

Laminoidun Reißner–Mindlin-komposiittilaatan virheanalyysi

Juho Könnö

Tiivistelmä. Artikkelissa esitetään yleinen virheanalyysitekniikka laminoidulle komposiittilaatalle käyttäen ensimmäisen asteen laminaattiteoriaa sekä elementtimenetelmää. Osoitamme, että käyttämällä tarkkuudeltaan yhdenvertaisia menetelmiä laatta- ja tasoelastisuustehtävälle, myös laminaatille käytetyn yhdistetyn mallin virhe suppenee optimaalisesti.

Avainsanat: komposiitti, laminaatti, laatta, Reißner–Mindlin, elementtimenetelmä

Johdanto

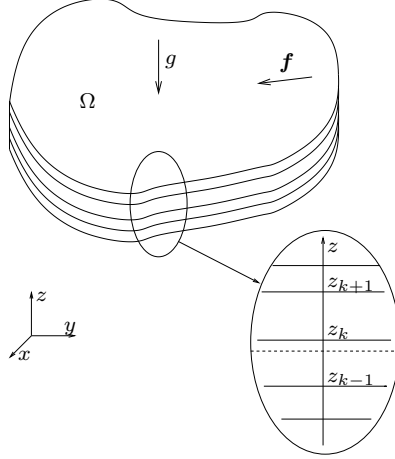
Laminoitujen komposiitti- ja sandwich-rakenteiden käyttö on viime vuosikymmeninä kasvanut merkittävästi rakenteiden mekaniikan sovelluksissa. Komposiittirakenteiden suosion taustalla ovat niiden painoonsa nähden erinomainen kuormankantokyky, sekä kyky kantaa kuormaa vielä nurjahdustilassa. Varsin usein komposiittirakenteet ovat mallinnettavissa joko kuori- tai laattamallilla, joista jälkimmäistä tarkastellaan tässä artikkelissa. Esimerkeinä komposiittilaattamallin sovelluksesta rakenteiden mekaniikkaan mainittakoon mineraalivillasta ja teräslevystä valmistettujen rakennepaneelien analysointi, sekä esimerkiksi laminoitujen puurakenteiden lujuuden määrittäminen. Tyypillisesti laminoiduissa rakenteissa voidaan vaikuttaa eri kerrosten kuitusuuntiin, mikä antaa monesti laajoja mahdollisuuksia rakenteiden optimointiin. Teollisuudessa tyypillisiä sovellusaloja ovat esimerkiksi lentokoneiden kevytrakennetekniikka ja monet muut rakenteiden keveyttä ja lujuutta vaativat erikoisalajat. Varsinkin rakenteet joissa paneeleilta vaaditaan erilaisia kuormitettavuusominaisuuksia eri suuntiin soveltuvat erityisen hyvin komposiittimateriaaleilla toteutettaviksi.

Malli komposiittilaatalle pohjautuu ensimmäisen asteen laminaattiteoriaan [13], jossa laminaatti mallinnetaan kytkemällä tasoelastisuustehtävä sekä laattatehtävä toisiinsa. Laatan oletetaan noudattavan Reißnerin ja Mindlinin kinemaattisia otaksumia. Esitämme ensin tehtävän energian minimointiongelmana, ja johdamme vastaavan heikon muodon tehtävän diskretoimiseksi elementtimenetelmällä. Erityishuomio keskittyy levy- ja laatta-tehtävien kytkennän analysointiin. Johdamme riippuvuuden kytkentätermin jatkuvuus- ja elliptisyysvakioiden sekä laatan paksuussuuntaisen rakenteen välille, minkä avulla pääsemme käsiksi mahdollisiin numeriikan ongelmakohtiin erilaisille paksuusprofileille.

Laminoitu Reißner–Mindlin-laatta

Tarkastelemme laminoitua laattarakennetta, jonka paksuus on t , alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Siirtymämenetelmän tuntemattomat muuttujat ovat laatan taipuma w , laatan normaalin

kiertymävektori β , sekä tasosiirtymävektori \mathbf{u} . Laatan kuormitus on jaettu kolmeen osaan, tason suuntaiseen kuormitukseen \mathbf{f} , momenttikuormaan \mathbf{G} sekä kohtisuoraan kuormaan g . Ensimmäisen asteen laminaattiteoriassa yhteys tasosiirtymien sekä laatan taipumasuurien välille saadaan suoraan konstitutiivisten yhtälöiden välityksellä. Jatkossa kreikkalaisin kirjaimin kirjoitetut alaindeksit saavat arvot 1 ja 2, muiden indeksien saadessa arvot 1, 2 ja 3. Laatan rakenne on esitetty kuvassa 1.



Kuva 1. Komposiittilaatan rakenne

Konstitutiiviset yhteydet yhdelle kerrokselle

Olkoon ϕ tietyn kerroksen koordinaatiston rotaatiokulma. Määritellään rotaatiomatriisi

$$T = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Tämän avulla voimme muuntaa niin konstitutiivisen tensorin kuin jännitykset että venymät lokaaleista koordinaateista globaaleihin. Indeksnotaatiossa konstitutiivisen tensorin \mathbf{C} muunnos voidaan kirjoittaa muotoon [5], missä yläpuolisella aaltoviivalla merkitään konstitutiivista tensoria yhden laminaattikerroksen koordinaatistossa.

$$C_{ijkl} = T_{ip}T_{jq}T_{kr}T_{ls}\tilde{C}_{pqrs}. \quad (2)$$

Oletetaan, että materiaali on ortotrooppista jokaisessa kerroksessa. Tällöin konstitutiivisen tensorin nolasta poikkeavat komponentit voidaan kirjoittaa lokaalien kimmomodulien E_1, E_2 , Poissonin luvun ν_{12} , sekä liukumodulien G_{12}, G_{23}, G_{31} avulla seuraavasti [6]:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), & C_{2222} &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ C_{1122} &= \nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), & C_{1212} &= G_{12}, \\ C_{2323} &= G_{23}, & C_{3131} &= G_{31}. \end{aligned} \quad (3)$$

Koko laatan konstituiviset yhteydet

Komposiittilaminaatin mallintamiseksi yhdistämme Reißner–Mindlin-laattateorian kinemaattisiin otaksumiin levyteorian mukaiset laatan suuntaiset venymät. Laatussa siis otetaan huomioon myös leikkausjännitykset ensimmäisen asteen approksimaationa. Tällöin

saadaan seuraavat ensimmäiset asteen laminaattiteorian mukaiset kinemaattiset otaksumat [14, 9]

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + z\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\beta}), \quad (4)$$

$$\epsilon_{3\alpha} = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} - \beta_\alpha, \quad (5)$$

$$\epsilon_{33} = 0. \quad (6)$$

Hyödyntäen näitä otaksumia sekä yhdelle kerrokselle kirjoitettua konstitutiivista yhteyttä, voidaan jännitys- ja leikkausvoimaresultantit \mathbf{N} ja \mathbf{S} , sekä momenttiresultantti \mathbf{M} kirjoittaa integroimalla laatan paksuuden yli. Käytämme merkintää \mathbf{C}_k kerrokseen k liittyvälle konstitutiiviselle tensorille globaaleissa koordinaateissa. Oletetaan lisäksi, että yksittäiset kerrokset ovat paksuussuunnassa homogeenisia. Tällöin resultantit ovat [6]

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{B} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\beta}), \quad (7)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\beta}), \quad (8)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^* \cdot (\nabla w - \boldsymbol{\beta}). \quad (9)$$

Tensorit \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} ja \mathbf{A}^* on määritelty seuraavasti

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} C_{\alpha\beta\gamma\delta} dz = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) C_{\alpha\beta\gamma\delta}^k, \quad (10)$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} C_{\alpha\beta\gamma\delta} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) C_{\alpha\beta\gamma\delta}^k, \quad (11)$$

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} C_{\alpha\beta\gamma\delta} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (z_k^3 - z_{k-1}^3) C_{\alpha\beta\gamma\delta}^k, \quad (12)$$

$$A_{\alpha\beta}^* = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} C_{3\alpha 3\beta} dz = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) C_{3\alpha 3\beta}^k. \quad (13)$$

On huomionarvoista, että nämä suureet voidaan laskea etukäteen ilman laatan paksuuden yli tapahtuvaa numeerista integrointia.

Laattayhtälöiden heikko muoto

Laatan kokonaisenergia voidaan kirjoittaa nyt helposti integroimalla venymien ja voimaresultanttien tuloa alueen Ω yli. Käyttämällä muuttujille skaalausta

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \rightarrow \frac{1}{t} \mathbf{u}, \\ \boldsymbol{\beta} \rightarrow \boldsymbol{\beta}, \\ w \rightarrow w \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \rightarrow \frac{1}{t} \mathbf{A}, \\ \mathbf{B} \rightarrow \frac{1}{t^2} \mathbf{B}, \\ \mathbf{D} \rightarrow \frac{1}{t^3} \mathbf{D}, \\ \mathbf{A}^* \rightarrow \frac{1}{t} \mathbf{A}^* \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} \rightarrow \frac{1}{t^2} \mathbf{f}, \\ g \rightarrow \frac{1}{t^3} g, \\ \mathbf{G} \rightarrow \frac{1}{t^3} \mathbf{G} \end{array} \right\}, \quad (14)$$

saadaan laatan kokonaisenergia skaalattuna kertoimella t^{-3} muotoon [2]

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathbf{u}, w, \boldsymbol{\beta}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta}) d\Omega \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta}) d\Omega \\
&+ \frac{1}{2t^2} \int_{\Omega} (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{A}^* \cdot (\nabla w - \boldsymbol{\beta}) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\beta} d\Omega - \int_{\Omega} g w d\Omega.
\end{aligned} \tag{15}$$

Energian minimointitehtävän heikko muoto on tällöin etsiä kolmikko $(\mathbf{u}, w, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{U} \times W \times \mathbf{V} \subset [H^1(\Omega)]^2 \times H^1(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^2$ siten, että pätee

$$(\mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) + (\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} \tag{16}$$

ja

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})) + (\mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})) \\
&+ t^{-2}(\mathbf{A}^* \cdot (\nabla w - \boldsymbol{\beta}), (\nabla w - \boldsymbol{\eta})) = (g, w) + (\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta}), \quad \forall (w, \boldsymbol{\eta}) \in W \times \mathbf{V}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Näistä ensimmäinen yhtälö on tasoelastisuustehtävä, ja toinen laatan puhdas taivutus-tehtävä. Nämä tehtävät kytkeytyvät toisiinsa tensorin \mathbf{B} sisältävän termin kautta. Tällöin mikäli voimme osoittaa kytkentätermin käytöksen halutunlaiseksi, seuraa yhdistetyn elementtimenetelmällä diskretoituneen tehtävän konvergenssi osatehtävien konvergenssiominaisuuksista.

KytKentätermin analysointi

Kantavana ajatuksena on osoittaa kytketyn tehtävän elliptisyys ja jatkuvuus. Merkitään yhden laminaattikerroksen paksuutta

$$t_k = z_k - z_{k-1}. \tag{18}$$

Seuraava tulos pätee mielivaltaiselle laminaatin paksuusjakaumalle [9].

Lause 1. *On olemassa vakiot C_1, C_2 siten, että kaikille symmetrisille tensoreille $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} \in [L^2(\Omega)]^4$ pätee*

$$C_1(\|\boldsymbol{\tau}\|_0^2 + \|\boldsymbol{\sigma}\|_0^2) \leq (\mathbf{A} : \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) + 2(\mathbf{B} : \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}) + (\mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \leq C_2(\|\boldsymbol{\tau}\|_0^2 + \|\boldsymbol{\sigma}\|_0^2), \tag{19}$$

missä $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ ovat edellämainitut konstitutiiviset tensorit, sekä $\mathbf{C} \in [L^2(\Omega)]^{4 \times 4}$ on symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Merkitsemällä ohuimman kerroksen ja koko laatan paksuuden suhdetta $\delta = \frac{1}{t} \min_k t_k$, saadaan vakioille riippuvuudet $C_1 \sim n\delta^3$ ja $C_2 \sim 1$, missä n on kerrosten lukumäärä.

Edellisen perusteella tehtävän jatkuvuus ei siis riipu lainkaan laminaatin paksuusjakaumasta. Alaraja sen sijaan riippuu sekä kerrosten määrästä että ohuimman kerroksen

suhteellisen paksuuden kolmannesta potenssista. Täten elliptisyysvakio huononee radikaalisti, mikäli laatassa on erittäin ohuita kerroksia. Toisaalta alarajalle voidaan johtaa myös yhteys [9]

$$C_1 \sim (\max_k t_k)^3. \quad (20)$$

Täten jos laatassa on yksikin suhteellisen paksu kerros, pysyy elliptisyysvakio vielä kohutuullisena. Tilanne on hyvin tyypillinen esimerkiksi sandwich-rakenteissa, joissa on yksi huomattavan paksu kerros keskellä, sekä mahdollisesti useita hyvin ohuita pintakerroksia. Käytännön kannalta on tärkeää tietää vakioiden käyttäytyminen, sillä elliptisyysvakio vaikuttaa suoraan jäykkyydsmatriisiin häiriöalttiuteen vaikeuttaen yhtälöryhmän ratkaisua. Toisaalta tilanteet, joissa laminaatti koostuu kymmenistä tai sadoista äärimmäisen ohuista kerroksista ovat jokseenkin harvinaisia, joten voidaan todeta kytkennän käyttäytyvän useimmissa sovellusten kannalta relevanteissa tilanteissa hyvin.

Elementtimenetelmä kytketylle tehtävälle

Tarkastelemme nyt yhdistetyn tehtävän diskretointia elementtimenetelmällä, aloittaen laattatehtävän käsittelystä. Reißner–Mindlin-laatalle on kehitetty useita elementtejä, eräs tunnetuimmista on MITC elementtiperhe [7, 10], jossa lukkiutumisongelma vältetään leikkausvoiman projektion avulla. Lisäksi lukkiutumisen estämiseen on esitetty muun muassa epäjatkuvan Galerkinin menetelmän hyödyntämistä [1] sekä ali-integrointia. Jälkimmäisen tavan ongelmana on, ettei konvergenssia voida leikkausvoiman osalta taata, ja menetelmä on herkkä lukkiutumaan ohuilla laatoilla. Jatkossa käsittelemme yksinkertaisuuden vuoksi alimman asteen stabiloitua MITC-elementtiä [12] nelikulmioille, mutta yhdistetyn mallin analyysi yleistyy samoin muillekin laattaelementeille.

Stabiloidut MITC-elementit

Käytetään merkintää \mathcal{K}_h nelikulmioverkolle alueessa Ω . Tällöin elementtiavaruuudet ovat

$$\mathbf{V}_h = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V} \mid \boldsymbol{\eta}|_K \in [Q_1(K)]^2, \forall K \in \mathcal{K}_h\}, \quad (21)$$

$$W_h = \{w \in W \mid w|_K \in Q_1(K), \forall K \in \mathcal{K}_h\}, \quad (22)$$

$$\mathbf{U}_h = \{\mathbf{u} \in \mathbf{U} \mid \mathbf{u}|_K \in [Q_1(K)]^2, \forall K \in \mathcal{K}_h\}, \quad (23)$$

missä $Q_1(K)$ ovat elementin K bilineaariset kantafunktiot. Leikkausvoimaa etsitään avaruudesta $\boldsymbol{\Gamma}_h$, joka määritellään ensin referenssielementillä \hat{K}

$$\boldsymbol{\Gamma}_h(\hat{K}) = \{\hat{\mathbf{s}} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2) \mid \hat{s}_1 = a + b\hat{x}_2, \hat{s}_2 = c + d\hat{x}_1, \text{ jollekin } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}. \quad (24)$$

Nyt jokaiselle elementille $K \in \mathcal{K}_h$ määritellään leikkausvoiman avaruus

$$\boldsymbol{\Gamma}_h(K) = \{\mathbf{s} = (s_1, s_2) \mid \mathbf{s}(x, y) = \mathbf{J}_K^{-T} \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{F}_K^{-1}(x, y)), \text{ jollekin } \hat{\mathbf{s}} \in \boldsymbol{\Gamma}_h(\hat{K})\}. \quad (25)$$

\mathbf{F}_K on kuvaus referenssielementiltä \hat{K} elementille K ja \mathbf{J}_K on kuvauksen Jacobin matriisi. Nyt voimme määritellä *reduktio-operaattorin* $\mathbf{R}_h : \mathbf{V}_h \rightarrow \boldsymbol{\Gamma}_h(K)$ seuraavista ehdoista elementin K reunajanoilla E :

$$\int_E ((\mathbf{R}_h \mathbf{s} - \mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\tau}) = 0, \quad (26)$$

missä $\boldsymbol{\tau}$ on reunan E tangentti.

Reduktio-operaattorille pätee $\mathbf{R}_h \nabla w = \nabla w$ [4]. Täten diskreetti tehtävä on löytää kolmikko $(\mathbf{u}_h, w_h, \boldsymbol{\beta}_h) \in \mathbf{U}_h \times W_h \times \mathbf{V}_h$ siten että

$$(\mathbf{A}: \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)) + (\mathbf{B}: \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h \quad (27)$$

ja

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}: \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_h)) + (\mathbf{D}: \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_h)) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{K}} \frac{1}{t^2 + \alpha h_K^2} (\mathbf{A}^* \cdot (\nabla w_h - \mathbf{R}_h \boldsymbol{\beta}_h), (\nabla \omega_h - \mathbf{R}_h \boldsymbol{\eta}_h)) = (g, \omega_h) + (\mathbf{G}, \boldsymbol{\eta}_h) \\ & \forall (\omega_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in W_h \times \mathbf{V}_h. \end{aligned} \quad (28)$$

Tässä α on vapaa stabilointiparametri ja h_K elementin K halkaisija. Korvaamalla jatkuvan tehtävän (17) leikkausenergian kerroin t^{-2} diskreetissä tehtävässä (28) kertoimella $(t + \alpha h_K)^{-2}$ estetään leikkausenergiaa kasvamasta liian suureksi erittäin ohuilla laatoilla, ja siten estetään lukkiutuminen. Menetelmälle pätee seuraava virhearvio, olettaessa ratkaisu riittävän säännölliseksi [11, 10], sekä yksinkertaisuuden vuoksi laatta jäykästi tuetuksi. Esitämme tässä tuloksen mielivaltaista astetta olevalle stabiloidulle MITC-elementille.

Lause 2. *Olkoon Ω konvekksi monikulmio ja laatta jäykästi tuettu. Lisäksi oletetaan kuorma riittävän säännölliseksi ja merkitään k :lla polynomiapproksimaation astetta. Olkoon $\Omega_i \subset\subset \Omega$ kompakti upotus alueeseen Ω ja h_i verkkoparametri sisäalueessa ja h_b reunalla. Tällöin pätee*

$$\begin{aligned} & \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + \|w - w_h\|_1 + t\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_0 + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_{-1} \leq \\ & C\{h_i^k(\|g\|_{s-2, \Omega_i} + t\|g\|_{s-1, \Omega_i} + \|\mathbf{G}\|_{s-1, \Omega_i}) + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0 + \|\mathbf{G}\|_0)\}, \end{aligned} \quad (29)$$

missä $\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_{-1}$ on leikkausvoiman luonnollinen duaalinormi.

Yhdistetyn mallin konvergenssi

Lauseen 1 perusteella nähdään, että kytkentä laatta- ja levytehtävien välillä on luonteeltaan elliptinen. Täten mikäli molemmille osatehtäville käytetään stabiilia menetelmää, on myös kytketty tehtävä stabiili. Kytkentä ei myöskään vaikuta MITC-elementtien konsistenssivirheeseen, joten on olemassa vakio C jolle pätee

$$\|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}\|_1 + \|\boldsymbol{\beta}_h - \mathbf{R}_h \boldsymbol{\beta}\|_1 \leq C(\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_1 + \|\boldsymbol{\beta} - \mathbf{R}_h \boldsymbol{\beta}\|_1), \quad (30)$$

missä $\tilde{\mathbf{u}}$ on Lagrangen interpolantti \mathbf{u} :lle. Tällöin tehtävän säännöllisyyttä [3, 8] hyväksikäyttäen saadaan virhearvio

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 \leq Ch^s(\|\boldsymbol{\beta}\|_{s+1} + \|\mathbf{u}\|_{s+1}). \quad (31)$$

Täten Reißner–Mindlin-komposiittilaatalle saadaan lopulta virhearvio

Lause 3. *Olkoon Ω konvekksi monikulmio ja laatta jäykästi tuettu. Lisäksi oletetaan kuorma riittävän säännölliseksi ja merkitään k :lla polynomiapproksimaation astetta. Tällöin pätee*

$$\begin{aligned} & \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_1 + \|w - w_h\|_1 + t\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_0 + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_{-1} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq \\ & C\{h_i^k(\|g\|_{s-2, \Omega_i} + t\|g\|_{s-1, \Omega_i} + \|\mathbf{F}\|_{s-1, \Omega_i}) + h_b(\|g\|_{-1} + t\|g\|_0 + \|\mathbf{F}\|_0)\}, \end{aligned} \quad (32)$$

missä \mathbf{F} sisältää sekä levy- että momenttikuormitukset,

$$\|\mathbf{F}\|_s^2 = \|\mathbf{f}\|_s^2 + \|\mathbf{G}\|_s^2. \quad (33)$$

Täten siis osatehtävien konvergenssitulokset periytyvät suoraan yhdistetylle mallille. Käytännössä tämä merkitsee sitä, että valitsemalla samaa astetta oleva elementtiapproksimaatio sekä levy- että laattatehtävälle, saavutetaan komposiittilaatalle myös optimaalinen suppenemisnopeus. Huomionarvoista on kuitenkin reunahäiriön aiheuttama hitaampi suppeneminen reunalla, mikäli käytetään korkeamman asteen elementtejä. Tällöin verkkoa tulisi joko generointivaiheessa tai adaptiivisesti tihentää kohti reunahäiriön lähdettä.

Johtopäätökset

Komposiittilaattaa voidaan siis mallintaa kytkemällä hyvin käyttäytyvä laattaelementti samaa tarkkuutta olevaan levytehtävän elementtiapproksimaatioon. Näytimme, että kytkennän luonne voidaan liittää laatan paksuussuuntaiseen rakenteeseen, ja kytkentätermi käyttäytyy hyvin useimmissa insinöörisovellusten kannalta oleellisissa tapauksissa. Samaa analyysitekniikkaa voidaan soveltaa myös muihin kuin MITC-perheen laattaelementteihin.

Viitteet

- [1] D. N. Arnold, F. Brezzi, R. S. Falk, and L. D. Marini. Locking-free Reissner-Mindlin elements without reduced integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(37-40):3660–3671, 2007.
- [2] F. Auricchio, C. Lovadina, and E. Sacco. Analysis of mixed finite elements for laminated composite plates. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg*, 190:4767–4783, 2001.
- [3] C. Bacuta and J. Bramble. Regularity estimates for solutions of the equations of linear elasticity in convex plane polygonal domains. *Z. angew. Math. Phys.*, 54:874–878, 2003.
- [4] F. Brezzi, M. Fortin, and R. Stenberg. Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2:125–151, 1991.
- [5] W. Flügge. *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer, 1972.
- [6] P. Kere and M. Lyly. Reissner-Mindlin-Von Kármán type plate model for nonlinear analysis of laminated composite structures. *Computers and Structures*, 86(9):1006–1013, 2008.
- [7] Klaus-Jürgen Bathe and E. Dvorkin. A four-node plate bending element based on mindlin/reissner plate theory and a mixed interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(2):367–383, 1985.
- [8] J. Könnö. Finite element analysis of composite laminates (in Finnish). Master’s thesis, Helsinki University of Technology, 2007.
- [9] J. Könnö and R. Stenberg. Finite element analysis of composite plates with an application to the paper cockling problem. *Finite Elements in Analysis and Design*, 46(3):265 – 272, 2010.

- [10] M. Lyly, J. Niiranen, and R. Stenberg. A refined error analysis of MITC plate elements. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16(7):967–977, 2006.
- [11] M. Lyly and R. Stenberg. Stabilized finite elements for Reissner-Mindlin plates. Technical Report 4, Universität Innsbruck, Institut für Mathematik und Geometrie, 1999.
- [12] M. Lyly, R. Stenberg, and T. Vihinen. A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 110(3-4):343–357, 1993.
- [13] J. Reddy. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. CRC Press, 2004.
- [14] S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959.

Juho Könnö
Aalto-yliopiston teknillinen korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
PL 11100
00076 AALTO
juho.konno@tkk.fi