

## Kestääkö kupolikatto? Vanhojen laskentamallien tarkkuustesti

Juhani Pitkäranta

**Tiivistelmä.** Artikkelissa tarkastelun kohteena ovat matemaattiset mallit kupolikatoille, joka muodostuu ohuesta pallokuoresta ja sen reunaan kiinnitetystä jäykistinrenkaasta. Tehtävänä on määrätä katon omapainosta aiheutuvat jännitysresultantit kupolin ja renkaan liittymäkohdassa. Konkreettisenä esimerkkinä tarkastellaan ongelmaa, joka on esitetty laskuharjoitusmerkkinä oppikirjassa K. Girkmann: *Flächentragwerke*, 3. painos, Springer 1954, s. 421–425. Artikkelissa käydään läpi vanhat käsinlaskun menetelmät ongelman ratkaisemiseksi ja tutkitaan, mitä tarkennusmahdollisuuksia näihin sisältyy. Vanhoissa menetelmissä lähtökohtana on pyörähdysymmetrian huomioiva 2-ulotteinen lineaarinen elastisuusteoria, joka pelkistetään ensin dimensio-reduktioilla kupolin osalta 1-ulotteiseksi kuoriteoriaksi ja renkaan osalta 0-ulotteiseksi rengasteoriaksi. Näiden puitteissa tehdään käsinlaskumalleissa edelleen vaihtelevia yksinkertaistuksia. Artikkelin päättyy tarkkuustestiin, jossa vertailukohtana on 2D-elastisuusteoriaan perustuva, korkea-asteisella hp-FEM:llä laskettu numeerinen ratkaisu.

*Avainsanat:* dimensio-reduktiot, kuoret, renkaat, FEM

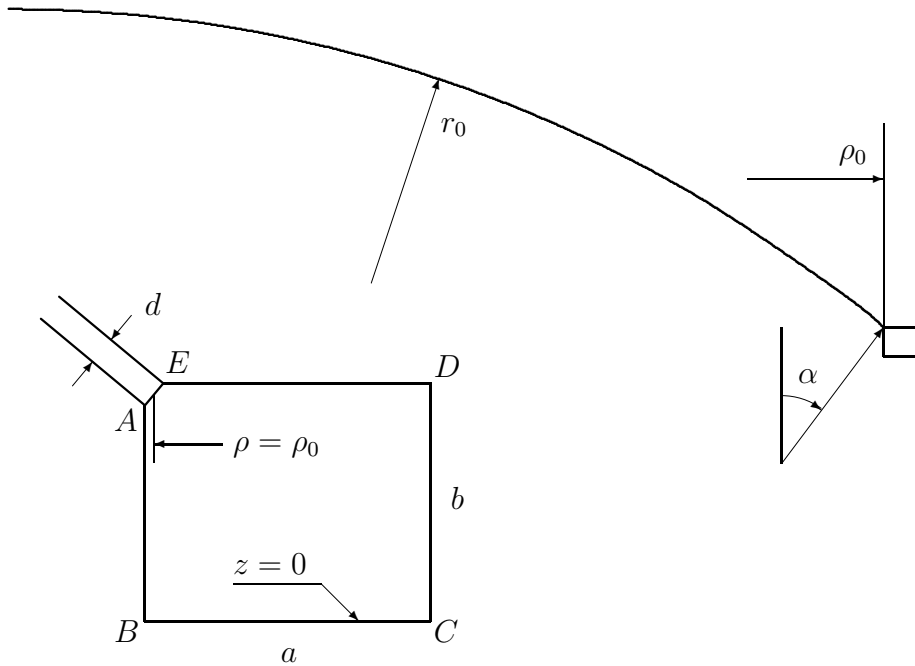
### Johdanto

Kuorirakenteiden, kuten kupolikattojen, suunnittelu on perinteisen insinöörimatematiikan tehtävistä haasteellisimpia. Kuori on rakenteiden ”primadonna”: kevyt ja kestävä oikein suunniteltuna mutta toisaalta helposti pettävä pienenkin mitoitusvirheen seurauksena.

Puoli vuosisataa sitten kuorirakenteidenkin suunnittelu perustui vielä käsinlaskuun ja taulukoihin, sikäli kuin suunnittelussa matematiikkaan yleensä turvauduttiin. Silloin käytössä olleista laskentamenetelmistä saa käsityksen vanhoista insinöörimatematiikan oppikirjoista, kuten [1, 2]. Nykyinsinöörin näkökulmasta vanhat menetelmät näyttävät edellyttäneen paitsi kunnioitettavaa matemaattista osaamista myös yksinkertaistamisen taitoa. Menetelmien lähtökohtana oli *kuoriteoria*, joka oli jo 60 v sitten vakiintunut ja tunnettiin insinööripiireissäkin — ehkä jopa paremmin kuin nykyään.

Kuoriteoria pelkistää kolmiulotteisen lineaarisen elastisuusteorian tasapainoyhtälöt ja konstitutiiviset yhtälöt vastaaviksi kaksiulotteisiksi *kuoriryhtälöiksi* kuoren keskipinnalle. Käsinlaskua ajatellen tämä dimensio-reduktio ei vielä riitä, sillä kuoriryhtälötkin ovat osittaisdifferentiaaliyhtälöitä ja vieläpä ikävällä tavalla muuttuvakertoimisia. Kuoriryhtälöiden ratkaiseminen klassisin keinoin onnistuu vain erikoistapauksissa, joissa yhtälöitä on mahdollista edelleen huomattavasti yksinkertaistaa. Rakennesuunnittelu-tehtävissä tavallisimpia erikoistapauksia ovat sellaiset, joissa kuoriryhtälöt redusoidut yhteen dimensioon eli tavallisiksi differentiaaliyhtälöiksi.

Suunnittelija kohtaa yksiulotteisen kuoriongelman esimerkiksi halutessaan mitoittaa pyörähdysymmetrisen kupolikaton niin, että se kestää oman painonsa (minimivaatimus!). Yleisempikin katolla vaikuttava kuorma voidaan käsitellä yksiulotteisilla malleilla, jos



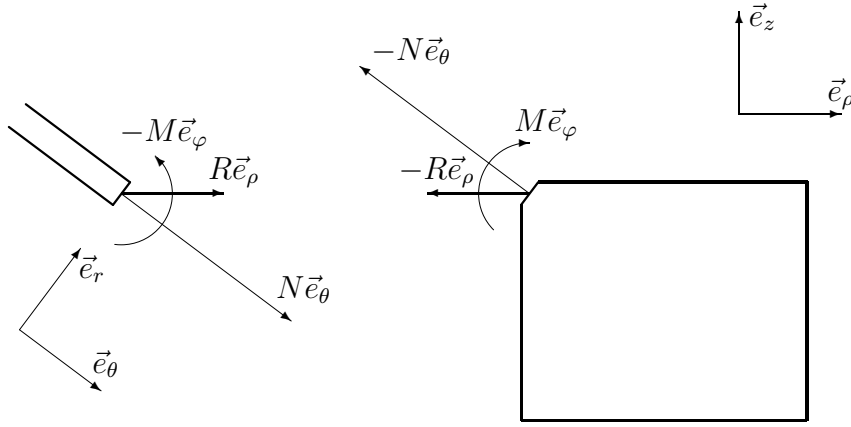
Kuva 1. Kupolikaton poikkileikkaus Girkmannin ongelmassa:  $\rho_0 = 1500$  cm,  $\alpha = 40^\circ$ ,  $r_0 = 2333.6$  cm,  $d = 6$  cm,  $a = 60$  cm,  $b = 50$  cm.

kuorman kulmariippuvuus voidaan esittää katkaistuna Fourier-sarjana [2]. Kupolikaton mitoituksen ongelmalle erilaisissa peruskuormitustilanteissa ja erilaisille katon muodoille on vanhoissa insinöörimatematiikan oppikirjoissa yleensä omistettu oma lukunsa. Jatkossa otetaan lähemmän tarkastelun kohteeksi viitteessä [1] laskettu harjoitusesimerkki, joka on lainattu myös viitteeseen [3]. Alkuperäisviitteen mukaisesti nimettäköön esimerkki tässä *Girkmannin ongelma*ksi.

### Girkmannin ongelma

Girkmannin ongelmassa pallokuoren muotoinen kattokupoli on reunaltaan tuettu jäykistinrenkaalla. Valmistusmateriaali on betoni. Katon poikkileikkaus mittoineen on esitetty Kuvassa 1. (Pituusyksikkö on jatkossa sama kuin viitteessä [1] eli cm.) Katto aukeaa symmetria-akselilta kupolin reunaan asti mitattuna kulmassa  $\alpha = 40^\circ$ . Kupolin, tarkemmin kupolin keskipinnan, säde on vaakasuoraan  $\rho_0 = 1500$  cm, jolloin keskipinnan säde pallopintana on  $r_0 = 1500 \text{ cm} / \sin \alpha = 2333.6$  cm. Kupolin paksuus on  $d = 6$  cm. Probleeman alkuperäisen muotoilun mukaan jäykistinrenkaan poikkileikkaus on suorakulmio, jonka leveys on  $a = 60$  cm ja korkeus  $b = 50$  cm, ja kupolin reuna on kiinnitetty jäykistinrenkaan särmään. Kuvassa 1 tulkitaan kupolin ja renkaan liittymäkohta tarkemmin kartiopinnaksi, jota kuvassa edustaa jana  $AE$ . Tämän tulkinnan mukaan renkaan poikkileikkaus on suorakulmiosta hiukan supistettu viisikulmio (kuvassa  $ABCDE$ ).

Girkmannin ongelmassa oletetaan rakenteen kuormaksi vain sen oma paino. Kupolin osalta tämä idealisoidaan keskipinnalla vaikuttavaksi pystysuuntaiseksi voimatiheydeksi  $-g\vec{e}_z$ , missä  $g = 0.02 \text{ G/cm}^2$ . Tässä (myös jatkossa) on voiman yksikkönä viitteen [1] mukainen  $G = \text{'kg'}$  eli yhden kg:n massaan vaikuttava painovoima. Koska jäykistinrenkas ja kupoli ovat samaa (jatkossa homogeeniseksi oletettua) materiaalia, oletetaan painovoiman tiheydeksi jäykistinrenkaassa  $-(g/d)\vec{e}_z$ . Reunaehdoksi asetetaan jäykistinrenkaan alapinnalla vaikuttava vakiopaine  $p$  niin, että syntyy voimatasapaino. Kinemaattisia rajoitteita



Kuva 2. Kupolin ja renkaan liittymä vapaakappalekuviona

ei aseteta.

Kuvassa 2 on kupolin ja jäykistinrenkaan liitos esitetty vapaakappalekuviona. Alan oppikirjojen perinnettä noudattaen on liitospinnalla vaikuttava voimaresultantti esitetty ei-ortogonaalisessa kannassa muodossa  $\pm(N\vec{e}_\theta + R\vec{e}_\rho)$ , missä  $\vec{e}_\theta$  viittaa pallokoordinaattikantaan  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$  (liitoksessa  $\theta = \alpha$ ) ja  $\vec{e}_\rho$  lieriökoordinaattikantaan  $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ . Tästä esitysmuodosta  $N$  on suoraan laskettavissa, koska kupolin paino tiedetään:

$$N = -\frac{gr_0}{1 + \cos \alpha}. \quad (1)$$

Tuntemattomia resultantteja ovat vaakasuora voimakomponentti  $R$  (yksikkö G/cm) ja suuntaan  $\pm\vec{e}_\varphi$  vaikuttava momentti  $M$  (yksikkö Gcm/cm=G). Girkmannin ongelmassa tehtävänä on yksinkertaisesti laskea  $R$ :n ja  $M$ :n lukuarvot.

Girkmannin ongelman matemaattisessa muotoilussa oletetaan rakennemateriaali homogeeniseksi, isotrooppiseksi ja lineaarisesti elastiseksi. Betonin Poissonin luvuksi oletetaan  $\nu = 0$ , jolloin ainoaksi materiaalivakioksi jää kimmokerroin  $E$ . Tämän numeroarvolla ei ole ongelmassa merkitystä. Rakenteen geometrian, kuormituksen, reunaehtojen ja materiaaliominaisuuksien tultua näin määritellyksi on Girkmannin ongelma hyvin asetettu lineaarisen elastisuusteorian ongelmana. Pyörähdyssymmetria huomioiden ongelma on pallo- tai lieriökoordinaateissa 2-ulotteinen. Koska kupoli on kuorena hyvin ohut (suhteellinen paksuus  $d/r_0 \approx 0.003$ ), voidaan ongelma redusoida tältä osin yhteen dimensioon käyttäen kuoriteoriaa. Renkaan osalta kelpaa vieläkin radikaalimpi dimensioreduktio 0-ulotteiseksi rengasteoriaksi, jossa on vain kaksi vapausastetta.

Kupolikaton mitoituksen kannalta jännitysresultantit  $R$  ja  $M$  (Kuva 2) ovat sikäli ratkaisevia, että kun nämä tunnetaan, voidaan kupolin koko jännitystila määrätä käyttäen kuoriteoriaa. Yksinkertaistettua kuoriteoriaa käyttäen tämä onnistuu jopa käsinlaskulla. Kupolin kestävyys kannalta kriittisiä ovat taivutusjännitykset, joita syntyy poikittaisprofiilin suuntaisina nk. *reunaefekteinä* lähelle kupolin reunaa. Kuten jäljempänä nähdään, Girkmannin ongelmassa taivutusjännityksen huippu on kupolin sisäpinnalla n. 80 cm:n päässä kupolin reunasta. Tässä kohdassa taivutus aiheuttaa melko voimakkaan vetojännitystilan, mutta toisaalta samassa kohdassa vaikuttaa myös kupolin painosta johtuva voimakas puristus. Koska betoni kestää vetoa huonosti, on jäykistinrenkaan tehtävänä vaihentaa taivutusjännityksiä niin, että taivutus ei pääse jännitysten 'jäsentenvälisessä' voitolle edes maksimikohdassaan. Kun  $R$  ja  $M$  on laskettu oletetulle renkaan mitoitukselle, on asia varmistettavissa.

Girkmannin ongelmassa tehtävänä on siis ainoastaan määrittää kaksi lukua, eli jännitysresultanttien  $R$  ja  $M$  lukuarvot kupolin ja jäykistinrenkaan liittymäkohdassa. Jatkossa lähdetään selvittämään, miten nämä ennen laskettiin, kun ei ollut tietokoneita eikä elementtimenetelmiä. Samalla selvitetään, mitä variaatioita ja mahdollisia tarkennusmahdollisuuksia vanhoissa käsinlaskun menetelmissä on. Lopulta, kun käsipelillä on tehty kaikki voitava, asetetaan lopputulos tarkkuustestiin suhteessa nykyaikaisiin numeerisiin laskentamenetelmiin.

Korostettakoon, että jatkossa *ei* oteta kantaa siihen, kuinka hyvä oletettu lineaarinen elastisuusteoria on todellisen betonikaton matemaattisena mallina. Matemaattisten mallien nk. *validointi*, eli vertailu viime kädessä koetuloksiin, ja malleihin sisältyvien epävarmuuksien kvantifiointi on epäilemättä eräs laskentatieteen keskeinen kehityssuunta tulevaisuudessa. Tässä artikkelissa ei siis ole kyse validoinnista vaan yksinkertaistetun laskentamallin nk. *verifioinnista* suhteessa toiseen, tarkempaan malliin. Tarkempi malli on tässä 2-ulotteinen lineaarinen elastisuusteoria edellä tehdyin kappaleen geometriaa, rakennemateriaalia, kuormitusta ja reunaehtoja koskevin oletuksin. Yksinkertaistettuja malleja edustava vanhat (tai vanhoista tarkennetut) käsinlaskun menetelmät, jotka on johdettu tarkemmasta mallista dimensireduktioilla ja edelleen muilla yksinkertaistuksilla.

## Girkmannin ongelma FEM–haasteena

Koska Girkmannin ongelma on oletetun matemaattisen mallin mukaisesti 2-ulotteinen lineaarisen elastisuusteorian ongelma, niin ongelma on nykyään mahdollista 'murskata' suoraan numeerisesti. Viitteessä [4] (ss. 327–332) on ongelma ratkaistu tällä tavoin. Modernina ratkaisumenetelmänä markkinoidaan tässä viitteessä elementtimenetelmän uudempaa nk. *p-versiota*, jossa elementtien muotofunktiot ovat muunneltuja ortogonaalipolynomeja ja asteluku on vapaasti valittava parametri.

Kuoriongelmissa elementtien asteluvun nosto on tutkitusti yleispätevä keino väistää kuorille ominaiset nk. *numeerisen lukkiutumisen* ongelmat (ks. esim. [5, 6]). Rakenneanalyysin ohjelmistoissa on kuitenkin pääosin edelleen vallalla elementtimenetelmän alkuhistoriasta periytyvä, kiinteäasteisia elementtejä eli FEM:n nk. *h-versiota* suosiva ajattelu. Tämän ajattelutavan mukaista on tarjota ohuille rakenteille kullekin omat matala-asteiset erikoiselementtinsä. Niihin on numeerisen lukkiutumisen estämiseksi sisällytetty erilaisia 'kepposia', joiden yksityiskohtia ei ohjelmiston käyttäjälle välttämättä paljasteta.

Viitteessä [4] Girkmannin ongelma siis ratkaistiin paitsi FEM-laskennan valtavirrasta poikkeavalla tavalla, myös tieteellisessä mielessä avoimesti. Tulokset eivät kuitenkaan täsmänneet lainkaan Girkmannin laskemiin, mikä asetti vanhan laskentamallin pätevyyden kyseenalaiseksi. Myöhempi tutkimus on kuitenkin osoittanut, että vanhaa laskentamallia tulkittiin vertailussa väärin kahdellakin tavalla. Erheistä pahempi oli verrata numeerisesti laskettua vaakasauuntaista jännitysresultanttia suoraan viitteessä [1] laskettuun  $R$ :n arvoon, kun oikea vertailusuure on  $N \cos \alpha + R$  (ks. Kuva 2). Toinen, lievempi erhe oli jättää huomiotta ongelman asettelussa tehtyjen tarkennusten vaikutus lopputulokseen. Vaikka nämä tarkennukset (edellä samat kuin viitteessä [4]) näyttävät vähäisiltä, niiden vaikutus erityisesti momentin  $M$  arvoon osoittautuu huomattavaksi. Tämä herkkyys ilmenee vanhoissakin laskentamalleissa, kun niitä tutkitaan tarkemmin.

Viitteessä [4] ei siis lopulta saatu selvää vastausta asetettuun kysymykseen: Kuinka tarkka vanha käsinlaskumalli on suhteessa 2-ulotteiseen elastisuusteoriaan? Epävarmuutta vertailussa lisää sekin, että FEM-tulostenkaan tarkkuudesta ei näytä yleisemmin olevan takeita tässä ongelmassa. Nimittäin kun ongelma hiljattain esiteltiin benchmark-

haasteena [7], niin hajonta vastauksissa oli valtava. Eri FEM-ohjelmistojen käyttäjiltä saatiin 15 vastausta, jotka on esitetty taulukkona viitteissä [8, 9]. Vastauksista 4 edustaa elementtimenetelmän  $p$ -versiota, muut  $h$ -versiota eli ratkaisua perinteisemmällä matalasteisilla kuori- ja rengaselementeillä. Edellisen ryhmän osalta tulokset ovat varsin lähellä toisiaan, sen sijaan perinteisempää ratkaisutapaa edustavassa ryhmässä tulosten vaihtelu on ällistyttävä:  $R$ :lle lasketut arvot vaihtelevat välillä  $0.924 \dots 259$  G/cm ja  $M$ :n osalta vaihteluväli on  $-20.5 \dots +18000$  G. Eräs vastaajista ilmoittaa, ettei saanut tuloksia konvergoimaan edes 120 miljoonalla vapausasteella [9].

Kaikki haasteeseen [7] vastanneet olivat ohjelmistojensa ammattikäyttäjiä — siis mistä moinen hajonta  $h$ -FEM-tuloksissa? Eräs syy voi olla, että jos resultantit  $R$  ja  $M$  lasketaan määritelmiensä mukaisesti 2-ulotteisten jännitysten painotettuina viivaintegraaleina yli janan  $AE$  (Kuva 1), niin resultantit ovat siirtymäkentän nk. rajoittamattomia funktionaaleja, eli niitä ei voi rajoittaa kentän energianormilla. Tällaisia funktionaaleja evaluoitaessa numeerisen diskretoinnin virheet voivat vahvistua ennakoimattomasti. Lisäongelmia numeerisissa malleissa voivat aiheuttaa jännitysten singulariteetit pisteissä  $A$  ja  $E$ : Nämä ovat sisääntyöntyvien kulmien kärkiä kattoprofilin reunaviivalla (Kuva 1), joten 2-ulotteisen teorian mukaiset jännitykset eivät ole näissä pisteissä rajoitettuja.

Rajoittamattomia funktionaaleja numeerisesti evaluoitaessa tarkkuutta voi parantaa nk. *ekstraktiolla* eli käyttämällä funktionaalille vaihtoehtoista, vähemmän häiriöaltista esitysmuotoa. (Näin meneteltiin viitteessä [4].) Ekstraktion mahdollisuutta ei ehkä osassa viitteiden [8, 9] vastauksista osattu tai huomattu käyttää. Lisäsyä hajontaan voi olla, että ohjelmistojen käyttäjille sattui myös käyttövirheitä, esim. kuori- ja rengaselementtejä yhteen liitettäessä. Tähän ainakin viittaa erään ohjelmiston käyttöohjeeseen hiljattain ilmestynyt varoitus, jossa viitataan juuri Girkmannin ongelmaan.

Mutta mitä on yleisemmin tehtävissä, jos elementtiohjelman antamaan tulokseen ei voi luottaa? Vapausasteita voi tietysti aina yrittää lisätä, mutta entä jos jonkin pikku väärinymmärryksen, huolimattomuuden tai muun yleisen syyn vuoksi ollaan kokonaan väärillä jäljillä? Ja onko edes varmaa, ettei ohjelmassa (tai käyttöohjeessa) ole jokin 'bugi' tai puute, joka sattuu ilmenemään tässä esimerkissä?

Jatkossa voi kuvitella edellä kuvatun tilanteen alkusysäykseksi pieneen aikamatkaan: Halutaan laskea vanhoilla menetelmillä, jollei kovin tarkkoja niin ainakin luotettavia, ohjelmoinnin ja numeerisen diskretoinnin virheistä riippumattomia vertailuarvoja. Näin vältettäneen ainakin suuruusluokkavirheet, ja ehkä koko ongelmakin tulee näin paremmin ymmärretyksi kuin pelkästään FEM-nappulaa painelemalla.

## Kuoriyhtälöt

Girkmannin ongelmassa kupolin rajaavat pallokoordinaatistossa  $(r, \theta, \varphi)$  pallo- ja kartiopinnat  $r = r_0 \pm d/2$  ja  $\theta = \alpha$ . Koska  $\varphi$ -riippuvuutta ei ongelmassa ole, niin kupolin keskipinnalla ainoa muuttuja on  $\theta$ . Oletetulla kuormituksella klassinen kuoriteoria antaa tasapainoyhtälöiksi tällä pinnalla [1]

$$-(n_\theta \sin \theta)' + n_\varphi \cos \theta + q \sin \theta = gr_0 \sin^2 \theta \quad (2)$$

$$n_\theta \sin \theta + n_\varphi \sin \theta + (q \sin \theta)' = -gr_0 \cos \theta \sin \theta \quad (3)$$

$$-(m_\theta \sin \theta)' + m_\varphi \cos \theta + r_0 q \sin \theta = 0 \quad (4)$$

Tässä  $n_\theta, n_\varphi$  ovat tangentialisten normaalijännitysten resultantit suuntiin  $\vec{e}_\theta$  ja  $\vec{e}_\varphi$ ,  $q$  on poikittaisen leikkausjännityksen resultantti suuntaan  $-\vec{e}_r$  ja  $m_\theta, m_\varphi$  ovat tangentialisten

normaalijännitysten aiheuttamat momentit suuntiin  $-\vec{e}_\varphi$  ja  $-\vec{e}_\theta$ . Kuoriteorian mukaan resultantit liitetään edelleen kuoren keskipinnan tangentiaaliseen siirtymään  $u$ , poikittaissiirtymään  $w$  ja normaalin kiertymään  $\psi$  konstitutiivisilla yhtälöillä [1]

$$n_\theta = \frac{Ed}{r_0}(u' + w), \quad n_\varphi = \frac{Ed}{r_0}(u \cot \theta + w), \quad (5)$$

$$m_\theta = -\frac{Ed^3}{12r_0}\psi', \quad m_\varphi = -\frac{Ed^3}{12r_0}\psi \cot \theta. \quad (6)$$

Tässä on huomioitu oletettu Poissonin luvun arvo  $\nu = 0$ . Klassisessa kuoriteoriassa oletetaan vielä kiertymää  $\psi$  sitova *Kirchhoffin-Loven* ehto

$$\psi = \frac{1}{r_0}(u - w'). \quad (7)$$

Tämän mukaan kuoren muodonmuutoksissa keskipinnan normaali pysyy normaalina, ts. poikittaisia leikkausmuodonmuutoksia ei tapahdu.

Kuoriyhtälöt (2)–(7) ovat 8 yhtälön ryhmä 8:lle tuntemattomalle funktiolle  $n_\theta, n_\varphi, q, m_\theta, m_\varphi, u, w, \psi$ . Yhtälöistä kaksi on algebrallisia, muut lineaarisia ja pääosin muuttuvakertoimisia differentiaaliyhtälöitä. Differentiaaliyhtälösysteminä kuoriongelma on kahden pisteen reuna-arvotettava välillä  $0 < \theta < \alpha$ . Pisteessä  $\theta = 0$  ratkaisulta vaaditaan säännöllisyys (jatkuvuus) ja asetetaan lisäksi symmetriaehdot  $u(0) = \psi(0) = 0$ . Pisteessä  $\theta = \alpha$  asetetaan staattiset reunaehdot Kuvan 2 vapaakappalekuvion mukaisesti:

$$n_\theta(\alpha) = N + R \cos \alpha, \quad q(\alpha) = -R \sin \alpha, \quad m_\theta(\alpha) = M. \quad (8)$$

Kun vielä mahdollinen jäykän kappaleen liike suuntaan  $\vec{e}_z$  eliminoidaan, esim. ehdolla  $w(0) = 0$ , niin klassisen kuoriteorian mukainen matemaattinen malli kupolille on valmis ja hyvin asetettu: Ratkaisu on olemassa ja määräytyy yksikäsitteisesti parametreista  $R$  ja  $M$ , jotka toistaiseksi ovat tuntemattomia.

Girkmannin ongelmaa ratkaistaessa riittää kupolin osalta laskea vain vaakasuoran siirtymän  $u_\rho = u \cos \theta + w \sin \theta$  ja kiertymän  $\psi$  arvot kupolin reunalla, eli luvut

$$\Lambda_k = u_\rho(\alpha), \quad \Psi_k = \psi(\alpha). \quad (9)$$

Kuoriteoria antavaa näille laskukaavat muotoa

$$E\Lambda_k = E\Lambda_0 + k_{11}R + k_{12}M, \quad E\Psi_k = E\Psi_0 - k_{12}R - k_{22}M. \quad (10)$$

Tässä (käänteiset) jousivakiot  $k_{ij}$  ovat positiivisia. Tämän mukaisesti on kuoriongelma ratkaistava ensin tapauksessa  $R = M = 0$ , jolloin saadaan selville  $\Lambda_0$  ja  $\Psi_0$ . Tämän jälkeen riittää ratkaista homogeeniset kuoriyhtälöt ilman painokuormaa, eli voidaan asettaa  $g = 0$  yhtälöissä (2)–(3) ja  $N = 0$  reunehdoissa (8). Kun homogeeniset yhtälöt ratkaistaan tapauksissa  $R = 1, M = 0$  ja  $R = 0, M = 1$ , niin saadaan selville jousivakiot  $k_{ij}$ .

Yhtälöiden (2)–(8) muodostaman matemaattisen ongelman ratkaiseminen käsipelillä muotoon (10) on perinteistä insinöörimatematiikkaa. Jatkossa paneudutaan tähän laskutekniikkaan lähemmin. Ennen sitä valaistakoon kuitenkin hieman klassisen kuoriteorian suhdetta moderneihin numeerisiin ratkaisumenetelmiin.

## Energiaperiaate

Kuoriyhtälöt johdetaan insinöörimatemaattisessa kirjallisuudessa yleensä differentiaali-geometrisin keinoin tarkastelemalla keskipinnan pienen palan tasapainoehtoja ja muodonmuutoksia [1, 2]. Vaihtoehtoinen lähtökohta kuoriteoriaan on energiaperiaate. — Sama periaate on tunnetusti lähtökohta myös, kun kuoriongelmiä nykyään ratkotaan tietokoneilla ja elementtimenetelmillä.

Kun Girkmannin ongelmassa huomioidaan pyörähdyssymmetria ja oletettu Poissonin luvun arvo  $\nu = 0$ , niin 2-ulotteisen elastisuusteorian mukaan siirtymäkenttä  $\mathbf{U} = (U_\theta(r, \theta), U_r(r, \theta))$  kupolissa minimoi kokonaisenergian

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{U}) = \frac{E}{2} \int_{r_0-d/2}^{r_0+d/2} \int_0^\alpha (\epsilon_\theta^2 + \epsilon_r^2 + \epsilon_\varphi^2 + 2\epsilon_{r\theta}^2) r^2 \sin \theta \, dr d\theta - \mathcal{L}_k(\mathbf{U}), \quad (11)$$

missä ensimmäinen termi edustaa muodonmuutosenergiaa ja jälkimmäinen kuormituksen potentiaalienergiaa. (Energia on skaalattu tekijällä  $1/(2\pi)$ .) Muodonmuutostensorin komponenttien ja siirtymien välinen riippuvuus pallokoordinaateissa on (ks. esim. [10])

$$\begin{cases} \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r}, & \epsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}, & \epsilon_\varphi = \frac{1}{r} (U_\theta \cot \theta + U_r), \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} \right) \end{cases} \quad (12)$$

Klassisen kuoriteorian mukaista on rajoittaa siirtymät muotoon

$$U_\theta(r, \theta) = u(\theta) + (r - r_0)\psi(\theta), \quad U_r(r, \theta) = w(\theta). \quad (13)$$

Kun energian lausekkeessa (11) oletetaan tämä nk. *Ansatz*, niin lausekkeiden (12) tilalle voidaan kirjoittaa

$$\begin{cases} \epsilon_\theta = \frac{1}{r} [u' + w + (r - r_0)\psi'], & \epsilon_r = 0 \\ \epsilon_\varphi = \frac{1}{r} [u \cot \theta + w + (r - r_0)\psi \cot \theta] \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2r} (r_0\psi + w' - u) \end{cases} \quad (14)$$

ja potentiaalienergia saa muodon

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(\mathbf{U}) &= gr_0^2 \int_0^\alpha (u \sin \theta - w \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \\ &+ r_0 \sin \alpha [(N + R \cos \alpha) u(\alpha) + R \sin \alpha w(\alpha) - M\psi(\alpha)], \end{aligned} \quad (15)$$

missä on huomioitu sekä kuorma kupolin keskipinnalla että staattiset reunaehdot (8).

Kun sijoituksilla (14) ja (15) saadusta energian lausekkeesta eliminoidaan kiertymä  $\psi$  Kirchhoffin–Loven ehdolla (7) (eli ehdolla  $\epsilon_{r\theta} = 0$ ) ja minimoidaan energia  $u$ :n ja  $w$ :n suhteen, niin variaatiolasku antaa Eulerin yhtälöiksi kuoriyhtälöt (2) ja (3), missä  $n_\theta, n_\varphi, q, m_\theta, m_\varphi$  ovat kuoriyhtälöiden (5)–(6) ja (4) mukaiset. Mös reunaehdot (8) saadaan luonnollisina reunaehtoina, kun energia minimoidaan. Kuoriyhtälöt (2)–(6) ja reunaehdot (8) seuraavat siis energiaperiaatteesta, kun Kirchhoffin–Loven ehto (7) asetetaan energiaa minimoitaessa kinemaattiseksi rajoitteeksi.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Girkmannin ongelmassa kuoriteorian johtamista energiaperiaatteella helpottaa, että Poissonin luvun arvoksi oletetaan  $\nu = 0$ , sillä muutoin Ansatzin (13) pakottama rajoitus  $\epsilon_r = 0$  aiheuttaa kuoren keinoitekoisen jäykistymisen, nk. *paksuuslukkiutumisen*. Yksinkertaisin keino välttää tämä ilmiö on vaihtaa energiaperiaatteessa 3-ulotteiset Lamén vakiot 2-ulotteista tasojännitystilaa vastaaviksi. Näin muunneltua energiaperiaatetta sovellettaessa Ansatz (13) johtaa klassiseen kuoriteoriaan myös kun  $\nu \neq 0$ .

## Naghdin kuorimalli ja FEM

Jos edellä energiaperiaatetta ja Ansatzia (13) käytettäessä rajoitusehtoa (7) ei pakoteta, ts. energia minimoidaan varioimalla funktioita  $u, w, \psi$  vapaasti, niin tuloksena on *Naghdin* kuorimallina tunnettu klassisen kuoriteorian variaatio.<sup>1</sup> Naghdin malli on klassista kuorimallia luontevampi lähtökohta elementtiapproksimaatioille, sillä Kirchhoffin–Loven ehdon pakottaminen näissä johtaa (etenkin 2-ulotteisissa kuoriongelmissa) ikäviin rajoituksiin muotofunktioiden valinnassa.

Girkmannin kuoriongelmassa yksinkertaisin Naghdin malliin perustuva elementtiapproksimaatio saadaan, kun Ansatzin (13) puitteissa funktioita  $u, w, \psi$  approksimoidaan edelleen lineaarisilla elementeillä, ts. funktioilla, jotka ovat 1. asteen polynomeja väleillä  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ ,  $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \alpha$  ja jatkuvia pisteissä  $\theta_i$ . Energian minimointi ehdoilla  $u(0) = w(0) = \psi(0) = 0$  johtaa tällöin parametrien  $R, M$  avulla yksikäsitteisesti ratkeavaan lineaariseen yhtälöryhmään kokoa  $3n$ . Kun yhtälöryhmä ratkaistaan erikseen tapauksessa  $R = M = 0$  ja tapauksissa  $R = 1, M = 0$  ja  $R = 0, M = 1$  kun  $g = N = 0$ , saadaan numeerinen approksimaatio kuoriteorian laskukaavoille (10).

Em. elementtiapproksimaatio on yksinkertaisuudessaan houkutteleva, ja se toimiikin jotenkuten. Paljon paremmin se kuitenkin toimii, jos elementtijäykkymatriisit lasketaan muuuten energialausekkeen (11) mukaisesti mutta leikkausmuodonmuutostermi  $2\epsilon_{r\theta}^2$  integroidaan muuttujan  $\theta$  suhteen tahallisen epätarkasti keskipistesäännöllä:

$$\begin{aligned} \frac{E}{2} \int_{r_0-d/2}^{r_0+d/2} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} 2\epsilon_{r\theta}^2 r^2 \sin \theta \, dr d\theta &= \frac{Ed}{4} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} (r_0\psi + u - w')^2 \sin \theta \, d\theta \\ &\approx \frac{Ed}{4} (\theta_i - \theta_{i-1}) [(r_0\psi + u - w')^2 \sin \theta]_{\theta=\frac{1}{2}(\theta_{i-1}+\theta_i)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Keskipistesääntö ei tässä anna tarkkaa tulosta, vaikka painofunktion  $\sin \theta$  tilalla olisi vakio, sillä  $(r_0\psi + u - w')^2$  on toisen asteen polynomi välillä  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ . — Kyseessä on nk. *valikoiva ali-integrointi*.

Girkmannin ongelmassa ali-integrointi kaavalla (16) on tarpeen reunan  $\theta = \alpha$  lähellä esiintyvän reunaefektin vuoksi; tällä tavoin vältetään nk. *leikkauslukkiutuminen*, joka muuten vahvistaisi numeerisen ratkaisun virhettä huomattavasti reunaefektin osalta. (Reunaefektin vaikutusalueen ulkopuolella ei ali-integroinnista ole tässä ongelmassa hyötyä mutta ei haittaakaan.) Kuten jatkossa nähdään, Girkmannin ongelmassa reunaefekti vaimenee reunalta  $\theta = \alpha$  eksponentiaalisesti pituusskaalassa  $L \approx 90 \text{ cm} \hat{=} 2.2^\circ$ . Reunaefektin tarkkuus on kriittinen koko lopputuloksen kannalta, joten approksimaatioteoreettisista syistä hilaa  $\{\theta_i\}$  on syytä tihentää voimakkaasti (noin kertoimella  $\alpha/2.2^\circ \approx 20$ ) reunan lähellä. Ilman ali-integrointia tämä tihennys ei kuitenkaan vielä riittäisi vaan lukkiutumisen kompensoimiseksi hilaa olisi tihennettävä edelleen noin tekijällä (ks. [6, 11])

$$K \sim \frac{L}{d} \sim 15. \quad (17)$$

Tällöin myös vapausasteiden kokonaismäärä kasvaisi lähes 15-kertaiseksi. Ali-integrointi kaavalla (16) parantaa siis lineaarisen elementin suorituskykyä radikaalisti — ja vieläpä

<sup>1</sup>Naghdin kuorimalli on tunnettu 1960-luvulta, eli se on kuoriteoriassa melko myöhäinen tulokas. Laattojen teoriassa tunnettiin kuitenkin jo 1940-luvulla vastaava *Reissnerin–Mindlinin* laattamalli klassisen *Kirchhoffin* mallin variaationa. Taivutetun palkin teoriassa vastaavan parin muodostavat *Timoshenkon* malli ja klassinen *Eulerin–Bernoullin* malli.



täysin kustannusvapaasti. Ohuiden rakenteiden erikoiselementeissä valikoiva ali-integrointi onkin hyvin yleinen 'kepponen', johon on historiallisesti päädytty monia eri teitä, ks. [12].

Taulukossa 1 on laskukaavat (10) esitetty numeerisesti laskettuina sekä klassisella että Naghdin kuorimallilla. Klassisen kuoriteorian mukaiset yhtälöt ratkaistiin eliminoimalla energian lausekkeesta  $\psi$  Kirchhoffin-Loven ehdolla (7) ja käyttämällä kolmannen asteen Hermiten elementtejä  $u$ :lle ja  $w$ :lle. Naghdin mallissa meneteltiin edellä kuvatulla tavalla, eli käytettiin lineaarisia elementtejä ja valikoivaa ali-integrointia. Taulukosta nähdään, että Naghdin malli ja klassinen kuorimalli eroavat toisistaan hyvin vähän. Havainto sopii yhteen teoreettisten arvioiden kanssa: On osoitettavissa, että laskukaavoissa (10) mallien suhteellinen ero on suureiden  $\Lambda_0, \Psi_0$  osalta suuruusluokkaa  $(d/r_0)^2$  ja jousivakioiden  $k_{ij}$  osalta enintään luokkaa  $d/r_0$ .

Taulukko 1. Kupolin reunan vaakasuora siirtymä parametrien  $R$  (yksikkö G/cm) ja  $M$  (yksikkö G) funktiona laskettuna numeerisesti klassisella kuorimallilla (K) ja Naghdin mallilla (N).

Malli	$E\Lambda_k$ [G/cm]	$E\Psi_k$ [G/cm <sup>2</sup> ]
K	$-2345 + 8343R + 147.68M$	$-9.522 - 147.68R - 5.1115M$
N	$-2345 + 8345R + 147.66M$	$-9.522 - 147.66R - 5.1130M$

## Kupoliongelman perinteinen ratkaisu

Ratkaistaessa kuoriyhtälöitä (2)–(7) perinteisin keinoin, eli käsipelillä, pyritään ensin löytämään ratkaisu (tai likimääräinen ratkaisu) tasapainoyhtälöille (2)–(4), minkä jälkeen siirtymiä lasketaan vain siltä osin kuin on tarpeen. Girkmannin ongelmassa tarvitaan vain luvut (9), joten riittää laskea vaakasuora siirtymä  $u_\rho$  ja kiertymä  $\psi$ . Nämä puolestaan saadaan suoraan  $n_\theta$ :n ja  $n_\varphi$ :n avulla, sillä yhtälöistä (5) ja (7) seuraa

$$u_\rho = \frac{r_0 \sin \theta}{Ed} n_\varphi, \quad (18)$$

$$\psi = \frac{1}{Ed} [(n_\theta - n_\varphi) \cot \theta - n'_\varphi]. \quad (19)$$

Kupoliongelman ratkaisun ensimmäisessä vaiheessa asetetaan  $R = M = 0$ . Reunaefekti on tällöin vaimea, jolloin tasapainoyhtälöiden (2)–(4) ratkaisua etsittäessä varsin hyvä approksimaatio on:  $m_\theta = m_\varphi = q = 0$ . Tähän oletukseen perustuvaa yksinkertaistettua kuoriteoriaa kutsutaan *membraaniteoriaksi* (kalvoteoriaksi).

Ratkaisun toisessa vaiheessa kuoriyhtälöistä poistetaan painokuorma. Ratkaisu on tällöin parametreista  $R, M$  riippuva, puhdas reunaefekti. Pallokuoren tapauksessa reunaefekti saadaan esitetyksi neljännen kertaluvun lineaarisen, homogeenisen ja muuttuvakertoimisen differentiaaliyhtälön ratkaisujen avulla. Kyseisen yhtälön johtaminen kuoriyhtälöistä, samoin kuin reunaefektin likimääräinen laskeminen alkeisfunktioiden avulla, on perinteistä kuoren *taipumateoriaa*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Reunaefektejä koskeva taipumateoria (engl. bending theory) on erotettava kuoren *puhtaan taipumisen* teoriasta (engl. inextensional theory), jossa kyse on aivan erilaisesta kuoren deformaatiotilasta.

Jatkossa esitetään Girkmannin kupoliongelman ratkaisu perustuen membraaniteoriaan ja yksinkertaistettuun taipumateoriaan viitteiden [1, 2] mukaisesti. Lisäksi selvitetään, kuinka tarkkoja nämä osaongelmien likimääräiset ratkaisut ovat suhteessa kuoriyhtälöiden tarkkaan ratkaisuun. Tarkkuustestissä perinteisiä menetelmiä tarkennetaan asteittain. Osoittautuu, että tarkennuskin onnistuu pitkälle pelkällä käsinlaskulla.

### Membraniteoria

Membraniteorian mukainen tasapainoyhtälöiden (2)–(4) yksittäisratkaisu on

$$n_\theta = -\frac{gr_0}{1 + \cos \theta}, \quad n_\varphi = gr_0 \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right), \quad m_\theta = m_\varphi = q = 0. \quad (20)$$

Tämä on myös ehdon  $m_\theta = m_\varphi = q = 0$  täyttävistä ratkaisuista ainoa, joka on säännöllinen (jatkuva), kun  $\theta = 0$ . Ratkaisu (20) toteuttaa myös osaongelmassa asetetut reunaehdot eli ehdot (8), kun  $N$  on yhtälön (1) mukainen ja  $R = M = 0$ .

Ratkaisusta (20) nähdään, että jos kupolin aukeamiskulma  $\alpha$  ylittää kriittisen kulman  $\theta_0 = \text{Arccos}\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = 51.8^\circ$ , niin kupolin alareunaan syntyy vaakasuora vetojännitystilä:  $n_\varphi > 0$  kun  $\theta > \theta_0$ . Mitoituksesta riippuen kupoli näyttäytyy siis ”primadonnana” jo membraaniteoriankin valossa. Girkmannin ongelmassa mitoitus on tältä osin turvallinen, koska on  $\alpha < \theta_0$ .

Sijoittamalla ratkaisu (20) lausekkeisiin (18)–(19) saadaan lasketuksi membraaniteorian mukainen vaakasuora siirtymä ja kiertymä:

$$u_\rho = \frac{gr_0^2}{Ed} \sin \theta \left( \frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right), \quad (21)$$

$$\psi = -\frac{2gr_0}{Ed} \sin \theta. \quad (22)$$

Siirtymiä  $u$  ja  $w$  ei tarvitse laskea erikseen. Ne kuitenkin määräytyvät konstitutiivisista yhtälöistä (5), kun  $n_\theta$  ja  $n_\varphi$  tunnetaan, joten membraaniteorian mukainen ratkaisu siis toteuttaa myös nämä yhtälöt. Samoin toteutuu Kirchhoffin–Loven ehto (7), kun  $\psi$  on lausekkeen (19) mukainen. Konstitutiivisissa yhtälöissä (6) sen sijaan  $\psi$ :n lauseke (19) ja oletukset  $m_\theta = m_\varphi = 0$  johtavat konfliktiin, eli nämä yhtälöt eivät toteudu.

Jos membraaniteoriaa halutaan tarkentaa, niin on luonnollista tulkita ko. teoria ensimmäiseksi askeleeksi iteraatiossa, jossa kullakin iteraatiokierroksella oletetaan  $\psi$  tunnetuksi edelliseltä kierrokselta. Aluksi oletetaan, että  $\psi = 0$ , jolloin yhtälöiden (6) ja (4) kautta päädytään membraaniteorian lähtöoletukseen  $m_\theta = m_\varphi = q = 0$ . Membraaniteoria antaa  $\psi$ :lle lausekkeen (22), jolloin seuraava iteraatiokierros käynnistyy yhtälöistä (6) ja (4): Näistä saadaan ensin resultanteille  $m_\theta$ ,  $m_\varphi$  ja  $q$  tarkennukset

$$m_\theta^* = m_\varphi^* = \frac{gd^2}{6} \cos \theta, \quad q^* = \frac{gd^2}{6r_0} \sin \theta. \quad (23)$$

Tämän jälkeen lasketaan membraaniteorian mukaisiin resultanttien  $n_\theta$  ja  $n_\varphi$  lausekkeisiin (20) lisättävät korjaukset ratkaisemalla yhtälöt (2)–(3), kun  $g = 0$  ja  $q = q^*$ . Tulos:

$$n_\theta^* = n_\varphi^* = -\frac{gd^2}{6r_0} \cos \theta. \quad (24)$$

Kun nämä sijoitetaan lausekkeisiin (18)–(19), saadaan vastaavasti  $u_\rho$ :n ja  $\psi$ :n lausekkeisiin (21)–(22) lisättävät korjaukset:

$$u_\rho^* = -\frac{gd}{6E} \cos \theta \sin \theta, \quad \psi^* = -\frac{gd}{6Er_0} \sin \theta. \quad (25)$$

Näillä on hyvin vähäinen vaikutus lukuihin  $\Lambda_0, \Psi_0$ . Sen sijaan merkittävämpi korjaus aiheutuu reunaehdoista (8). Nämä eivät tehtyjen tarkennusten jälkeen enää toteudu, joten konfliktin poistamiseksi tarvitaan toinen korjaus. Tämä saadaan ratkaisemalla homogeeniset kuoriyhtälöt ( $g = 0$  ja  $N = 0$ ) reunaehdoilla

$$n_\theta(\alpha) = -n^*(\alpha), \quad q(\alpha) = -q^*(\alpha), \quad m_\theta(\alpha) = -m_\theta^*(\alpha). \quad (26)$$

Ratkaisu on puhdas reunaefekti. Tämä on laskettavissa jäljempänä esitettävällä taipumateorialla, joten sanottakoon jatkossa *taipumakorjatuksi* membraaniteoriaa, johon on tehty vain tämä korjaus.<sup>1</sup>

Em. iteraatiota voitaisiin jatkaa, mutta iteraation lopputulos on jo nähtävissä. Koska yhtälön (25) mukaan  $\psi$ :n korjaus on sama kuin membraaniteorian mukainen kiertymä (22) vaimennettuna tekijällä  $\delta = \frac{1}{12}d^2/r_0^2$ , niin päätellään, että iteroimalla saatavat korjaukset ovat kaikki samaa muotoa ja vaimenevat geometrisena jonona. Näin muodoin membraaniteoria voidaan korjata tarkaksi kuoriteoriaksi yksinkertaisesti skaalaamalla korjaukset (23)–(25) (myös reunaehdoissa (26)) tekijällä  $1/(1 - \delta)$ .

Taulukossa 2 on luvut (9) laskettu ensin membraaniteorialla lausekkeista (21)–(22) ja sitten lisäämällä pelkkä taipumakorjaus. Havaitaan, että esitetyllä tarkkuudella taipumakorjatut (käsin lasketut!) lukuarvot eivät eroa tarkan kuoriteorian mukaisista arvoista (vrt. Taulukko 1). Ilman taipumakorjausta membraaniteorian virhe suhteessa klassiseen kuoriteoriaan on taulukon perusteella  $\Lambda_0$ :n osalta n. 0.6 % ja  $\Psi_0$ :n osalta n. 5 %.

Taulukko 2. Vaakasuora siirtymä ja kiertymä kupolin reunalla membraaniteorian (M0) ja taipumakorjatun membraaniteorian (M1) mukaisesti.

Malli	$E\Lambda_0$ [G/cm]	$E\Psi_0$ [G/cm <sup>2</sup> ]
M0	−2331	−10.000
M1	−2345	−9.522

### Taipumateoria

Kupoliongelman tultua ratkaistuksi tapauksessa  $R = M = 0$  siirrytään ongelman toiseen osaan, jossa tehtävänä on ratkaista kuoriyhtälöt parametrien  $R, M$  avulla, kun painokuormaa ei ole ( $g = N = 0$ ). Tässä tapauksessa kuoriyhtälöt (2)–(7) voidaan pelkistää (melkoisin ponnistuksin, ks. [1]) yhdeksi muuttuvakertoimiseksi differentiaaliyhtälöksi, joka leikkausvoimalle  $q$  kirjoitettuna on

$$\mathcal{D}^2 q + \frac{12r_0^2}{d^2} q = 0, \quad \mathcal{D} = \frac{d^2}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d}{d\theta} - \cot^2 \theta. \quad (27)$$

<sup>1</sup>Taipumakorjauksen mahdollisuudesta membraaniteorian yhteydessä ei kirjallisuudessa juuri mainita, ehkä siksi että korjausta ei ole pidetty merkittävänä. Pyörähdysyymmetrisen kupolin tapauksessa korjaus on kuitenkin helppo laskea.

Kun  $q$  on ensin määrätty, voidaan  $n_\theta$ ,  $m_\theta$ ,  $u_\rho$  ja  $\psi$  laskea kaavoista [1]

$$n_\theta = -q \cot \theta, \quad m_\theta = -\frac{d^2}{12r_0} (\mathcal{D}q)', \quad (28)$$

$$u_\rho = -\frac{r_0}{Ed} q' \sin \theta, \quad \psi = \frac{1}{Ed} \mathcal{D}q. \quad (29)$$

Yhtälö (27) ei ratkea alkeisfunktioilla. Melko hyvä approksimaatio ratkaisuille kuitenkin saadaan, kun huomioidaan, että ratkaisut vaimenevat nopeasti reunalta  $\theta = \alpha$ . Tämän perusteella differentiaalioperaattorissa  $\mathcal{D}$  on johtava termi merkittävin. Kun huomioidaan vain tämä, eli yhtälöissä (27) ja (28)–(29) tehdään approksimaatio

$$\mathcal{D} \approx \frac{d^2}{d\theta^2}, \quad (30)$$

niin päädytään perinteiseen yksinkertaistettuun taipumateoriaan. Kirjallisuudessa tämä on vallitseva teoria.

Approksimaatioon (30) perustuen differentiaaliyhtälön (27) ratkaisut, jotka vaimenevat reunalta  $\theta = \alpha$ , ovat muotoa

$$q = e^{-\kappa\phi} (A \cos \kappa\phi + B \sin \kappa\phi), \quad (31)$$

missä muuttuja on  $\phi = \alpha - \theta$ , vaimennusparametri on

$$\kappa = \sqrt[4]{3} \sqrt{\frac{r_0}{d}} = 26.0 \quad (32)$$

ja vakiot  $A, B$  määräytyvät reunaehdoista. Reunaefekti vaimenee siis kupolin reunalta eksponentiaalisesti skaalassa  $\kappa^{-1} \text{ rad} = 2.2^\circ \hat{=} 90 \text{ cm}$ .

Koska reunaefektin karakteristinen pituusskaala muuttujan  $\phi$  suhteen on  $\kappa^{-1} \ll 1$ , niin  $\mathcal{D}$ :n lausekkeesta (27) voidaan päätellä, että approksimaation (30) suhteellinen virhe on luokkaa  $\mathcal{O}(\kappa^{-1})$ , paitsi erikoistapauksessa  $\alpha = \pi/2$ , jolloin virhe on luokkaa  $\mathcal{O}(\kappa^{-2})$ . Viimeksi mainittu tarkkuus saavutetaan yleisemmin, kun approksimaatio (30) tarkennetaan muotoon

$$\mathcal{D} \approx \left( \frac{d}{d\theta} + \gamma \right)^2, \quad \gamma = \frac{\cot \alpha}{2}, \quad (33)$$

Vertaamalla  $\mathcal{D}$ :n lausekkeita nähdään, että tämän approksimaation suhteellinen virhe on luokkaa  $\mathcal{O}(\kappa^{-2})$  riippumatta  $\alpha$ :n arvosta. Tässäkin on kyseessä vakiokertoiminen approksimaatio, johon perustuen differentiaaliyhtälön (27) ratkaisut ovat muotoa

$$q = e^{-(\kappa-\gamma)\phi} (A \cos \kappa\phi + B \sin \kappa\phi). \quad (34)$$

Koska approksimaatio (33) tarkentaa perinteistä taipumateoriaa vain kun  $\alpha \neq \pi/2$ , niin sanottakoon tällä tavoin tarkennettua teoriaa *viistokorjatuksi*.<sup>1</sup>

Kun perinteisen taipumateorian mukainen  $q$ :n lauseke (31) sijoitetaan lausekkeisiin (28) niin kertoimet  $A, B$  määräytyvät reunaehdoista (8) parametrien  $R$  ja  $M$  avulla ( $N = 0$ ). Lausekkeisiin (29) sijoittamalla saadaan edelleen lasketuksi kupolin reunan siirtymä ja kiertymä muodossa (10), missä  $\Lambda_0 = \Psi_0 = 0$ . Jousivakioille  $k_{ij}$  saadaan arvot [2, s. 65]

$$k_{11} = 2r_0 d^{-1} \kappa \sin^2 \alpha, \quad k_{12} = 2d^{-1} \kappa^2 \sin \alpha, \quad k_{22} = 4r_0^{-1} d^{-1} \kappa^3. \quad (35)$$

<sup>1</sup>Perinteisen taipumateorian tarkennuksia käsitellään kirjallisuudessa hyvin rajoitetusti. Mitään selkeää mainintaa tässä esitetystä, ehkäpä luonnollisimmasta korjauksesta ei kirjoittaja löytänyt.

Approksimaatiosta (33) lähtien menetellään vastaavasti, jolloin jousivaikoille saadaan tarkennetut arvot. Tarkennuksissa riittää huomioida suhteelliset korjaukset vain kertaluokkaan  $\mathcal{O}(\kappa^{-1})$  asti. Tällä tarkkuudella saadaan (käsinlaskulla!) tulos:  $k_{11}$  pysyy muuttumattomana,  $k_{12}$  ja  $k_{22}$  tarkentuvat kumpikin tekijällä  $1 + \gamma/\kappa$ .

Taulukossa 3 on kupolin reunan siirtymä ja kiertymä esitetty numeerisesti sekä perinteisen että viistokorjatun taipumateorian mukaisesti. Nähdään, että etenkin jälkimmäinen teoria on hyvin lähellä tarkkaa kuoriteoriaa (vrt. Taulukko 1).

Taulukko 3. Kupolin reunan vaakasuora siirtymä ja kiertymä parametrien  $R$  (yksikkö G/cm) ja  $M$  (yksikkö G) funktiona laskettuna perinteisellä (T0) ja viistokorjatulla (T1) taipumateorialla.

Malli	$E\Lambda_k$ [G/cm]	$E\Psi_k$ [G/cm <sup>2</sup> ]
T0	$8342R + 144.34M$	$-144.34R - 4.9950M$
T1	$8342R + 147.65M$	$-147.65R - 5.1097M$

Perinteisen taipumateorian mukaan reunaefekti momentille  $m_\theta$  on [1]

$$m_\theta = e^{-\kappa\phi} \left[ M \cos \kappa\phi + \left( \frac{Rr_0}{\kappa} \sin \alpha + M \right) \sin \kappa\phi \right]. \quad (36)$$

Skaalaamalla tästä laskettu  $m_\theta$ :n maksimi-arvo tekijällä  $6/d^2$  saadaan taiputusjännityksen maksimi-arvo kupolin sisäpinnalla. Kupolin kestävyuden kannalta tämä arvo on kriittinen.

## Rengasteoria

Girkmannin ongelmassa jäykistinrenkaan poikkiprofilin mitat ovat pieniä renkaan säteeseen verrattuna, ja rengas on pyörähdysymmetrisesti kuormitettu. Renkaaseen soveltuu näin ollen perinteinen rengasteoria, jossa renkaan siirtymätila kuvataan vain kahdella vapausasteella. Olkoon renkaan poikkileikkaus lieriökoordinaateissa  $\Omega_r$  ja tämän painopiste  $P_c = (\rho_c, z_c)$ . Oletetaan, että rengasta kuormittavat  $P_c$ :n kautta kulkevalla,  $\rho_c$ -säteisellä ympyräviivalla vaakasuora voima  $F_c$  ja momentti  $M_c$ , molemmat laskettuna pituusyksikköä kohti mainitulla viivalla. Perinteisessä rengasteoriassa oletetaan  $\Omega_r$ :n siirtyvän kuormien vaikutuksesta muotoaan muuttamatta, jolloin siirtymätilan ainoat vapausasteet ovat painopisteen  $P_c$  vaakasuora siirtymä  $\Lambda_c$  ja poikkiprofilin kiertymä  $\Psi_c$ . Siirtymä  $\Lambda_c$  ja kiertymä  $\Psi_c$  tuottavat renkaaseen likimain vedettyä sauvaa ja taiputettua palkkia vastaavat jännitystilat, jolloin sauva- ja palkkianalogioiden perusteella saadaan siirtymätilan ja kuormien välille yhteydet [1]

$$EA_c\Lambda_c = \rho_c^2 F_c, \quad EI_c\Psi_c = \rho_c^2 M_c, \quad (37)$$

missä  $A_c$  on  $\Omega_r$ :n pinta-ala ja  $I_c$  hitausmomentti suoran  $z = z_c$  suhteen.

Girkmannin ongelmassa rengasta kuormittavat renkaan ja kupolin liitospinnalla vaikuttavat voimat ja momentti (Kuva 2), renkaan omapaino sekä oletettu tasapainottava vakiopaine renkaan alapinnalla. Kuormia  $F_c$  ja  $M_c$  määrittäessä on huomioitava, että liitoksessa vaikuttavat voimat ja momentti lasketaan pituusyksikköä kohti liitoksen keskiviivalla eli  $\rho_0$ -säteisellä ympyräviivalla. Poikkiprofililla tätä viivaa edustaa piste, jota

merkittäköön  $P_0 = (\rho_0, z_0) =$  janan  $AE$  keskipiste (Kuva 1). Kun merkitään edelleen  $h_c = z_0 - z_c$ , niin saadaan laskukaavat

$$\rho_c F_c = \rho_0(-N \cos \alpha - R), \quad \rho_c M_c = \rho_0(-Rh_c + M) + \rho_c M_0, \quad (38)$$

missä  $M_0$  on renkaan tunnetuista kuormista aiheutuva momentti (eli momentti, kun  $R = M = 0$ ). Kun  $\Lambda_c$  ja  $\Psi_c$  vielä liitetään renkaan ja kupolin liittymäkohdan (tarkemmin pisteen  $P_0$ ) vaakasuoraan siirtymään  $\Lambda_r$  ja liitoksen kiertymään  $\Psi_r$  kaavoilla

$$\Lambda_r = \Lambda_c + h_c \Psi_c, \quad \Psi_r = \Psi_c, \quad (39)$$

niin yhdistämällä yhtälöt (37)–(39) saadaan rengasteorian laskukaavat

$$E\Lambda_r = E\Lambda_0 - k_{11}R + k_{12}M, \quad E\Psi_r = E\Psi_0 - k_{12}R + k_{22}M, \quad (40)$$

missä

$$E\Lambda_0 = -\frac{\rho_0 \rho_c}{A_c} N \cos \alpha + \frac{\rho_c^2 h_c}{I_c} M_0, \quad E\Psi_0 = \frac{\rho_c^2}{I_c} M_0, \quad (41)$$

$$k_{11} = \rho_0 \rho_c \left( \frac{1}{A_c} + \frac{h_c^2}{I_c} \right), \quad k_{12} = \frac{\rho_0 \rho_c h_c}{I_c}, \quad k_{22} = \frac{\rho_0 \rho_c}{I_c}. \quad (42)$$

Kaikkein yksinkertaisimmassa rengasmallissa jätetään huomiotta kupolin ja renkaan liittymäkohdan geometriset yksityiskohdat. Kupoli pelkistetään tällöin keskipinnakseen, renkaan poikkileikkaus  $\Omega_r$  suorakulmioksi ja liitoskohta  $\Omega_r$ :n kärkipisteeksi. Myös rengas pelkistetään  $\rho_0$ -säteiseksi ympyräviivaksi; vain parametreissa  $A_c$  ja  $I_c$  huomioidaan renkaan poikittaiset ulottuvuudet. Näiden oletusten perusteella päädytään yhtälöissä (40)–(42) asettamaan

$$A_c = ab, \quad I_c = \frac{1}{12} ab^3, \quad \rho_c = \rho_0, \quad h_c = \frac{1}{2} b. \quad (43)$$

Tähän (mm. viitteessä [1] käytettyyn) yksinkertaistettuun malliin viitataan jatkossa symbolilla R0.

Mallia R0 tarkennettaessa on luonteva ensimmäinen askel jättää parametrit  $A_c$  ja  $I_c$  ennalleen mutta huomioida liitoskohdan tarkempi geometria parametrissa  $h_c$  sekä myös rengasprofiilin vaakasuora ulottuvuus (suorakulmiona) parametrissa  $\rho_c$ . Tällä tavoin saadaan

$$A_c = ab, \quad I_c = \frac{1}{12} ab^3, \quad \rho_c = \rho_0 + \frac{1}{2} a, \quad h_c = \frac{1}{2}(b - d \cos \alpha). \quad (44)$$

Myös parametri  $M_0$  on syytä tarkentaa liitoskohdan tarkan geometrian mukaiseksi. Tätä silmällä pitäen huomioidaan ensinnäkin, että paine  $p$  renkaan alapinnalla määräytyy tasapainoehdosta

$$\rho_0 N \sin \alpha - f \int_{\Omega_r} \rho d\rho dz + p \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho = 0, \quad (45)$$

missä  $\rho_1 = \rho_0 - (d/2) \sin \alpha$  on renkaan sisäsäde (ks. Kuva 1),  $\rho_2 = \rho_1 + a$  on ulkosäde ja  $f = g/d$  on renkaan massatiheys (yksikkönä  $G/cm^3$ ). Tämän perusteella saadaan laskukaavaksi

$$M_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} [-h_c N \cos \alpha + (\bar{\rho} - \rho_0) N \sin \alpha], \quad (46)$$

missä  $\bar{\rho}$  on painejakauman radiaalinen painopiste renkaan alapinnalla:

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 d\rho}{\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho} = \frac{2}{3} \frac{\rho_1^2 + \rho_1 \rho_2 + \rho_2^2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (47)$$

Em. tavalla tarkennettuun malliin viitataan jatkossa symbolilla R1. Huomattakoon, että  $M_0$ :n laskukaavat (46)–(47) toimivat myös mallille R0, kun asetetaan  $\rho_1 = \rho_0$ . Rengasprofiilin ollessa suorakulmio ja paineen renkaan alapinnalla vakio ei renkaan omapainolla ole vaikutusta momenttiin  $M_0$ . Malleissa R0 ja R1 voi renkaan siis yhtä hyvin ajatella painottomaksi.

Mallia R1 on edelleen mahdollista tarkentaa, sillä malliparametreissa ei ole toistaiseksi huomioitu, että  $\Omega_r$  poikkeaa hieman suorakulmiosta. Jotta  $\Omega_r$ :n muodon ohella myös renkaan kaarevuus tulisi dimensioreduktiossa tarkemmin huomioiduksi, on selkeintä tässä vaiheessa luopua perinteisistä sauva- ja palkkianalogioista. Vaihtoehtoisen lähtökohdan rengasteoriaan nimittäin tarjoaa — mikäpä muu kuin energiaperiaate. Energiaperiaatteen mukaan renkaan 2-ulotteinen siirtymäkenttä  $\mathbf{U} = (U_\rho, U_z)$  minimoi energian

$$\mathcal{F}_r(\mathbf{U}) = \frac{E}{2} \int_{\Omega_r} (\epsilon_\rho^2 + \epsilon_z^2 + \epsilon_\varphi^2 + 2\epsilon_{\rho z}^2) \rho \, d\rho dz - \mathcal{L}_r(\mathbf{U}), \quad (48)$$

missä ensimmäinen termi edustaa muodonmuutosenergiaa ja jälkimmäinen kuormien potentiaalienergiaa. (Energia on jälleen skaalattu tekijällä  $1/(2\pi)$ .) Muodonmuutostensorin komponenttien ja siirtymien välinen riippuvuus lieriökoordinaateissa on

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{U_\rho}{\rho}, \quad \epsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_\rho}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial \rho} \right). \quad (49)$$

Em. rengasmallien mukaista on olettaa, että siirtymät ovat muotoa

$$U_\rho(\rho, z) = \Lambda_c + \Psi_c(z - z_c), \quad U_z(\rho, z) = -\Psi_c(\rho - \rho_c). \quad (50)$$

Tämän Ansatzin ja oletetun renkaan kuormituksen perusteella on energian lausekkeessa (48) kirjoitettava

$$\epsilon_\rho = \epsilon_z = \epsilon_{\rho z} = 0, \quad \epsilon_\varphi = \frac{\Lambda_c + \Psi_c(z - z_c)}{\rho}, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(\mathbf{U}) = & - (N \cos \alpha + R)\Lambda_c + [-(N \cos \alpha + R)(z_0 - z_c) + N \sin \alpha(\rho_c - \rho_0)]\Psi_c \\ & + f\Psi_c \int_{\Omega_r} (\rho - \rho_c) \rho \, d\rho dz - p\Psi_c \int_{\rho_1}^{\rho_2} (\rho - \rho_c) \rho \, d\rho. \end{aligned} \quad (52)$$

Ehdon (45) mukaan potentiaalienergia (52) ei riipu parametrissa  $\rho_c$ , ja Ansatzissa (50) myös  $z_c$  voidaan valita vapaasti. Kun valitaan  $\rho_c = \rho_0$ , asetetaan  $z_c$  ehdolla

$$\int_{\Omega_r} \frac{z - z_c}{\rho} \, d\rho dz = 0, \quad (53)$$

määrätään kertoimet  $\Lambda_c, \Psi_c$  minimoimalla energia (48) sijoituksilla (51)–(52) ja lopuksi lasketaan  $\Lambda_r, \Psi_r$  kaavoista (39), missä  $h_c = z_0 - z_c$  kuten edellä, niin todetaan laskukaavat (40)–(42) päteviksi, kun parametrit  $A_c, I_c$  lasketaan integraaleina

$$A_c = \int_{\Omega_r} \frac{\rho_0}{\rho} \, d\rho dz, \quad I_c = \int_{\Omega_r} \frac{\rho_0}{\rho} (z - z_c)^2 \, d\rho dz \quad (54)$$

ja momentin  $M_0$  laskukaavassa (46) lisätään oikealle puolelle renkaan omapainosta aiheutuva lisätermi  $\Delta M_0$ . Integraalit yhtälöissä (53)–(54) saadaan lasketuksi riittävän tarkasti,

kun huomioidaan, että  $\Omega_r$  poikkeaa suorakulmiosta vain pienen kolmion verran ja lasketaan kolmion poiston vaikutus keskipistesäännöllä. Samoin keskipistesäännöllä laskien ja tasapainoehto (45) huomioiden saadaan renkaan omapainon aiheuttaman lisämomentin laskukaavaksi

$$\Delta M_0 = \frac{1}{2} \frac{\bar{\rho}_0}{\rho_0} f d^2 \sin \alpha \cos \alpha (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0), \quad (55)$$

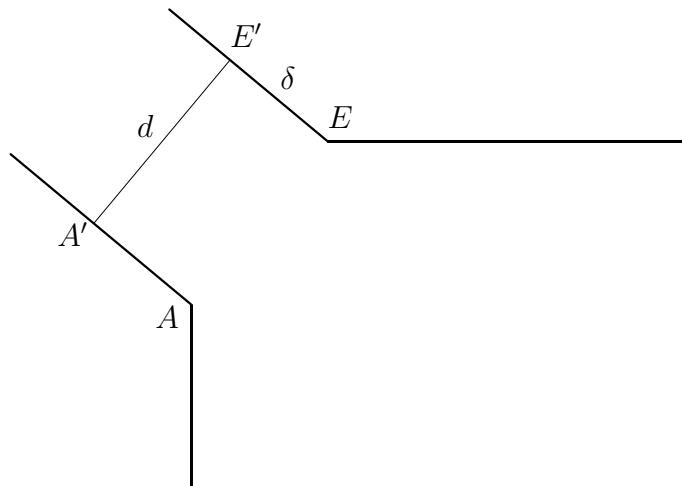
missä  $\bar{\rho}_0 = \rho_0 - (d/6) \sin \alpha$ . Energiaperiaatteesta johdetun mallin parametrit on näin selvitetty käsinlaskulla. Jatkossa tähän malliin viitataan symbolilla R2.

Taulukossa 4 on esitetty laskukaavat (40) numeerisesti rengasmalleille R0, R1 ja R2.

Taulukko 4. Vaakasuora siirtymä ja kiertymä renkaan ja kupolin liittymäkohdassa parametrien  $R$  (yksikkö G/cm) ja  $M$  (yksikkö G) funktiona eri rengasmalleilla: R0 = perinteinen malli R1 = parametrien  $h_c$ ,  $\rho_c$  ja  $M_0$  suhteen tarkennettu perinteinen malli R2 = energiaperiaatteesta johdettu malli

Malli	$E\Lambda_r$ [G/cm]	$E\Psi_r$ [G/cm <sup>2</sup> ]
R0	$14569 - 3000R + 90.00M$	$-24.588 - 90.00R + 3.6000M$
R1	$13770 - 2657R + 83.36M$	$-75.641 - 83.36R + 3.6720M$
R2	$13971 - 2683R + 84.18M$	$-67.682 - 84.18R + 3.6964M$

Malleja R0 ja R1 verrattaessa havaittava, suhteellisen merkittävä ero jousivakioissa  $k_{11}$  ja  $k_{12}$  johtuu pääosin parametrissa  $h_c$ . Eron voi tältä osin tulkita niin, että mallissa R1 on kupolin ja renkaan liittymäkohta tehtyjen oletusten (Kuvan 1) mukainen, kun taas mallissa R0 liittymäkohta on siirretty hieman kupolin suuntaan niin, että  $h_c$  saa mallissa oletetun arvon  $b/2$ . Tarvittava siirto on  $0.60d = 3.6$  cm (ks. Kuva 3 alla). Muihin malliparametreihin tällä siirrolla on vain vähäinen vaikutus. — Huomattakoon, että koska kupoli ja rengas ovat samaa materiaalia, niin liitoskohta on vain 'betoniin piirretty viiva', joka ainoastaan määrää kohdan, jossa resultantit  $R$  ja  $M$  lasketaan.



Kuva 3. Parametrin  $h_c$  muutos rengasmallin tarkennuksessa R0  $\rightarrow$  R1 tulkituna kupolin ja renkaan liittymäkohdan siirtona  $A'E' \rightarrow AE$ .  $\delta = 0.60d = 3.6$  cm.



## Girkmannin ongelman ratkaisu

Perinteiset kupolikaton käsinlaskumallit on nyt käyty läpi mahdollisine tarkennuksineen, ja ollaan valmiit ratkaisemaan itse Girkmannin ongelma. Osaongelmissa vaihtoehtoina ovat tavallinen ja taipumakorjattu kupolin membraaniteoria, tavallinen ja viistokorjattu kupolin taipumateoria sekä perinteinen, perinteisestä tarkennettu ja energiaperiaatteen johdettu rengasteoria. Mahdollisia malliyhdistelmiä on siis 12. Kaikissa yhdistelmissä ratkaisuperiaate on sama: Membraani- ja taipumateorioiden antamien yhteenlaskettujen kupolin reunan siirtymien ja kiertymien  $\Lambda_k, \Psi_k$  on täsmättävä rengasteorian antamiin arvoihin  $\Lambda_r, \Psi_r$ . Yhteensopivuusehdot muodostavat lineaarisen yhtälöryhmän kokoa  $2 \times 2$  tuntemattomille  $R, M$  — käsinlaskulla selvittäään siis rakaisustakin.

Taulukossa 5 on eri mallivaihtoehtoista MX–TY–RZ esitetty 5: Lähtien perusmallista M0–T0–R0 on ensin tarkennettu asteittain rengasteoria, sitten kupolin taipumateoria ja lopuksi membraaniteoria päätyen malliin M1–T1–R2. Vertailun vuoksi taulukossa on esitetty myös Girkmannin itsensä laskema tulos alkuperäisviitteessä [1]. Tässä laskussa malli oli muuten sama kuin M0–T0–R0, mutta laskukaavoissa (41) Girkmann oletti, että  $M_0 = 0$ . Suhteessa edellä oletettuihin ongelman geometrisiin tarkennuksiin (Kuva 1) Girkmannin oletuksen voi tulkita niin, että renkaan alapinnalla paine ei ole vakio vaan radiaalisesti muuttuva niin, että renkaaseen ei kohdistu momenttia, kun  $R = M = 0$ . Näin tulkittuna Girkmannin mallin melko huomattava ero malliin M0–T0–R0 ( $M$ :n arvoissa) kertoo, että tukea koskevien oletusten suhteen on oltava erityisen tarkka, muuten eri malleilla saadut tulokset eivät välttämättä ole vertailukelpoisia.

Muitakin malleja verrattaessa momentti  $M$  on herkin indikaattori mallien eroille. Eri osamallien MX, TY, RZ vaikutusta tarkasteltaessa havaitaan, että eniten vaikutusta lopputulokseen on rengasteorian tarkennuksilla  $R0 \rightarrow R1$  ja  $R1 \rightarrow R2$ , seuraavaksi eniten kupolin taipumateorian viistokorjauksella  $T0 \rightarrow T1$  ja vähiten membraaniteorian taipumakorjauksella  $M0 \rightarrow M1$ .

Taulukko 5. Girkmannin ongelman ratkaisu eri malleilla.

Malli	$R$ [G/cm]	$M$ [G]
Girkmann [1]	1.598	−11.27
M0–T0–R0	1.528	−7.964
M0–T0–R1	1.480	−2.836
M0–T0–R2	1.499	−3.739
M0–T1–R2	1.503	−4.285
M1–T1–R2	1.504	−4.238
2D: hp-FEM	1.503	−4.168

Taulukossa on esitetty myös 2D-elasticiteusteoriolla ja korkean kertaluvun hp-FEM:llä laskettu vertailutulos viitteestä [9]. Jos tämä tulos katsotaan tarkaksi, niin tarkimman käsinlaskumallin M1–T1–R2 virhe suhteessa 2D-elasticiteusteoriaan on todella pieni:  $M$ :n virhe on alle 2% ja  $R$ :n virhe tuskin näkyy neljännessäkään merkitsevässä numerossa. Tähän verrattuna eri käsinlaskumallien keskinäiset erot ovat selvästi suuremmat.

Koska mallinnuksessa oli viime kädessä kyse katon kestävyydestä, niin todettakoon,

että kattomallin M1–T1–R2 arvoilla lauseke (36) antaa momentille  $m_\theta$  maksimiarvon kullmassa  $\phi = 1.85^\circ$  eli n. 75 cm:n päässä kupolin reunasta. Tässä kohdassa taivutus aiheuttaa kupolin sisäpintaan vetojännityksen  $4.227 \text{ G/cm}^2$ . Kupolin painosta johtuva puristusjännitys on tässä kohdassa  $-4.354 \text{ G/cm}^2$ , joten tangentialinen jännitys kupolissa on maksimikohdassaan  $-0.127 \text{ G/cm}^2$ . Koska vetojännitystilaa ei synny, niin katon voi olettaa kestävän — siis ainakin oman painonsa.

Girkmannin ongelmassa katto siis läpäisi testin. Testin läpäisivät myös tutkimuksen kohteena olleet vanhat käsinlaskumenetelmät. Tosin niillä saadut tulokset vaihtelivat riippuen siitä, kuinka paljon yksinkertaistuksia malleissa tehtiin, mutta vaihtelu ei ollut sentään niin suurta kuin moderneilla tietokonemalleilla lasketuissa tuloksissa. Pussillinen vanhoja konsteja taisikin lopulta päihittää säkillisen uusia!

## Viitteet

- [1] K. Girkmann. *Flächentragwerke*. Springer, 3. painos, 1954 (1. painos 1946).
- [2] D.P. Billington. *Thin Shell Concrete Structures*. McGraw-Hill, 1965.
- [3] S. Timoshenko and S. Woinowsky–Krieger. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 2. painos, 1959.
- [4] B. Szabó and I. Babuška. *Finite Element Analysis*. Wiley, 1991.
- [5] J. Pitkäranta, Y. Leino, O. Ovaskainen and J. Piila. Shell deformation states and the finite element method: A benchmark study of cylindrical shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128: 81–121, 1995.
- [6] H. Hakula, Y. Leino and J. Pitkäranta. Scale resolution, locking and high-order finite element modelling of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133: 157–182, 1996.
- [7] J. Pitkäranta, I. Babuška and B. Szabó. The Girkmann problem. *IACM Expressions*, 22: 28, January 2008.
- [8] J. Pitkäranta, I. Babuška and B. Szabó. The problem of verification with reference to the Girkmann problem. *IACM Expressions*, 24: 14–15, January 2009.
- [9] B. Szabó, I. Babuška, J. Pitkäranta and S. Nervi. The problem of verification with reference to the Girkmann problem. *Engineering with Computers*, 26: 171–183, 2010.
- [10] V.V. Novozhilov. *Theory of Elasticity*. Pergamon, 1961.
- [11] J. Pitkäranta, A.-M. Matache and C. Schwab. Fourier mode analysis of layers in shallow shell deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190: 2943–2975, 2001.
- [12] J. Pitkäranta. Mathematical and historical reflections on the lowest-order finite element models for thin structures. *Computers and Structures*, 81: 895–909, 2003.

Juhani Pitkäranta

Aalto-yliopiston teknillinen korkeakoulu  
 Matematiikan ja systeemianalyysin laitos  
 PL 11100  
 00076 Aalto  
 Juhani.Pitkaranta@tkk.fi