$$

missä  $a_{ij}$ :t ovat ratkaisun  $u_h$  Legendre-kertoimia. Toisaalta funktion  $\tilde{u}_h$   $L^2$ -normille saadaan

$$\|\tilde{u}_h\|_{0,\tilde{\Omega}}^2 = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}_h^2 d\tilde{x}d\tilde{y} = \int_{\Omega} c_u^2 u_h^2 \left( \frac{|\tilde{\Omega}|}{|\Omega|} \right) dx dy = c_u^2 \frac{|\tilde{\Omega}|}{|\Omega|} \|u_h\|_{0,\Omega}^2,$$

joten

$$\frac{\tilde{a}_{ij}}{\|\tilde{u}_h\|_{0,\tilde{\Omega}}} = \frac{a_{ij}}{\|u_h\|_{0,\Omega}}.$$

Tässä ratkaisuja tarkastellaan skaalaamalla niiden  $L^2$ -normi ykköseksi. Legendre-kertoimet lasketaan siis kaavalla

$$a_{ij} := \frac{|K|^{1/2}}{2\|u_h\|_{0,\Omega}} c_{ij} \int_{\hat{Q}} u_h \circ F(\xi, \eta) \hat{L}_{ij} d\xi d\eta. \quad (31)$$

Edellisessä  $|K|^{1/2}/2$  on peräisin termistä  $|\det J_F|^{1/2}$ , joka todellisuudessa riippuu kolmion tapauksessa koordinaatista  $\eta$ . Termi kuitenkin sotkee kertoimien suppenemista, vaikka ratkaisu olisikin sileä, joten se tulkitaan tässä pinta-ala kertoimeksi. Toisaalta tällä tavalla jäljelle jäänyt integraali ei riipu suoraan kolmiosta  $K$ , joten se voidaan laskea elementtimenetelmän kantafunktioiden osalta valmiiksi.

Kuoriyhtälössä on viisi siirtymäkomponenttia, ja kaavaa (31) sovelletaan jokaiselle komponentille erikseen. Myös skaalaus suoritetaan komponentteittain. Yksi vaihtoehto olisi käyttää kaavan (31) nimittäjässä tekijää  $\|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}$ , jolloin normiltaan pienemmät komponentit vaikuttaisivat vähemmän asteluvun valintaan.

Lisäksi kaavoista (28) nähdään, että Legendre-kertoimia on oltava vähintään kolme, jotta menetelmää voidaan käyttää. Tämä tarkoittaa erityisesti sitä, että lineaariseen kanttaan ( $p = 1$ ) täytyy lisätä vähintään toista astetta olevia termejä. Tässä kannat  $p = 1$  ja  $p = 2$  määritellään siten, että ne sisältävät myös astetta  $p = 3$  olevan kuplafunktion.

### *hp*-algoritmi

Perusrakenteeltaan *hp*-algoritmi on yksinkertainen: Lasketaan elementtikohtaiset virhearviot, muokataan laskentaverkkoa joko tihentämällä valittuja elementtejä tai nostamalla elementtien astelukua ja lasketaan numeerinen ratkaisu uudella verkolla. Tässä algoritmiin halutaan sisällyttää myös vaihtoehto asteluvun laskemisesta. Elementin astelukua voidaan laskea kahdessa tapauksessa: Jos edellisessä vaiheessa nostetun elementin asteluku on liian suuri, lasketaan asteluku alkuperäiseksi ja jaetaan elementti. Toisaalta jos jaettavaksi tarkoitettulla elementillä on alunperin liian suuri asteluku, esim.  $p_e > \hat{p}_e + 1$ , lasketaan elementin astetta ennen jakamista. Tässä tapauksessa puolestaan seuraavassa vaiheessa tarkistetaan, oliko asteluvun laskeminen syntyvissä alielementeissä tarpeellista. Elementin astelukua voi olla tarpeellista rajoittaa myös globaalisti. Muutoin esitetty algoritmi voi lopulta suosittaa kulmasingulariteetin vieressä oleville elementeille asteluvun nostoa jollaisella askeleella. Tämä nimenomainen ongelma voidaan ratkaista lisätarkasteluilla, joita tässä ei käsitellä. Jatkossa suurimmaksi elementin asteluvuksi asetetaan  $p_{max} = 8$ .

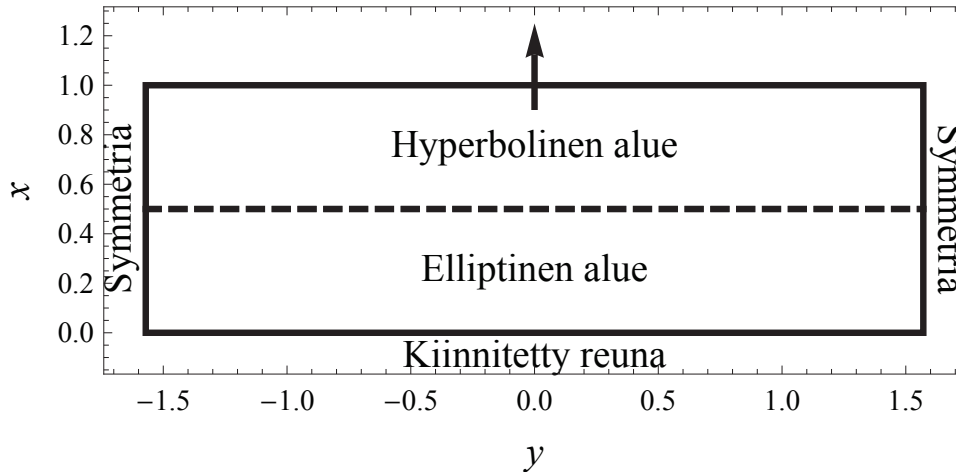
### *hp*-algoritmin *i*:s askel:

Oletetaan, että vaiheen  $i - 1$  numeerinen ratkaisu  $\mathbf{u}_h^{i-1}$  on laskettu elementtijaolla  $\mathcal{T}_h^{i-1}$  ja  $p$ -jakaumalla  $\mathbf{p}^{i-1}$ . Tavoitteena on laskea ratkaisu  $\mathbf{u}_h^i$  parantamalla ensin verkkoa ja/tai muuttamalla  $p$ -jakaumaa ratkaisusta  $\mathbf{u}_h^{i-1}$  saatavien indikaattorien perusteella. Verkon ja

$p$ -jakauman käsittelyä varten kerätään aluksi taulukot elementeistä, jotka on tarkoitus jakaa, tai joilla on tarkoitus nostaa tai laskea astelukua. Käytetään näille merkintöjä  $J_0^i$ ,  $N_0^i$  ja  $L_0^i$  vastaavasti. Vastaavasti käytetään merkintöjä  $J^i$ ,  $N^i$  ja  $L^i$  vaiheessa  $i$  toteutuneille toimenpiteille. Lisäksi listaan  $\tilde{N}^i$  kerätään elementit, joissa astelukua nostetaan  $p$ -jakauman tasoittamiseksi. Merkintöjen selventämiseksi elementtien astelukua sisältävää listaa merkitään yleisesti  $\mathbf{p}$ :llä, jonka voi tulkita esimerkiksi vaiheen  $i - 1$  jakaumaksi, ja jota muokkaamalla saadaan lopuksi vaiheen  $i$  jakauma  $\mathbf{p}^i$ .

1. Lasketaan elementtikohtaiset virhearviot  $\eta_e$ ,  $e = 1, \dots, E$ . Laskenta lopetetaan, jos globaali virhearvio  $\eta^2 = \sum_{e=1}^E \eta_e^2$  on pienempi kuin ennalta asetettu virheraja.
2. Kerätään muutettavien elementtien listaan  $M$  ne elementit  $e$ , joille pätee  $\eta_e \geq \alpha \max_{1 \leq i \leq E} \eta_i$ . Parametriksi voidaan asettaa esimerkiksi  $\alpha = 1/2$ .
3. Arvioidaan elementin suurimmat mahdolliset asteluvut edellä esitetyn luvun mukaisesti;  $\hat{p}_e$ ,  $e = 1, \dots, E$ .
4. Lajitellaan muutettavat elementit  $e \in M$  jaettaviin, nostettaviin ja laskettaviin:
  - (i) Jos  $p_e < \hat{p}_e$  ja  $p_e < p_{max}$ , niin  $e \rightarrow N_0^i$ .
  - (i) Jos  $p_e < \hat{p}_e$  ja  $p_e = p_{max}$ , niin  $e \rightarrow J_0^i$ .
  - (ii) Jos  $\hat{p}_e \leq p_e \leq \hat{p}_e + 1$ , niin  $e \rightarrow J_0^i$ .
  - (iii) Jos  $p_e > \hat{p}_e + 1$ , niin  $e \rightarrow J_0^i$  ja  $e \rightarrow L_0^i$ .
5. Tarkistetaan ja tarvittaessa korjataan vaiheessa  $i - 1$  tehtyjä valintoja. Tässä vaiheessa alustetaan lista  $\Delta \mathbf{p} := 0$ , johon kirjataan asteluvun nostamiset ja laskemiset.
  - (i) Elementeillä  $e \in N^{i-1}$ : Jos  $p_e > \hat{p}_e$ , niin  $\Delta p_e := -1$  ja  $e \rightarrow J_0^i$ .
  - (ii) Elementeillä  $e \in \tilde{N}^{i-1}$ : Jos  $p_e > \hat{p}_e$ , niin  $\Delta p_e := -1$ .
  - (iii) Elementeillä  $e \in L^{i-1}$ : Jos  $p_e < \hat{p}_e$ , niin  $\Delta p_e := +1$ .
  - (iv) Asetetaan uusi  $p$ -jakauma:  $\mathbf{p} := \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}$ .
  - (v) Tasoitetaan  $p$ -jakauma ja päivitetään  $\Delta \mathbf{p}$  sen mukaisesti.
6. Päivitetään verkko ja  $p$ -jakauma virheindikaattorien perusteella:
  - (i) Lasketaan astelukua ( $p_e := p_e - 1$ ) listan  $L_0^i$  elementeissä ja asetetaan  $L^i := L_0^i$ .
  - (ii) Tihennetään verkkoa listan  $J_0^i$  perusteella. Uudet elementit kirjataan listaan  $J^i$ .
  - (iii) Asetetaan  $N^i := N_0^i \setminus (N_0^i \cap J^i)$  ja nostetaan astelukua ( $p_e = p_e + 1$ ) listan  $N^i$  elementeissä. Tihentämisessä syntyneissä uusissa elementeissä ei siis nosteta astelukua.
  - (iv) Tasoitetaan  $p$ -jakaumaa ja kerätään päivitetetyt elementit listaan  $\tilde{N}^i$ . Poistetaan lisäksi päivitetetyt elementit laskettujen listalta:  $L^i := L^i \setminus (L^i \cap \tilde{N}^i)$ .
7. Asetetaan  $\mathbf{p}^i := \mathbf{p}$  ja lasketaan ratkaisu  $\mathbf{u}_h^i$  uudella diskretoinnilla  $(\mathcal{T}_h^i, \mathbf{p}^i)$ .

Asteluvun muuttaminen paikallisesti johtaa joskus hyvin epätasaiseen  $p$ -jakaumaan.  $p$ -jakaumaa tasoitetaan nostamalla astelukua elementeissä, joissa sitä ei alunperin pitänyt tehdä (algoritmissa kohdat 5.(v) ja 6.(iv)). Jos elementin  $e$  vähintään kahden vierekkäisen elementin,  $e_1$  ja  $e_2$ , asteluku on  $e$ :n astelukua suurempi,  $p_e < p_{e_1}, p_{e_2}$ , asetetaan  $p_e = \min\{p_{e_1}, p_{e_2}\}$ .



Kuva 3: Laskennallinen alue. Alue on transponoitu, joten symmetriareunat ovat vasemmassa ja oikeassa reunassa ( $y = \pm\pi/2$ ). Katkoviiva esittää parabolisen viivan sijainnin ( $x = 1/2$ ). Kuorman vaikutuskohta on merkitty nuolella ( $y = 0, x = 1$ ).

### Koejärjestely

Tarkastellaan funktion  $\Phi(x) = 1/2 + \sin(2\pi x)/8$ ,  $x \in [0, 1]$ , määrittämää pyörähdyskuorta suhteellisen paksuuden vaihdellessa välillä  $t \in [10^{-6}, 10^{-2}]$  (Kuva 1). Kinemaattiset rajoitukset asetetaan siten, että reunalla  $x = 0$  kaikki siirtymät on estetty, mutta reuna  $x = 1$  on vapaa. Formaalisti kuorma on symmetrinen pistekuorma, joka vaikuttaa vapaalla reunalla, esimerkiksi pisteissä  $(1, 0)$  ja  $(1, \pi)$ . Pistekuormaa approksimoidaan nopeasti vaimenevalla eksponenttifunktiolla:

$$f(x, y) = \exp(-100((x - 1)^2 + y^2)), \quad (32)$$

pisteessä  $(1, 0)$ . Kuorma vaikuttaa amforan kaulan tason suuntaisesti eli  $u$ -komponenttiin. Symmetrisen kuorman ansiosta kaksiulotteinen laskennallinen alue voidaan siis puolittaa,  $\Omega = [0, 1] \times [-\pi/2, \pi/2]$ , ja symmetriareunaehdot viivoilla  $y = -\pi/2$  ja  $y = \pi/2$  (Kuva 3).

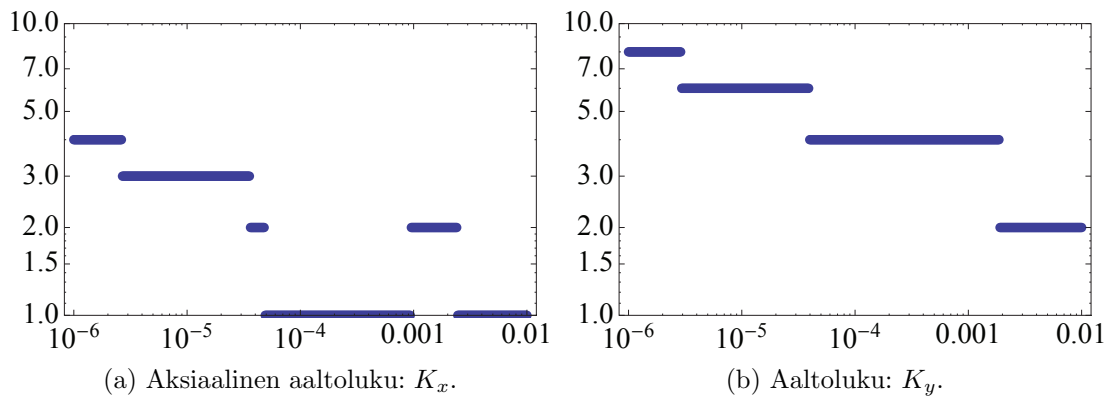
Numeerisissa kokeissa kuormaa ei muuteta paksuuden vaihdellessa, minkä vuoksi saatujen siirtymien lukuarvot ovat epätavallisen suuria ohuilla kuorilla. Tämä ei aiheuta ongelmia, koska mahdollisten reunahäiriöiden amplitudien suhteet maksimaalisiin muodonmuutoksiin säilyvät muuttumattomina.

### 1D-muoto

Tehtävä voidaan palauttaa yksiulotteiseksi kehittämällä kuorma  $\pi$ -jaksolliseksi Fourierin kosini-sarjaksi kulmasuunnassa. Tällöin alkuperäisen tehtävän ratkaisu on lineaariyhdistely eri aaltolukuja vastaavista ratkaisuista. Ratkaisumenetelmä on analyttis-numeerinen, yksiulotteiset osaongelmat saadaan ratkaistua adaptiivisesti erittäin suurella tarkuudella jopa niin, että kaksiulotteisissa ratkaisuissa yleensä saavuttamaton  $t$ -reunahäiriö tulee täysin huomioitua.

### 2D-muoto

Tehtävän voi toki ratkaista myös määritelmän mukaisena kaksiulotteisena tehtävänä. Edelläkuvatun yksiulotteisen muodon ansiosta kaksiulotteista ratkaisua voi arvioida luotettavasti, vaikka analyttistä ratkaisua ei tunnetakaan.



Kuva 4: Aaltoluku paksuuden funktiona: Parametri  $-\log t$ . Logaritminen asteikko.

### Tulokset

Kuvassa 4 on esitettyä ratkaisun aaltoluvut kuoren paksuuden funktiona. Kuvajaat on muodostettu laskemalla 400 tehtävää eri  $t$ :n arvoilla välillä  $[10^{-6}, 10^{-2}]$ . Havaitaan, että y-akselin suuntaiset aaltoilut noudattavat varsin hyvin ennustettua  $-\log t$  -riippuvuutta (Kuva 4(b)). Huomattakoon, että tehtävän symmetrisyyden vuoksi vain parilliset aaltoluvut  $K_y$  ovat mahdollisia. Hypyt kuvajaissa on tulkittava siten, että suurinta amplitudia vastaava aaltoluku vaihtuu. Muutos on jatkuva, eikä ratkaisun luonteessa tapahdu dramaattisia muutoksia. Hypyt tapahtuvat yhä nopeammin, kun  $t \rightarrow 0$ . Mikään ei estä hypyä tapahtumasta yli seuraavan vuorossa olevan arvon. Muutoksen voi ennustaa seuraamalla amplitudien suhdetta jo suuremmilla  $t$ :n arvoilla.

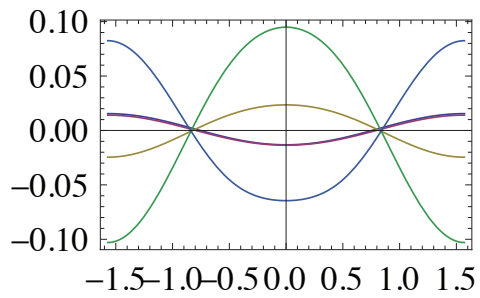
Aksiaalinen aaltoilu (Kuva 4(a)) kasvaa hitaammin, eikä edes monotonisesti. Kuvista 7 ja 8 ilmenee, että aksiaaliset siirtymät ovat muotoa  $\sim \exp(kx) \sin(K_x x)$ , missä  $k > 0$  vakio ja  $K_x$  on aksiaalinen aaltoluku. Aksiaalisen aaltoilun luonteesta ei ole eksaktia teoriaa, mutta siirtymien muoto on tulomuotoinen yhdistelmä sensitiivisen elliptisen ja sensitiivisen hyperbolisen kuoren ominaisratkaisuksista.

Vertailemalla siirtymien amplitudien kasvua kuvapareissa (5, 6) ja (7, 8) havaitaan, että amplitudien kasvu on niin voimakasta, että kaikki reunahäiriöilmiöt, myös sisäiset, jäävät sen peittoon. Lisäksi vertailemalla kuvapareja (7, 8) ja (9, 10) todetaan, että ohuemmissa tapauksissa muodonmuutokset ovat suhteessa suurempia hyperbolisessa osassa.

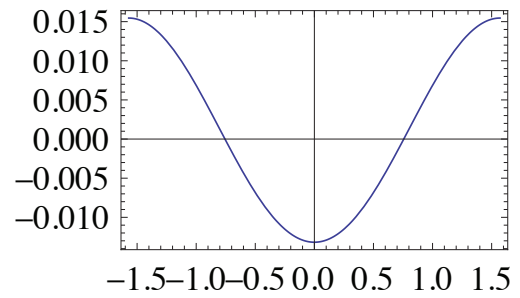
Kuitenkin, kuvan 10 perusteella on syytä uskoa, että singulariteetin propagoituminen hyperbolisen osan karakteristikkaa pitkin määrää maksimaalisen amplitudin sijainnin parabolisella viivalla  $x = 1/2$ . Karakteristikkaa pitkin kulkevan piirteen leveys ei kuitenkaan riipu kuoren paksuudesta suoraan vaan ainoastaan aaltolukujen kautta. Kuvan 4(b) vöillä piirteen leveys kasvaa ylärajanaan seuraavan  $K_y$ :n määräämä leveys.

### Adaptiivinen ratkaisu

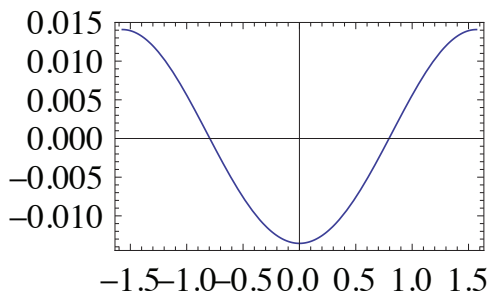
Tarkastellaan seuraavaksi adaptiivista 2D-ratkaisua kuoren paksuudella  $d = 1/1000$ . Kuvassa 11 on esitetty alkukonfiguraatio eli verkko ja  $p$ -jakauma, joka alussa on vakio  $p = 2$  kaikissa elementeissä. Havaitaan, että algoritmi havaitsee ensin suuret, sileät piirteet ratkaisussa ja korottaa ensin astelukua yli koko alueen. Vasta sitten, kun koko kuoren yli ulottuva, globaali piirre on riittävän hyvin approksimoitu, vapaalla reunalla olevat eksponentiaalisesti vaimenevat komponentit havaitaan ja verkkoa tihennetään voimakkaasti.



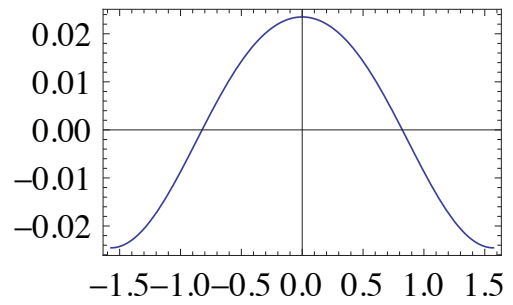
(a) Kaikki yhdessä



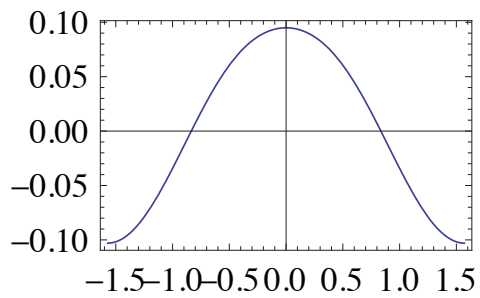
(b) 1. komponentti (u)



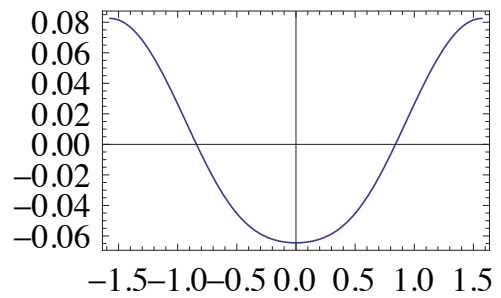
(c) 2. komponentti (v)



(d) 3. komponentti (w)



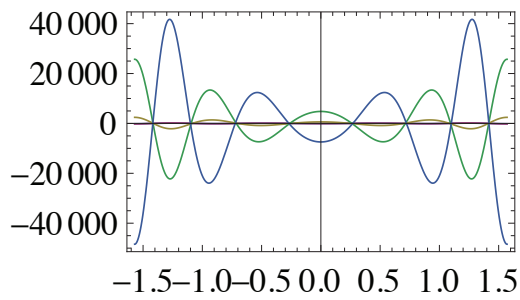
(e) 4. komponentti ( $\theta$ )



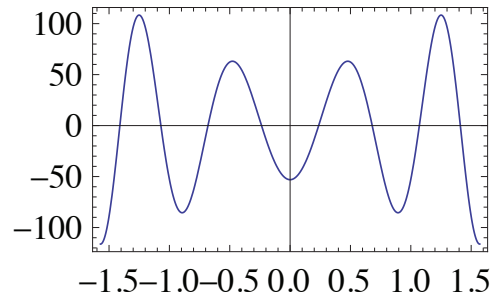
(f) 5. komponentti ( $\psi$ )

Kuva 5: Siirtymät viivalla  $x = 1/2$ , kun  $t = 1/100$ .

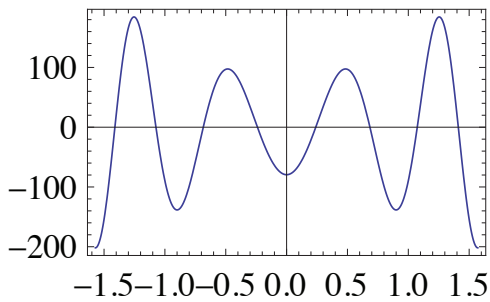




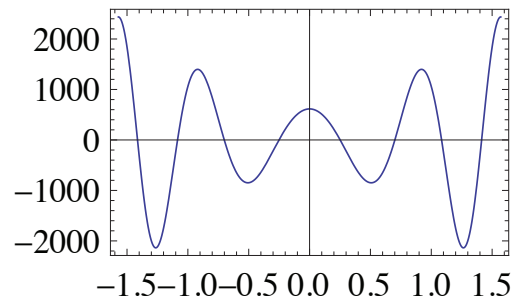
(a) Kaikki yhdessä



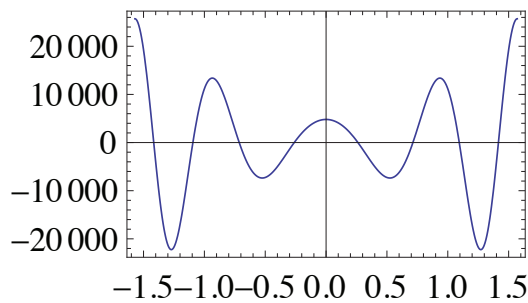
(b) 1. komponentti (u)



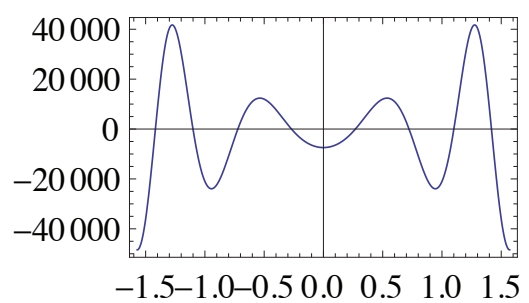
(c) 2. komponentti (v)



(d) 3. komponentti (w)

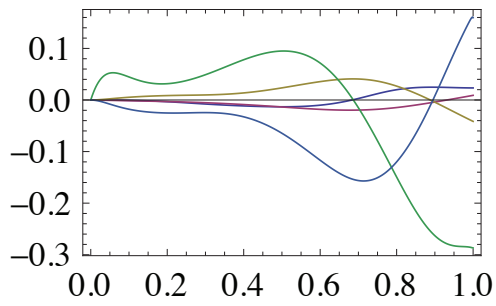


(e) 4. komponentti ( $\theta$ )

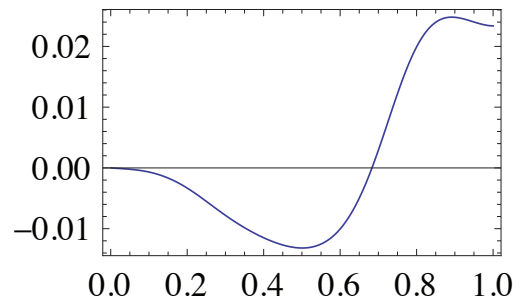


(f) 5. komponentti ( $\psi$ )

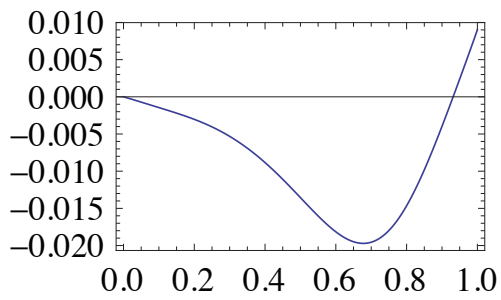
Kuva 6: Siirtymät viivalla  $x = 1/2$ , kun  $t = 1/10^6$ .



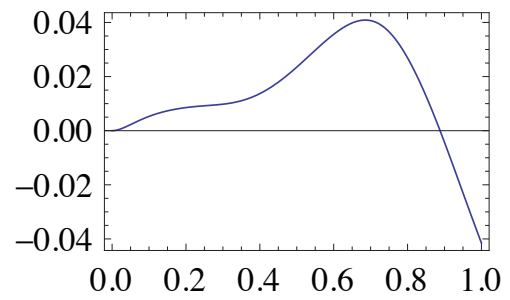
(a) Kaikki yhdessä



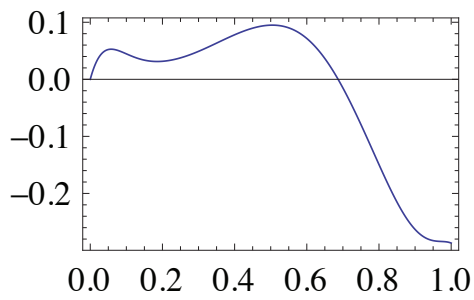
(b) 1. komponentti (u)



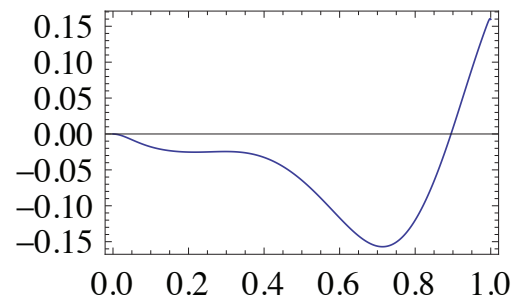
(c) 2. komponentti (v)



(d) 3. komponentti (w)

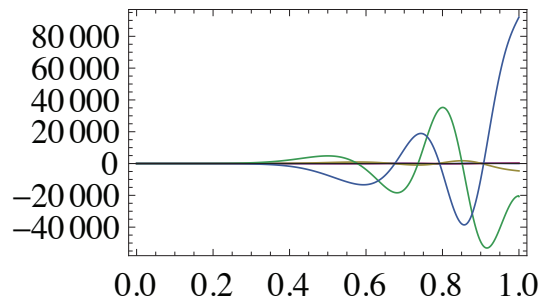


(e) 4. komponentti ( $\theta$ )

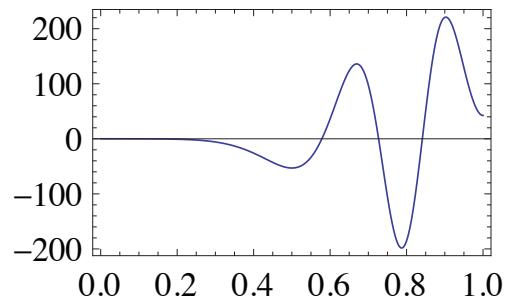


(f) 5. komponentti ( $\psi$ )

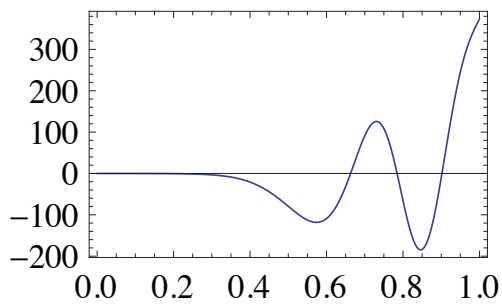
Kuva 7: Siirtymät viivalla  $y = 0$ , kun  $t = 1/100$ .



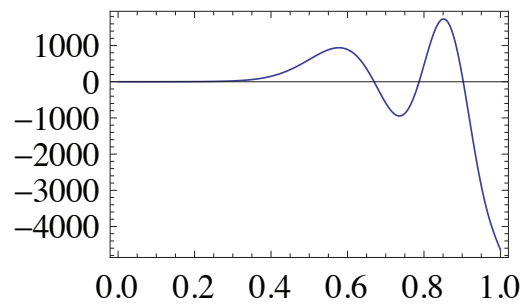
(a) Kaikki yhdessä



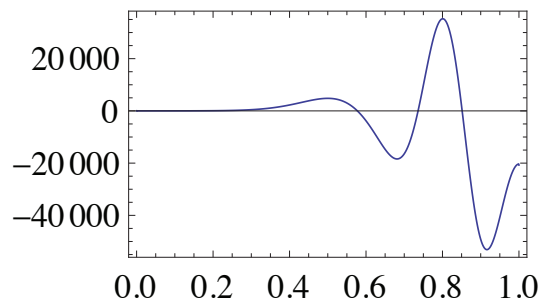
(b) 1. komponentti (u)



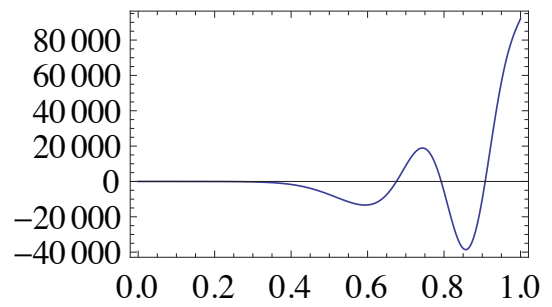
(c) 2. komponentti (v)



(d) 3. komponentti (w)

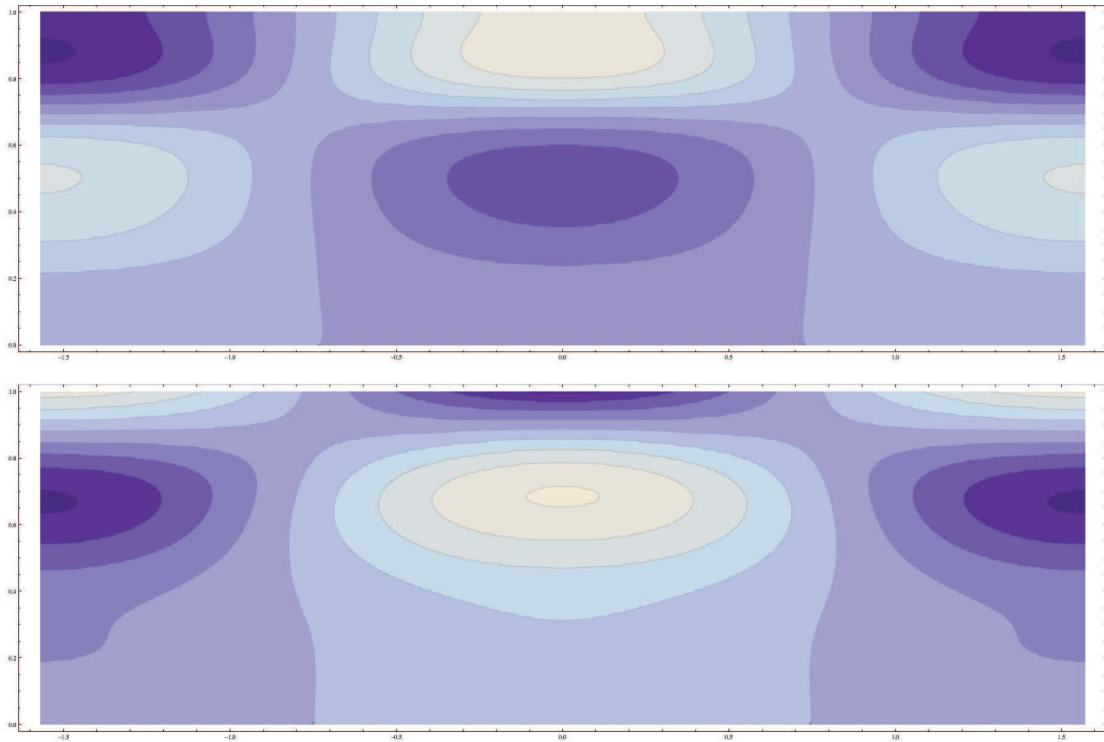


(e) 4. komponentti ( $\theta$ )

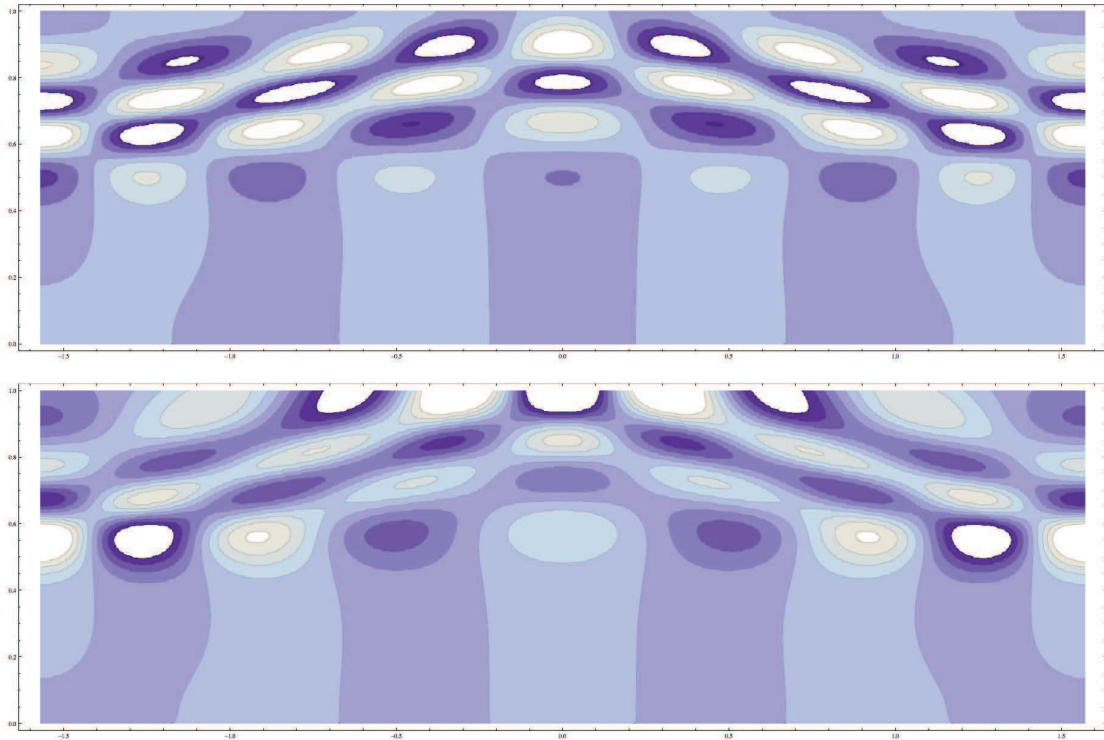


(f) 5. komponentti ( $\psi$ )

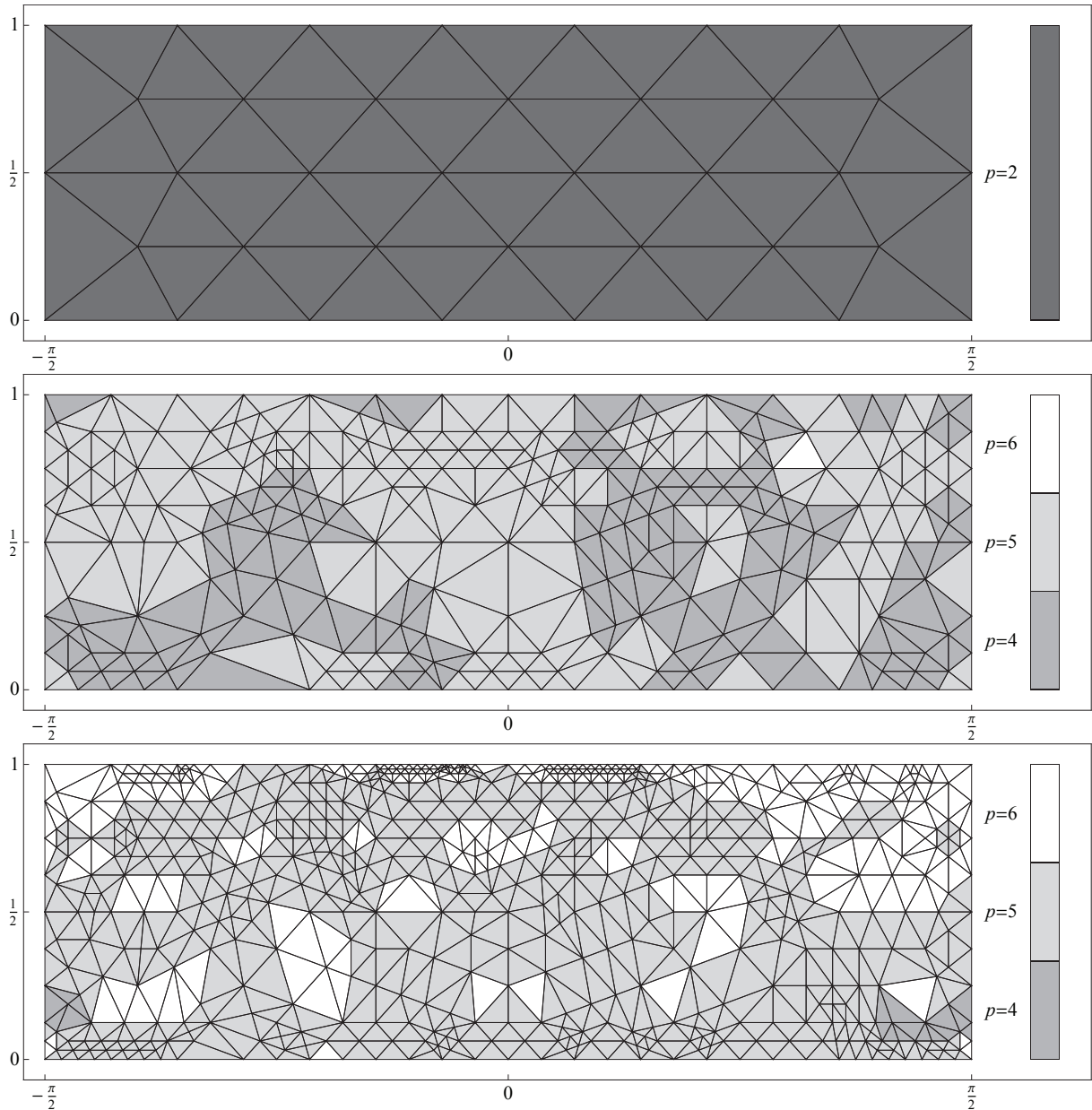
Kuva 8: Siirtymät viivalla  $y = 0$ , kun  $t = 1/10^6$ .



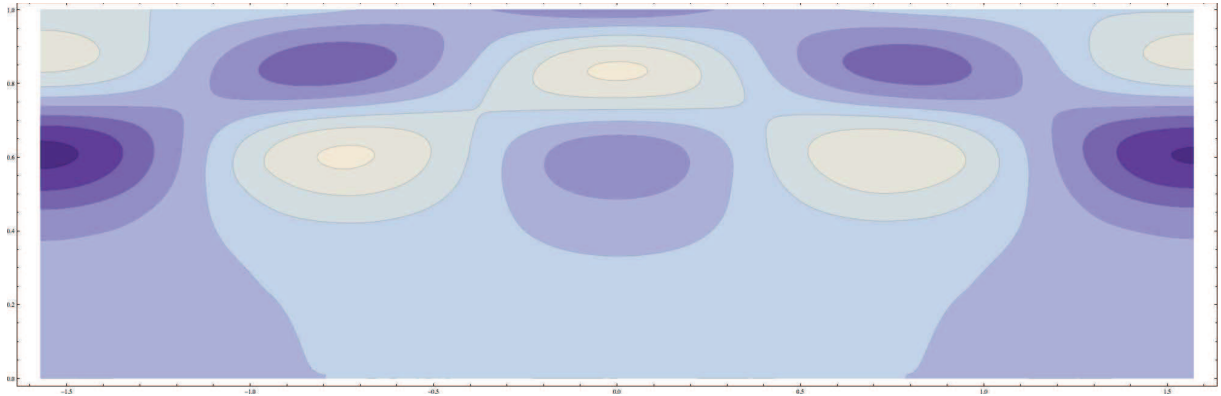
Kuva 9:  $u$ - ja  $w$ -siirtymät transponoidussa laskennallisessa alueessa  $[-\pi/2, \pi/2] \times [0, 1]$ , kun  $t = 1/100$ .  $u$ -komponentti on ylempi. Tumma väri ilmaisee pienintä, vaalea suurinta siirtymää.



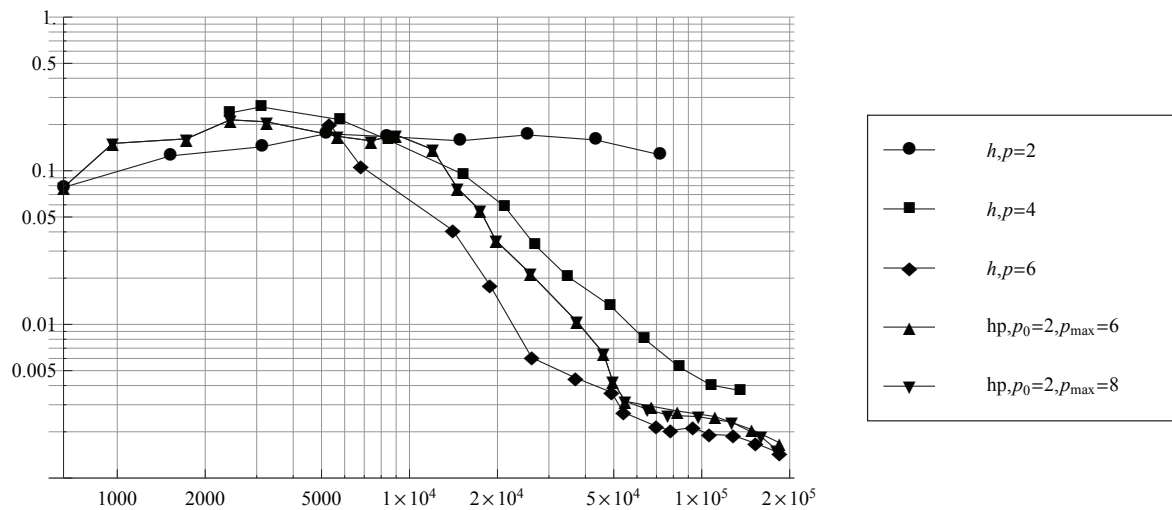
Kuva 10:  $u$ - ja  $w$ -siirtymät transponoidussa laskennallisessa alueessa  $[-\pi/2, \pi/2] \times [0, 1]$ , kun  $t = 1/10^6$ .  $u$ -komponentti on ylempi. Tumma väri ilmaisee pienintä, vaalea suurinta siirtymää. Suurten vaihteluiden takia ääripäät on leikattu pois, mikä näkyy kuvassa valkoisina alueina. Hyperbolisen osan karakteristikat ovat luettavissa kuvasta.



Kuva 11: Adaptiivisen ratkaisun verkkoja ja  $p$ -jakaumia, kun  $t = 1/1000$ . Alkutila ei sisällä *a priori* -tietoa ratkaisun piirteistä. Algoritmi etsii globaalien piirteiden ensin nostamalla astetta yli koko alueen. Viimeisessä vaiheessa vapaan reunan aaltoilu ratkaistaan verkkoa tihentämällä.



Kuva 12: Adaptiivisen ratkaisun erään vaiheen  $w$ -komponentti transponoidussa laskennallisessa alueessa  $[-\pi/2, \pi/2] \times [0, 1]$ , kun  $t = 1/1000$ . Algoritmi on asteennosto-vaiheessa, eikä vapaan reunan ilmiötä vielä erotu. Tumma väri ilmaisee pienintä, vaalea suurinta siirtymää.



Kuva 13: Virheindikaattori eri adaptiivisilla strategioilla, kun  $t = 1/1000$ . Strategiat:  $h, p = 2$ ,  $h, p = 4$ ,  $h, p = 6$ ,  $hp, p_0 = 2$  ( $p_{max} = 6$ ),  $hp, p_0 = 2$  ( $p_{max} = 8$ ). Strategiat kirjoitetaan notaatiolla, missä ensin ilmaistaan adaptiivisuuden laji, joko  $h$  tai  $hp$ , ja seuraavaksi pilkulla erotettuna joko vakio- tai aloitusaste. Adaptiivinen strategia voittaa aina lopulta. Logaritminen asteikko. Vaaka-akselilla on vapausasteiden lukumäärä.

Kuvassa 12 on esitetty ratkaisun  $w$ -komponentti algoritmin asteennostovaiheesta. Vain globaali piirre on näkyvissä.

Adaptiivisen  $hp$ -ratkaisun vaiheet voi lukea myös indikaattorin suppenemista kuvaavasta kuvasta 13. Strategiat kirjoitetaan notaatiolla, missä ensin ilmaistaan adaptiivisuuden laji, joko  $h$  tai  $hp$ , ja seuraavaksi pilkulla erotettuna joko vakio- tai aloitusaste. Molemmat  $hp, p_0 = 2$ -ratkaisut suppenevat ensin nopeasti vastaten globaalia piirrettä, kunnes suppenemisnopeus vaihtuu toiseksi, missä ratkaistavat piirteet ovat paikallisia ja eksponentiaalisesti vaimenevia. Kuten kuvasta nähdään, perinteinen 2D-tihennys verkossa on tehotonta.

Huomionarvoista on myös, että  $h, p = 2$ -strategia ei suppene käytännöllisesti lainkaan, mutta  $h, p = 4$ -strategia suppenee, tosin hitaammin kuin  $hp$ -strategiat. Kyse on numeerisesta lukkiutumisesta, jonka vaikutuksen riittävän korkea asteluku  $p$  lieventää.

## Päätelmät

Pyörähdyskuoret muodostavat käyttökelpoisen tehtäväluokan sekä erilaisten ilmiöiden että ratkaisumenetelmien tutkimiseen.  $hp$ -adaptiivisen algoritmin toimintaa yleisessä tapauksessa voi sopivissa tilanteissa testata palauttamalla tehtävä yksiulotteiseksi (tai saraksi sellaisia). Työssä esitelty uusi ratkaisualgoritmi toimii hyvin sekä 1D- ja 2D-muodossaan. Tarkasteltu esimerkkitehtävä, amfora, on perinteisen analyysin kannalta hankala, koska kuoren geometrian laji vaihtuu elliptisestä hyperboliseen. Numeeristen menetelmien avulla, kunhan virhe on kontrolloitu ja numeerinen lukkiutuminen on huomioitu, voimme suurella varmuudella analysoida elliptisen osan ilmiön vuorovaikutusta hyperbolisen osan kanssa. Kompleksifikaatio etenee hyperboliseen osaan pinnan karakteristikoita pitkin ja normaalien reunahäiriöiden amplitudit ovat merkityksettömiä.

## Viitteet

- [1] E. ARTIOLI, L. BEIRAÕ DA VEIGA, H. HAKULA ja C. LOVADINA. On the asymptotic behaviour of shells of revolution in free vibration. *Computational Mechanics*, 44: 45–60, 2009.
- [2] F. BÉCHET, E. SANCHEZ-PALENCIA ja O. MILLET. Computing singular perturbations for linear elliptic shells. *Computational Mechanics*, 42: 287–304, 2008.
- [3] D. BRAESS, *Finite Elements. Theory, fast solvers and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, 2001.
- [4] P. HOUSTON, B. SENIOR ja E. SÜLI. Sobolev regularity estimation for  $hp$ -adaptive finite element methods, in: *Proceedings of ENUMATH 2001 the 4th European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications*. Ischia, July 2001, 631–656.
- [5] M. MALINEN. On the classical shell model underlying bilinear degenerated shell finite elements: general shell geometry. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(6): 629–652, 2002.
- [6] J. PITKÄRANTA, A.-M. MATACHE ja C. SCHWAB. Fourier mode analysis of layers in shallow shell deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190: 2943–2975, 2001.

[7] B. A. SZABÓ ja I. BABUSKA. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1991.

[8] T. TUOMINEN, *Lisensiaatintutkimus*, Aalto-yliopisto, 2010.

Harri Hakula, Tomi Tuominen

Aalto-yliopiston teknillinen korkeakoulu

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

PL 11100

00076 Aalto

s-posti: `Harri.Hakula@tkk.fi`, `tatuomin@cc.hut.fi`