

Perusteita ja esimerkkejä laattarakenteiden mallinnuksesta elementtimenetelmällä

Jarkko Luntta ja Jarkko Niiranen

Tiivistelmä. Tässä artikkelissa tarkastellaan elementtimenetelmän soveltamista yksinkertaisten laattarakenteiden analysointiin. Tavoitteena on näyttää esimerkkitapausten avulla, miten laatan geometria ja reunaehdot sekä elementtityypin valinta vaikuttavat taipuma-, jännitys- ja energiasuureiden laskentatarkkuuteen. Lisäksi artikkelissa kerrataan lyhyesti Kirchhoff–Love- ja Reissner–Mindlin-laattamallien ja elementtimenetelmän peruseriaatteita sekä esitellään niihin liittyviä Abaqus-ohjelmiston perusominaisuuksia.

Avainsanat: elementtimenetelmä, FEM, laattarakenteet, laskentatarkkuus, Abaqus-ohjelmisto

Johdanto

Elementtimenetelmä (*Finite Element Method, FEM*) on nykyajan insinööritieteissä hyvin laajalti käytetty menetelmä erityisesti mekaniikan sovelluksissa ja rakenteiden käyttäytymisen analysoinnissa. Elementtimenetelmän soveltaminen rakenteiden lujuusanalyysiin sai alkunsa 1950-luvun lentokoneteollisuudessa [6][Luku 1], menetelmän matemaattinen pohja luotiin 1960-luvulla, kun löydettiin elementtimenetelmän yhteys klassiseen Ritzin likimääräismenetelmään – joskin tämän suuntaisen laajennuksen Courant esitti jo vuonna 1943 [12][s. 14], [19][s. 3]. Yhteys Ritzin menetelmään yhdessä tietokoneiden kehittymisen myötä mahdollisti elementtimenetelmän soveltamisen sauvarakenteiden lisäksi myös monimutkaisempiin rakenteisiin kuten laatta- ja kuorirakenteisiin, jotka ovat edelleen keskeisiä tutkimus- ja sovelluskohteita. Nykyajan elementtimenetelmään pohjautuvat rakenneanalyysiin soveltuvat kaupalliset ohjelmistot (muun muassa Abaqus, Adina, Ansys, Comsol, Lusas ja Nastran) mahdollistavat vaativien rakenteiden perinteisen jännitysanalyysin lisäksi usein myös monifysikaaliset tarkastelut kuten lämmön siirtymisen tai sähkömekaanisten ilmiöiden mallintamisen [10][luku 1].

Tässä työssä tarkastellaan elementtimenetelmän soveltamista yksinkertaisten laattarakenteiden analysointiin *Abaqus Student Edition* -ohjelmistoversiolla, josta on saatavilla ilmainen opiskelijalisenssi tietyin rajoituksin. Tämän artikkelin esimerkkitapauksissa rajoitetaan *Abaqus/Standard*-elementtikirjaston ohuiden kuorielementtityyppien vertailuun laattarakenteissa. Tavoitteena on osoittaa yksinkertaisten esimerkkien avulla, miten laatan geometria ja reunaehdot sekä elementtityypin valinta vaikuttavat laskentatarkkuuteen suhteessa vapausasteiden lukumäärään. Ennen esimerkkitapauksia ja laskentatuloksia kolmessa seuraavassa luvussa kerrataan lyhyesti laattamallien ja elementtimenetelmän peruseriaatteita sekä esitellään niihin liittyviä Abaqus-ohjelmiston perusominaisuuksia.

Pyrkimyksenä tässä artikkelissa on esittää edellä mainitut asiat siinä yksinkertaisuudessa, että esitystä voi seurata myös rakennetekniikan tai lujuusopin opiskelija, jolla

on vain perustiedot rakenteiden mekaniikasta. Erityisesti elementtimenetelmän perusteet käydään läpi vain yleisellä tasolla – pitäen kuitenkin silmällä esimerkkitapauksissa esiintyviä käsitteitä ja menetelmiä.

Tämä artikkeli perustuu osittain Jarkko Luntan kandidaatintyöhön *Laattarakenteiden mallinnus elementtimenetelmällä* (2009, TKK).

Laattamallien perusyhtälöt

Siirtymäsuureet ja muodonmuutokset

Tarkastellaan kolmidimensioista laattarakennetta

$$\mathcal{P} = \Omega \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right), \quad (1)$$

joka on sijoitettu karteesiseen koordinaatistoon siten, että x - ja y -akselit sijaitsevat laatan keskipinnalla $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ja z -akseli osoittaa taipuman w positiiviseen suuntaan. Laattaa kuormittaa jakaantunut, keskipintaa vastaan kohtisuora, z -akselin suuntainen kuorma f ja laatan paksuus on t , joka oletetaan suuruudeltaan selvästi pienemmäksi kuin laatan muut dimensiot.

Olkoon laatan siirtymäkenttä $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, missä indeksit x, y, z viittaavat karteesisiin koordinaatteihin ja $u_i = u_i(x, y, z)$, $i = x, y, z$ (kuva 1). Yleisimmin käytetyt, klassiset laattamallit noudattavat Kirchhoffin–Loven tai Reissnerin–Mindlinin laattateoriaa [7][luku 14], [13][luku 2]. Geometrisesti lineaarisessa Reissner–Mindlin-laattateoriassa siirtymäkenttä voidaan esittää muodossa

$$u_x = -z\beta_x(x, y), \quad u_y = -z\beta_y(x, y), \quad u_z = w(x, y), \quad (2)$$

missä kiertymävektorin $\boldsymbol{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$ komponentit β_x ja β_y merkitsevät kiertymiä y - ja x -akselin ympäri, suunnistuksen seurattessa taipuman muutosta. Kirchhoff–Love-laattateoriassa taipuma ja kiertymä on kytketty toisiinsa yhtälöllä

$$\nabla w - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

mistä seuraa siirtymäkomponenteille lausekkeet

$$u_x = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \quad u_z = w(x, y). \quad (4)$$

Siirtymien avulla saadaan lineaarisen elastisuusteorian mukaiset muodonmuutokset

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5)$$

joita koskien on huomautettava, että Kirchhoff–Love-mallin poikittaisille leikkausmuodonmuutoksille pätee $\gamma_{xz} = 0 = \gamma_{yz}$.

Jännitysresultantit, tasapainoyhtälöt ja reunaehdot

Laatan tasapainoyhtälöitä varten seuraavaksi määritellään laatan jännitysresultantit, eli taivutusmomentit M_x ja M_y , vääntömomentti M_{xy} sekä leikkausvoimat Q_x ja Q_y (kuva 1):

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy} dz, \quad (6)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz, \quad (7)$$

missä jännitys oletetaan symmetriseksi, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = x, y, z$. Virtuaalisen työn periaatteen avulla laatan tasapainoyhtälöt voidaan esittää Reissner–Mindlin-mallille muodossa

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (8)$$

Kirchhoff–Love-laattamallin tapauksessa yhtälöt pelkistyvät muotoon

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + f = 0. \quad (9)$$

Reissnerin–Mindlinin laattamallin reunaehdoiksi [15] saadaan kova jäykkä tuenta (*hard clamped*),

$$w(s) = 0, \quad \beta_n(s) = 0, \quad \beta_s(s) = 0, \quad (10)$$

pehmeä jäykkä tuenta (*soft clamped*),

$$w(s) = 0, \quad \beta_n(s) = 0, \quad M_s(s) = 0, \quad (11)$$

kova vapaa tuenta (*hard simply supported*),

$$w(s) = 0, \quad \beta_s(s) = 0, \quad M_n(s) = 0, \quad (12)$$

pehmeä vapaa tuenta (*soft simply supported*),

$$w(s) = 0, \quad M_n(s) = 0, \quad M_s(s) = 0, \quad (13)$$

sekä vapaa reuna (*free*)

$$Q_n(s) = 0, \quad M_n(s) = 0, \quad M_s(s) = 0; \quad (14)$$

Kirchhoffin–Loven laattamallin reunaehdot [15] ovat puolestaan jäykkä tuenta (*clamped*),

$$w(s) = 0, \quad \frac{\partial w(s)}{\partial n(s)} = 0, \quad (15)$$

vapaa tuenta (*simply supported*),

$$w(s) = 0, \quad M_n(s) = 0, \quad (16)$$

sekä vapaa reuna,

$$M_n(s) = 0, \quad \frac{\partial M_s(s)}{\partial s} - Q_n(s) = 0. \quad (17)$$

Lisäksi Kirchhoff–Love-mallissa vapaalla reunalla olevissa nurkkapisteissä c pätee ehto $M_{s_1}(s_c) = M_{s_2}(s_c)$, missä indeksit 1 ja 2 viittaavat siihen, että normaalivektorien suunnat poikkevat toisistaan lähestyttäessä nurkkapistettä sen eri puolilta. Reunaehtolausekkeissa $w(s)$ tarkoittaa laatan keskipinnan taipumaa reunaviivan koordinaattiarvolla s , β_n tarkoittaa laatan keskipinnan normaalin kiertymää reunan tangentin ympäri, β_s puolestaan tarkoittaa kiertymää reunan normaalin ympäri. Vastaavasti M_n tarkoittaa momenttia reunaviivan tangentin ympäri ja M_s momenttia reunan normaalin ympäri. Reunaehtojen osalta on hyvä huomata, että Kirchhoffin–Loven laattamalli ei erottele pehmeää ja kovaa vaihtoehtoa jäykässä tuennassa eikä myöskään vapaassa tuennassa.

Lineaarisesti elastisen laatan jännitykset

Tässä yhteydessä laatan materiaali oletetaan homogeeniseksi ja isotrooppiseksi; jännitysten ja muodonmuutosten oletetaan kytkeytyvän toisiinsa noudattaen Hooken lakia:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz},\end{aligned}\quad (18)$$

missä E on materiaalin kimmokerroin, ν on Poissonin vakio ja materiaalin liukumoduuli on

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.\quad (19)$$

On vielä huomattava, että jännitystilaksi on oletettu tasojännitystilaksi, jolloin $\sigma_z = 0$. Näillä oletuksilla Kirchhoff–Love-laatan jännitysresultantit voidaan lausua taipuman avulla muodossa

$$Q_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right), \quad Q_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right),\quad (20)$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\quad (21)$$

missä taivutusjäykkyydelle on käytetty merkintää

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.\quad (22)$$

Reissner–Mindlin-laatan jännitysresultanteiksi saadaan taipuman ja kiertymien avulla lausuttuna

$$Q_x = Gt\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x\right), \quad Q_y = Gt\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y\right),\quad (23)$$

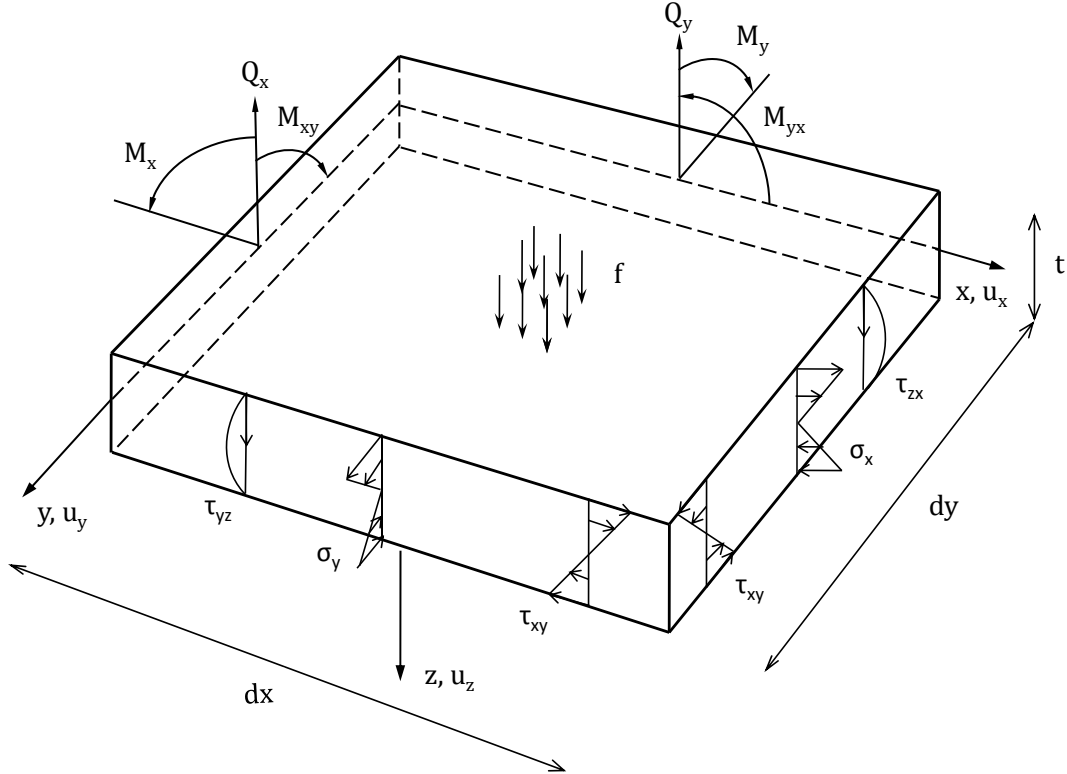
$$M_x = -D\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial \beta_y}{\partial y}\right), \quad M_y = -D\left(\frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial \beta_x}{\partial x}\right), \quad M_{xy} = -\frac{Gt^3}{12}\left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x}\right).\quad (24)$$

Tässä yhteydessä ei perehdytä tarkemmin mallien muihin ominaispiirteisiin, eroihin eikä pätevytyteen suhteessa kolmidimensioiseen elastisuusteoriaan [7][luku 17.3], [15].

Esimerkitapauksissa tullaan tarkastelemaan von Mises -jännitystä, joka kuvaa rakenteen muodon vääristymistä ja on riippumaton käytetystä koordinaatistosta [9][s. 117]. Kolmidimensioisen jännityskentän von Mises -jännitys määritellään yhtälöllä

$$\sigma_m = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)] \right\}^{1/2},\quad (25)$$

joka laattojen tapauksessa hieman yksinkertaistuu oletuksen $\sigma_z = 0$ seurauksena. Lisäksi isotrooppisen, lineaarisesti kimmoisen Kirchhoff–Love-laatan tapauksessa yhtälöiden (4), (5) ja (18) perusteella $\tau_{yz} = 0 = \tau_{xz}$.



Kuva 1. Laatan siirtymät, jännitykset ja jännitysresultantit.

Elementtimenetelmän peruseriaatteita

Vapausasteet, muotofunktiot ja variaatiomuoto

Elementtimenetelmän perusidea on löytää ratkaisu monimutkaiseen ongelmaan korvaamalla se yksinkertaisemmalla tehtävällä [8][luku 1]: Ongelman yksinkertaistaminen tarkoittaa tarkasteltavan rakenteen jakoa pienempiin osa-alueisiin eli elementteihin (*element*), jotka liittyvät toisiinsa solmupisteiden (*node*) välityksellä. Elementtien ja solmujen muodostama kokonaisuutta kutsutaan elementtiverkoksi (*element mesh*). Esimerkiksi laattatehtävän elementtiverkko voi muodostua yksinkertaisesti kolmioista ja niiden nurkkapisteistä.

Elementtimenetelmässä tehtävän muuttujalle, esimerkiksi Kirchhoffin–Love-laatan taipumalle $w = w(x, y)$, etsitään ratkaisuaprosimaatiota muodossa

$$w_h(x, y) = \sum_i a_i \phi_i(x, y), \quad (26)$$

missä funktiot ϕ_i ovat ratkaisuyrittteen kantafunktioita tai muotofunktioita (*basis function*, *shape function*, *interpolation function*), esimerkiksi yksinkertaisia polynomifunktioita. Kukaan kantafunktio on määritelty nollassa poikkeavaksi vain paikallisesti: tyypillisesti kantafunktio poikkeaa nollassa vain kantafunktiota vastaavaan solmupisteeseen liittyvien

elementtien alueella tai jopa vain yhdessä elementissä. Näin siis yhden elementin alueella ratkaisuaapproksimaatio koostuu vain koko tehtävän kantafunktiojoukon murto-osasta.

Kertoimet a_i yhtälössä (26) ovat menetelmän lopullisen yhtälöryhmän tuntemattomia kertoimia eli vapausasteita (*degree of freedom, DOF*). Tyypillisesti muotofunktiot liittyvät elementin solmupisteisiin $p_j = (x_j, y_j)$ siten, että

$$\phi_i(p_j) = 1, \text{ kun } i = j \quad \text{ja} \quad \phi_i(p_j) = 0, \text{ kun } i \neq j. \quad (27)$$

Tällöin yhtälön (26) mukaan $w_h(p_j) = a_j$ eli tuntematon kerroin a_j antaa approksimaation w_h arvon solmupisteessä p_j . Tällöin puhutaan solmuvapausasteista (*nodal degree of freedom*) ja solmumuotofunktioista (*nodal shape function*). Esimerkiksi Reissnerin–Mindlinin laattamallissa muuttujina ovat taipuma sekä kiertymät ja siis vapausasteina tyypillisesti taipuman ja kiertymien solmupistearvot.

Variaatiolaskennan keinoilla yhtälön (26) mukainen ratkaisuyrite johtaa tehtävän lopulliseen yhtälöryhmään, josta vapausasteiden arvot ratkaistaan. Yhtälöryhmän kerroinmatriisin muodostamisen lähtökohdaksi voidaan ottaa virtuaalisen työn yhtälö, joka saa esimerkiksi Kirchhoff–Love-laattamallin tapauksessa muodon

$$\int_{\Omega} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz dA = \int_{\Omega} f \delta w dA. \quad (28)$$

Jakamalla alueen Ω käsittävä integraali elementtien E yli laskettaviksi osaintegraaleiksi saadaan muodonmuutosten (5) ja jänitysresultanttien (6) avulla tasapainoyhtälö

$$\sum_E \int_E \left(M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) dA = \sum_E \int_E f \delta w dA. \quad (29)$$

Sijoittamalla seuraavaksi yhtälön (26) taipuma-approksimaatio w_h yhtälön (21) siirtymämuotoisten momenttien lausekkeisiin saadaan momenteille elementtiapproksimaatiot, jotka sijoitetaan edelleen yhtälöön (29). Valitsemalla vielä taipuma-approksimaation (26) kukin kantafunktio ϕ_i vuorollaan variaatiofunktioiksi δw saadaan lopulta kasattua elementtimenetelmän lineaarinen yhtälöryhmä: kerroinmatriisin eli jäykkyysmatriisin alkiot muodostuvat yhtälön (29) vasemman puolen mukaisesti integraaleista, jotka sisältävät materiaalivakioita ja muotofunktioiden toisen asteen derivaattoja; kuormavektorin alkiot muodostuvat yhtälön (29) oikean puolen mukaisesti kuormituksen ja muotofunktioiden integraaleista. [12, 10, 8, 9, 19, 18, 7, 6]

Ratkaisun tarkkuuden mittaaminen ja parantaminen

Elementtimenetelmällä saadut tulokset ovat aina approksimaatioita tehtävän tarkalle ratkaisulle eli todellisen mallin käyttäytymiselle. Tulosten tarkkuus riippuu erityisesti vapausasteiden lukumäärästä eli muotofunktioiden asteluvusta ja elementtien lukumäärästä, joten elementtimenetelmän antaman ratkaisuaapproksimaation tarkkuutta voidaan parantaa joko korottamalla muotofunktioiden astetta tai tihentämällä elementtijakoa. Ensimmäistä lähestymistapaa kutsutaan p -menetelmäksi ja jälkimmäistä h -menetelmäksi [6, 7], jota käytetään myös tämän työn esimerkkitapausten analysoinnissa. Nämä menetelmät voidaan myös yhdistää hp -menetelmäksi [7, 6, 16]. Usein käytännön sovelluksissa käytetään kuitenkin vain ensimmäisen, toisen ja kolmannen asteen muotofunktioita sisältäviä elementtejä.

Koska elementtimenetelmässä jatkuva systeemi diskretoidaan eli korvataan äärellisellä määrällä vapausasteita yhtälön (26) mukaisesti, syntyy diskreetointivirhe [6][Luku 3]

$$e_h = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|, \quad (30)$$

missä \mathbf{u} on jatkuvan systeemin ratkaisu ja \mathbf{u}_h on diskreetin systeemin ratkaisu sekä $\|\cdot\|$ tarkoittaa valittua matemaattista normia, jolla virhettä mitataan. Tyypillisesti virhearviot mitataan tehtävän energianormin suhteen, mikä rakenneanalyysissä vastaa rakenteen muodonmuutosenergian tarkastelua [19][luku 13.1]. Toinen yksinkertainen ja insinöörilaskennassa hyvin tyypillinen tapa ratkaisun tarkentumisen mittaamiseksi on seurata tietyn suureen – esimerkiksi taipuman tai jonkun jännityskomponentin – maksimiarvon muuttumista verkkoa tihennettäessä.

Jännitysarvot laskentaohjelmistoissa

Elementtimenetelmään perustuvissa lujuuslaskentaohjelmistoissa jännitysarvot ovat tyypillisesti saatavissa elementtikohteisesti käyttäjän valitsemissa pisteissä. Usein tulostuspisteiksi valitaan elementin integrointipisteet, koska niissä jännitykset saavat tarkimmat arvonsa [8][luvut 3.10, 4.7], [9][luvut 3.12, 6.10]. Myös solmupisteet voidaan valita jännitysarvojen tulostuspisteiksi, mitä voidaan pitää joissakin tapauksissa suositeltavana – esimerkiksi silloin, kun jännitysten huippuarvojen tai laskennan kannalta oleellisten arvojen tiedetään sijaitsevan rakenteen reunoilla. Solmupisteiden jännitysarvot ohjelmistot tyypillisesti ekstrapoloivat integrointipisteiden jännitysarvoista, minkä seurauksena solmuarvot ovat integrointipistearvoja epätarkempia. On vielä syytä huomauttaa, että siirtymäsuureisiin perustuva elementtimenetelmä antaa ylipäänsä jännityksille epätarkempia arvoja kuin siirtymäsuureille, koska jännitykset saadaan määritelmänsä mukaan siirtymistä derivoinnin avulla kuten edellisen luvun yhtälöistä käy ilmi.

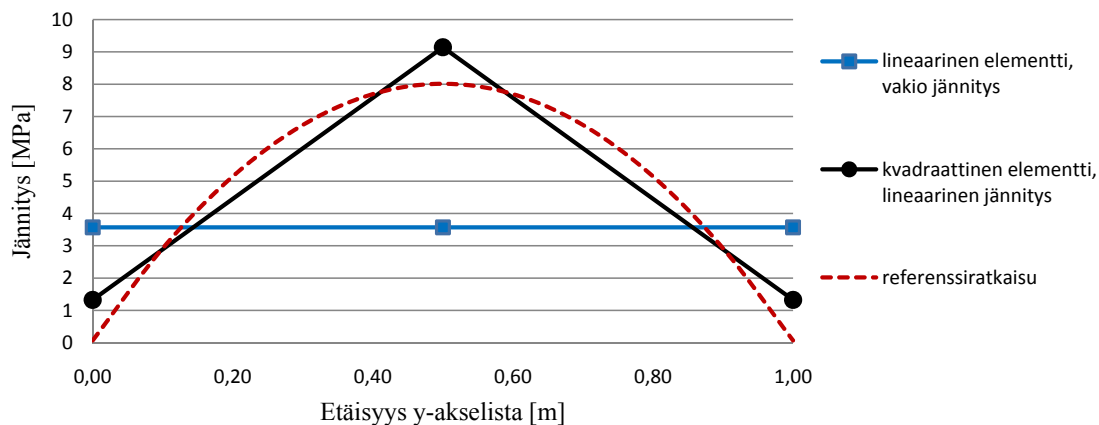
Kuvassa 2 on havainnollistettu reunoiltaan vapaasti tuetun ja tasaisesti kuormitetun laattarakenteen elementtimenetelmällä saatuja jännityksiä: yhtenäiset viivat kuvaavat jännityksen approksimaatiota lineaarisilla (neliöt) ja kvadraattisilla (ympyrät) muotofunktioilla, kun laatta on jaettu leveyssuunnassa kahteen nelikulmaiseen elementtiin; katkoviivalla on merkitty tiheällä elementtiverkolla saatua referenssiratkaisua. Kuvaa josta on selvästi havaittavissa edellä mainittu jännityssuureita koskeva elementtiapproksimaation luonne.

Laattarakenteiden mallinnuksesta Abaqus-ohjelmistolla

Abaqus-ohjelmisto on saavuttanut erityisesti tutkijoiden keskuudessa suosiota, koska Abaqus mahdollistaa uusien materiaalien ja elementtityyppien lisäämisen osaksi ohjelmistoa [10][s. 4]. Tässä yhteydessä esitellään kuitenkin vain lyhyesti laattarakenteiden analysointiin soveltuvat kuorielementtityypit sekä kuormien määrittelyssä ja jännitysten tulkinnaissa huomioitavat perusominaisuudet.

Abaqus/Standard-kuorielementit

Abaqus-ohjelmistossa ei ole erikseen laattaelementtejä vaan laattojen laskenta suoritetaan kuorielementeillä [2][3.1, 3.6.1], [1][23.6.1]. Kuorielementit jaotellaan tavanomaisiin kuorielementteihin (*conventional*) ja kontinuumikuorielementteihin (*continuum*) [1][23.6.1]. Pääosa tavanomaisista kuorielementeistä on yleiskäyttöisiä (*general purpose*), osa ohuita



Kuva 2. Elementtimenetelmällä saatu jännitys jakauma reunoiltaan vapaasti tuetulle ja tasaisesti kuormitetulle laatalle; tarkastelusuunnassa laatta on mallinnettu kahdella nelikulmioelementillä.

(*thin*) ja osa paksuja (*thick*) kuorielementtejä [1][23.6.2]. Ohuet kuorielementit noudattavat Kirchhoffin–Loven teoriaa ja paksut kuorielementit Reissnerin–Mindlinin teoriaa. Yleiskäyttöisissä kuorielementeissä kuoret käsitellään Reissnerin–Mindlinin kinemaattisten oletusten mukaisina ja paksuuden pienentyessä siirrytään Kirchhoffin–Loven teoriaan (*discrete Kirchhoff constraint*) [1][23.6.2], [18][luvut 11 ja 12]. Ohjelmiston käyttöohjeen mukaan laattarakenteiden elementtityypinä voidaan käyttää kuorielementtejä, kun laatan paksuus on alle kymmenesosa laatan lyhimmän sivun mitasta [3][luku 5] – tämän rajan ylittävät laatat suositellaan mallinnettavan kolmiulotteisilla solidielementeillä. Laatoissa, joiden paksuuden suhde lyhimmän sivun mittaan on alle 1/15, voidaan käyttöohjeen mukaan käyttää ohuita kuorielementtejä [1][23.6.2].

Liitteen taulukossa 1 on esitetty Abaqus-elementtikirjaston tyypillisimmät rakennanalyysissä käytettävät tavanomaiset kuorielementit. Näistä *Abaqus/Standard*-elementtikirjastoon kuuluvat kolmioelementit S3/S3R (yleiskäyttöinen), STRI3 ja STRI65 (ohut) sekä nelikulmioelementit S4/S4R (yleiskäyttöinen), S4R5, S8R, S8R5 ja S9R5 (ohut). Kaikkien näiden elementtien muut ominaispiirteet on esitetty taulukossa 1. Seuraavan luvun esimerkkitapauksissa käytetään elementtejä S4R5, S8R5, STRI3 ja STRI65.

Kuormien ja jännitysten määrittely

Kuorman määrittelemiseksi ja jännitysten tulkitsemiseksi on tiedettävä, miten laatan ala- ja yläpinta on ohjelmistossa määritelty. Kuormituksen määrittelemistä varten on valittava pinta, jolla kuormituksen halutaan vaikuttavan; graafisessa käyttöliittymässä ruskea väri vastaa yläpintaa ja vihreä alapintaa. Jännitysten graafisessa tulostuksessa ohjelmistossa käytetään oletusarvona alapinnan integrointipisteistä saatuja jännitysarvoja. Tekstimuotoisessa numeerisessa tulostuksessa laatan alapinnan arvot on merkitty Loc1-merkinnällä ja yläpinnan arvot Loc2-merkinnällä [1][23.6.1].

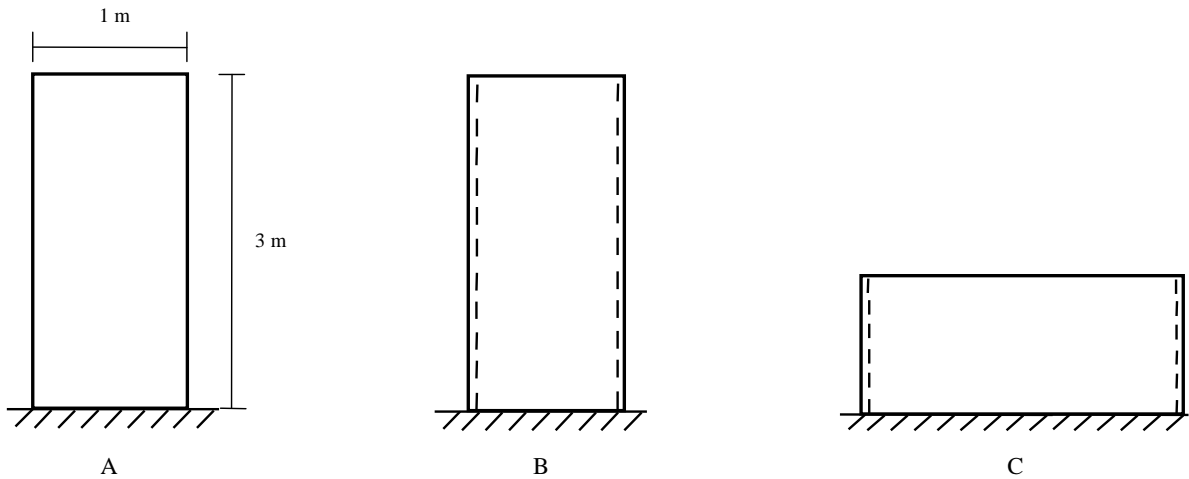
Esimerkkitapaukset

Esimerkkitapausten analysointi on suoritettu ohjelmistoversiolla *Abaqus/CAE Student Edition 6.6-2*, jonka elementtikirjastossa on käytettävissä *Abaqus/Standard*-elementit (taulukko 1). Tässä tutkimuksessa verrataan eri elementtityyppien taipuma-, jännitys- ja ener-

giasuureiden tarkkuuden parantumista elementtiverkkoa tasaisesti tihennettäessä, jolloin kyseessä on edellä mainittu h -menetelmä. Testitapaukset poikkeavat toisistaan oleellisesti vain laatan geometrian ja reunaehtojen osalta. Näillä yksinkertaisilla esimerkeillä onkin tarkoituksena osoittaa, että pieniltä vaikuttavat muutokset laatan geometriassa, reunaehdoissa ja elementtityypissä vaikuttavat oleellisesti laskentasuureiden tulostarkkuuteen.

Suorakaidelaatat A, B ja C

Kolmen ensimmäisen esimerkkitapauksen geometria ja reunaehdot on esitetty kuvassa 3: tapaus A on yhdeltä sivultaan jäykästi tuettu ulokelaatta; tapauksissa B ja C laatan kaksi vastakkaisista sivua on vapaasti tuettu ja yksi sivu on jäykästi tuettu. Kaikissa tapauksissa laattaa kuormittaa tasaisesti jakautunut kuorma $f = 1$ kPa. Materiaaliarvot vastaavat homogeenista ja lineaarisesti kimmoisaa terästä: Poissonin vakio on $\nu = 0.3$ ja kimmo kerroin on $E = 210$ GPa. Laattojen paksuus on $t = 10$ mm, jolloin paksuuden suhde lyhimpään sivuun on $1/100$.



Kuva 3. Suorakaidelaattojen geometria ja reunaehdot.

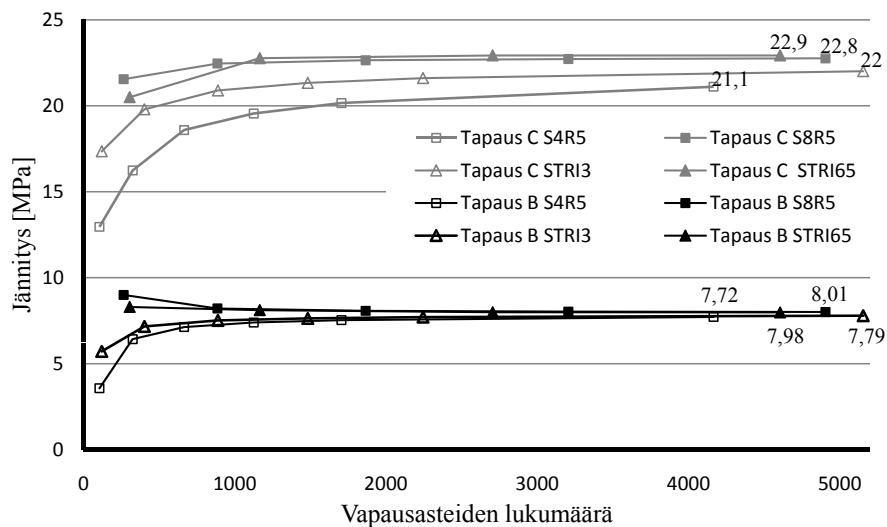
Testitapausten mallinnuksessa on käytetty ohuita kuorielementtejä S4R5, S8R5, STRI3 ja STRI65: elementit S8R5 ja STRI65 ovat toisen asteen elementtejä, kun taas S4R5 ja STRI3 käyttävät lineaarisia muotofunktioita; elementit S4R5 ja S8R5 ovat nelikulmioelementtejä, STRI3 ja STRI65 ovat puolestaan kolmioelementtejä. Laskennassa on käytetty säännöllisen muotoisia nelikulmioverkkoja ja ohjelmiston automaattisen verkotustoiminnon luomia epäsäännöllisen muotoisia kolmioverkkoja. Laskennan tulokset on esitetty kuvissa 4–8, joista selviää, miten valitut tarkastelusuureet muuttuvat elementtiverkkoa tihennettäessä. Kuvaaajien pysty akselilla on tarkasteltava vertailusuure ja vaaka-akselilla vapausasteiden kokonaislukumäärä. Tutkimuksessa rajoituttiin elementtiverkkoihin, joiden solmupisteiden lukumäärä on alle 1000 kappaletta, joka on *Abaqus Student Edition*-versiossa rajoitteena.

Jännitykset ja muodonmuutosenergia tapauksissa B ja C

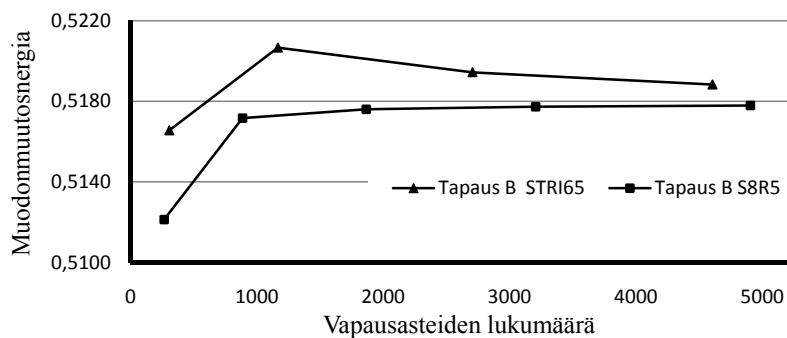
Aluksi tarkastellaan tapauksien B ja C von Mises -maksimijännityksen tarkentumista (kuva 4). Jännitystulokset suppenevat molemmissa esimerkkitapauksissa kohti tiettyä raja-arvoa; kvadraattisilla elementeillä saadut tulokset suppenevat kuitenkin huomattavasti

nopeammin lineaarisiin elementteihin verrattuna. Jännitysarvojen tarkentumisessa havaitaan myös tapauskohtaisia eroja: tapauksessa C lineaarisilla elementeillä suppeneminen on selkeästi hitaampaa kuin tapauksessa B. Tapauksessa B, jossa laatta on lyhyemmältä sivultaan jäykästi tuettuna, ero lineaarisen elementin S4R5 ja kvadraattisen S8R5-elementin tarkimpien arvojen välillä on 3,6 prosenttia. Tapauksessa C, jossa laatta on jäykästi tuettu pidemmältä sivultaan, vastaava ero on 7,3 prosenttia.

Kuvissa 5 ja 6 on vielä vertailtu muodonmuutosenergian suppenemista kvadraattisilla elementeillä: Molemmissa esimerkkitapauksissa muodonmuutosenergia tarkentuu selvästi nopeammin nelikulmioelementillä S8R5.



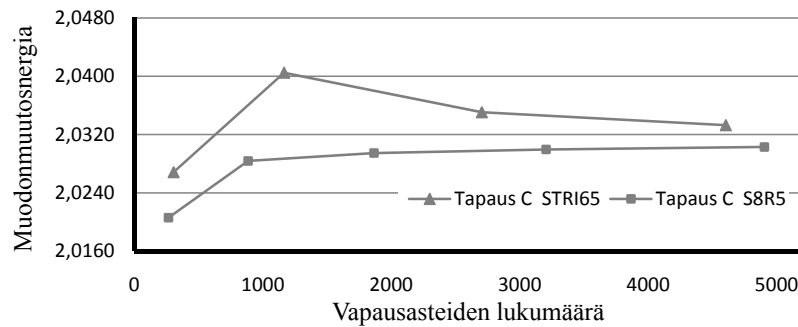
Kuva 4. Suorakaidelaattojen B ja C von Mises -maksimijännityksen tarkentuminen eri elementtityypeillä.



Kuva 5. Suorakaidelaatan B muodonmuutosenergian tarkentuminen kvadraattisilla elementeillä.

Taipumat ja jännitykset tapauksissa A ja B

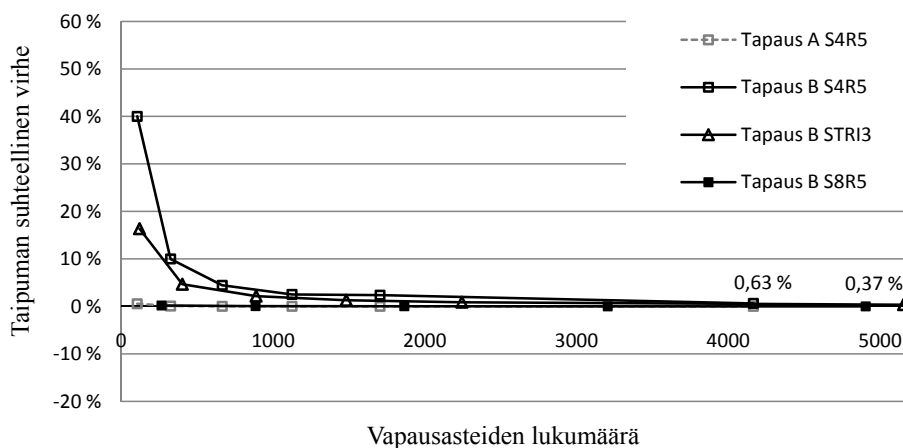
Seuraavaksi tarkastellaan taipumien (kuva 7) ja von Mises -jännitysten (kuva 8) käyttäytymistä tapauksissa A ja B suhteellisten virheiden avulla. Vertailuarvoina on käytetty tuloksia, jotka on saatu 300 S8R5-elementin verkolla.



Kuva 6. Suorakaidelaatan C muodonmuutosenergian tarkentuminen kvadraattisilla elementeillä.

Kuvasta 7 nähdään, että taipuma-arvot suppenevat erittäin nopeasti, erityisesti tapauksessa A. Ongelmana ulokelaatta onkin yksinkertainen, sillä lähes koko laatan alueella suuret muuttuvat oleellisesti vain pituussuunnassa. Lähellä tukea jännitysten arvot kuitenkin muuttuvat myös leveyssuunnassa.

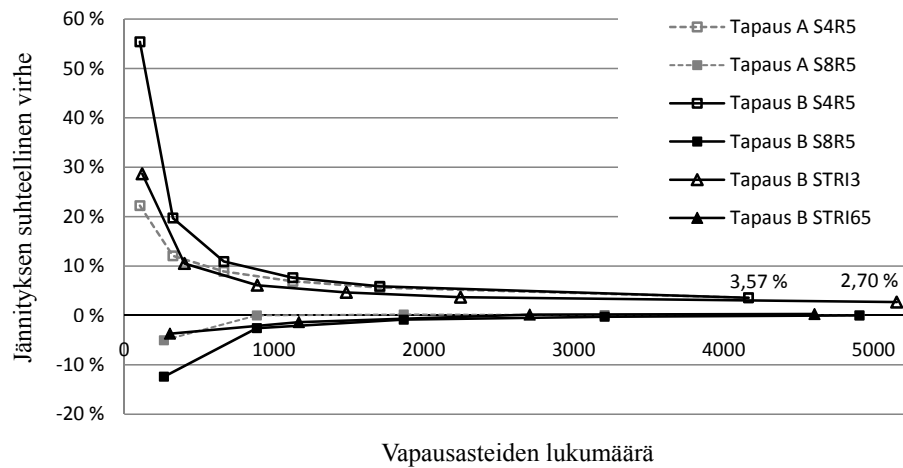
Vertaamalla kuvia 7 ja 8 nähdään edellä mainittu elementtimenetelmän perusominaisuus: jännitysarvot ovat yleisesti epätarkempia kuin siirtymät, joten jännitysten arvot suppenevat taipumien arvoja hitaammin. Taipumia tarkasteltaessa lineaarisilla elementeillä saadut tarkimmat tulokset poikkeavat noin 0,4–0,6 prosenttia vertailuarvosta. Jännitysten arvoille vastaavat virheprosentit ovat yli nelinkertaiset.



Kuva 7. Suorakaidelaattojen A ja B maksimitaipuman suhteellisen virheen suppeneminen eri elementtityypeillä.

Vino laatta

Kahden viimeisen esimerkkitapauksen [5] geometria on esitetty kuvassa 9; laatan kaikki sivut on vapaasti tuettu, ensimmäisessä tapauksessa kulma $\alpha = 30^\circ$ ja toisessa $\alpha = 60^\circ$. Molemmissa tapauksissa laattaa kuormittaa tasaisesti jakautunut kuorma $f = 6904 \text{ N/m}^2$, sivunpituus on $a = 0,0254 \text{ m}$, paksuus on $t = 0,254 \text{ mm}$, Poissonin vakio $\nu = 0,3$ ja kimmokerroin $E = 211 \text{ GPa}$. Mallinnuksessa on käytetty ohutta kuorielementtiä S8R5.

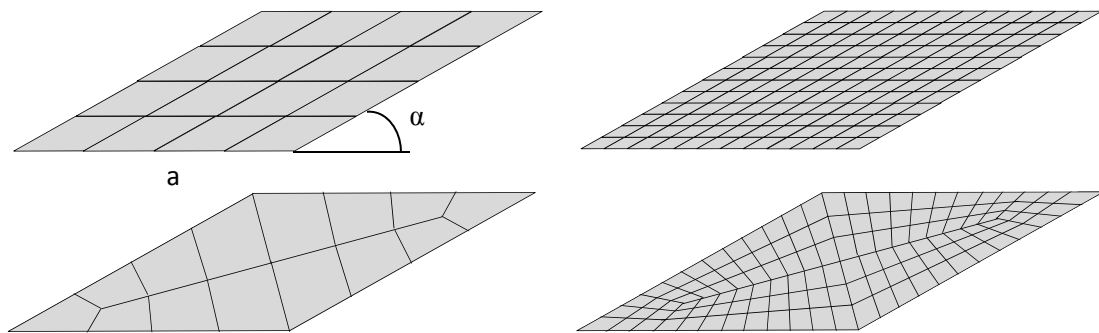


Kuva 8. Suorakaidelaattojen A ja B von Mises -maksimijännityksen suhteellisen virheen suppeneminen eri elementtityypeillä.

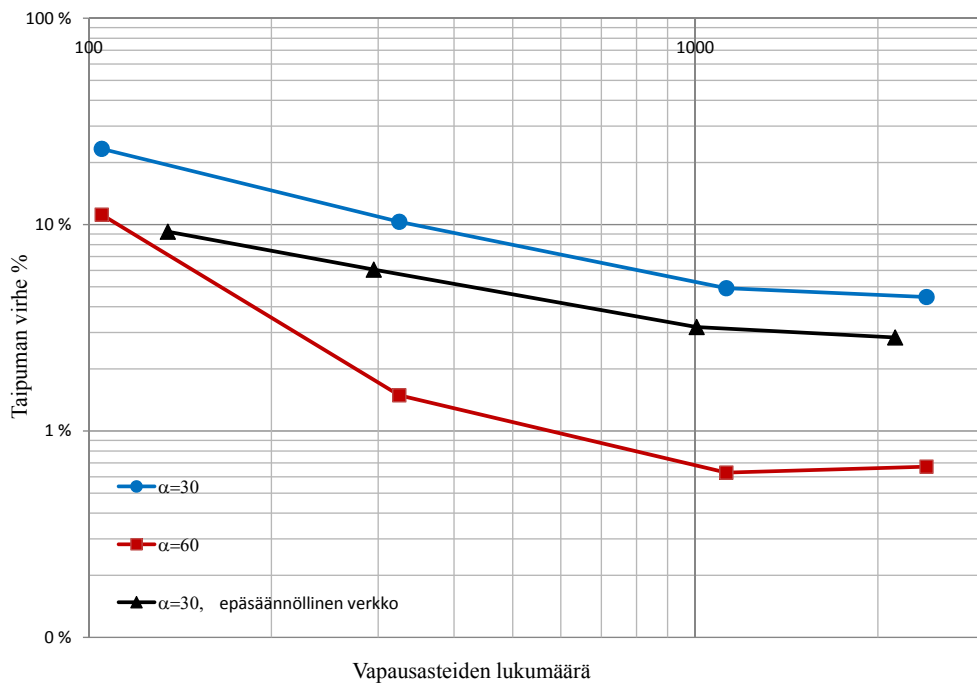
Laskentatulokset on esitetty kuvissa 10 ja 11, joista selviää, miten valitut tarkastelualueet muuttuvat elementtiverkkoa tihennettäessä. Kuvassa 10 on esitetty laatan maksimitaipuman suhteellinen virhe logaritmisella asteikolla. Taipuman referenssiarvo on saatu sarjaratkaisusta, jossa on mukana sarjan kuusi ensimmäistä biharmonista termiä [14][s. 96]. Kuvaaajista nähdään, että elementtiverkkoa tihennettäessä taipuman suhteellinen virhe pienenee nopeammin 60 asteen tapauksessa (neliöt) ja virhe on myös kauttaaltaan alemmalla tasolla kuin 30 asteen tapauksessa (ympyrät). Tämä johtuu siitä, että tehtävän tarkka ratkaisu on 30 asteen tapauksessa laatan geometriasta johtuen epäsäännöllisempi kuin 60 asteen tapauksessa: Laatan kahdessa kuperassa kulmassa eli kulman α vastinkulmissa $\pi - \alpha$ momentissa on singulaarinen jännityshuippu, joka on sitä voimakkaampi mitä suurempi on kyseinen kupera kulma. Ratkaisun singulariteetit johtavat elementtiapproksimaation virhekeskittymiin, sillä diskreetointivirhe keskittyy erityisesti niille alueille, joissa tarkan ratkaisun säännöllisyys on alhaista astetta. Virheen suppenemisnopeus ei siis riipu elementtien vinosta muodosta (kuva 9, ylhäällä), mikä nähdään suppenemiskäyrästä (kolmiot), joka on laskettu 30 asteen tapaukselle käyttäen epäsäännöllisiä verkkoja, jotka eivät sisällä vinoja elementtejä (kuva 9, alhaalla). Näillä verkoilla virhe on kuitenkin kauttaaltaan alemmalla tasolla, vaikka virhesuoran kulmakerroin ei muutukaan oleellisesti verrattuna vinoihin elementteihin. Tästä voidaan päätellä, että vinojen elementtien käyttöä tulisi pyrkiä välttämään, mutta virheen suppenemisnopeuteen vaikuttaa kuitenkin ratkaisun säännöllisyys eli tässä tapauksessa laatan geometria. Kuvan 10 viimeisellä verkotihennyksellä virhe ei enää mainittavasti pienene, mikä johtuu siitä, että referenssiratkaisuna on käytetty sarjaratkaisua, jonka tarkkuus on myös rajallinen; elementtiapproksimaation tarkkuus on taipuman osalta tiheimmällä verkolla jo samaa luokkaa kuin referenssiratkaisun tarkkuus.

Momentin singulaarisuus näkyy selvästi kuvan 11 käyristä, joissa on esitetty tapauksen $\alpha = 30^\circ$ momenttikomponenttien M_x ja M_y kuvaajat sarjaratkaisulle (katkoviiva), jossa on mukana sarjan kolme ensimmäistä termiä [14][s. 98]. Samassa kuvassa on myös harvimmalla (ympyrät) ja tiheimmällä (neliöt) elementtiverkolla sekä tiheimmällä epäsäännöllisellä (kolmiot) elementtiverkolla lasketut momenttikomponenttien kuvaajat, joista nähdään, että erityisesti momentin M_y elementtiapproksimaatiot ovat kaikki vielä varsin epätarkkoja.

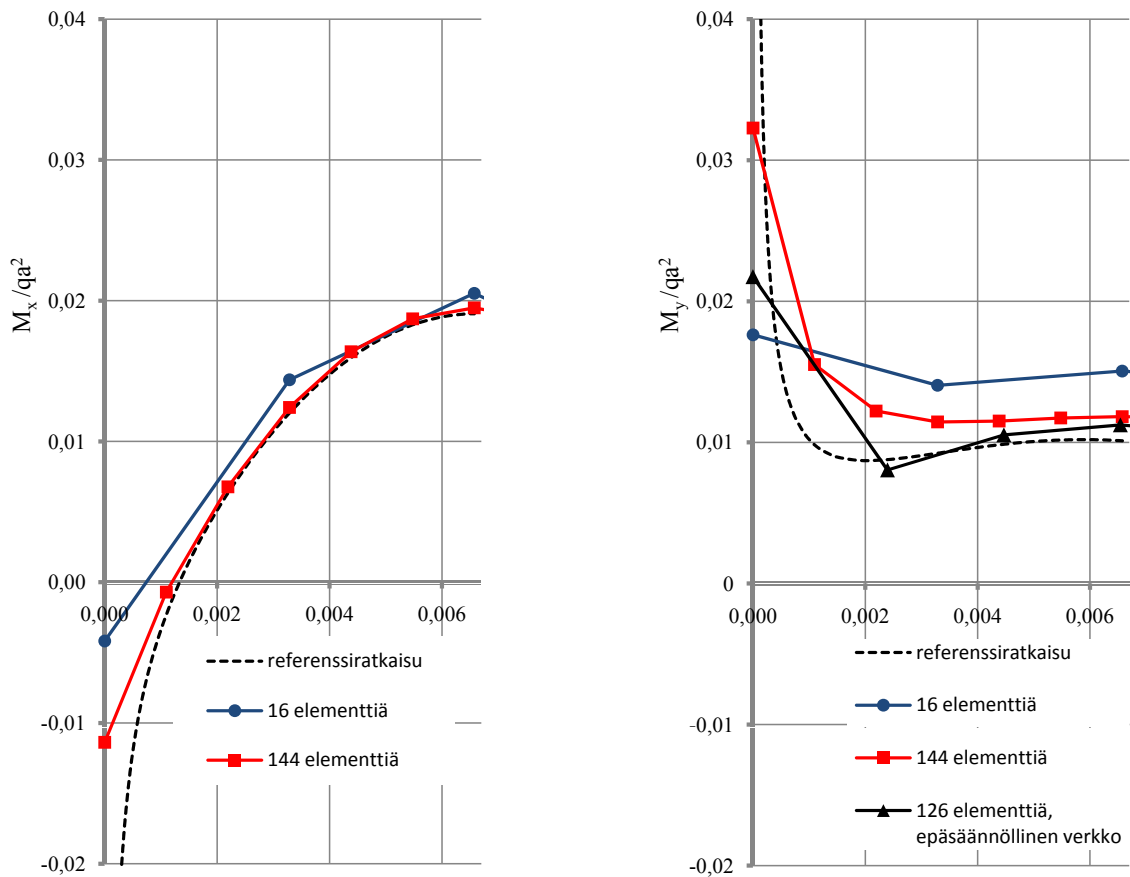
Jos ratkaisun tarkkuutta haluttaisiin kasvattaa niin, että se pystyy kuvaamaan paremmin momentin nopean muutoksen kuperien kulmien alueella, verkkoa olisi tihennettävä kohti näitä singulaarisia kulmia [5]. Tähän tarkoitukseen olisi hyödyllistä käyttää adaptiivisia menetelmiä, jotka virheindikaattorien avulla tihentävät verkkoa automaattisesti kohti virhekeskittymiä ja pyrkivät näin saavuttamaan halutun tarkkuuden mahdollisimman harvalla verkolla [7, 4, 11, 17]. Toisaalta on myös hyvä huomata, että diskreetointivirheen lisäksi laskennassa on aina mukana mallinnuksen tuoma virhe: Vielä suhteellisen ohueh-lakin laatalla Kirchhoff–Love-laattamalli ei ylipäänsä kuvaa niin hyvin kolmidimensioista elastisuustehtävää kuin Reissner–Mindlin-malli [7][luku 17], [5, 15]. Erityisesti tässä vinon laatan tapauksessa, kun kulma α pienenee, Kirchhoff–Love-teorian mallinnusvirhe kasvaa nopeammin kuin Reissner–Mindlin-teorian virhe [5].



Kuva 9. Vinon laatan geometria sekä harvimmat ja tiheimmät verkot säännöllisellä ja epäsäännöllisellä verkotuksella.



Kuva 10. Vinon laatan maksimitaipuman suhteellisen virheen suppeneminen.



Kuva 11. Vinon laatan taivutusmomentit kuperien kulmien välisellä janalla tapauksessa $\alpha = 30^\circ$: harvimman ja tiheimmän elementtiverkon tulokset sekä referenssiratkaisu; vaaka-akselilla etäisyys kuperasta kulmasta.

Yhteenveto ja johtopäätökset

Tämän artikkelin yksinkertaisten esimerkitapausten perusteella voidaan sanoa, että laatan reunaehdoilla, geometrialla ja elementtityypin valinnalla on selvä vaikutus laskennan tulostarkkuuteen. Erityisesti voidaan nostaa esille elementtimenetelmän perusominaisuuksia noudattavat tulokset: jännitysten arvot tarkentuvat taipuma-arvoja hitaammin; korkeampiasteisilla elementeillä tulokset tarkentuvat nopeammin suhteessa vapausasteiden lukumäärään; laskentasuureiden muutosnopeudet ja erityisesti ratkaisun säännöllisyysaste vaikuttavat oleellisesti tulosten tarkkuuteen.

Esimerkiksi ulokelaatan A tapauksessa taipumien arvot suppenevat nopeasti kaikilla elementeillä, kun taas suorakaidelaatan C tapauksessa jännitykset suppenevat suhteellisen nopeasti vain kvadraattisilla elementeillä. Vinon laatan tapauksesta puolestaan käy ilmi tehtävän tarkan ratkaisun epäsäännöllisyyden vaikutus suppenemisnopeuteen, sekä myös elementtien muodon vaikutus laskentatulosten tarkkuuteen. Kaiken kaikkiaan tämän artikkelin testitapauksissa käytetyistä ohuille laatoille soveltuvista elementeistä tarkimpiin tuloksiin päästiin kvadraattisella nelikulmioelementillä S8R5.

Lopuksi on vielä syytä huomauttaa, että erityisesti vinon laatan tapauksessa ja monimutkaisemmissa rakenteissa olisi hyödyllistä käyttää adaptiivisia elementtimenetelmiä,

jotka tihentävät elementtiverkkoa virheindikaattorien avulla automaattisesti kohti virhekeskittymiä ja pyrkivät näin pääsemään haluttuun tarkkuuteen optimaalisella verkontiheydellä. Lisäksi yleisenä johtopäätöksenä voidaan vielä todeta, että käytännön insinööri-sovelluksissa ei tulisi käyttää liian harvoja elementtiverkkoja, koska silloin ei välttämättä saada luotettavaa tietoa siitä, pysyvätkö rakenteen jännitykset ja muut suunnittelun kannalta oleelliset suureet sallituissa rajoissa. Erityisesti jos käytetään vain yhtä elementtityyppiä ja yhtä verkontiheyttä sekä tarkastellaan vain yhtä laskentasuuretta, tulokset saattavat johtaa virheellisiin suunnittelupäätöksiin.

Kiitokset

Suomen Akatemia on rahoittanut jälkimmäisen kirjoittajan työskentelyn tutkijatohtorin projektilla *Ohuiden rakenteiden adaptiiviset elementtimenetelmät* (päätos 128467).

Viitteet

- [1] Inc. ABAQUS. Abaqus Analysis User's Manual. Saatavilla lisenssiä vastaan, 2006.
- [2] Inc. ABAQUS. Abaqus Theory Manual. Saatavilla lisenssiä vastaan, 2006.
- [3] Inc. ABAQUS. Getting Started with ABAQUS. Saatavilla lisenssiä vastaan, 2006.
- [4] M. Ainsworth and J. T. Oden. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New-York, 2000.
- [5] I. Babuška and T. Scapolla. Benchmark computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 28:155–179, 1989.
- [6] I. Babuška and T. Strouboulis. *The Finite Element Method and its Reliability*. Clarendon Press, 2001.
- [7] I. Babuška and B. Szabo. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
- [8] R. D. Cook. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. John Wiley & Sons, 1995.
- [9] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt. *Concepts and Application of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [10] J. Fish and T. Belytschko. *A First Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons, 2007.
- [11] T. Grätsch and K.-J. Bathe. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Comp. Struct.*, 83:235–265, 2005.
- [12] M. Hakala. *Lujuusopin elementtimenetelmä*. Otatieto, 1980.
- [13] M. Mikkola. *Levyjen, laattojen ja kuorien teoriaa*. Otakustantamo, 1986.
- [14] L. S. D. Morley. *Skew Plates and Structures*. Pergamon Press, Oxford, 1963.
- [15] J. Niiranen. A priori and a posteriori error analysis of finite element methods for plate models. Väitöskirja, Teknillisen korkeakoulun matematiikan laitoksen tutkimusraporttisarja A534, <http://lib.tkk.fi/Diss/2007/isbn9789512290048/>, 2007.

- [16] C. Schwab. *p- and hp-Finite Element Methods – Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [17] B. Szabo and R. Actis. On the importance and uses of feedback information in FEA. *Appl. Num. Math.*, 52:219–234, 2005.
- [18] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [19] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, Amsterdam, 2005.

Jarkko Luntta, Jarkko Niiranen

Teknillinen korkeakoulu, Rakenne- ja rakennustuotantotekniikan laitos

PL 2100, 02015 TKK

s-posti: jluntta@cc.hut.fi, jarkko.niiranen@tkk.fi

Liite

Taulukko 1. Abaqus-kuorielementit (*conventional shell elements*, [2][3.1, 3.6.1], [1][23.6.1]).

Geometria	Lyhenne	Versio	Aste	Käyttö	Solmut	DOF	AI	NEMK
kolmio	S3/S3R	e/s	1	yleinen	3	6	-	-
kolmio	S3RS	e	1	yleinen	3	6	-	-
kolmio	STRI3	s	1	ohut	3	6	-	-
kolmio	STRI65	s	2	ohut	6	5 (6)	-	-
nelikulmio	S4/S4R	e/s	1	yleinen	4	6	x	x
nelikulmio	S4R5	s	1	ohut	4	5 (6)	x	x
nelikulmio	S4RS	e	1	yleinen	4	6	x	x
nelikulmio	S4RSW	e	1	yleinen	4	6	x	x
nelikulmio	S8R	s	2	paksu	8	6	x	-
nelikulmio	S8R5	s	2	ohut	8	5 (6)	x	-
nelikulmio	S9R5	s	2	ohut	9	5 (6)	x	-

s = *Abaqus/Standard*-elementtikirjasto, e = *Abaqus/Explicit*-elementtikirjasto

1 = lineaarinen elementti, 2 = kvadraattinen elementti

DOF = vapaustelukumäärä solmua kohti

AI = ali-integrointi

NEMK = nollaenergiamuotojen kontrollointi