Rakenteiden Mekaniikka
Vol. 42, Nro. 3, 2009, s. 149 – 170

Elementtimenetelmän adaptiivinen verkontihennys laattarakenteiden analysoinnissa

Jarkko Niiranen ja Mari Vuorinen

Tiivistelmä. Tässä artikkelissa selvitetään Abaqus-ohjelmiston automaattisten adaptiivisten verkontihennysmenetelmien toimintaperiaatteita sekä tutkitaan niiden toimintaa ohuilla laattarakenteilla. Tutkimus painottuu adaptiivisesti tihennetyn ja tasaisesti tihennetyn verkon antamien tulosten vertailuun. Vertailun kohteena on erityisesti ratkaisun tarkkuus suhteessa elementtien vapausasteiden lukumäärään. Vertailusuureina käytetään laatan muodonmuutosenergiaa, maksimitaipumaa sekä von Mises -maksimijännitystä. Tutkimustapauksia on kahdeksan ja ne pitävät sisällään erilaisia geometrioita, reunaehtoja, kuormituksia, paksuuksia sekä jäykkyyksiä ja siten myös hyvin eri tavoin muuttuvia jännityksiä. Testien perusteella adaptiivisen verkontihennyksen tarjoama hyöty riippuu edellä luetelluista tekijöistä sekä valitusta vertailusuureesta, ja myös valitusta virheindikaattorista ja tihennysmenetelmästä.

Avainsanat: elementtimenetelmä, FEM, adaptiivinen uudelleenverkotus, virheindikaattorit, laattarakenteet, Abaqus-ohjelmisto

Johdanto

Rakennesuunnittelussa elementtimenetelmän (*finite element method, FEM*) käyttö alkoi 1950-luvulla lentokoneteollisuudessa [7][luku 1]. Elementtimenetelmän matemaattinen tutkimus alkoi varsinaisesti 1960-luvulla, jolloin menetelmä myös sai nykyisen nimensä [17][luku 1]. Tietokoneiden, mallinnus- ja laskentaohjelmistojen sekä ylipäänsä numeerisen mallinnuksen kehityksen myötä elementtimenetelmästä on tullut differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen sekä tietokoneavusteisen insinöörisuunnittelun (*computer aided engineering, CAE*) yleisimpiä työkaluja [7, 22, 17, 8, 9, 27, 26, 14].

Yksinkertaistetusti elementtimenetelmän perusideana on ratkaista matemaattinen ongelma pilkkomalla ratkaisualue osiin. Numeerisena menetelmänä elementtimenetelmä antaa likiarvoratkaisun matemaattiselle mallille, joka kuvaa idealisoitua, matemaattis-fysikaalisesti mallinnettua todellisuutta. Jopa hyvin pitkälle yksinkertaistettuihin matemaattisiin malleihin perustuvien tehtävien ratkaiseminen onnistuukin useimmiten vain numeerisesti ja likimääräisesti, mikä puolestaan johtaa lähes aina diskretointivirheeseen eli poikkeamaan yksinkertaistetun mallin tarkasta ratkaisusta [8][luku 1],[11]. Todellisten rakenteiden suunnittelussa on aina mukana poikkeamia todellisuudesta suunnittelu- ja analysointiprosessin kaikissa vaiheissa: idealisointi- ja mallinnusvaiheen yksinkertaistukset voivat yhdessä diskretointivirheen kanssa johtaa suuriin kokonaisvirheisiin, jotka saattavat olla rakenteen kantokyvyn ja kestävyyden kannalta hyvinkin kriittisiä [7][s. 5]. Tästä syystä eri vaiheiden yksinkertaistusten vaikutuksia on kyettävä analysoimaan ja niiden suuruutta on kyettävä kontrolloimaan. Virheanalyysistä onkin tullut myös merkittävä osa rakenneanalyysiä [7, 16, 24].

Virhekomponenteista diskretointivirheen analysointi on kenties virheanalyysin helpoiten kontrolloitavin osuus ja sitä on myös tutkittu paljon [7, 13, 12, 6, 8, 9, 27, 26]. Elementtimenetelmässä diskretointivirhettä voidaan tunnetusti pienentää lisäämällä vapausasteiden lukumäärää, joko tihentämällä verkkoa tai korottamalla elementtien astetta. Näin ratkaisu tarkentuu, mutta samalla laskentatehtävä muuttuu raskaammaksi. Insinöörisuunnittelussa ei yleensä pyritäkään mahdollisimman tarkkaan ratkaisuun vaan parhaaseen kompromissiin ratkaisun laadun sekä laskenta-ajan ja muiden resurssien välillä [11]. Rajallisten resurssien vuoksi onkin järkevää kohdentaa erityisesti elementtiverkon tihennys ainoastaan niihin osa-alueisiin, joissa laskennan tavoitteiden kannalta oleelliset suureet ovat merkittävässä osassa tai muuttuvat nopeasti [16, 22]. Laskentasuureiden ja tehtävän ratkaisun käyttäytymiseen mukautuvia adaptiivisiksi kutsuttuja elementtimenetelmiä on tutkittu ja kehitetty jo 70-luvun lopulta lähtien [6][luku 1],[25],[5][luku 1], ja automaattisia adaptiivisia menetelmiä esiintyy jo kaupallisissakin ohjelmistoissa.

Yksi laaja-alaisimmista ja yleisimmin käytetyistä ohjelmistoista on 3D-mallinnus- ja FEM-laskentaohjelmisto Abaqus. Tämän työn päätarkoituksena on perehtyä Abaqus-ohjelmiston adaptiivisiin verkontihennysmenetelmiin: Tutkimuksen painopiste on esimerkkitapausten analysoinnissa, joten laattateorian ja adaptiivisten menetelmien osuus on pyritty rajaamaan laskennan kannalta oleellisiin näkökohtiin. Testitapaukset on valittu vastaamaan sekä aikaisempia tutkimuksia [10, 18, 21] että yksinkertaisia osatehtäviä, joita esiintyy käytännön suunnittelussa. Ennen tutkimustulosten esittelyä kolmessa seuraavassa luvussa kerrataan lyhyesti laattamallien, elementtimenetelmän ja adaptiivisen verkontihennyksen perusperiaatteita sekä esitellään näihin liittyviä Abaqus-ohjelmiston perusominaisuuksia.

Tämä artikkeli perustuu osittain Mari Vuorisen kandidaatintyöhön *Adaptiiviset verkontihennysmenetelmät lujuuslaskentaohjelmistossa* (2008, TKK).

Laattamallien perusyhtälöt

Siirtymäsuureet ja muodonmuutokset

Tarkastellaan kolmidimensioista laattarakennetta

$$\mathcal{P} = \Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}), \tag{1}$$

joka on sijoitettu karteesiseen koordinaatistoon siten, että x- ja y-akselit sijaitsevat laatan keskipinnalla $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ja z-akseli osoittaa taipuman w positiiviseen suuntaan. Laattaa kuormittaa jakaantunut, keskipintaa vastaan kohtisuora, z-akselin suuntainen kuorma f ja laatan paksuus on t, joka oletetaan suuruudeltaan selvästi pienemmäksi kuin laatan muut dimensiot.

Olkoon laatan siirtymäkenttä $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$, missä indeksit x, y, z viittaavat karteesisiin koordinaatteihin ja $u_i = u_i(x, y, z)$, $i = x, y, z$. Yleisimmin käytetyt, klassiset laattamallit noudattavat Kirchhoffin–Loven tai Reissnerin–Mindlinin laattateoriaa [8][luku 14], [19][luku 2]. Geometrisesti lineaarisessa Reissner–Mindlin-laattateoriassa siirtymäkenttä voidaan esittää muodossa

$$u_x = -z\beta_x(x, y), \quad u_y = -z\beta_y(x, y), \quad u_z = w(x, y), \tag{2}$$

missä kiertymävektorin $\boldsymbol{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$ komponentit β_x ja β_y merkitsevät kiertymiä y- ja x-akselin ympäri, suunnistuksen seuratessa taipuman muutosta. Kirchhoff–Love-laattateoriassa taipuma ja kiertymä on kytketty toisiinsa yhtälöllä

$$\nabla w - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

mistä seuraa siirtymäkomponenteille lausekkeet

$$u_x = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}, \quad u_z = w(x,y). \tag{4}$$

Siirtymien avulla saadaan lineaarisen elastisuusteorian mukaiset muodonmuutokset

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \end{aligned} \tag{5}$$

joita koskien on huomautettava, että Kirchhoff–Love-mallin poikittaisille leikkausmuodonmuutoksille pätee $\gamma_{xz} = 0 = \gamma_{yz}$.

Jännitysresultantit, tasapainoyhtälöt ja reunaehdot

Laatan tasapainoyhtälöitä varten seuraavaksi määritellään laatan jännitysresultantit, eli taivutusmomentit M_x ja M_y, vääntömomentti M_{xy} sekä leikkausvoimat Q_x ja Q_x:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z\,\sigma_x\,dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z\,\sigma_y\,dz, \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} z\,\tau_{xy}\,dz, \tag{6}$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz}\,dz, \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz}\,dz, \tag{7}$$

missä jännitys oletetaan symmetriseksi, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = x, y, z$. Virtuaalisen työn periaatteen avulla laatan tasapainoyhtälöt voidaan esittää Reissner–Mindlin-mallille muodossa

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \tag{8}$$

Kirchhoff–Love-laattamallin tapauksessa yhtälöt pelkistyvät muotoon

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + f = 0. \tag{9}$$

Reissnerin–Mindlinin laattamallin reunaehdoiksi [20] saadaan kova jäykkä tuenta (*hard clamped*),

$$w(s) = 0, \quad \beta_n(s) = 0, \quad \beta_s(s) = 0, \tag{10}$$

pehmeä jäykkä tuenta (*soft clamped*),

$$w(s) = 0, \quad \beta_n(s) = 0, \quad M_s(s) = 0, \tag{11}$$

kova vapaa tuenta (*hard simply supported*),

$$w(s) = 0, \quad \beta_s(s) = 0, \quad M_n(s) = 0, \tag{12}$$

pehmeä vapaa tuenta (*soft simply supported*),

$$w(s) = 0, \quad M_n(s) = 0, \quad M_s(s) = 0, \tag{13}$$

sekä vapaa reuna (*free*)

$$Q_n(s) = 0, \quad M_n(s) = 0, \quad M_s(s) = 0; \tag{14}$$

Kirchhoffin–Loven laattamallin reunaehdot [20] ovat puolestaan jäykkä tuenta (*clamped*),

$$w(s) = 0, \quad \frac{\partial w(s)}{\partial n(s)} = 0, \tag{15}$$

vapaa tuenta (*simply supported*),

$$w(s) = 0, \quad M_n(s) = 0, \tag{16}$$

sekä vapaa reuna,

$$M_n(s) = 0, \quad \frac{\partial M_s(s)}{\partial s} - Q_n(s) = 0. \tag{17}$$

Lisäksi Kirchhoff–Love-mallissa vapaalla reunalla olevissa nurkkapisteissä c pätee ehto $M_{s_1}(s_c) = M_{s_2}(s_c)$, missä indeksit 1 ja 2 viittaavat siihen, että normaalivektorien suunnat poikkevat toisistaan lähestyttäessä nurkkapistettä sen eri puolilta. Reunaehtolausekkeissa $w(s)$ tarkoittaa laatan keskipinnan taipumaa reunaviivan koordinaattiarvolla s, β_n tarkoittaa laatan keskipinnan normaalin kiertymää reunan tangentin ympäri, β_s puolestaan tarkoittaa kiertymää reunan normaalin ympäri. Vastaavasti M_n tarkoittaa momenttia reunaviivan tangentin ympäri ja M_s momenttia reunan normaalin ympäri. Reunaehtojen osalta on hyvä huomata, että Kirchhoffin–Loven laattamalli ei erottele pehmeää ja kovaa vaihtoehtoa jäykässä tuennassa eikä myöskään vapaassa tuennassa.

Lineaarisesti elastisen laatan jännitykset

Tässä yhteydessä laatan materiaali oletetaan homogeeniseksi ja isotrooppiseksi; jännitysten ja muodonmuutosten oletetaan kytkeytyvän toisiinsa noudattaen Hooken lakia:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \end{aligned} \tag{18}$$

missä E on materiaalin kimmokerroin, ν on Poissonin vakio ja materiaalin liukumoduuli on

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{19}$$

On vielä huomattava, että jännitystilaksi on oletettu tasojännitystila, jolloin $\sigma_z = 0$. Näillä oletuksilla Kirchhoff–Love-laatan jännitysresultantit voidaan lausua taipuman avulla muodossa

$$Q_x = -D(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}), \quad Q_y = -D(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}), \tag{20}$$

$$M_x = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}), \quad M_y = -D(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}), \quad M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{21}$$

missä taivutusjäykkyydelle on käytetty merkintää

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{22}$$

Reissner–Mindlin-laatan jännitysresultanteiksi saadaan taipuman ja kiertymien avulla lausuttuna

$$Q_x = Gt(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x), \quad Q_y = Gt(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y), \tag{23}$$

$$M_x = -D(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial \beta_y}{\partial y}), \quad M_y = -D(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial \beta_x}{\partial x}), \quad M_{xy} = -\frac{Gt^3}{12}(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}). \tag{24}$$

Tässä yhteydessä ei perehdytä tarkemmin mallien muihin ominaispiirteisiin, eroihin eikä pätevyyteen suhteessa kolmidimensioiseen elastisuusteoriaan [8][luku 17.3], [20].

Esimerkkitapauksissa tullaan tarkastelemaan von Mises -jännitystä, joka kuvaa rakenteen muodon vääristymistä ja on riippumaton käytetystä koordinaatistosta [15][s. 117]. Kolmidimensioisen jännityskentän von Mises -jännitys määritellään yhtälöllä

$$\sigma_m = \{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]\}^{1/2}, \tag{25}$$

joka laattojen tapauksessa hieman yksinkertaistuu oletuksen $\sigma_z = 0$ seurauksena. Lisäksi isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen Kirchhoff–Love-laatan tapauksessa yhtälöiden (4), (5) ja (18) perusteella $\tau_{yz} = 0 = \tau_{xz}$.

Elementtimenetelmän virhearviot ja adaptiiviset menetelmät

Elementtimenetelmän tarkkuus ja virhearviot

Koska elementtimenetelmässä jatkuva systeemi korvataan äärellisellä määrällä vapausasteita, syntyy diskretointivirhe [7][luku 3], [27][luku 13]

$$e_h = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|, \tag{26}$$

missä $\boldsymbol{u}$ on jatkuvan systeemin ratkaisu ja $\boldsymbol{u}_h$ on diskreetin systeemin ratkaisu sekä $\|\cdot\|$ tarkoittaa valittua matemaattista normia, jolla virhettä mitataan. Tyypillisesti virhearviot mitataan energianormissa, joka rakenneanalyysissä vastaa rakenteen muodonmuutosenergiaa [18]. Virhe voidaan määrittää sekä yhdelle elementille että koko ratkaisualueelle tai jollekin osa-alueelle. Elementtimenetelmän diskretointivirhettä voidaan tunnetusti pienentää joko korottamalla elementtien astetta tai tihentämällä elementtijakoa. Ensimmäistä lähestymistapaa kutsutaan p-menetelmäksi ja jälkimmäistä h-menetelmäksi [7, 8]. Molemmissa menetelmissä vapausasteiden eli laskentasolmujen lukumäärä lisääntyy. Nämä menetelmät voidaan myös yhdistää hp-menetelmäksi [8, 7, 23].

Elementtimenetelmän diskretointivirhettä voidaan arvioida etukäteen sen tiedon avulla, joka ratkaistavasta tehtävästä ja käytetystä menetelmästä tiedetään etukäteen, jolloin puhutaan *a priori* -virhearviosta [7][luku 4]. Se antaa teoreettista tietoa ratkaisun tarkkuudesta ja menetelmän soveltuvuudesta [20]. *A posteriori* -virhearviot puolestaan perustuvat virheindikaattoreihin, jotka muodostetaan vasta tehtävän ratkaisemisen jälkeen, pelkästään elementtiratkaisun ja tehtävän lähtötietojen avulla. Näin siis virheindikaattoreiden avulla ratkaisuapproksimaatio kertoo itse omasta tarkkuudestaan. A posteriori -virhearviot ovat tärkeitä välineitä tulosten luotettavuuden arvioinnissa [7][luku 5], [24, 16].

A priori -virhearviot ovat yleensä kvalitatiivisia ja globaaleja; a posteriori -virhearviot antavat myös kvantitatiivista ja lokaalia tietoa [20]. Suure, johon a posteriori -virhearvio perustuu, voi olla periaatteessa mikä tahansa, mutta suure tulee valita laskentaongelman mukaan ja sen tulee olla mitattavissa sekä kustannustehokkaasti laskettavissa [7, 16].

A posteriori -virheindikaattorin tarkkuutta ja tehokkuutta mitataan tehokkuusindeksillä (*effectivity index*) [6][luku 1], [27][luku 13.6]

$$\iota = \frac{\tilde{e}_h}{e_h}, \tag{27}$$

jossa $\tilde{e}_h$ on virheindikaattorien avulla saatu virhe-estimaattori, todellisen virheen e_h approksimaatio. Yleensä pyritään todellista virhettä suurempaan arvioon, jolloin siis $\iota \geq 1$. Erityisesti tehokkuusindeksin tulisi riippua mahdollisimman vähän elementtiverkon tiheydestä, ainakin sen tulisi pysyä rajoitettuna elementtiverkon tiheyttä muutettaessa.

Superconvergent Patch Recovery -virheindikaattorit

A posteriori -virheindikaattorit mahdollistavat ratkaisun tarkentamisen alueissa, joissa laskentasuureissa on suuria vaihteluja ja virhe näinollen suuri. Adaptiivisesti elementtiverkkoa tihentämällä ja harventamalla (h-menetelmä) tai elementtiastetta nostamalla ja laskemalla (p-menetelmä) verkon tiheys tai elementtien asteluku mukautetaan approksimoitavaan ratkaisuun. Adaptiivisen laskennan tarkoituksena on saavuttaa tietty tarkkuus mahdollisimman pienellä määrällä vapausasteita ja siten vähäisillä laskentakustannuksilla [11, 16].

Adaptiivisessa verkontihennyksessä lasketaan ensin melko harvalle verkolle elementtiapproksimaatio ja sitä vastaavat virheindikaattorit ja -estimaattorit. Tämän jälkeen virheindikaattorien ja tihennysstrategian perusteella verkkoa tihennetään muodostamalla kokonaan uusi elementtiverkko tai tihentämällä vanhaa verkkoa. Uudella verkolla lasketaan taas uusi elementtiapproksimaatio ja vastaavat virheindikaattorit. Verkontihennystä jatketaan kunnes haluttu tarkkuus on saavutettu.

Abaqus-ohjelmistossa [1][luku 12.3.2] sovelletaan Zienkiewiczin ja Zhun kehittämää hyvin yleisesti käytettyä virheindikaattorityyppiä, jota nimitetään Superconvergent Patch Recovery (SPR) -menetelmäksi [28, 29, 30, 18, 6], [27][luku 13.4]. SPR-menetelmässä virheindikaattorit muodostetaan yleensä jännityssuureiden avulla. Virhearviota varten jännityskentän approksimaatiolle $\boldsymbol{r}_h$, joka vastaa alkuperäistä elementtiratkaisua $\boldsymbol{u}_h$, haetaan parannettu (*recovered*) approksimaatio $\boldsymbol{r}_h^*$ alkuperäisen jännitysapproksimaation $\boldsymbol{r}_h$ erikoistarkkojen (*superconvergent*) pistearvojen ja SPR-jälkikäsittelymenetelmän avulla.

Tarkastellaan esimerkkinä jännitysapproksimaation $\boldsymbol{r}_h$ yhtä komponenttia r_h, jonka voidaan tässä yhteydessä olettaa merkitsevän myös jotakin siitä johdettua voimasuuretta, esimerkiksi momenttikomponentin M_x elementtiapproksimaatiota. Parannetun jännitysapproksimaation $\boldsymbol{r}_h^*$ vastaavaa komponenttia r_h^* etsitään muodossa

$$r_h^*(x, y) = \sum_i N_i(x, y) r_i^*, \tag{28}$$

missä muotofunktiot N_i ovat siirtymäapproksimaatiolle $\boldsymbol{u}_h$ käytettyjä muotofunktioita ja solmuarvot r_i^* ovat tuntemattomia. Tuntemattomat solmuarvot määritetään muodostamalla kuhunkin solmuun i liittyvien elementtien muodostamassa elementtitilkussa (*element patch*) vastaava jännityskomponentin parannettu tilkkuapproksimaatio

$$r_p^*(x, y) = \sum_j P_j(x, y) a_j, \tag{29}$$

missä polynomifunktiot P_j muodostavat muotofunktioiden N_i astetta vastaavan (täydellisen) polynomikannan seuraavan esimerkin mukaisesti: kaksidimensioisessa tapauksessa lineaariselle kolmioelementille saadaan polynomit $P_1(x,y) = 1, P_2(x,y) = \bar{x}, P_3(x,y) = \bar{y}$, kun käytetään merkintöjä $\bar{x} = x - x_i, \bar{y} = y - y_i$. Tuntemattomat kertoimet a_j ratkaistaan sovittamalla approksimaatiot r_h ja r_p^* pienimmän neliön mielessä elementtitilkun erikoistarkoissa pisteissä (x_k, y_k), mikä vastaa lausekkeen

$$\sum_k \left(r_h(x_k,y_k) - r_p^*(x_k,y_k)\right)^2 = \sum_k \left(r_h(x_k,y_k) - \sum_j P_j(x_k,y_k)a_j\right)^2 \tag{30}$$

minimointia tuntemattomien a_j suhteen. Tyypillisesti erikoistarkat pisteet ovat tilkun elementtien Gaussin pisteitä, joissa jännitykset saavat tarkimmat arvonsa. Lopuksi parannetun jännitysapproksimaation solmuarvot r_i^* saadaan keskiarvona kuhunkin solmuun liittyvien tilkkuapproksimaatioiden antamista solmuarvoista.

Todellista virhettä e_h approksimoidaan parannettua jännityskenttää vastaavalla virheellä e_h^* [29, 30], [27][luku 13.6]:

$$e_h = ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h|| \approx ||\boldsymbol{u}_h^* - \boldsymbol{u}_h|| = e_h^*, \tag{31}$$

missä $\boldsymbol{u}_h^*$ viittaa parannetun jännityskentän $\boldsymbol{r}_h^*$ mukaiseen ratkaisuun, vaikka itse siirtymäkentälle ei (alkuperäisessä) SPR-menetelmässä eksplisiittisesti muodostetakaan parannettua approksimaatiota. Yhtälössä (31) oikean puolen virhearvio lähestyy vasemman puolen todellista virhettä elementtiapproksimaation tarkkuuden kasvaessa eli verkkoa tihennettäessä.

Adaptiivinen verkontihennys

SPR-menetelmän virheindikaattoreiden laskennan jälkeen adaptiivinen verkontihennys kulkee yleensä pääpiirteittäin seuraavasti [18]: Suhteellisen virheen η approksimaatio η^* saadaan yhtälöstä

$$\eta = \frac{e_h}{\|\boldsymbol{u}\|} \approx \frac{e_h^*}{\|\boldsymbol{u}_h^*\|} = \eta^*, \tag{32}$$

missä $\|\boldsymbol{u}\|$ on ratkaisun energianormi ja $\|\boldsymbol{u}_h^*\|$ parannettujen jännitysarvojen avulla saatu energianormin arvio (*estimated energy norm*), sekä e_h on todellisen virheen energianormi (*error norm*) ja e_h^* on parannettujen jännitysarvojen avulla saatu virheen energianormin arvio (*estimated error norm*). Adaptiivisen verkontihennyksen tavoitteena on saavuttaa ratkaisu, jossa suhteellinen virhe saavuttaa enintään määrätyn arvon $\tilde{\eta}$, siis $\eta \approx \eta^* \leq \tilde{\eta}$. Tästä saadaan paikallinen luvallinen virhenormi (*local allowable total error norm*)

$$e_a = \tilde{\eta}\frac{\|\boldsymbol{u}_h^*\|}{\sqrt{N_e}}, \tag{33}$$

missä arvioitu elementtilukumäärä N_e saadaan nykyisen elementtilukumäärän N_c avulla:

$$N_e = N_c(\frac{\eta^*}{\tilde{\eta}})^{2/p}. \tag{34}$$

Tässä p on käytettävän elementin antama virheen suppenemisnopeus energianormissa, $e_h = \mathcal{O}(h^p)$, joka voidaan määrittää numeerisesti tai a priori -virheanalyysin avulla. Elementtikohtaiseksi tihennyskertoimeksi elementille i saadaan

$$\zeta_i = \frac{e_h^*}{e_a}, \tag{35}$$

jonka avulla elementin vanhasta koosta h_i^o lasketaan uusi koko

$$h_i^n = \frac{h_i^o}{(\eta_i^*)^{\frac{1}{1+\mu}}}, \quad (36)$$

missä vakio μ ilmaisee tihennyksen nopeuden: $\mu = p$, tai jos ratkaisun singulaarisuuden aste λ on tiedossa, $\mu = \lambda$ [18].

Laattaelementit ja adaptiivisuus Abaqus-ohjelmistossa

Laattaelementit Abaqus-ohjelmistossa

Abaqus-ohjelmistossa ei ole erikseen laattaelementtejä vaan laattojen laskenta suoritetaan kuorielementeillä [2][luvut 3.1, 3.6.1], [1][luku 23.6.1]. Kuorielementit jaotellaan tavanomaisiin kuorielementteihin (*conventional*) ja kontinuumikuorielementteihin (*continuum*) [1][luku 23.6.1]. Pääosa tavanomaisista kuorielementeistä on yleiskäyttöisiä (*general purpose*), osa ohuita (*thin*) ja osa paksuja (*thick*) kuorielementtejä [1][luku 23.6.2]. Ohuet kuorielementit noudattavat Kirchhoffin–Loven teoriaa ja paksut kuorielementit Reissnerin–Mindlinin teoriaa. Yleiskäyttöisissä kuorielementeissä kuoret käsitellään Reissnerin–Mindlinin kinemaattisten oletusten mukaisina ja paksuuden pienentyessä siirrytään Kirchhoffin–Loven teoriaan (*discrete Kirchhoff constraint*) [1][luku 23.6.2], [26][luvut 11 ja 12]. Ohjelmiston käyttöohjeen mukaan laattarakenteiden elementtityyppinä voidaan käyttää kuorielementtejä, kun laatan paksuus on alle kymmenesosa laatan lyhimmän sivun mitasta [4][luku 5] – tämän rajan ylittävät laatat suositellaan mallinnettavan kolmiulotteisilla solidielementeillä. Laatoissa, joiden paksuuden suhde lyhimmän sivun mittaan on alle 1/15, voidaan käyttöohjeen mukaan käyttää ohuita kuorielementtejä [1][luku 23.6.2].

Tässä työssä ensimmäiselle tutkimustapaukselle käytettiin kolmioelementtejä, joita Abaqus-ohjelmassa merkitään koodeilla STRI3 ja STRI65 (ohut, tavanomainen kuorielementti). Muissa tutkimustapauksissa käytettiin elementtejä S4RS ja S3RS (yleiskäyttöinen, tavanomainen kuorielementti). S4RS-elementissä ohuiden laattojen lukkiutumista pyritään estämään käyttämällä ali-integrointia sekä nollaenergiamuotojen kontrollointia [2][luku 3.6.6].

Abaqus-ohjelmiston adaptiiviset menetelmät

Abaqus-ohjelmiston adaptiivinen uudelleenverkotusmenetelmä (*adaptive remeshing*) [1][luvut 12.1, 12.3], [3][luvut 17.12, 17.20] valitaan verkontihennyssäännön (*remeshing rule*) avulla [1][luku 12.3.3], [3][luvut 17.12.1, 17.20.1]. Siinä laskentamallille määritellään alue ja kuormitustapaus, johon sääntöä käytetään, sekä virheindikaattorin tyyppi (*error indicator*) [1][luku 12.3.2], [3][luku 17.20.2], elementtien kokoa säätelevä tihennysmenetelmä (*sizing method*) [1][luku 12.3.3], [3][luku 17.20.3], ja rajoitteet (*constraints*) [1][luku 12.3.3], [3][luku 17.20.4]. Verkontihennyssäännön avulla ohjelma tihentää verkkoa iteratiivisesti, käyttäjän asettaman iteraatiokierrosten lukumäärän ja verkontihennyssäännössä määritellyn tarkkuuden mukaisesti.

Virheindikaattorit

Virheindikaattorit antavat arvion virheen suuruudelle kussakin elementissä. Abaqus-ohjelmistossa käytetään indikaattorityyppejä, jotka perustuvat edellisessä luvussa kuvailtuun SPR-menetelmään [28, 29, 30], [1][luku 12.3.2], [3][luku 17.20.2]. Ohjelmistossa voidaan valitaan, käytetäänkö elementin energiatiheyteen, von Mises -jännitykseen, ekvivalenttiin plastiseen venymään, plastiseen venymään, virumaan, lämpövuohon, sähkökentän vuohon vai sähkökentän potentiaalin gradienttiin perustuvia virheindikaattoreita. Näitä indikaattoreita voidaan myös yhdistää [1][luku 12.3.2]. Tässä työssä on käytetty lineaarisesti elastiselle laattatehtävälle sopivaa elementin energiatiheyteen perustuvaa ENDENERI-indikaattoria sekä von Mises -jännitykseen perustuvaa MISESERI-indikaattoria.

Tihennysmenetelmät

Tihennysmenetelmälle, jolla elementtien uudet koot määritellään, ohjelmistossa on kaksi vaihtoehtoa: niin sanottu minimi/maksimimenetelmä (*minimum/maximum control*) sekä tasaisen virhejakautuman menetelmä (*uniform error distribution*) [1][luku 12.3.3], [3][luku 17.20.3]. Oletusarvoisesti Abaqus käyttää tasaisen virhejakautuman menetelmää ENDENERI-virheindikaattorin kanssa ja minimi/maksimimenetelmää MISESERI-indikaattorin kanssa.

Minimi/maksimimenetelmä asettaa kaksi tavoitearvoa virheindikaattorille: toinen kontrolloi elementtien kokoa niillä alueilla, joilla virheindikaattorin taustalla oleva ratkaisusuure saa suuria arvoja ja toinen kontrolloi niitä alueita, joilla ratkaisusuure saa pieniä arvoja. Virhetavoitteiden vaihtelua näiden arvojen välillä voidaan säätää suuntakertoimella (*bias factor*) arvojen heikko (*weak*) ja vahva (*strong*) välillä. Heikolla suuntakertoimen arvolla elementtikoko kasvaa hyvin nopeasti siirryttäessä poispäin alueista, joissa ratkaisusuure saa suurimmat arvonsa. Vahvalla suuntakertoimen arvolla elementtikoon muutos on hitainta. Oletusarvoisesti Abaqus asettaa suuntakertoimen arvon enemmän vahvan puolelle. Tavoitevirheiden suuruudet käyttäjä voi asettaa itse, tai voidaan käyttää ohjelmiston oletusasetuksia, jolloin tavoitevirhe lasketaan edellisten iteraatioiden perusteella.

Tasaisen virhejakautuman menetelmä pyrkii samansuuruiseen virheeseen koko ratkaisualueella. Myös tässä menetelmässä tavoiteltava virheindikaattorin arvo on käyttäjän asetettavissa, tai voidaan käyttää ohjelmiston oletusasetuksia, jolloin tavoitevirhe lasketaan edellisten iteraatioiden perusteella.

Rajoitteet

Verkontihennyssäännön rajoitteet koskevat elementtien kokoa ja tihennysmenetelmän aggressiivisuutta [1][luku 12.3.3], [3][luku 17.20.4]. Elementtien kokoa rajoitetaan asettamalla niille minimi- ja maksimikoot (*size constraints*): Oletusarvoisesti ohjelmisto asettaa minimiarvoksi yhden prosentin oletuselementtikoosta ja maksimiarvoksi oletuselementtikoon kymmenkertaisena. Tihennysmenetelmän aggressiivisuus säädetään tihennys- ja harvennustekijöiden (*refinement and coarsening rate factors/limits*) avulla: tihennystekijä kontrolloi verkon tiheyttä tai pienten elementtien luomista; harvennustekijä kontrolloi verkon harvuutta tai suurten elementtien luomista. Ohjelmiston käyttöohjeessa suositellaan käyttämään rajoituksia etenkin singulaaristen pisteiden yhteydessä, sillä adaptiivinen verkontihennysprosessi saattaa tihentää verkkoa liian agressiivisesti singulaarisen pisteen ympäristössä [1][luku 12.3.1]. Tässä työssä on käytetty ohjelmiston oletusarvoja, jotka on käyttöohjeen mukaan suunniteltu estämään sekä verkon liiallista harvuutta että laskennallisesti kallista tiheyttä.

Esimerkkitapaukset

Tämän luvun kahdeksan esimerkkitapauksen avulla tutkitaan Abaqus-ohjelmiston verkontihennysmenetelmiä, painopisteenä adaptiivisen ja tasaisen verkontihennyksen vertailu. Laskennassa on käytetty ohjelmistoversiota Abaqus/CAE 6.7-1.

Testitapaukset on valittu vastaamaan sekä aikaisempia tutkimuksia [10, 18, 21] että yksinkertaisia osatehtäviä, joita esiintyy käytännön suunnittelussa. Ensimmäisenä esimerkkitapauksena käytetään tasaisesti kuormitettua L-kirjaimen muotoista laattaa; toisena esimerkkitapauksena on neliölaatta tasaisella kuormituksella; kolmannessa ja neljännessä tutkimustapauksessa neliölaatan kuormitus on osittainen; viidennessä neliölaattaa kuormittaa pistemäinen kuormitus; kuudes testitapaus on viivakuorman alainen neliölaatta; seitsemännessä laatassa on muuttuva jäykkyys ja kahdeksannessa muuttuva paksuus.

Jokaiselle esimerkkitapaukselle luotiin aluksi tasainen, melko harva elementtiverkko, jolle suoritettiin laskenta-analyysi. Tasaista verkontihennystä jatkettiin, kunnes tulokset alkoivat vakiintua tai kunnes tietokoneresurssit loppuivat. Tutkimustapaukselle 1 tasainen verkontihennys suoritettiin sekä lineaarisilla että kvadraattisilla elementeillä. Muille tutkimustapauksille käytettiin vain lineaarisia elementtejä.

Seuraavaksi jokaiselle tapaukselle suoritettiin adaptiivinen verkontihennys eri menetelmin, ja laskennan tuloksia verrattiin tasaisten tihennysten antamiin tuloksiin. Adaptiivinen verkontihennysprosessi loppui joko kymmeneen iteraatioaskeleeseen tai kun verkontihennyssäännössä annetut ehdot täyttyivät.

Vertailusuureista muodonmuutosenergiaa tarkastellaan tutkimustapauksissa 1–5, 7 ja 8. Tämän lisäksi tapauksille 1 ja 5 vertailusuureena käytetään myös maksimitaipumaa, tapauksissa 2–4 tarkastellaan lähellä laatan nurkkaa saavutettavaa von Mises -jännityksen maksimiarvoa ja tapauksien 7 ja 8 osalta tarkastellaan von Mises -jännitystä laatan keskellä. Vertailusuureiden osalta tarkastelun kohteena on erityisesti tasaisen ja adaptiivisen verkontihennyksen antaman vertailusuuresarvon tarkkuus elementtien lukumäärän suhteen. Tapauksissa 1–3 ja 6 vertaillaan myös eri virheindikaattoreilla saatuja adaptiivisesti tihennettyjä verkkoja.

Tapaus 1: tasaisesti kuormitettu L:n muotoinen laatta

Ensimmäisenä tutkimustapauksena on L-kirjaimen muotoinen laatta [10], yksinkertainen esimerkki laatasta, jossa on singulaarinen piste, johon syntyy jännityskeskittymiä. Tämä tapaus kuvaa hyvin virhekeskittymiä ja laskentatarkkuuden sekä adaptiivisen verkontihennyksen merkitystä [18]. Laatan reunat on vapaasti tuettu (kova), laatan sivunpituudet ovat 2 m sekä 1 m ja laatan paksuus on 10 mm. Elementteinä käytettiin lineaarisia (STRI3) ja kvadraattisia (STRI65) Kirchhoff–Love-laattateoriaa noudattavia kolmioelementtejä.

Tälle testitapaukselle adaptiivinen verkontihennys suoritettiin usein eri menetelmin ja kriteerein: lineaarisilla ja kvadraattisilla elementeillä; tasaisen virhejakautuman menetelmällä ja minimi/maksimimenetelmällä sekä perustuen ENDENERI- ja MISESERI-indikaattoreihin.

Virheindikaattoreista ENDENERI-indikaattorilla päästiin parhaisiin tuloksiin sekä lineaarisilla että kvadraattisilla elementeillä. Tihennysmenetelmistä minimi/maksimimenetelmän huomattiin käyttäytyvän oletusrajoituksilla melko aggressiivisesti: Iteraatiokierrosten edetessä adaptiiviset verkot ja tulokset eivät tahtoneet vakiintua vaan verkontiheys ja sen myötä tulokset vaihtelivat suuresti iteraatiokierrosten välillä. Tästä huolimatta menetelmä antoi tasaista verkontihennystä tarkempia tuloksia suhteessa elementtien lukumäärään. Minimi/maksimimenetelmä lienee parhaimmillaan, kun käytetään suhteellisen vahvaa bias factor -arvoa, vain muutamaa iteraatiokierrosta sekä tarkoin säädettyjä rajoituksia. Kokeilujen perusteella lopulliset vertailut päädyttiin suorittamaan tasaiseen virhejakautumaan perustuvalla ENDENERI-indikaattorin verkontihennyssäännöllä.

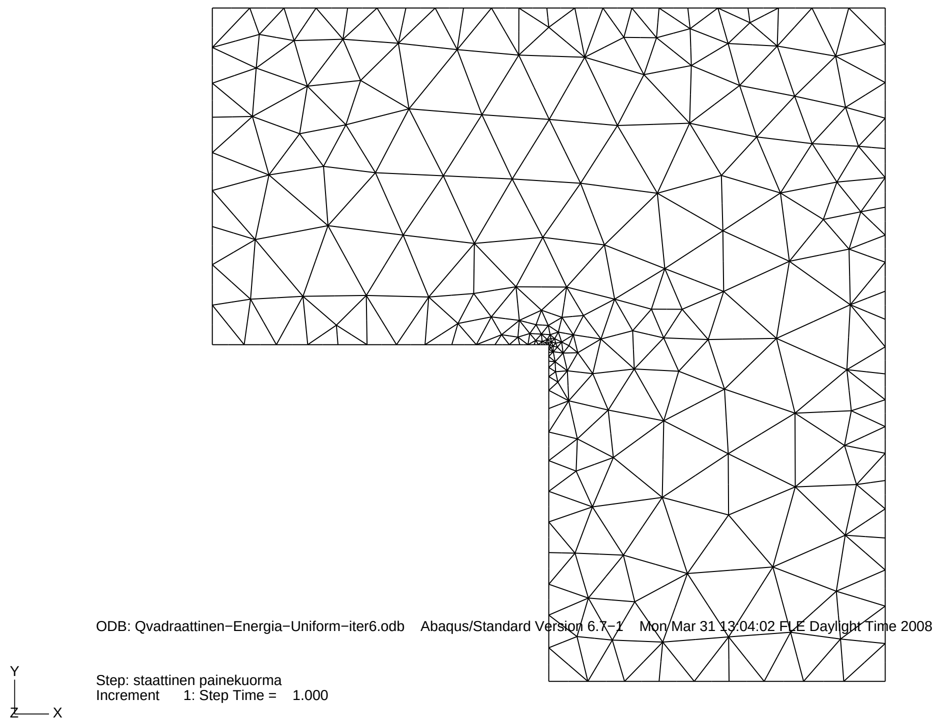
Sekä kvadraattisilla että lineaarisilla elementeillä, ja kaikilla adaptiivisilla kriteereillä, verkko tihentyi laatan singulaariseen nurkkaan sekä myös hieman laatan reunoille. Tyypillinen adaptiivisesti tihennetyn verkon muoto on esitetty kuvassa 1, ja se vastaa aikaisempia, joskin eri menetelmillä laskettuja, tutkimustuloksia [10]. Kuvassa 2 on esitetty muodonmuutosenergia elementtien lukumäärän funktiona. Myös maksimitaipuma elementtien lukumäärän funktiona noudattelee hyvin samanlaista käyrästöä. Kuvasta nähdään, että lineaaristen elementtien adaptiivisella verkontihennyksellä saatiin noin 10 000 elementillä tarkemmat tulokset kuin tasaisen verkontihennyksen noin 380 000 elementillä. Myös kvadraattisilla elementeillä adaptiivinen verkontihennys antoi muodonmuutosenergialle selvästi tarkemmat tulokset kuin tasainen tihennys: noin 400 elementin adaptiivisesti tihennetty verkko (kuva 1) antoi tarkemman tuloksen kuin noin 170 000 elementin tasainen tihennys.

Tapaus 2: tasaisesti kuormitettu neliölaatta

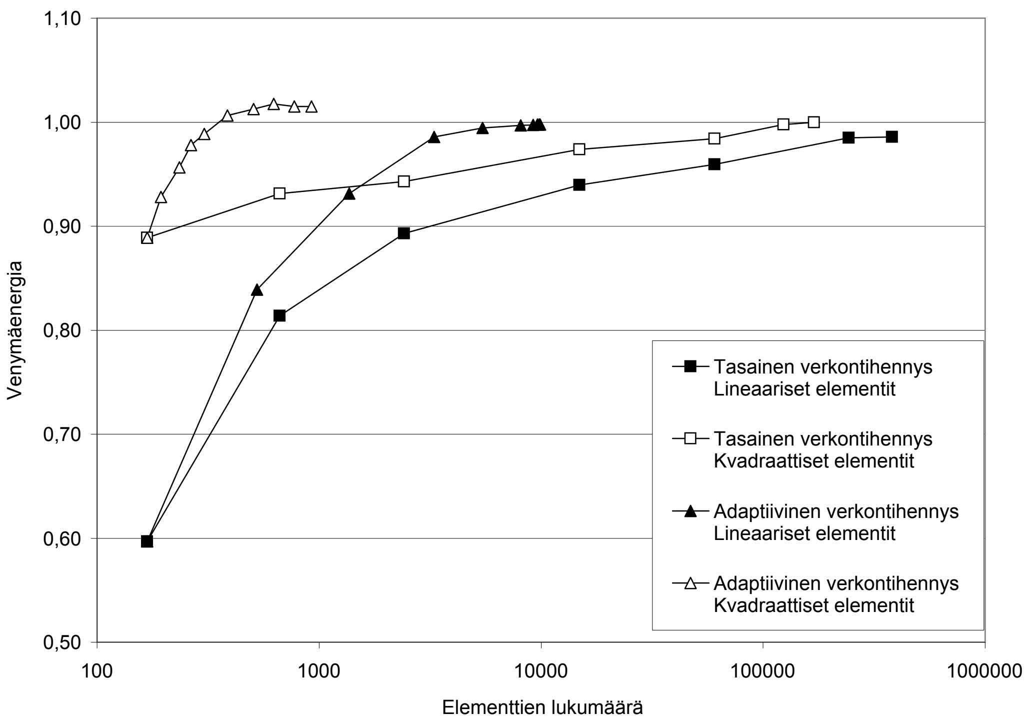
Toisen tutkimustapauksen laatassa jännitysarvot muuttuvat nopeasti reunojen läheisyydessä Reissner–Mindlin-laattateorian pehmeän vapaan tuennan (soft simply supported) seurauksena [18]. Tehtävän tarkassa ratkaisussa on siis reunahäiriö eli ratkaisu on epäsäännöllinen reunan läheisyydessä. Laatan paksuus on nyt 20 mm ja sivunpituus on 1 m. Elementteinä käytettiin Reissner–Mindlin-laattateorian mukaisia, lineaarisia neliö- (S4RS) ja kolmioelementtejä (S3RS).

Tässä testitapauksessa tihennys keskittyy kohti laatan reunoja, mikä vastaa Leen ja Hobbsin tuloksia [18]. Esimerkit eri menetelmien adaptiivisesti tihennetyistä verkoista on esitetty kuvissa 4 ja 5. Tasaisen virhejakautuman menetelmällä adaptiivisesti tihennetty verkko tihentyi hieman laatan reunoihin, laatan keskellä oli suurempia elementtejä ja suurin osa alueesta oli melko tasaista verkkoa, mikä käy ilmi kuvan 4 esimerkkiverkosta. Minimi/maksimimenetelmällä reunojen tihennys oli voimakkaampaa; voimakkainta MISESERI-indikaattorilla, jolla tihennys keskittyi erityisesti nurkkiin ja reunojen keskialueelle, mikä nähdään selvästi kuvan 5 esimerkkiverkosta. Nämä tihennyskeskittymät vastaavat nimenomaan niitä alueita, joissa von Mises -jännitysjakautuman arvoissa tapahtuu suuria muutoksia.

Kun vertailusuureena käytettiin muodonmuutosenergiaa, adaptiivisesti ja tasaisesti tihennetyillä elementtiverkoilla saavutettiin suunnilleen yhtä tarkkoja tuloksia suhteessa elementtien lukumäärään. Tämän vuoksi vertailusuureena käytettiin myös von Mises -jännityksen maksimiarvoa laatan nurkan läheisyydessä. Adaptiivisella verkontihennyksellä jännitys lähestyi tarkkaa arvoa selvästi pienemmällä elementtimäärällä kuin tasaisella tihennyksellä: Tasaisella tihennyksellä reuna-alueen jännitysjakautuma alkoi saada oikean muotonsa vasta noin 8000 elementillä, kun taas adaptiivisella tihennyksellä jännitysjakautuman oikea muoto saavutettiin jo noin 1300 elementillä. Kuvassa 3 on esitetty von Mises -jännityksen maksimiarvon tarkkuus elementtien lukumäärän suhteen MISESERI-indikaattorilla ja minimi/maksimimenetelmä. Kuvasta nähdään, että maksimiarvolle saadaan 95 prosentin tarkkuus tasaisella tihennyksellä noin 8000 elementillä ja adaptiivisella tihennyksellä noin 800 elementillä.



Kuva 1. Tapaus 1; tasainen kuorma, vapaa tuenta. Adaptiivisesti tihennetty, noin 400 kvadraattisen elementin verkko, jonka tarkkuus ylittää 170 000 elementin tasaisesti tihennetyn verkon tarkkuuden.



Kuva 2. Tapaus 1; tasainen kuorma, vapaa tuenta. Muodonmuutosenergian tarkkuuden kehitys elementtien lukumäärän suhteen.

Tapaus 3: osittain kuormitettu neliölaatta pehmeällä tuennalla

Kolmannen tutkimustapauksen geometria ja tuenta noudattavat edellistä tapausta, mutta kuormitus on keskittynyt laatan keskellä sijaitsevaan neliöön, jonka sivun pituus on kahdeksasosa koko laatan sivunpituudesta [21]. Elementteinä käytettiin samoja elementtityyppejä kuin edellisessä tapauksessa (S4RS ja S3RS).

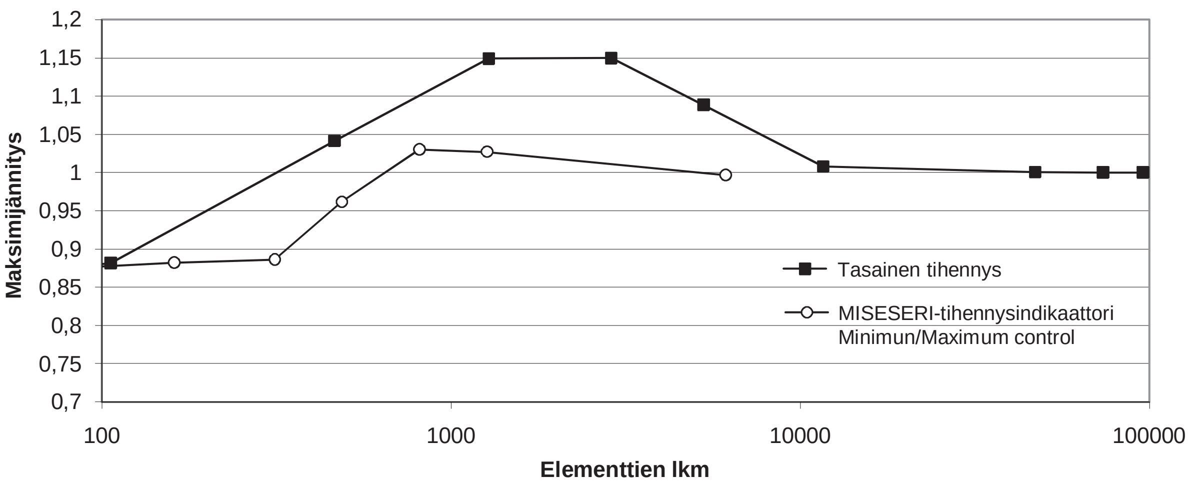
Tälle tapaukselle adaptiivinen prosessi tihensi verkkoa kuorman alueelle, kuormitetun ja kuormittamattoman alueen rajapintaan sekä ristin muotoiselle alueelle kuorma-alueesta reunaan. Esimerkit adaptiivisesti tihennetyistä verkoista on esitetty kuvissa 6 ja 7. Kuvista nähdään, että tasaisen virhejakautuman menetelmällä tihennys keskittyy kuorma-alueen lisäksi reunoille, mutta tihennys on kuitenkin kauttaaltaan melko tasaista. Minimi/maksimimenetelmässä tihennys kuorma-alueen ympäristössä on hieman voimakkaampaa mutta reunatihennys puolestaan maltillisempaa keskittyen reunojen keskiosiin.

Kuvassa 8 on esitetty von Mises -jännityksen maksimiarvon tarkkuus elementtien lukumäärän suhteen MISESERI-indikaattorilla ja minimi/maksimimenetelmällä. Kuvasta nähdään, että maksimiarvolle saadaan 98 prosentin tarkkuus tasaisella tihennyksellä noin 5000 elementillä ja adaptiivisella tihennyksellä noin 300 elementillä. Kun vertailusuureena käytettiin muodonmuutosenergiaa, adaptiivisen verkontihennyksen etu ei tullut näin selvästi esille.

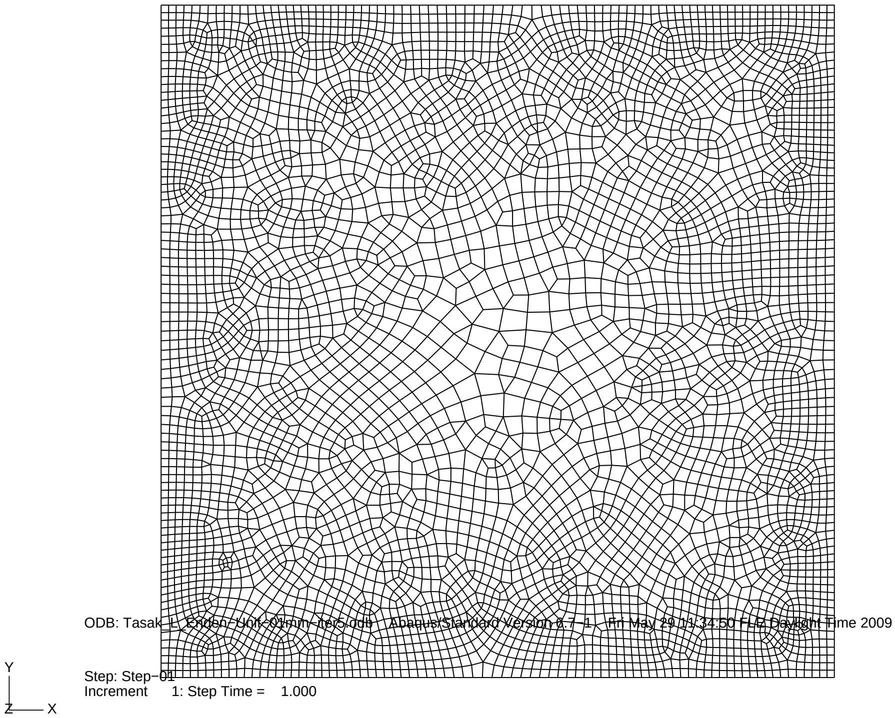
Tapaus 4: osittain kuormitettu neliölaatta kovalla tuennalla

Neljäs tutkimustapaus vastaa kolmatta tapausta sillä erolla, että reunoilla on nyt kova vapaa tuenta [21]. Elementteinä käytettiin samoja elementtityyppejä kuin tapauksissa 2 ja 3 (S4RS ja S3RS).

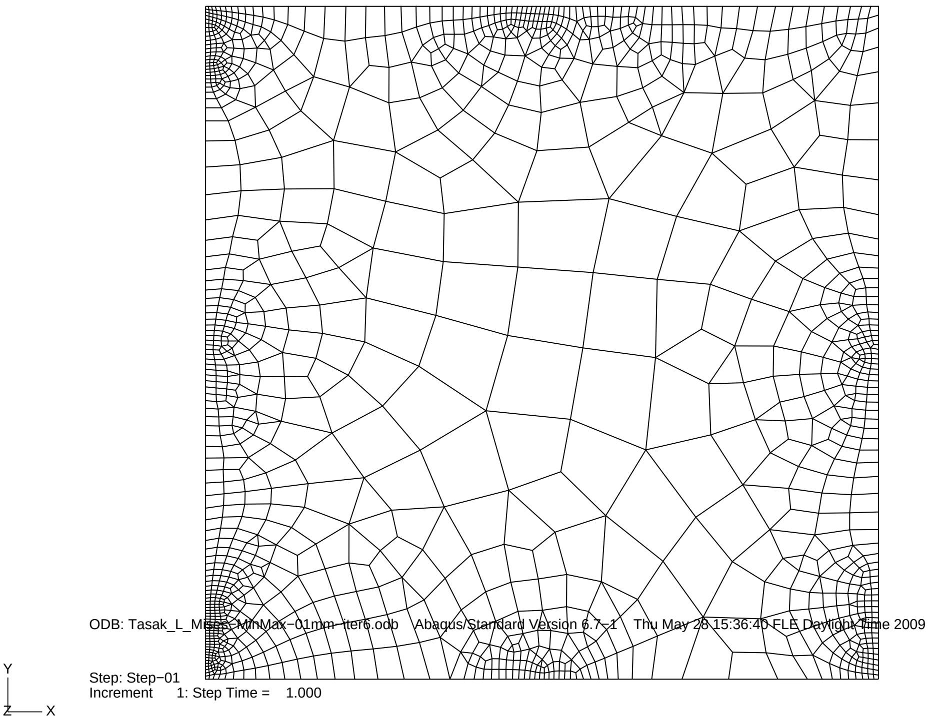
Tämän tapauksen tulokset vastaavat osin edellistä tapausta: Verkko tihentyi nyt kuormitusalueelle ja ristin muotoiselle alueelle kuormitusalueelta reunaan. Tihennys vastaa siis tapausta 3 sillä erolla, että reunahäiriöstä johtuva reunatihennys on vähäisempää, mikä nähdään vertaamalla kuvia 6 ja 9. Adaptiivisen tihennyksen etu tasaiseen tihennykseen on lähes samaa luokkaa kuin tapauksen 3 kuvassa 8.



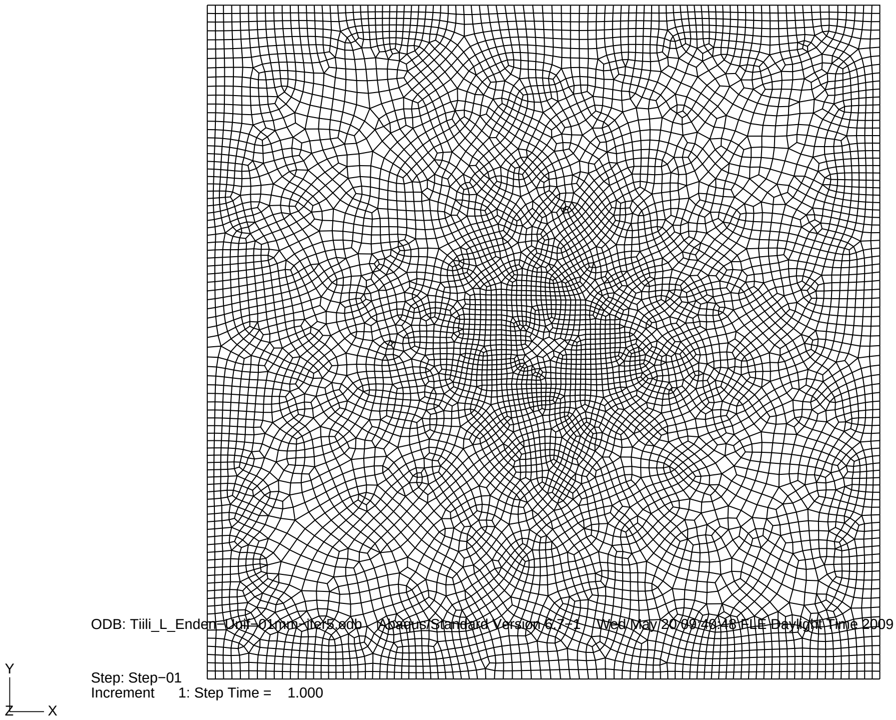
Kuva 3. Tapaus 2; tasainen kuorma, pehmeä vapaa tuenta. Von Mises -jännityksen maksimiarvon tarkkuus elementtien lukumäärän suhteen tasaisella ja adaptiivisella tihennyksellä (MISESERI-indikaattori ja minimi/maksimimenetelmä).



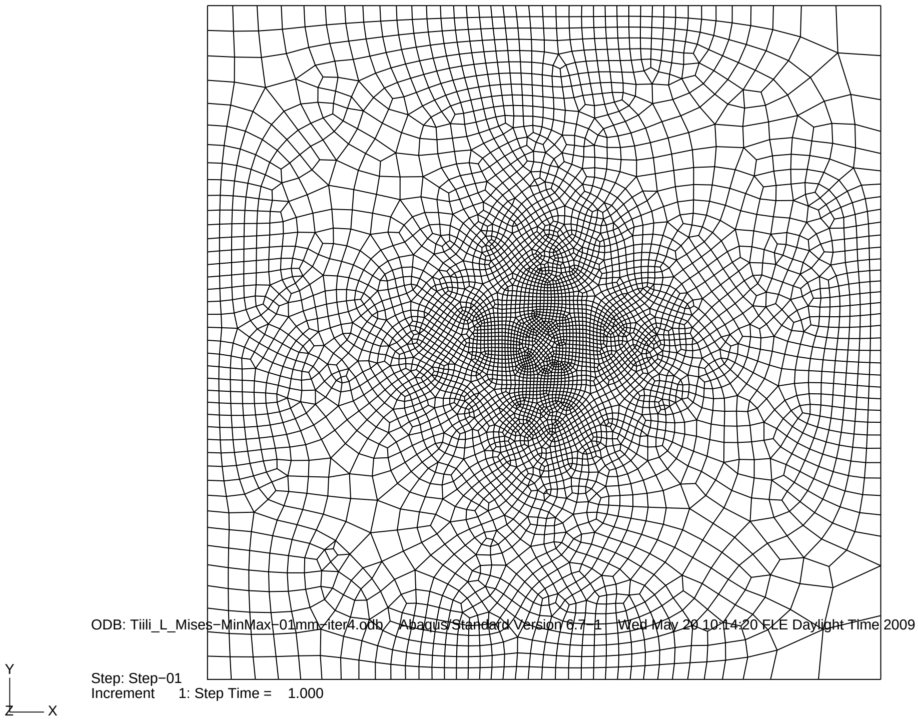
Kuva 4. Tapaus 2; tasainen kuorma, pehmeä vapaa tuenta: ENDENERI-indikaattori ja tasaisen virhejakautuman menetelmä; Adaptiivisesti tihennetty, noin 4900 lineaarisen elementin verkko, jonka tarkkuus ylittää 8000 elementin tasaisesti tihennetyn verkon tarkkuuden.



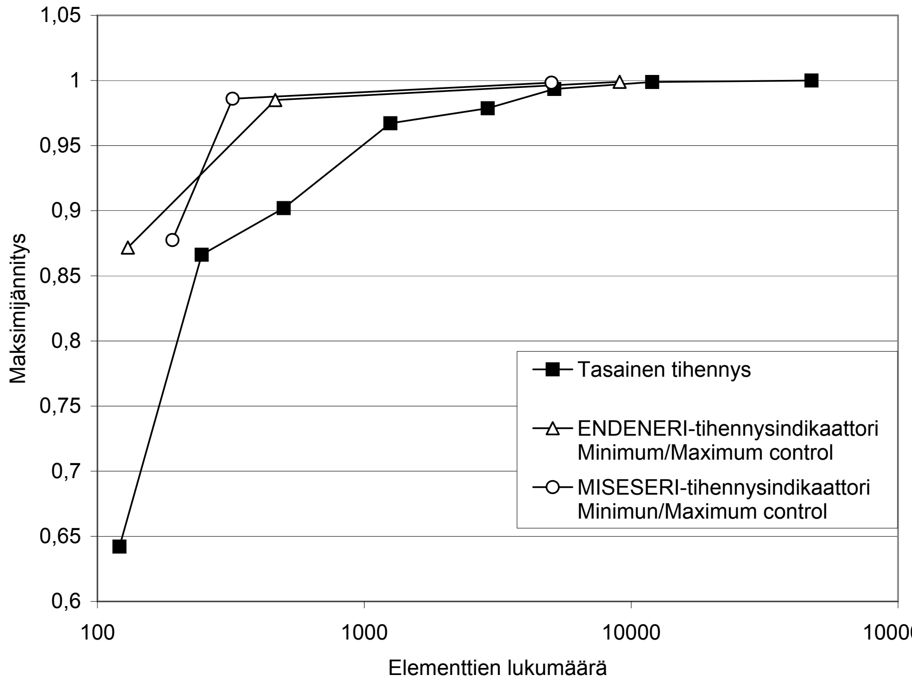
Kuva 5. Tapaus 2; tasainen kuorma, pehmeä vapaa tuenta: MISESERI-indikaattori ja minimum/maximum-menetelmä; Adaptiivisesti tihennetty, noin 1300 lineaarisen elementin verkko, jonka tarkkuus ylittää 8000 elementin tasaisesti tihennetyn verkon tarkkuuden.



Kuva 6. Tapaus 3; osittainen kuormitus, pehmeä vapaa tuenta: Adaptiivisesti tihennetty, noin 8000 lineaarisen elementin verkko; ENDENERI-indikaattori ja tasaisen virhejakautuman menetelmä.



Kuva 7. Tapaus 3; osittainen kuormitus, pehmeä vapaa tuenta: Adaptiivisesti tihennetty, noin 5000 lineaarisen elementin verkko; MISESERI-indikaattori ja minimum/maximum-menetelmä.



Kuva 8. Tapaus 3; osittainen kuormitus, pehmeä vapaa tuenta. Von Mises -jännityksen maksimiarvon tarkkuus elementtien lukumäärän suhteen tasaisella ja adaptiivisella tihennyksellä (MISESERI- ja ENDENERI-indikaattori ja minimi/maksimimenetelmä).

Tapaus 5: pistekuormalla kuormitettu neliölaatta

Viides tutkimustapaus muistuttaa edellistä esimerkkitapausta: nyt kuitenkin kuormituksena on laatan keskellä vaikuttava pistekuorma ja laatan paksuus on 10 mm. Elementteinä käytettiin Kirchhoff–Loven laattateorian mukaisia lineaarisia neliö- (S4R5) ja kolmioelementtejä (STRI3).

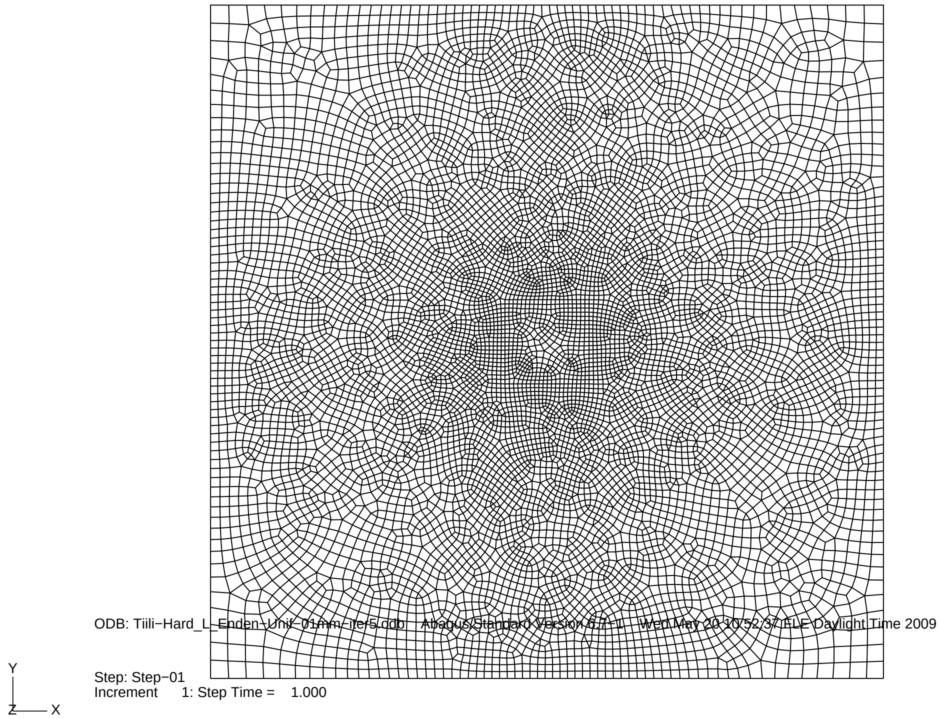
Adaptiivinen tihennys vastasi tapausta 4 siten, että verkko tihentyi kuorman vaikutuspisteen läheisyyteen sekä ristin muotoiselle alueelle kuormituspisteestä laatan reunoille. Minimi/maksimimenetelmällä verkon tihentymistä esiintyi myös reunojen keskialueilla, mikä näkyy kuvan 10 esimerkkiverkosta.

Kun vertailusuureena käytettiin muodonmuutosenergiaa ja maksimitaipumaa, kahden prosentin virhemarginaali saavutettiin jo hyvin harvoilla verkoilla niin adaptiivisella kuin tasaisellakin tihennyksellä.

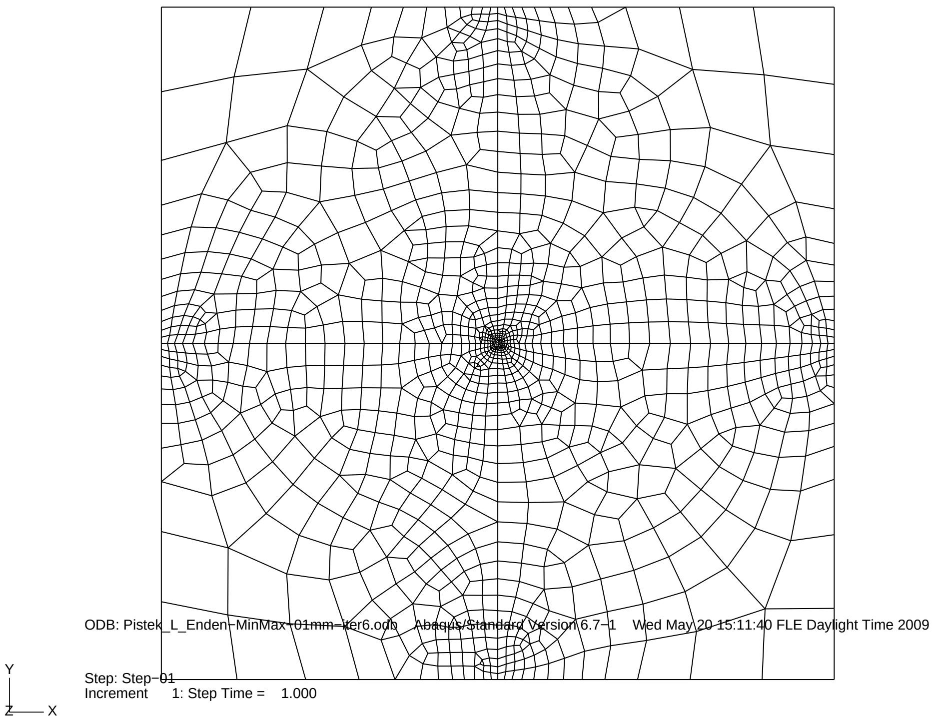
Tapaus 6: viivakuormalla kuormitettu neliölaatta

Kuudennen tutkimustapauksen laatta vastaa tapausta 4, mutta laatan yhtä reunaa kuormittaa viivakuorma. Viivakuorma vaikuttaa keskellä reunaa ja sen pituus on puolet reunan pituudesta. Kuormitettu reuna on tuettu siten, että kiertymä laatan reunan ympäri on estetty. Muut reunat on tuettu kovalla vapaalla tuennalla. Elementteinä käytettiin samoja elementtityyppejä kuin tapauksissa 2–4 (S4RS ja S3RS).

Verkon tihentyminen kohti kuormitusaluetta sekä ENDENERI- että MISESERI-indikaattoreilla näkyy selvästi kuvista 11 ja 12. Tässäkin tapauksessa ENDENERI-indikaattorin mukainen tihennys leviää laajemmalle alueelle kuin MISESERI-indikaattorilla.



Kuva 9. Tapaus 4; osittainen kuormitus, kova vapaa tuenta. Adaptiivisesti tihennetty, noin 9300 lineaarisen elementin verkko; ENDENERI-indikaattori ja tasaisen virhejakautuman menetelmä.



Kuva 10. Tapaus 5; pistekuorma, kova vapaa tuenta. Adaptiivisesti tihennetty, noin 1300 lineaarisen elementin verkko; ENDENERI-indikaattori ja minimi/maksimimenetelmä.

Tapaus 7: tasaisesti kuormitettu neliölaatta vaihtuvalla jäykkyydellä

Seitsemännen tutkimustapauksen laatan geometria ja tuenta ovat neljännen tutkimustapauksen mukaiset, mutta laatta on tasaisesti kuormitettu ja laatan kimmokerroin vaihtuu laatan puolivälissä: kimmokertoimen arvo 205 GPa putoaa porrasmaisesti neljännekseen. Elementteinä käytettiin samoja elementtityyppejä kuin tapauksissa 2–4 (S4RS ja S3RS).

Tässä tapauksessa verkko tihentyi kimmokertoimen vaihtumislinjalle sekä reuna-alueille. ENDENERI-virheindikaattorilla tihennys oli tasaisempaa ja reuna-alueiden tihennys voimakkaampaa kuin MISESERI-indikaattorilla, jolla tihennys keskittyi selvemmin kimmokertoimen vaihtumislinjalle.

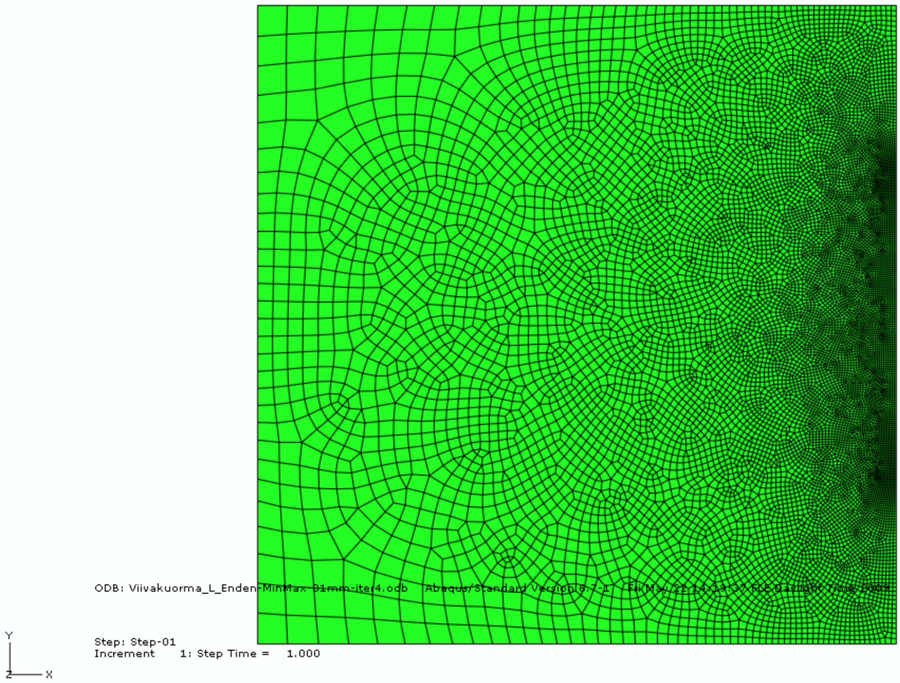
Kun vertailusuureena käytettiin muodonmuutosenergiaa, adaptiivisesti ja tasaisesti tihennetyillä elementtiverkoilla saavutettiin suunnilleen yhtä tarkkoja tuloksia suhteessa elementtien lukumäärään. Kun verrattiin maksimijännitystä laatan keskellä, pienemmän kimmokertoimen alueella, MISESERI-indikaattorilla suoritettu verkontihennys tuotti hieman tarkemman tuloksen kuin tasainen tihennys. ENDENERI-indikaattorilla suoritettu verkontihennys tuotti suunnilleen saman tarkkuuden suhteessa elementtien lukumäärään kuin tasainen tihennys.

Tapaus 8: tasaisesti kuormitettu neliölaatta vaihtuvalla paksuudella

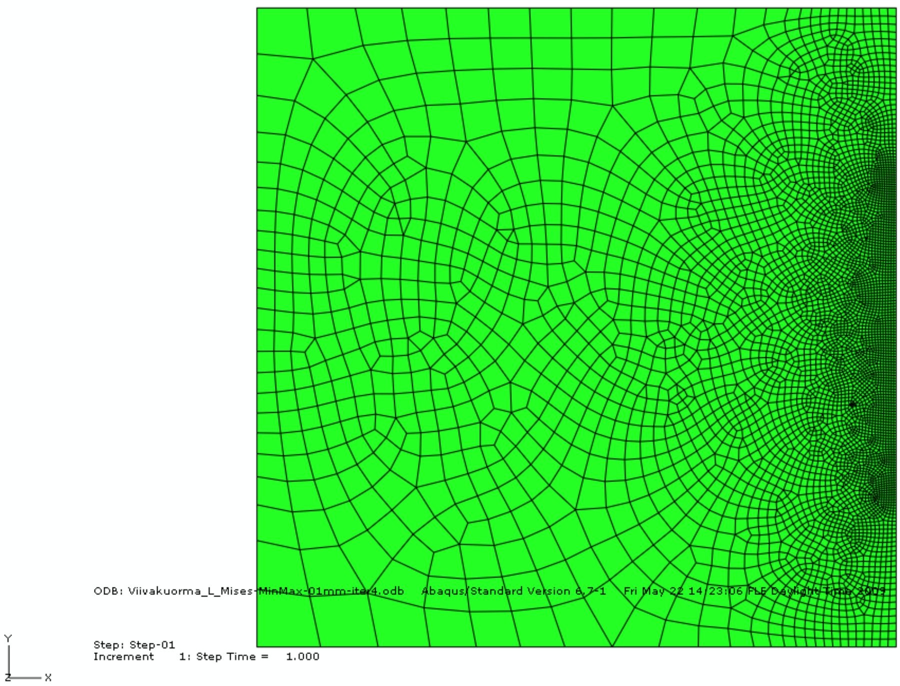
Kahdeksannen tutkimustapauksen laatan geometria, tuenta ja kuormitus noudattavat neljättä tutkimustapausta, mutta nyt laatan paksuus on 10 mm, ja se vaihtuu puolivälissä kymmenkertaiseksi. Elementteinä käytettiin samoja elementtityyppejä kuin tapauksissa 2–4 (S4RS ja S3RS).

Tässä tutkimustapauksessa verkko tihentyi paksuuden vaihtumislinjalle ja linjan läheisyyteen. Ohuemmalla laatan osuudella verkko oli tiheämpää kuin paksummalla, ja ohuella osuudella verkko tihentyi paksuuden vaihtumislinjan lisäksi reuna-alueille. Jälleen ENDENERI-virheindikaattori tuotti tiheämpää ja tasaisempaa verkkoa kuin MISESERI-indikaattori.

Kun vertailusuureena käytettiin muodonmuutosenergiaa, adaptiivisen verkontihennyksen hyöty ei ollut merkittävä. Kun verrattiin maksimijännitystä laatan keskellä, pienemmän paksuuden alueella, adaptiivinen verkontihennys tuotti selvästi paremman tarkkuuden suhteessa elementtien lukumäärään. MISESERI-indikaattorilla saatiin hieman tarkempia tuloksia ENDENERI-indikaattorilla. Tasainen tihennys vaati noin 95 prosentin tarkkuuteen pääsemiseksi noin 5000 elementtiä, sama tarkkuus saavutettiin adaptiivisella verkontihennyksellä noin 1300 elementillä; MISESERI-indikaattorilla ja tasaisen virhejakautuman menetelmällä. Noin 90 prosentin tarkkuus vaati tasaisella tihennyksellä noin 2000 elementtiä ja adaptiivisella tihennyksellä noin 500 elementtiä.



Kuva 11. Tapaus 6; viivakuorma reunalla, kova vapaa tuenta. Adaptiivisesti tihennetty verkko; ENDENERI-indikaattori ja minimi/maksimimenetelmä.



Kuva 12. Tapaus 6; viivakuorma reunalla, kova vapaa tuenta. Adaptiivisesti tihennetty verkko; MISESERI-indikaattori ja minimi/maksimimenetelmä.

Yhteenveto ja johtopäätökset

Tässä työssä käsiteltyjen esimerkkitapausten perusteella Abaqus-ohjelmiston SPR-menetelmään perustuvilla adaptiivisilla verkontihennysmenetelmillä voidaan saada huomattavia parannuksia laskentatarkkuuteen pienillä laskentakustannuksilla. Toisaalta menetelmien antama hyöty on myös pitkälti tapauskohtaista, ja se riippuu esimerkiksi siitä, miten tarkkoja tuloksia halutaan saavuttaa sekä mitä indikaattorityyppiä ja tihennysmenetelmää käytetään.

Abaqus-ohjelmiston adaptiivisten SPR-menetelmien hyödyllisyys suhteessa vapausastelukumäärään näyttää riippuvan erityisesti siitä, mitkä suureet katsotaan laskennan kannalta oleellisiksi: Kun vertailusuureena käytettiin muodonmuutosenergiaa, adaptiivisen verkontihennyksen taloudellisuus tuli selvästi esille esimerkkitapauksessa 1, jossa myös maksimitaipuman vertailu toi adaptiivisen verkotuksen edut esille. Kun vertailusuureena käytettiin von Mises -jännityksen maksimiarvoa, adaptiivisen verkontihennyksen hyöty oli merkittävä esimerkkitapauksissa 2, 3, 4 ja 8. Näissä tapauksissa muodonmuutosenergian vertailu ei kuitenkaan tuottanut vastaavaa johtopäätöstä. Adaptiivisen verkontihennyksen riippuvuus indikaattorityypistä ja tihennysmenetelmästä nähdään selvästi vertailemalla tapauksista 1, 2, 3 ja 6 esitettyjä esimerkkiverkkoja.

Lopuksi on kuitenkin vielä syytä huomauttaa, että tämän työn esimerkkitapauksista seuraavia johtopäätöksiä ei voida suoraan yleistää koskemaan kaikkia adaptiivisia virheindikaattori- ja virhearviotyyppejä tai verkontihennysmenetelmiä, joista SPR-menetelmä ja Abaqus-ohjelmiston tihennysmenetelmät sopivat kuitenkin yleispätevyytensä vuoksi hyväksi esimerkiksi.

Kiitokset

Suomen Akatemia on rahoittanut ensimmäisen kirjoittajan työskentelyn tutkijatohtorin projektilla *Ohuiden rakenteiden adaptiiviset elementtimenetelmät* (päätös 128467).

Viitteet

[1] Inc. ABAQUS. Abaqus Analysis User's Manual. Saatavilla lisenssiä vastaan, 2006.

[2] Inc. ABAQUS. Abaqus Theory Manual. Saatavilla lisenssiä vastaan, 2006.

[3] Inc. ABAQUS. Abaqus User's Manual. Saatavilla lisenssiä vastaan, 2006.

[4] Inc. ABAQUS. Getting Started with ABAQUS. Saatavilla lisenssiä vastaan, 2006.

[5] M. Ainsworth and J. T. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 142:1–88, 1997.

[6] M. Ainsworth and J. T. Oden. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, New-York, 2000.

[7] I. Babuška and T. Strouboulis. *The Finite Element Method and its Reliability.* Clarendon Press, 2001.

[8] I. Babuška and B. Szabo. *Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.

[9] K.-J. Bathe. *Finite Element Procedures.* Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

[10] L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, and R. Stenberg. A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates II: Numerical results. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 197:1850–1864, 2008.

[11] E. Bellenger and P. Coorevits. Adaptive mesh refinement for the control of cost and quality in finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41:1413–1440, 2005.

[12] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer, New York, 2008.

[13] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland, Amsterdam, 1987.

[14] R. D. Cook, D. S. Malkus, and M. E. Plesha. *Concepts and Application of Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, New York, 1989.

[15] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt. *Concepts and Application of Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, New York, 2002.

[16] T. Grätsch and K.-J. Bathe. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Comp. Struct.*, 83:235–265, 2005.

[17] M. Hakala. *Lujuusopin elementtimenetelmä.* Otatieto, 1980.

[18] C. K. Lee and R. E. Hobbs. Automatic adaptive refinement for plate bending problems using Reissner-Mindlin plate bending elements. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 41:1–63, 1998.

[19] M. Mikkola. *Levyjen, laattojen ja kuorien teoriaa.* Otakustantamo, 1986.

[20] J. Niiranen. A priori and a posteriori error analysis of finite element methods for plate models. Väitöskirja, Teknillisen korkeakoulun matematiikan laitoksen tutkimusraporttisarja A534, `http://lib.tkk.fi/Diss/2007/isbn9789512290048/`, 2007.

[21] K. M. Okstad, T. Kvamsdal, and K. M. Mathisen. Superconvergent patch recovery for plate problems using statically admissible stress resultant fields. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 44:697–727, 1999.

[22] N. Ottosen and H. Petersson. *Introduction to the finite element method.* Prentice Hall, 1992.

[23] C. Schwab. *p- and hp-Finite Element Methods – Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics.* Clarendon Press, Oxford, 1998.

[24] B. Szabo and R. Actis. On the importance and uses of feedback information in FEA. *Appl. Num. Math.*, 52:219–234, 2005.

[25] R. Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques.* John Wiley & Sons and B. G. Teubner, Chichester, 1996.

[26] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics.* Elsevier, Amsterdam, 2005.

[27] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, Amsterdam, 2005.

[28] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 24:337–357, 1987.

[29] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 33:1331–1364, 1992.

[30] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 33:1365–1382, 1992.

Jarkko Niiranen, Mari Vuorinen
Teknillinen korkeakoulu, Rakenne- ja rakennustuotantotekniikan laitos
PL 2100, 02015 TKK
s-posti: `jarkko.niiranen@tkk.fi, mari.vuorinen@tkk.fi`