Rakenteiden Mekaniikka
Vol. 42, Nro 4, 2009, s.200–207

Jäykän kappaleen mallista termodynamiikassa

Martti Mikkola ja Eero-Matti Salonen

Tiivistelmä. Artikkelissa selostetaan oppikirjassa [5] esitettyä termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön erästä hyvin yksinkertaista sovellusesimerkkiä. Sovelluksessa tarkastellaan tasaisella pinnalla tasaisella nopeudella liikkuvaa jäykkää kappaletta. Teoksessa esitettyä loppupäätelmää kritisoidaan. Kirjassa saatu hämmentävältä vaikuttava tulos selittyy jäykän kappaleen mallin epärealistisuudella kitkailmiöiden energiataseiden tarkastelussa. Todellisuudessa näennäisesti sileiden pintojen kosketuksessa esiintyy karheushuippujen pieniä suhteellisia siirtymiä itse kappaleen kokonaisuutena saaman näennäisen jäykän kappaleen siirtymän suhteen. Karheushuippuihin tehdyn työn mukaanotto ensimmäisessä pääsäännössa poistaa kvalitatiivisella tasolla kirjassa esitetyn ongelman. Vaihtoehtoinen, liikkuvien pintojen välisen hyvin ohuen ainekerroksen käsittely antaa kvantitatiivisemman selityksen.

Avainsanat: termodynamiikka, ensimmäinen pääsääntö, jäykän kappaleen liukuminen

Johdanto

Lyhyehkö oppikirja [5] (102 sivua) on termodynamiikkaan johdatteleva esitys, jonka nimi “Understanding Thermodynamics” ja esipuheen virke “ It is intended not for experts, but for students.” ilmaisevat jo pitkälti tekijän tarkoituksen: helpottaa termodynamiikan opiskelun alkuvaiheessa usein vaikeiksi koettujen käsitteiden omaksumista. Kirjan luvun 2 alussa on eräs hyvin pelkistetty esimerkki, josta jatkossa tarkemmin lisää ja johon liittyvä lopputoteamus on yllättävä ja aiheeseen tutustuvan kannalta hämmennystä aiheuttava. Aihe liittyy mielestämme jäykän kappaleen mallin soveltamisen epärealistisuuteen, josta tämän artikkelin otsikko.

Kirjan 1. luvussa (Energy Conservation — The First Law of Thermodynamics) ensimmmäinen pääsääntö esitetään oleellisesti muodossa

$$\Delta U + \Delta K = Q + W, \tag{1}$$

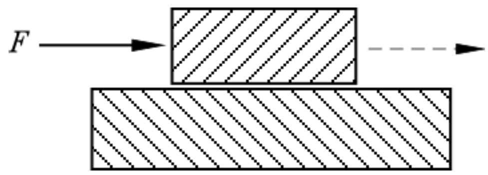
jossa ΔU on valitun suljetun systeemin (kappaleen) kyseisessä prosessissa saama sisäenergian muutos, ΔK systeemin saama liike-energian muutos, Q kappaleen saama lämpö ja W systeemin vaikuttavien ulkoisten voimien systeemiin tekemä työ.

Kirjassa kaavassa (1) oikean puolen viimeinen termi on itse asiassa esitetty muodossa $-W$, jossa W on systeemin ympäristöön tekemä työ. Muoto (1) on nykyään tavallisempi ja sitä on käytetty seuraavassa.

Itse asiassa on ilman muuta syytä pyrkiä esittämään ensimmäinen pääsääntö systemaattisesti ainakin aluksi ennen erityisiä sovelluksia niin, että siinä esiintyy yhtälön (1) tapaan nimenomaan systeemiin tehty työ eikä systeemin ympäristöön tekemä työ. Nämä suureet eivät nimittäin ole yleisessä tapauksessa itseisarvoltaan yhtä suuria ja vastakkaismerkkisiä. Otetaan yksinkertaisena esimerkkinä systeemiksi vaikka maan painovoimakentässä putoava kappale ja jossa koordinaatisto on kiinnitetty maahan. Maan gravitaatiovoima tekee positiivista työtä kappaleeseen, mutta kappaleen maahan kohdistama itseisarvoltaan yhtä suuri gravitaatiovoima ei tee ympäristöön (maahan) työtä, koska maa ei liiku kyseisen koordinaatiston suhteen. Usein fysiikan perusesityksissä termodynamiikan käsitteitä esitellään klassillisessa hyvin pelkistetyssä tilanteessa, jossa systeemi on sylinterissä oleva kaasu ja kaasun tilavuutta kontrolloidaaan männän avulla; esimerkiksi lähde [1]. Tällöin systeemin ja ympäristön välinen voimien vuorovaikutus tapahtuu männän pintaan vaikuttavan kaasun paineen välityksellä ja systeemiin ja ympäristöön tehdyt työt ovat tosiaan itseisarvoltaan yhtä suuria ja vastakkaismerkkisiä.

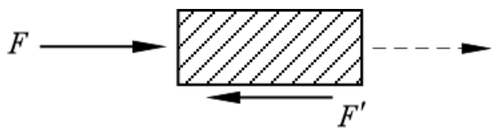
Sovellus

Oppikirjan [5] luvun 2 alun esimerkki on lyhyesti seuraava (kirjan tekstiä on käännetty jonkin verran mukaellen suomeksi). Tarkastellaan kuvan 1 esittämää teräskappaletta (engl. piece of steel), joka liukuu voiman F alaisena tasaisella nopeudella teräskappaleen (engl. block of steel) pinnalla.



Kuva 1. Liukuva kappale ja alusta.

Otetaan liukuva kappale systeemiksi. Tähän liukumissuunnassa vaikuttavat voimat on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2. Liukuvaan kappaleeseen vaikuttavat vaakasuuntaiset voimat.

Koska kappaleen nopeus on vakio, kitkavoiman F' on oltava itseisarvoltaan yhtäsuuri kuin F ja suunnaltaan tälle vastakkainen. Täten

$$F - F' = 0 \tag{2}$$

eli kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien summa on nolla. Kun tarkastellaan kappaleen liukuessa sen tiettynä ajan t välinä $(0,T)$ kokemaa prosessia, on siis ulkoisten voimien kappaleeseen tekemä työ nolla. Kappaleen liike-energian muutos on kappaleen vakionopeuden vuoksi myös nolla. Täten ensimmäinen pääsääntö antaa yhtälön

$$\Delta U = Q \tag{3}$$

eli kappaleen sisäenergian muutos on yhtä suuri kuin kappaleen ympäristöstään saama lämpö.

Seuraavassa lainataan suoraan kirjan tekstiä sivulta 17 liittyen yhtälöön (3): “Now we know from experience that the temperature of the sliding block increases, and this increases its internal energy. According to our equation this implies a transfer of heat to the block from the surroundings, which would then necessarily be at a higher temperature than the block. But there is no mechanism by which the temperature of the surroundings is raised above that of the system (the moving block). Thus if Q has the significance we have attached to it, the equation must be wrong, and if the equation is correct, we must redefine Q. The formalism we have developed simply does not apply to the *particular* system chosen in this example. Our choice was such as to make the system boundary the site of a transformation of energy. The mechanism is friction, and the friction occurs at the boundary separating the system from the surroundings. This always leads to embarrasment.”

Lukijan on vaikea hyväksyä edellä lainatun kohdan loppua; täytyyhän ensimmäistä pääsääntöä voida soveltaa oli tarkasteltu systeemi valittu miten hyvänsä.

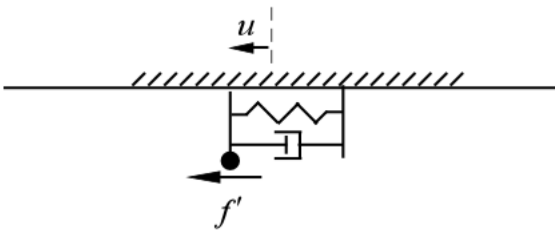
Täydentävä tarkastelu

Seuraavassa yritetään poistaa edelliseen sovellukseen liittyvää hämmennystä. Vaikka sovelluksessa ei ole sitä erikseen mainittu, sekä itse liukuvan kappaleen että alustan on selvästi otaksuttu olevan muotoaan muuttamattomia eli on käytetty ns. jäykän kappaleen mallia (engl. rigid body model). Kitkan käsittelyssä täysin jäykän kappaleen mallin käyttö saattaa johtaa energiatarkasteluissa ilmeisesti outoihin päätelmiin. Vastaavasti jo perusstatiikasta muistetaan, että jäykän kappaleen malli voi olla tietyn sovelluksen kannalta joskus riittävän realistinen ja joskus taas ei. Jos esimerkiksi palkki on tuettu staattisesti määräämättömällä tavalla, palkin tukireaktiota ei voida enää määrittää pitämällä palkkia jäykkänä kappaleena, vaan palkin todellisuudessa saamat pienet muodonmuutokset on otettava mukaan käsittelyyn. Tämä vaatii taas tietoa palkin materiaalin ominaisuuksista.

Kitkan syntymisen ymmärrettävä selittäminen perustuu tunnetusti koskettavien kappaleiden karheushuippujen vuorovaikutusten käsittelyyn. Esimerkiksi lähteessä [2, s. 54] on todettu: “All these techniques show that surfaces, however smooth we may prepare them, are rough on an atomic scale. Placing two such surfaces together is rather like putting New Hampshire on top of Maine. Contact occurs only at the tips of the promontories. Over the rest of the surfaces there may be gaps of a hundred angstroms or more. Now, as we saw in the preceding chapter, atomic forces operate over very small distances of the order of a few atomic diameters. Consequently these gaps, in effect, completely separate the surfaces and they do not interfere with one another. The load is therefore carried on the tips of the surface asperities.”

Täten pintojen mahdollinen paljaalla silmällä havaittu sileys ei pidäkään riittävän tarkalla erottelukyvyllä mitattuna eli atomitasolla enää paikkaansa. Assosioidaan näihin tarkastelutasoihin ja niihin liittyviin suureisiin tässä vastaavasti (kvalitatiivisella tasolla ilman eksakteja määritelmiä) lisämääreet makroskooppinen ja mikroskooppinen tai makro- ja mikro. Pinnan esityksen voidaan ajatella muodostuvan vähän samaan tapaan kuin turbulenssissa kuvattujen suureiden yhteydessä keskiarvoitetusta sileästä osuudesta ja voimakkaasti heilahtelevasta osuudesta, jotka olisivat tässä vastaavasti siis makroskooppinen ja mikroskooppinen täydentävä osuus.

Edellisen perusteella on ilmeistä, että karheushuipuissa tapahtuu niiden vuorovaikutuksen johdosta kappaleen makroskooppisen liikkeen lisäksi pieniä suhteellisia siirtymiä (mikrosiirtymiä).



Kuva 3 Karheushuippu ja siihen vaikuttava voima.

Kuvassa 3 on esitetty pelkistettynä ajatusmallina kaaviollisesti eräs kappaleen karheushuippu; kuvan musta ympyrä. Liukuvan kappaleen makroskooppinen liike on suoraviivaista vaakasuuntaista nopeudella v oikealle tapahtuvaa jäykän kappaleen liikettä. Karheushuipun pieni vaakasuuntainen mikrosiirtymä kappaleen makroaseman suhteen positiivisena vasemmalle mitattuna olkoon $u = u(t)$. Kun kappaleen makroskooppinen nopeus oikealle on v, on huipun nopeus (kiinteäksi otaksutun) alustan suhteen positiivisena oikealle $v - \dot{u}$ ja karheushuippuun vasemmalle positiiviisena vaikuttavan voiman f' teho on siis $-f'(v - \dot{u})$. Voiman ajan välinä $(0, T)$ tekemä työ on täten

$$\begin{aligned} w' &= -\int_0^T f'(v - \dot{u})\,\mathrm{d}t = -\int_0^T f'v\mathrm{d}t + \int_0^T f'\dot{u}\mathrm{d}t = -v\int_0^T f'\mathrm{d}t + \int_0^T f'\dot{u}\mathrm{d}t \\ &= -vT f'_\mathrm{m} + \int_0^T f'\dot{u}\mathrm{d}t = -Lf'_\mathrm{m} + \int_0^T f'\dot{u}\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4}$$

jossa

$$f'_\mathrm{m} = \frac{1}{T}\int_0^T f'\mathrm{d}t \tag{5}$$

on voiman f' ajan välillä $(0, T)$ määritelty keskiarvo. Suure vT on taas kappaleen prosessin aikana kulkema makroskooppinen matka L. Alustasta vaikuttavien kosketusvoimien yhteensä kappaleeseen tekemä työ on

$$\sum w', \tag{6}$$

jossa summamerkki viittaa symbolisesti summaan yli kaikista karheushuipuista kertyvistä osuuksista. Saadaan siis

$$\sum w' = -L\sum f'_{\mathrm{m}} + \sum\int_0^T f'\dot{u}\mathrm{d}t = -LF' + \sum\int_0^T f'\dot{u}\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Edellä on määritelty karheushuipuista kertyvä kokonaisvoima

$$F' = \sum f'_{\mathrm{m}}. \tag{8}$$

Koska kappale voi käytännössä todellakin ilmeisesti liikkua sileällä pinnalla voiman F alaisena makroskooppisesti vakionopeudella, pätee siis yhtälö (2) myös kaavalla (8) määritellylle voimalle F' eli $F' = F$. Kuvissa 1 ja 2 esitetyn voiman F tekemä työ on FL. Laskemalla yhteen tämä ja kaavan (7) antama osuus saadaan siis kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien yhteensä tekemäksi työksi

$$W = \sum\int_0^T f'\dot{u}\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Tämän ei suinkaan tarvitse hävitä, joten kirjassa johdetun yhtälön (3) sijasta voidaan kirjata yleisempi tulos

$$\Delta U = Q + W. \tag{10}$$

Kappaleen sisäenergian kasvuun ei siis tarvita ympäristön kappaletta korkeampaa lämpötilaa ja siitä seuraavaa positiivista termiä Q, vaan kappaleeseen mikrosiirtymien kautta tehty työ voi myös kasvattaa kappaleen sisäenergian arvoa, joka ilmenee siis kappaleen lämpötilan nousuna.

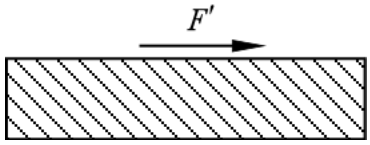
Termin (9) arvioiminen vaatisi syvällistä tietoa karheushuippujen todellisista ominaisuuksista. On kuitenkin otaksuttavissa, että tämä termi on yleensä positiivinen, koska havaintojen mukaan liukuvan kappaleen lämpötila kohoaa. Otetaan pelkistettynä esimerkkinä tapaus, jossa karheushuippuun vaikuttavan voiman otaksutaan olevan kuvan 3 ajatusmallin mukaisesti muotoa

$$f' = ku + c\dot{u} \tag{11}$$

eli se riippuu lineaarisesti siirtymästä ja siirtymänopeudesta. Kertoimet k ja c ovat positiivisia vakioita. Karheushuippuun mahdollisesti liittyvien hitausvoimien osuus on siis jätetty huomiotta. Tällöin integraali

$$\begin{aligned}\int_0^T f'\dot{u}\mathrm{d}t &= \int_0^T (ku + c\dot{u})\dot{u}\mathrm{d}t = \int_0^T ku\dot{u}\mathrm{d}t + \int_0^T c(\dot{u})^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{k}{2}\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u^2\right)\mathrm{d}t + c\int_0^T (\dot{u})^2\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\left\{\left[u(T)\right]^2 - \left[u(0)\right]^2\right\} + c\int_0^T (\dot{u})^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{12}$$

Oikean puolen viimeinen integraali on integrandin neliöllisyyden vuoksi positiivinen ja kasvaa ajan välin kasvaessa. Sen sijaan oikean puolen ensimmäinen integraali ei välttämättä kasva ajan välin mukana ja se häviää aina kun $u(T) = u(0)$.



Kuva 4 Alustaan vaikuttava voima F'.

Äskeinen käsittely voidaan ulottaa koskemaan samantyyppisenä myös itse alustaa. Kuvassa 4 on esitetty kuvan 3 kitkavoiman vastavoima F', joka vaikuttaa alustaan. Jos alustaa pidetään jäykkänä kappaleena (kuten usein perusmekaniikan sovelluksissa tehtäisiin) voima F' ei tee työtä alustaan vaikka voima liikkuukin liukuvan kappaleen mukana. Muistetaan, että voiman tekemä työ määritellään mekaniikassa siten, että siihen liittyvä siirtymä on nimenomaan aina sen partikkelin siirtymä, johon voima vaikuttaa. Realistisempi käsittely ottaisi jälleen huomioon alustan pinnan karheushuippujen todellisuudessa saamat mikrosiirtymät. Täten alustaan tehdään työtä, joka voidaan esittää suoraan muodossa (9), jossa nyt vain f' ja $u(t)$ on määritelty alustaa koskevina ja positiivisina oikealle suunnattuina. Havaintojen mukaan myös alustan lämpötila kohoaa tehdyn työn antaman sisäenergian kasvun johdosta. Tähän liittyen mm. juuri lämpötilan nousun ja sitä seuraavan lumen pintakerroksen sulamisen selitetään usein vähentävän suksien kitkaa.

Puhtaissa rakenteiden mekaniikan sovelluksissa askel jäykän kappaleen mallista kohti lisärealismia vaatii tietyissä tilanteissa kappaleen todellisuudessa koko alueessaan saamien deformaatioiden mukaanottoa. Edellä esitettyjen kvalitatiivisten tarkastelujen perusteella termodynamiikan sovelluksissa kitkan yhteydessä askel jäykän kappaleen mallista kohti lisärealismia vaatii kosketuspintojen karheushuippujen pienten deformaatioiden mukaanottoa.

Vaihtoehtoinen täydentävä tarkastelu

Kappaleiden väliseen kosketuksen, kitkan ja kulumisen kvantitatiiviseen analyysiin käytetään nykyään malleja, joissa itse kappaleiden sisältämään sisäenergiaan ja entropiaan jne. otetaan mukaan kosketusalueeseen liittyvä matemaattinen pinta, johon assosioidaan myös tietty sisäenergia ja entropia; esimerkiksi lähde [4]. Tämä pinta kuvaa siis ilmeisesti jollain tavoin karheushuippujen vuorovaikutuksen fysiikkaa.

Otaksutaan nyt vastaavasti edellä tarkastellun kahden jäykän kappaleen väliin tietyllä hetkellä ohut ainekerros, joka olkoon tässä jatkossa tarkasteltava systeemi eli kappale (kuva 5). Tarkastelun lopuksi kyseisen kappaleen paksuuden h annetaan lähestyä nollaa.

Kuva 5. Ohut ainekerros

Kirjoitetaan ensimmäinen pääsääntö tässä ilmeiseen muutosnopeuksia koskevaan muotoon:

$$\dot{U} + \dot{K} = Q^* + P \,. \tag{13}$$

Kerroksen yläpinnan otaksutaan liikkuvan ylemmän jäykän kappaleen mukana nopeudella v vaakasuuntaan ja alapinnan olevan levossa. Yläpintaan vaikuttaa paikasta mahdollisesti riippuva leikkausjännitys τ. Täten kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien teho

$$P = \int \tau v \mathrm{d}A = v \int \tau \mathrm{d}A = F'v = Fv \,. \tag{14}$$

Integraali on yläpinnan kosketusalueen yli. Lisäksi on otettu huomioon, että v on vakio. Lauseke (14) esittää siis myös liikkuvaan jäykkään kappaleeseen vaikuttavan voiman F tehoa. Kerroksen ainepisteiden nopeusjakauma otaksutaan paksuuden suunnassa lineaariseksi ja kerroksen alapintaan yhtä suuri ja vastakkaissuuntainen leikkausjännitys τ. Kerroksen liikemäärä on tällöin vakio kuten myös liike-energia eli

$$\dot{K} = 0 \,. \tag{15}$$

Olkoon lämpövirta kerroksesta ulospäin yläpuoliseen kappaleeseen Q_y^* ja kerroksen alapuoliseen kappaleeseen Q_a^*. Täten kerroksen saama lämpövirta

$$Q^* = -Q_\mathrm{y}^* - Q_\mathrm{a}^* \,. \tag{16}$$

Alueen poikittaisreunojen läpi mahdollisesti tapahtuva lämpövirta häviää kun h lähestyy nollaa.

Kappaleen sisäenergian muutosnopeus

$$\dot{U} = \int \rho \dot{u} \mathrm{d}V \,, \tag{17}$$

jossa ρ on tiheys ja $\dot{u}$ ominaissisäenergian (aine)aikaderivaatta. Integraali on kappaleen tilavuuden yli. Ominaissisäenergian voidaan otaksua riippuvan kimmoisista venymistä γ ja ominaisentropiasta s; $u = u(\gamma, s)$. Tällöin

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + T\dot{s} \,, \tag{18}$$

jossa T on termodynaaminen lämpötila. Jos otaksutaan, että kerros on täysin viskoosinen tai kimmoinen ideaaliplastinen ja täysin plastisoitunut, niin kaavan (18) oikean puolen ensimmäinen termi häviää. Kun h lähestyy nollaa, niin integraalin (17) integrandi pysyy äärellisenä. Silloin $\dot{U}$ lähestyy nollaa ja ensimmäinen pääsääntö (13) saa muodon

$$0 = Q^* + P \tag{19}$$

eli yksityiskohtaisemmin

$$Fv = Q_{\mathrm{y}}^{*} + Q_{\mathrm{a}}^{*}. \tag{20}$$

Tämän kaavan tulkinta on fysikaalisesti melko ilmeinen: kitkan voittamiseksi liikkuvaan kappaleeseen syötetty teho näkyy ikään kuin lämpölähteenä jäykiksi otaksuttujen kappaleiden kosketusalueella. Se, miten lämpövirrat jakautuvat kappaleiden kesken riippuu mm. kappaleiden lämmönjohtavuuksista. Lähteessä [3] on johdettu analyyttinen lauseke puoliäärettömään alustaan näin syntyvälle epästationaariselle lämpötilajakaumalle, kun lämmön otaksutaan siirtyvän pelkästään alustaan ja lämpövuon tiheys otaksutaan paikan suhteen vakioksi liikkuvan kappaleen alla.

Tässä esitetyssä täydentävässä tarkastelussa jouduttiin siis jälleen luopumaan ainakin tilapäisesti puhtaasta jäykän kappaleen mallista, jotta termodynamiikan soveltamisessa saatiin mukaan tiettyä realismia.

Viitteet

[1] M. Alonso, E. J. Finn, *Fundamental University Physics*, Volume III, Addison Wesley, 1973.

[2] F. P. Bowden and D. Tabor, *Friction — An Introduction to Tribology*, Heinemann, London (1973).

[3] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press, 1990.

[4] N. Strömberg, *Thermomechanical Modelling of Tribological Systems*, Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations No. 497, 1997.

[5] H. C. Van Ness, *Understanding Thermodynamics*, Dover, New York (1969).

Martti Mikkola
Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
PL 1100, 02015 TKK
martti.mikkola@tkk.fi

Eero-Matti Salonen
Teknillinen korkeakoulu
Rakenne-ja rakennustuotantotekniikan laitos
PL 2100, 02015 TKK
eero-matti.salonen@tkk.fi