

Laattarakenteiden laskennallisten menetelmien virheanalyysi ja adaptiiviset elementtimenetelmät

Jarkko Niiranen

Tiivistelmä. Tässä artikkelissa luodaan yleiskatsaus laattarakenteiden laskennallisen analysoinnin peruseräisiin. Artikkelissa käsitellään yleisiä laskennallisten menetelmien virhekomponentteja, tyypillisimpien laattamallien asymptoottista pätevyyttä, elementtimenetelmän matemaattista virheanalyysiä ja adaptiivisia elementtimenetelmiä. Elementtimenetelmän virheanalyysin ja adaptiivisen uudelleenverkotuksen perustuloksia havainnollistetaan myös numeerisilla esimerkeillä.

Avainsanat: mallinnusvirhe, diskreetointivirhe, elementtimenetelmä, virheanalyysi, laattarakenteet, adaptiivinen uudelleenverkotus

Johdanto

Insinöörisuunnittelun päätavoitteina voidaan pitää turvallisuutta ja kestävyyttä – vaikka taloudellisten rajoitteiden ja ympäristönäkökohtien merkitys onkin kasvanut merkittävästi erityisesti viimeisen vuosikymmenen aikana. Kuitenkin siitä huolimatta, että autojen, siltojen, lentokoneiden ja ydinvoimaloiden täytyy nykyään kohdata maailmanlaajuisten markkinoiden vaatimukset, niiden täytyy edelleen täyttää myös tarkoin säädetyt vaatimukset kestävä mekaanisia kuormituksia ja rasituksia. Toisaalta on myös hyvä huomata, etteivät turvallisuus ja kestävyyskään ole puhtaasti suunnittelun teknisiä yksityiskoh- tia vaan niihin kytkeytyy lähes aina myös eettisiä, sosiaalisia, poliittisia ja taloudellisia näkökulmia – erilaisten normien, määräysten ja virhetoleranssien kautta. [9][luku 1].

Nykyaikaisessa rakenteiden suunnittelussa ohuet rakenteet toimivat pääasiallisina rakenneosina etenkin monissa keveyttä, kestävyyttä ja esteettisyyttä vaativissa kohteissa. Klassisten alojen kuten rakennus- ja yhdyskuntatekniikan sekä konetekniikan ohella sovellusten kirjo on kasvanut nopeasti myös monilla muilla aloilla. Ohuita rakenteita kuten kuoria, laattoja, kalvoja, palkkeja ja köysiä voidaan yhdistää uusiin toiminnallisiin, älykkäisiin ja kerroksellisiin materiaaleihin, jolloin niiden avulla voidaan muodostaa älykkäitä sähkömekaanisia systeemejä. Näitä systeemejä voidaan käyttää esimerkiksi toimieliminä, antureina tai vaimentimina monien eri tieteenalojen uusissa teknologisissa sovelluksissa: esimerkiksi ilmailualalla, biokemiassa, kirurgiassa tai mikroelektroniikassa. Tämä nopeasti kasvava ja poikkitieteellinen sovelluskenttä yhdessä tarkkuus- ja tuottavuusvaatimusten kanssa on johtanut edistyksellisten tietokoneavusteisten suunnittelu- ja laskentamenetelmien hyödyntämiseen. Tämän seurauksena myös monilla uusilla aloilla on syntynyt tarve tehokkaille ja luotettaville ohuiden rakenteiden simulointi- ja analysointimenetelmille.

Laskentamenetelmien ja niihin perustuvien ohjelmistojen käytön lisääntyminen on

myös osaltaan kasvattanut niille asetettavia laatuvaatimuksia; tarkkuus, tehokkuus ja luotettavuus kiinnostavat sekä tutkijoita että soveltajia. Erityisesti mallinnus- ja laskentamenetelmien tulosten tarkkuuden tehokkaaseen mittaamiseen, kontrollointiin ja parantamiseen on pyritty kehittämään uusia menetelmiä [2][luku 1]. Näin myös siksi, että laskentamenetelmien ja niihin perustuvien ohjelmistojen kirjo on kasvanut sekä määrällisesti laajaksi että laadullisesti kirjavaksi.

Tässä artikkelissa luodaan yleiskatsaus tarkkuus- ja luotettavuusanalyysin perusperiaatteisiin, joihin törmätään laattarakenteiden elementtimenetelmään perustuvassa laskennallisessa analysoinnissa. Aluksi aihetta taustoitetaan käsittelemällä yleisiä laskennallisten menetelmien epätarkkuustekijöitä ja virhekomponentteja. Seuraavaksi esitellään tyypillisimpiä laattamalleja ja esitellään joitakin perustuloksia mallien pätevyydestä asympotoottisen analyysin näkökulmasta. Lopuksi käydään läpi elementtimenetelmän diskreettivirheen analysoinnin yleisiä periaatteita sekä myös adaptiivisia menetelmiä ja laattaelementtejä koskevia erityispiirteitä.

Tämä artikkeli perustuu osittain kirjoittajan Lectio Praecursoria -esitelmään *A priori- ja a posteriori -virheanalyysi laattamallien elementtimenetelmille* sekä väitöskirjan johdanto-osaan [55].

Insinöörisuunnittelun epätarkkuustekijät ja virhekomponentit

Matemaattisen mallinnuksen laskennallisia menetelmiä voidaan pitää laajan sovellettavuutensa, tehokkuutensa ja myös monimutkaisuutensa takia modernin insinöörisuunnittelun kovana ytimenä. Taulukossa 1 on esitetty tyypillisen insinöörisuunnittelun päätöksentekoprosessin kaaviokuvaus [10][luku 1]: Aluksi määritellään fysikaalinen ongelma ja sen mukaiset suunnittelukriteerit; seuraavaksi ongelmasta muodostetaan yleinen matemaattinen malli – idealisoitu, mahdollisesti hyvinkin epätäydellinen, kuvaus todellisuudesta. Yleensä monimutkaisia matemaattisia malleja ei voida ratkaista tarkasti vaan niiden ratkaisemiseen tarvitaan laskennallisia approksimaatiomenetelmiä. Riippuen laskentaresursien saatavuudesta ja kustannuksista yleistä matemaattista mallia joudutaan usein yksinkertaistamaan perustuen insinöörikokemukseen, intuitioon ja yleisiin mallinnusperiaatteisiin. Lopuksi yksinkertaistettuun matemaattiseen malliin perustuva tehtävä ratkaistaan likimääräisesti numeerisilla menetelmillä, ja saatua ratkaisua käytetään suunnitteluun liittyvään päätöksentekoon: mallin geometriaa tai materiaalia voidaan muuttaa, yksinkertaistettua mallia voidaan tarkentaa jne. Periaatteessa koko yllä kuvatun suunnitteluprosessin, alusta loppuun, tulee pystyä mukautumaan eri osavaiheista saatuun palautteeseen [10]. Näin prosessin edetessä tulokset tarkentuvat vähitellen hallitusti ja kustannustehokkaasti – erityisesti, jos eriaisteiset mallit ovat hierarkkisia sekä mallit ja numeeriset menetelmät toisistaan riippumattomia [62, 19].

Suunnittelu- ja mallinnusprosessin jokaisessa vaiheessa avainasemassa on virhe: fysikaalisen todellisuuden ja yleisen matemaattisen mallin välinen *idealisointivirhe*; yleisen ja yksinkertaistetun matemaattisen mallin välinen *mallinnusvirhe*; yksinkertaistetun mallin ja sen numeerisen approksimaation välinen *diskreettivirhe*. Tässä yhteydessä ei oteta huomioon muita mahdollisia prosessiin liittyviä virhekomponentteja kuten teollisten tuotteiden valmistusvirheitä, rakenneosien asennusvirheitä, laskentaohjelmistojen ohjelmointivirheitä tai inhimillisiä virheitä laskentatulosten tulkinnassa. On hyvä huomata, että monilta osin insinöörisuunnittelun virhekomponenttien analysoinnissa on otettava huomioon myös erilaisia todennäköisyys- ja tilastollisuusnäkökohtia [5].

Käytännön insinöörisuunnittelussa yksittäisten virhekomponenttien suhteen joudu-

Taulukko 1. Insinöörisuunnittelun päätöksentekoprosessin virhekomponentit (vrt. [10][luku 1]).

Yleinen taso <i>Rakennesuunnittelu</i>	Virhekomponentti
Fysikaalinen ongelma ja suunnittelukriteerit <i>Rakennetekninen suunnittelutehtävä</i>	
↕	⇒ Idealisointivirhe
Yleinen matemaattinen malli <i>Kolmidimensioinen elastisuusteoria</i>	
↕	⇒ Mallinnusvirhe
Yksinkertaistettu matemaattinen malli <i>Elastinen laattamalli</i>	
↕	⇒ Diskretointivirhe
Numeerinen menetelmä <i>Laattaelementtimenetelmä</i>	
↑	
↓	
Päätökset ja palaute <i>Muutokset rakenteessa, malleissa, elementtimenetelmässä</i>	
↕	
Arvostelu ja hyväksyntä	

taan usein tekemään kompromisseja ja todellisuudessa pyritäänkin parhaaseen kompromissiin ratkaisun laadun sekä mallinnuksen ja laskennan viemän ajan sekä muiden resurssien (esimerkiksi tietokoneiden keskusyksikköaika, tietokoneen muistintarve sekä ohjelmisto- ja henkilöstökustannukset) välillä [18]. Näin ollen esimerkiksi suunnitteluprosessin mallinnusvaiheessa käytettävän alustavan numeerisen laskennan diskretointivirheelle ei välttämättä aseteta niin tiukkoja vaatimuksia kuin lopullisen mallin laskentatuloksille. Mallin *validoinnin* vaatimasta laskennasta pyritään siis usein selviämään minimikustannuksilla, kun taas lopullisten laskentatulosten *verifiointiin* voidaan käyttää selvästi enemmän resursseja. Nykyisillä numeerisen laskennan menetelmillä ja tietokoneresursseilla moniin laskentatehtäviin onkin mahdollista saada niin hyvin verifioituja, tarkkoja ja luotettavia ratkaisuja, että poikkeavuus todellisuudesta jää pelkästään idealisoinnin ja mallinnuksen tasolle. Tällöin mallin validointi nousee avainasemaan. On kuitenkin huomattava, että laskennan tavoitteet on aina määriteltävä tarkasti, jotta verifointi voidaan suorittaa nimenomaan asetettujan tavoitteiden suhteen [9][luku 1].

Seuraavissa luvuissa taulukon 1 käsitteet linkittyvät laattarakenteiden laskennalliseen analysointiin seuraavasti: yleisenä matemaattisena mallina käytetään kolmidimensioista elastisuusteoriaa; sen yksinkertaistetut matemaattiset mallit ovat nyt Reissner–Mindlin-laattamalli ja Kirchhoff–Love-laattamalli (tai Kirchhoff–Germain-laattamalli); elementtimenetelmä on tässä yhteydessä tarkasteltava numeerinen menetelmä.

Dimensioerduktio ja laattamallien tarkkuus

Kolmidimensioiseen elastisuusteoriaan perustuva rakennemalli voidaan yksinkertaistaa eritasoisiksi dimensionaalisesti redusoiduiksi rakennemalleiksi: yksidimensioiseksi sauvaksi tai köydeksi [54]; kaksidimensioiseksi kalvoksi tai laataksi [54, 31, 36]; kaksidimensioiseksi matalaksi kuoreksi tai yleiseksi kuoreksi [54, 31, 32, 28]. Kaikki nämä mallit liittyvät läheisesti toisiinsa – esimerkiksi tietyin oletuksin kuorimalli eriytyy laataksi ja kalvoksi, kun kuoren kaarevuus saa arvon nolla [28][luku 4].

Tässä luvussa esitellään ensin laattarakenteiden mallinnuksen peruseriaatteet ja -oletukset, joilla on selvät seuraukset mallien pätevyyteen ja myös myöhemmin käsiteltävään elementtimenetelmän virheanalyysiin. Tässä yhteydessä käsitellään laattarakenteille yleisimpiä Reissner–Mindlin- ja Kirchhoff–Love-dimensioerduktiomalleja. Esimerkkinä laattamallien hierarkkisuudesta mainittakoon, että Reissner–Mindlin-laattamalli voidaan tulkita yksinkertaisimpana hierarkkisena laattamallina [10, 1, 59, 57, 19].

Kinemaattiset oletukset ja muodonmuutokset

Seuraavaksi kuvaillaan lyhyesti Reissner–Mindlin- ja Kirchhoff–Love-laattamallien fysiikkaalinen tausta sekä perussuureet ja materiaaliarvot. Erityisesti käydään läpi dimensioreduktion polku kolmidimensioisesta kontinuumimallista kaksidimensioisiin laattamalleihin – kinemaattisista oletuksista jännitysresultanttien kautta tasapainoyhtälöihin ja reunaehtoihin. Lopuksi lineaarisen elastisuusteorian konstitutiivisten oletusten avulla jännitysresultantit lausutaan vielä siirtymäsuureiden avulla.

Matemaattisesti laattarakenne määritellään kolmidimensioisen avaruuden tulojoukko-

$$\mathcal{P} = \Omega \times \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right), \quad (1)$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on laatan keskipinta ja $t \ll \text{diam}(\Omega)$ laatan paksuus.

Olkkoon laatan siirtymäkenttä $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, missä indeksit x, y, z viittaavat karteesisiin koordinaatteihin ja $u_i = u_i(x, y, z)$, $i = x, y, z$. Geometrisesti lineaarisessa Reissner–Mindlin-laattateoriassa oletetaan, että seuraavat siirtymäsuureita koskevat ehdot ovat voimassa:

- (K1) Alkutilassa laatan keskipintaa vastaan kohtisuorassa olevat suorat säikeet säilyvät suorina muodonmuutoksen aikana.
- (K2) Alkutilassa laatan keskipintaa vastaan kohtisuorassa olevat suorat säikeet eivät veny.
- (K3) Laatan keskipinnan pisteet siirtyvät ainoastaan laatan keskipintaa vastaan kohtisuorassa z -suunnassa.

Näillä oletuksilla Kantorovičin menetelmä [54][luku 10] antaa siirtymäkentän muodossa

$$u_x = -z\beta_x(x, y), \quad u_y = -z\beta_y(x, y), \quad u_z = w(x, y), \quad (2)$$

missä w on laatan keskipinnan (z -suuntainen) taipuma, β_x ja β_y merkitsevät kiertymiä y - ja x -akselin ympäri, suunnistuksen seurattessa taipuman muutosta. Tämän luvun lopussa käsitellään kinemaattisiin oletuksiin liittyviä lisätermiä, jotka antavat z^2 - ja t^2 -riippuvuuden siirtymäkomponentille u_z .

Muodonmuutokset voidaan nyt esittää lineaarisen muodonmuutostensorin avulla muodossa

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T), \quad \nabla\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial u_x/\partial x & \partial u_x/\partial y & \partial u_x/\partial z \\ \partial u_y/\partial x & \partial u_y/\partial y & \partial u_y/\partial z \\ \partial u_z/\partial x & \partial u_z/\partial y & \partial u_z/\partial z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Komponenttimuodossa muodonmuutokset ovat

$$e_{xx} = -z \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = -z \frac{\partial \beta_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = 0, \quad (4)$$

$$e_{xy} = -\frac{z}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right), \quad e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \right). \quad (5)$$

Kirchhoff–Love-laattateoriassa asetetaan vielä yksi kinemaattinen lisäoletus:

(K4) Alkutilassa laatan keskipintaa vastaan kohtisuorassa olevat suorat säikeet säilyvät muodonmuutoksen aikana kohtisuorassa laatan keskipintaa vastaan.

Tämä ehto kytkee taipuman w ja kiertymän $\boldsymbol{\beta} = (\beta_x, \beta_y)$ toisiinsa:

$$\nabla w - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

mistä seuraa siirtymäkomponenteille lausekkeet

$$u_x = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \quad u_z = w(x, y). \quad (7)$$

Siirtymäkomponentin u_z mahdollista z^2 -riippuvuutta käsitellään myöhemmin tämän luvun lopussa. Vastaavat muodonmuutokset ovat nyt

$$e_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad e_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad e_{zz} = 0, \quad (8)$$

$$e_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad e_{xz} = 0, \quad e_{yz} = 0. \quad (9)$$

Tässä yhteydessä huomautetaan, että leikkausmuodonmuutokset e_{xz} ja e_{yz} nollautuvat nimenomaan oletuksen (K4) eli yhtälön (6) ansiosta.

Tasapainoyhtälöt jännitysresultanteille ja reunaehdot

Jännitysresultantit eli momentit ja leikkausvoimat määritellään seuraavasti:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad M_{ij} = - \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{ij} dz, \quad i, j = x, y, \quad (10)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad Q_i = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{iz} dz, \quad i = x, y, \quad (11)$$

missä jännitystensori oletetaan symmetriseksi, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = x, y, z$. Virtuaalisen työn periaatetta varten määritellään vielä lineaarinen venymätensori

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{\beta} + (\nabla\boldsymbol{\beta})^T), \quad (12)$$

josta käytetään usein nimitystä käyristymätensori. Vertaamalla määritelmiä (3) ja (12) huomataan, että pätee $e_{ij} = -z\varepsilon_{ij}$, $i, j = x, y$. Virtuaalisen taipuman δw ja virtuaalisen kiertymän $\delta\boldsymbol{\beta}$ avulla virtuaalisen työn energiatasapaino saadaan nyt muotoon

$$\int_{\Omega} \mathbf{M} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\boldsymbol{\beta}) \, dx \, dy + \int_{\Omega} \mathbf{Q} \cdot (\nabla\delta w - \delta\boldsymbol{\beta}) \, dx \, dy = \int_{\Omega} F \delta w \, dx \, dy, \quad (13)$$

missä on oletettu, että laatan reunoilla ei esiinny tunnettuja jännitysresultantteja eikä nollasta poikkeavia siirtymäsuureita. Kuormaresultantti F sisältää z -suuntaiset pinta-kuormat sekä mahdolliset z -suuntaiset tilavuuskuormat

$$F_b = \int_{-t/2}^{t/2} F_z \, dz, \quad (14)$$

missä tilavuuskuormatiheys $F_z = F_z(x, y, z)$ oletetaan usein riippumattomaksi koordinaatista z , tai ainakin mahdollinen riippuvuus oletetaan parilliseksi [64]. Tämän luvun lopussa käsitellään vielä erikseen x - ja y -suuntaisten pintakuormien vaikutusta.

Laattatehtävä on nyt saatettu kaksidimensioiseen muotoon, jossa muuttujat riippuvat ainoastaan koordinaateista x ja y , eivätkä siis (eksplisiittisesti) koordinaatista z . Seuraavaksi osittaisintegroinnilla yhtälöstä (13) saadaan tasapainoyhtälöt, jotka ovat voimassa laatan keskipinnalla Ω : Reissner–Mindlin-mallille pätee

$$-\operatorname{div} \mathbf{Q} = F, \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

missä div on tensoridivergenssi; Kirchhoff–Love-mallille saadaan tasapainoyhtälö

$$\operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M} = F, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \partial M_{xx}/\partial x + \partial M_{xy}/\partial y \\ \partial M_{yx}/\partial x + \partial M_{yy}/\partial y \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Myös tässä tapauksessa leikkausvoima määritellään momenttitasapainon (16) avulla, jotta voimatasapaino (15) pätee.

Reunaehtoja varten oletetaan, että Reissner–Mindlin-mallissa laatalla on kova jäykkä tuenta reunan $\partial\Omega$ osalla Γ_{CH} , pehmeä jäykkä tuenta osalla $\Gamma_{\text{CS}} \subset \partial\Omega$, kova vapaa tuenta osalla $\Gamma_{\text{SH}} \subset \partial\Omega$ ja pehmeä vapaa tuenta osalla $\Gamma_{\text{SS}} \subset \partial\Omega$. Reunan osa $\Gamma_{\text{F}} \subset \partial\Omega$ on vapaa tuennasta. Tällöin homogeeniset reunaehdot voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} & \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{\text{CH}}, \\ w = 0, \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n} = 0 & \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{\text{CS}}, \\ w = 0, \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n} = 0 & \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{\text{SH}}, \\ w = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n} = 0 & \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{\text{SS}}, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = 0 & \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{\text{F}}, \end{aligned} \quad (18)$$

missä \mathbf{n} on reunan ulkonormaalivektori ja \mathbf{s} vastaava tangenttivektori, kun taas $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n}$ on taivutusmomentti ja $\mathbf{s} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n}$ vääntömomentti.

Kirchhoff–Love-malli ei erottele pehmeitä ja kovia reunaehtoja:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \nabla w \cdot \mathbf{n} = 0 & \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{\text{C}}, \\ w = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n} = 0 & \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{\text{S}}, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{M}\mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot \operatorname{div} \mathbf{M} = 0 & \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{\text{F}}, \\ (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{M}\mathbf{n}_1)(c) = (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{M}\mathbf{n}_2)(c) & \quad \forall c, \end{aligned} \quad (19)$$

missä indeksit 1 ja 2 viittaavat siihen, että normaali- ja tangenttivektorien suunnat muuttuvat lähestyessä vapaalla reunalla Γ_{F} mahdollisesti sijaitsevaa nurkkapistettä c sen eri puolilta.

Konstitutiiviset oletukset

Kinemaattisten oletusten lisäksi lineaarisesti elastisille laatoille asetetaan seuraavat tavanomaiset konstitutiiviset oletukset: Materiaalin oletetaan olevan

(C1) lineaarisesti elastinen (määritelty Hooken lain avulla),

(C2) homogeeninen (riippumaton koordinaateista x, y, z),

(C3) isotrooppinen (riippumaton suunnasta).

Lisäksi oletetaan, että

(C4) poikittainen normaali jännitys häviää, $\sigma_{zz} = 0$.

On hyvä huomata, että oletus (C4), josta seuraa Kirchhoff–Love-mallin tapauksessa tasojännitystilä, on muodollisesti ristiriidassa kinemaattisesta oletuksesta (K2) seuraavan ehdon $\varepsilon_{zz} = 0$ kanssa, joka siis puolestaan viittaa tasomuodonmuutostilaan. Myöhemmin esiteltävät mallinnusvirheen asymptoottisen analyysin perustulokset kuitenkin oikeuttavat oletuksen (C4).

Oletusten (C1)–(C4) seurauksena konstitutiiviset yhtälöt voidaan esittää muodossa

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2}(e_{xx} + \nu e_{yy}), \quad (20)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2}(e_{yy} + \nu e_{xx}), \quad (21)$$

$$\sigma_{xy} = 2Ge_{xy}, \quad \sigma_{xz} = 2Ge_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2Ge_{yz}, \quad (22)$$

missä materiaali vakiot ovat Youngin moduli E , Poissonin vakio ν ja leikkausmoduli

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (23)$$

Yhtälöiden (10) ja (11) jännitysresultantit sekä tasapainoyhtälöt (15)–(17) voidaan nyt lausua siirtymäsuureiden avulla. Esimerkiksi momenttitensori voidaan nyt esittää yksikkötensorin \mathbf{I} , taivutusjäykkyyden

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (24)$$

ja kiertymän avulla muodossa

$$\mathbf{M} = D((1 - \nu)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta}) + \nu \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{I}). \quad (25)$$

Reissner–Mindlin-mallin leikkausvoima puolestaan saadaan taipuman ja kiertymän avulla muotoon

$$\mathbf{Q} = Gt(\nabla w - \boldsymbol{\beta}). \quad (26)$$

Jos laatan paksuus oletetaan vakioksi, konstitutiivisista yhtälöistä seuraa, että Kirchhoff–Love-mallin tasapainoyhtälö (17) voidaan esittää taipuman avulla biharmonisessa muodossa

$$D\Delta^2 w = F. \quad (27)$$

Laattamallien matemaattista tarkkuusanalyysiä varten laattatehtävä skaalataan siten, että

$$F = Gt^3 f, \quad (28)$$

missä kuormitus f on riippumaton paksuudesta t [31, 8, 64]. Näin Reissner–Mindlin-laatalle saadaan yksikäsitteinen nollasta poikkeva ratkaisu rajatapauksessa $t \rightarrow 0$. Raja-ratkaisu on vastaava Kirchhoff–Love-tehtävän ratkaisu [23][Lause 3.1]. Skaalatun tehtävän momentti ja leikkausvoima määritellään vastaavasti:

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathbf{M}(\boldsymbol{\beta})}{Gt^3} \quad \text{ja} \quad \mathbf{q}(w, \boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathbf{Q}(w, \boldsymbol{\beta})}{Gt^3}. \quad (29)$$

Asymptoottinen tarkkuusanalyysi

Reissner–Mindlin-laattateorian mukaista mallia pidetään yleisesti Kirchhoff–Love-laattamallia tarkempaan, erityisesti paksuukoille laattarakenteille [31, 8]. Useinkaan ei kuitenkaan perustella analyttisesti tai matemaattisesti, missä suhteessa mallien tarkkuudet poikkevat toisistaan. Seuraavaksi esitellään joidenkin viimeaikaisten tutkimusten päätuloksia laattamallien tarkkuudesta [8, 64, 33]. Näissä tutkimuksissa laattamallin tarkkuutta mitataan pääasiassa asymptoottisessa mielessä: Kun laatan paksuus lähestyy nollaa, laattatehtävän ratkaisun on lähestyttävä vastaavan kolmidimensioisen elastisuustehtävän ratkaisua.

Arnold, Madureira ja Zhang [8] ovat analysoineet laattamallien käyttökelpoisuutta tarkastelemalla reunoiltaan jäykästi tuettua laattaa, jota kuormittaa z -suunnassa muuttumattoman tilavuusvoiman f_z lisäksi laatan ylä- ja alapintojen x -, y - ja z -suuntaiset pintavoimat g_i , $i = x, y, z$. Pintavoimia koskien tehdään seuraavat oletukset:

$$g_z(x, y, -\frac{t}{2}) = g_z(x, y, \frac{t}{2}) = g_z(x, y), \quad (30)$$

$$g_i(x, y, -\frac{t}{2}) = -g_i(x, y, \frac{t}{2}) = g_i(x, y), \quad i = x, y. \quad (31)$$

Fysikaalisesti näistä symmetria- ja antisymmetriaehdoista seuraa, että laatan kuormitus on luonteeltaan taivuttava, ei venyttävä.

Seuraavaksi laattatehtävä luokitellaan kokonaiskuormituksensa mukaan seuraavasti: Joko ehto

$$\operatorname{div} \mathbf{g} + \frac{1}{t} g_z + f_z \neq 0 \quad (32)$$

pätee, tai päinvastoin,

$$\operatorname{div} \mathbf{g} + \frac{1}{t} g_z + f_z = 0, \quad (33)$$

missä on käytetty merkintää $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$. Ehtoyhtälöiden vasemman puolen kuormituslauseke saadaan kirjoittamalla Kirchhoff–Love-mallille tasapainoyhtälön (13) oikean puolen mukainen kuormitustermi yleisessä muodossaan ottaen huomioon kaikki pintakuormakomponentit [64]. Erityisesti voidaan huomauttaa, että poikittaiskuormituksessa oleva laatta, jolle pätee $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, $g_z + t f_z \neq 0$ (vrt. (13)), selvästi toteuttaa ehdon (32).

Jatkossa merkintä \mathbf{U}^* , esimerkkinä $\mathbf{U}^* = (u_x^*, u_y^*)$, viittaa kolmidimensioisen elastisuusteorian mukaisen mallin ratkaisuun, kun taas \mathbf{U}^M viittaa vastaavaan laattamallin antamaan ratkaisuun. Yläindeksi M viittaa siis joko Reissner–Mindlin-malliin tai Kirchhoff–Love-malliin, esimerkkinä yhtälön (2) tai (7) mukainen siirtymä $\mathbf{U}^M = (u_x, u_y)$.

Näillä merkinnöillä voidaan nyt tiivistää laattamallien tarkkuus asymptoottisessa mielessä seuraavasti: Jos ehto (32) pätee, molemmille malleille pätee

$$\frac{\|\mathbf{U}^* - \mathbf{U}^M\|}{\|\mathbf{U}^*\|} \leq Ct^p, \quad (34)$$

missä muuttuja \mathbf{U} , vastaava normi $\|\cdot\|$ ja suppenemisnopeus on listattu taulukossa 2. Normi $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{P})}$ tarkoittaa neliöintegraalia eli L^2 -normia, kun taas normi $\|\mathbf{u}\|_{E(\mathcal{P})}$ tarkoittaa energiatasapainoyhtälön (13) vasenta puolta vastaavan muodonmuutosenergian mukaista energianormia. Siinä tapauksessa, että ehto (33) pätee, Reissner–Mindlin-mallin ratkaisu suppenee energianormin suhteen nopeudella $\mathcal{O}(t^{1/2})$, kun taas Kirchhoff–Love-mallin ratkaisu on identtisesti nolla [8].

On vielä hyvä huomata, että Kirchhoff–Love-mallissa siirtymäkomponentille u_z tarvitaan z^2 -riippuvuus (vrt. (7)), jotta taulukon 2 kahden viimeisen rivin tulokset ovat voimassa. Reissner–Mindlin-mallin kohdalla vastaaviin tuloksiin siirtymäkomponentille u_z (vrt. (2)) tarvitaan sekä z^2 - että t^2 -riippuvuuden tuovat lisätermit. Tällöin Reissner–Mindlin-malli esittää hierarkkista (1, 1, 2)-mallia eikä yhtälön (2) mukaista (1, 1, 0)-mallia; tässä kaksi ensimmäistä hierarkkisuusindeksiä 1 viittaavat siirtymäkomponenttien u_x ja u_y z -riippuvuuteen, kun taas viimeinen indeksi (2 tai 0) viittaa siirtymäkomponentin u_z z -riippuvuuteen.

Taulukko 2. Epäyhtälön (34) mukaiset suppenemisnopeudet Reissner–Mindlin- ja Kirchhoff–Love-laattamalleille ehdon (32) ollessa voimassa [8].

Muuttuja ja normi $\ \mathbf{U}\ $	Suppenemisnopeus
$\ (u_x, u_y)\ _{L^2(\mathcal{P})}$	$\mathcal{O}(t)$
$\ u_z\ _{L^2(\mathcal{P})}$	$\mathcal{O}(t)$
$\ \nabla(u_x, u_y)\ _{L^2(\mathcal{P})}$	$\mathcal{O}(t^{1/2})$
$\ \frac{\partial^2(u_x, u_y)}{\partial z^2}\ _{L^2(\mathcal{P})}$	$\mathcal{O}(t)$
$\ \nabla u_z\ _{L^2(\mathcal{P})}$	$\mathcal{O}(t)$

$\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\ _{L^2(\mathcal{P})}$	$\mathcal{O}(t^{1/2})$
$\ \mathbf{u}\ _{E(\mathcal{P})}$	$\mathcal{O}(t^{1/2})$

Kaiken kaikkiaan voidaan siis todeta, että erityisesti z -suuntaisesti kuormitettu Reissner–Mindlin-laattamalli ja Kirchhoff–Love-laattamalli käyttäytyvät asymptoottisessa, kvantitatiivisessa mielessä identtisesti. Kuormitusten lisäys x - ja y -suuntiin ei vaikuta tuloksiin, jos ehto (32) on voimassa. On kuitenkin syytä huomata, että epäyhtälön (34) vakion C osalta mallien asymptoottinen käyttäytyminen on toisistaan poikkeavaa [33]. Jos puolestaan ehto (33) on voimassa, Kirchhoff–Love-malli ei ole lainkaan käyttökelpoinen.

Vastaava asymptoottinen analyysi, jossa on otettu huomioon myös reunakuormitukset, löytyy Zhangin tutkimusartikkelista [64], kun taas laattamallien kvantitatiivisia eroja esimerkiksi reunaehtojen ja leikkausvoiman osalta on analysoitu Szabón ja Babușkan kirjassa [10][luku 17] ja sen viitteissä.

Elementtimenetelmän tarkkuus ja virheanalyysi

Laattarakenteiden matemaattinen mallinnus johtaa siis edellisen luvun mukaisiin osittais-differentiaaliyhtälöihin, jotka ratkaistaan yleensä numeerisesti ja likimääräisesti elementtimenetelmään perustuvilla tietokoneohjelmistoilla. Elementtimenetelmän tarkkuutta eli diskreetointivirhettä analysoitaessa oleellisessa osassa – sekä teoreettisen analyysin että käytännön laskennan kannalta – on ratkaistavan tehtävän tarkan ratkaisun matemaattinen säännöllisyys [9][luku 2.3]. Nimittäin diskreetointivirhe keskittyy voimakkaasti niille alueille, joissa ratkaisun säännöllisyys on alhaista astetta. Erityisesti ratkaisun singulariteetit johtavat virhekeskittymiin. Tässä yhteydessä on syytä huomauttaa, että tehtävän tarkka ratkaisu on usein tuntematon, joskin sen säännöllisyydestä voi joissakin tapauksissa olla etukäteistietoa.

Elementtimenetelmän tarkkuuta voidaan tunnetusti parantaa joko tihentämällä verkkoa, jolloin puhutaan h -menetelmästä, tai käyttämällä korkeampiasteisia elementtejä, jolloin kyseessä on p -menetelmä. Nämä menetelmät voidaan myös yhdistää hp -menetelmäksi [10, 9, 58]. Elementtimenetelmän perinteisten *a priori* -virhearvioiden mukaan tiheää elementtiverkkoa ja alhaista astelukua käytetään siellä, missä ratkaisu on epäsäännöllinen, kun taas harvaa elementtijakoa ja korkeaa astelukua käytetään alueilla, joissa ratkaisu on säännöllinen.

Jotta laskentaresurssit eli verkontiheys ja elementtien asteluku voidaan kohdentaa oikein eri osa-alueille, tarvitaan adaptiivisia uudelleenverkotusmenetelmiä sekä *a posteriori* -virheenilmaisimia, jotka antavat elementtikohtaista tietoa virheen suuruudesta. Virheindikaattoreista muodostuvat myös *a posteriori* -virhearviot, joita voidaan käyttää apuna tehtäessä päätöstä elementtiapproksimaation tarkkuuden riittävydestä.

A priori- ja a posteriori -virhearviot

Elementtimenetelmän matemaattinen virheanalyysi jakautuu siis kahteen kategoriaan [3, 21, 23, 30, 10, 63]: *A priori -virhearviot* voidaan nähdä pääasiassa laadullisina mittareina, kun taas *a posteriori -virhearviot* tarjoavat sekä laadullista että määrällistä tietoa. Lisäksi *a priori* -virheanalyysi on usein luonteeltaan koko ratkaisualuetta koskevaa; *a posteriori* -virheanalyysi puolestaan antaa usein tietoa myös paikallisesta virheestä.

Näiden virheanalyysien pääero on kuitenkin niiden vaatimassa etukäteistiedossa. *A priori* -virhearviota varten tarvitaan tietoa tehtävän tarkan ratkaisun säännöllisyydestä, joten analyysin avulla voidaan pääasiassa vain arvioida käytettävän menetelmän teoreettista tehokkuutta. *A posteriori* -virhearviota varten riittää tehtävän lähtötiedot ja elementtimenetelmän antama ratkaisuapproksimaatio, ja siitä muodostetut *a posteriori* -virheindikaattorit, joiden avulla virheen suuruutta voidaan arvioida. Lisäksi paikallisten virheindikaattoreiden avulla elementtiverkkoa – verkon tiheyttä ja elementtien astelukua – voidaan uudelleenverkotuksessa mukauttaa kohti optimaalista verkotusta ottamalla huomioon virheen jakautuminen ja erityisesti virhekeskittymät. Näin siis virheindikaattoreiden avulla ratkaisuapproksimaatio kertoo itse omasta tarkkuudestaan ja vieläpä ohjaa muuttamaan elementtiverkkoa ratkaisun tarkkuuden ja laskentakustannusten kannalta

optimaaliseksi. Tämä menettely mahdollistaa diskreetointivirheen automaattisen ja kustannustehokkaan pienentämisen.

Kaiken kaikkiaan *a posteriori* -virheanalyysi ja adaptiiviset menetelmät palvelevat käytännön tarpeita, kun taas *a priori* -virheanalyysi on teoreettisen tarkastelun työkalu. Yhdessä nämä lähestymistavat osoittavat käytettyjen menetelmien luotettavuuden ja johdatavat tehokkaisiin laskennallisiin menetelmiin.

A priori -virheanalyysi

Elementtimenetelmässä jatkuvaa systeemiä approksimoidaan äärellisellä määrällä vapausasteita, ja näin ollen syntyy diskreetointivirhe [9][luku 3]

$$\mathbf{d}_h = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \quad (35)$$

missä \mathbf{u} on jatkuvan systeemin ratkaisu (tarkka ratkaisu) ja \mathbf{u}_h on diskreetin systeemin ratkaisu (elementtiapproksimaatio). Diskreetointivirhe käsittää elementtimenetelmän muotofunktiolle ominaisen interpolointivirheen mutta se pitää sisällään myös elementtimenetelmän ja jatkuvan systeemin yhteensopivuudesta riippuvan konsistenssivirheen [30][luku 4]. Diskreetointivirheen suuruuden

$$d_h = \|\mathbf{d}_h\|, \quad (36)$$

mittaamiseen valitulle matemaattiselle normille käytetään yleisesti merkintää $\|\cdot\|$.

Elementtimenetelmän matemaattisen *a priori* -virheanalyysin tuloksena saatavat *a priori* -virhearviot mittaavat tehtävään liittyvien muuttujien diskreetointivirheen suuruutta jonkin tietyn normin suhteen yhtälön (36) mukaisesti. Tyypillinen yhden muuttujan tehtävän h -menetelmän virhearvio on muotoa [30][luku 3]

$$\|u - u_h\|_1 := \|u - u_h\|_{H^1(A)} \leq Ch^s \|u\|_{H^{s+1}(A)}, \quad (37)$$

missä u on tehtävän tarkka ratkaisu eli jatkuvan systeemin ratkaisu ja u_h on likiratkaisu eli diskreetin systeemin mukainen elementtiapproksimaatio. Merkintä $\|\cdot\|_{H^1(A)}$ tarkoittaa alueen A kattavaa ensimmäisen asteen Sobolev-normia eli H^1 -normia, joka on (derivoituvalle) funktiolle v määriteltynä [30, 20, 21]

$$\|v\|_{H^1(A)} = \left(\int_A |v(x, y)|^2 dA + \int_A |v'(x, y)|^2 dA \right)^{1/2}. \quad (38)$$

H^{s+1} -normi määritellään samaan tapaan kuin H^1 -normi; laskemalla yhteen derivaattojen neliöintegraalit aina $s + 1$ -asteiseen derivaattaan asti. Epäyhtälössä (37) C on yleensä tuntematon vakio, joka ei kuitenkaan riipu elementtien maksimikoosta eli elementtiverkon suurimman elementin halkaisijan pituudesta h . Vakio riippuu kuitenkin yleensä tehtävätyypistä, ratkaisualueesta ja elementtien muodosta. Elementtikoon h potenssi määrää virheen asymptoottisen suppenemisnopeuden (tai approksimaation tarkentumisnopeuden) $s = \min(k, r)$, missä k on optimaalisessa tapauksessa approksimaatiossa käytettyjen elementtien asteluku (esimerkiksi lineaarisille elementeille $k = 1$) ja r kuvaa tässä yhteydessä tarkan ratkaisun säännöllisyysastetta seuraavasti: r on suurin arvo, jolle pätee, että ratkaisun H^{r+1} -normi on äärellinen.

Elementtimenetelmän peruseriaatteet käyvät selvästi ilmi virhearviosta (37). Ensinnäkin virhe pienenee, kun elementtien maksimikoko h pienenee. Ja toisaalta virhe pienenee myös, kun elementtien asteluku k kasvaa – jos tarkka ratkaisu on riittävän

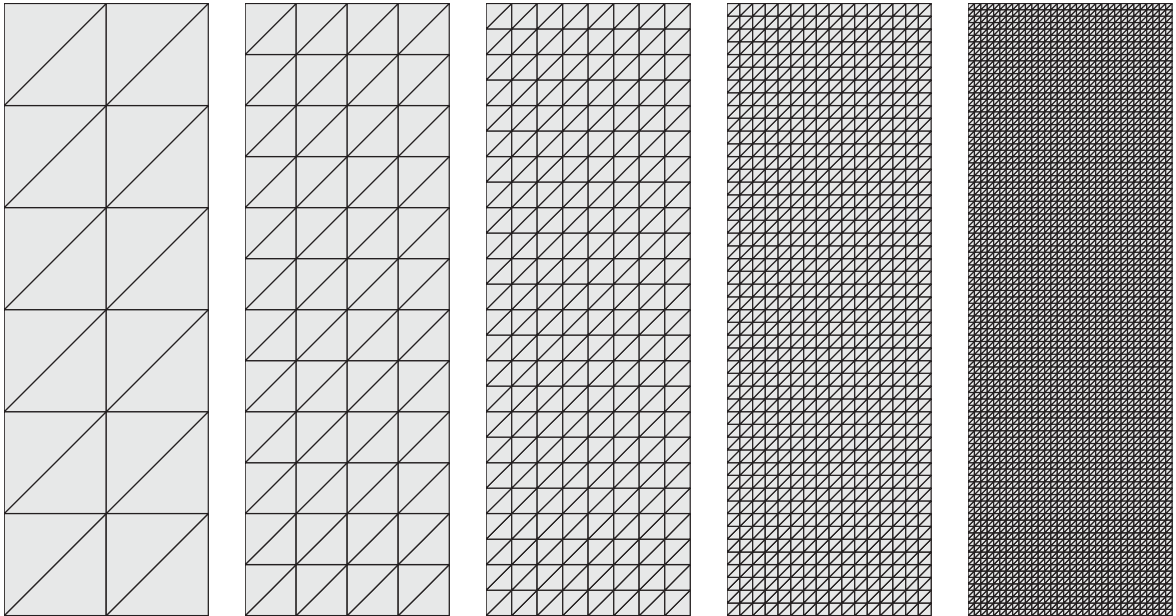
säännöllinen, eli niin kauan kuin ehto $r > k$ on voimassa, jolloin $s = k$. Elementtiasteen nostaminen ei siis välttämättä vaikuta suppenemisnopeuteen s , jos tarkka ratkaisu on epäsäännöllinen: tällöin säännöllisyys määrää suppenemisnopeuden ja $s = r < k$. Korkeampiasteinen elementti antaa kuitenkin yleensä käytännössä alempiasteista elementtiä tarkemman ratkaisuaprosimaation, koska suppenemisnopeus on asymptoottinen suure. Tämä nähdään selvästi myös alla olevista käytännön esimerkeistä.

Virhearviota (37) vastaava astetta heikkomman L^2 -normin suhteen laskettu virhearvio saadaan tietyin edellytyksin tyypillisesti muotoon [30][luku 3]

$$\|u - u_h\|_0 := \|u - u_h\|_{L^2(A)} \leq Ch^{s+1} \|u\|_{H^{s+1}(A)}. \quad (39)$$

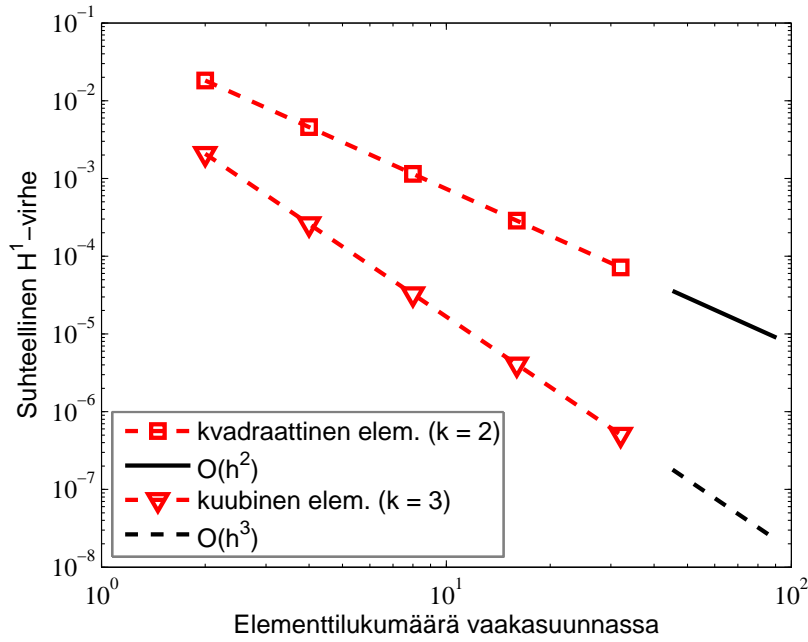
Vertaamalla tätä arviota virhearviioon (37) huomataan, että ratkaisuaprosimaation tarkentumisnopeus kasvaa, kun normi heikkenee: nyt suppenemisnopeus s korvautuu arvolla $s + 1$.

Kuvissa 2 ja 3 on esitetty yhtälöiden (37) ja (39) mukainen virheen suppeneminen elementtiverkkoa tihennettäessä. Tässä esimerkissä on kyseessä kuvan 1 mukaisesti verkotettu Reissner–Mindlin-laatta, jonka alareunalla on joko kova yksinkertainen tuenta tai reuna on vapaa. Muilla reunoilla taipumalle ja kiertymille on annettu sellaiset arvot, että suorakaidelaatta voidaan tulkita osaksi puoliääretöntä laattaa, jota kuormittaa kuvan 1 vaakasuunnassa muuttuva kosinikuorma [6, 47]. Tehtävän tarkka ratkaisu on tällöin tiedossa, joten virheen suppenemisnopeus voidaan todentaa numeerisesti. Kuvaaajissa on käytetty logaritmistia asteikkoja, jolloin suppenemisnopeus esittää virhesuoran kulmakerrointa, kun verkontiheytenä on käytetty kuvan 1 verkkojen vaakasuunnan elementtukumäärää $N_x \sim 1/h$, joka on esitetty kuvaaajissa vaaka-akselilla.

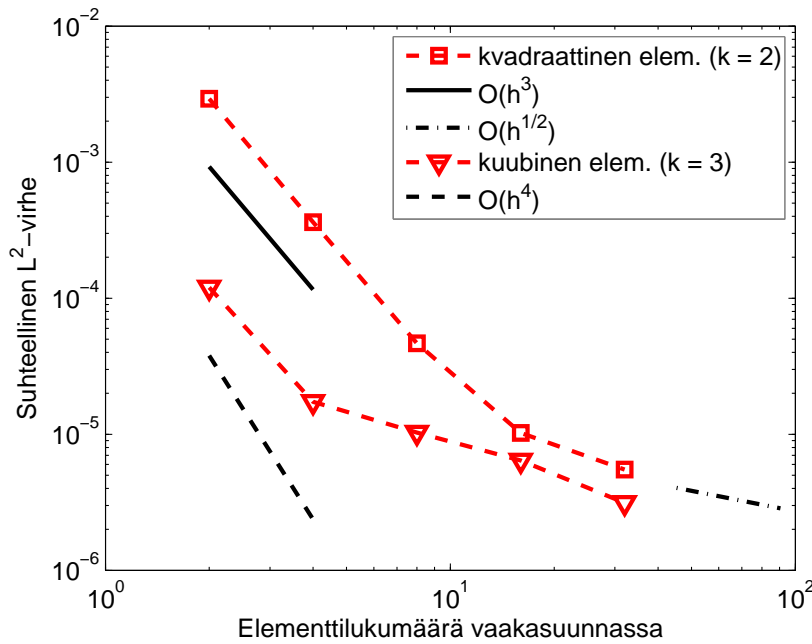


Kuva 1. Reissner–Mindlin-laatan elementtiverkon tasainen tihennys: verkontiheys vaakasuunnan elementtukumäärän mukaan, $N_x = 2, 4, 8, 16, 32$.

Yksinkertaisesti tuetun laatan tarkka ratkaisu on säännöllinen, jolloin laskennassa käytettyjen kvadraattisten ($k = 2$) ja kuubisten ($k = 3$) MITC-laattaelementtien [11,



Kuva 2. Reissner–Mindlin-laatan MITC-elementtien *a priori* -virhearvioiden numeerinen todentaminen: virheen suppeneminen elementtiasteilla $k = 2$ ja 3 ; yksinkertaisesti tuettu reuna, ei reunahäiriötä, H^1 -suppenemisnopeus luokkaa $\mathcal{O}(h^k) \sim \mathcal{O}(N_x^{-k})$.



Kuva 3. Reissner–Mindlin-laatan MITC-elementtien *a priori* -virhearvioiden numeerinen todentaminen: virheen suppeneminen elementtiasteilla $k = 2$ ja 3 ; vapaa reuna, reunahäiriö, L^2 -suppenemisnopeus luokkaa $\mathcal{O}(h^{1/2}) \sim \mathcal{O}(N_x^{-1/2})$.

24, 47] teoreettinen suppenemisnopeus on $s = k = 2, 3$; mikä selvästi toteutuu kuvan 2 kuvaajissa, jotka esittävät taipuma-approksimaation virheen suppenemistä H^1 -normin suhteen. Kun laatan alareuna on vapaa, laatan tarkka ratkaisu on reunahäiriön takia niin epäsäännöllinen, että teoreettinen suppenemisnopeus jää elementtiasteesta riippumatta

tasolle $s = 1/2$. Tältäkin osin numeerinen esimerkki noudattaa teoriaa, mikä nähdään kuvan 3 kuvaajista, jotka esittävät taipuma-approksimaation virheen suppenemista L^2 -normin suhteen. Suppenemisnopeuden hidastuminen vapaan reunan tapauksessa pätee myös H^1 -normin suhteen. Tästä esimerkistä käy myös hyvin ilmi suppenemisnopeuden asymptoottinen luonne: kvadraattisella elementillä ($k = 2$) suppenemisnopeus on aluksi jopa luokkaa $s + 1 = k + 1 = 3$, mutta reunahäiriön takia se vähitellen hidastuu arvoon $s = 1/2$; kuubisella elementillä ($k = 3$) suppenemisnopeuden hidastuminen alkaa jo harvoilla verkoilla.

A posteriori -virheanalyysi ja adaptiiviset elementtimenetelmät

Elementtimenetelmän matemaattisen *a posteriori* -virheanalyysin tuloksena saadaan virheindikaattoreita ja niistä muodostuvia virhearvioita. Virheindikaattoreihin ja -arvioihin tarvitaan tehtävän lähtötietojen lisäksi vain menetelmän antama elementtiapproksimaatio ja sen avulla laskettavia muita approksimaatiosuureita. Virhearvioiden perusteella voidaan arvioida approksimaation tarkkuutta tiettyjen normien suhteen, kun taas virheindikaattoreiden avulla voidaan suorittaa adaptiivinen uudelleenverkotus, jonka avulla approksimaation tarkkuutta voidaan parantaa kustannustehokkaasti. Nimittäin keskeisenä *a posteriori* -virhearvioinnin peruseriaatteena pidetään seuraavaa sääntöä: virheindikaattoreiden ja -arvioiden muodostamisen pitää olla laskentakustannuksiltaan oleellisesti kevyempi toimenpide kuin tehtävän uudelleenratkaiseminen esimerkiksi tasaisesti tihennetyllä elementtiverkolla [41].

A posteriori -virheanalyysi voi perustua moniin erityyppisiin periaatteisiin ja menetelmiin, jotka johtavat osin myös erityyppisiin virhearvioihin ja -indikaattoreihin [3][luku 1]. Tyypillisesti *a posteriori* -virheenarviointimenetelmät jaotellaan seuraaviin menetelmätyyppeihin [2, 3, 53]:

- eksplisiittiset residuaalimenetelmät (*explicit residual-based error estimators*)
- implisiittiset residuaalimenetelmät (*implicit residual-based error estimators*)
- silottavat jälkikäsittelemenetelmät (*recovery-based error estimators*)
- hierarkkiset rikastusmenetelmät (*error estimators based on hierarchic bases*)
- tasapainotetut (implisiittiset) residuaalimenetelmät (*equilibrated residual methods*)
- funktionaalimenetelmät (*functional a posteriori error estimates*).

Useimmat näistä menetelmätyypeistä antavat koko ratkaisualueen kattavat virhearviot energianormin suhteen mutta joillakin menetelmillä voidaan arvioida myös jonkun halutun suureen virhettä paikallisesti (*goal oriented adaptivity, error estimates for quantities of interest*) [3][luku 8].

Yleensä *a posteriori* -menetelmillä pyritään johtamaan virhearvioita, jotka ovat muotoa

$$C_1 \|\mathbf{d}_h\| \leq \eta_h \leq C_2 \|\mathbf{d}_h\|, \quad (40)$$

missä C_1 ja C_2 ovat (tuntemattomia) positiivisia vakioita ja virhe-estimaattori $\eta_h = \eta_h(\mathbf{u}_h)$ koostuu elementtikohtaisista virheindikaattoreista $\eta_K = \eta_K(\mathbf{u}_h)$,

$$\eta_h = \left(\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}, \quad (41)$$

missä K viittaa yksittäiseen elementtiverkon \mathcal{C}_h elementtiin. Virhearvion (40) mukaan todellinen virhe ja virhe-estimaattori pienenevät samaa vauhtia, jolloin virhe-estimaattoria voidaan pitää luotettavana todellisen virheen approksimaationa. Virhe-estimaattorin ja virheindikaattoreiden laatua arvioidaan usein myös tehokkuusindekseillä

$$\iota = \frac{\eta_h}{\|\mathbf{d}_h\|} \quad \text{ja} \quad \iota_K = \frac{\eta_K}{\|\mathbf{d}_h\|_K}. \quad (42)$$

Eryteisesti tehokkuusindeksin ι tulisi riippua mahdollisimman vähän elementtiverkon tiheydestä, ainakin sen tulisi pysyä epäyhtälön (40) mukaisesti rajoitettuna elementtiverkon tiheyttä muutettaessa.

Seuraavaksi tarkastellaan esimerkkinä eksplisiittisellä residuaalimenetelmällä Morleyn laattaelementille johdettua virhearviota ja -indikaattoria. Morleyn elementti on klassinen, epäjatkuva elementti Kirchhoff–Love-laattatehtävälle [51, 30, 50]. Menetelmälle johdettu elementtikohtainen virheindikaattori on muotoa [15, 17]

$$\eta_K^2 = h_K^4 \|f_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \partial K'} c_E h_E^{-3} \|\llbracket w_h \rrbracket\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{E \in \partial K''} c_E h_E^{-1} \|\llbracket \nabla w_h \cdot \mathbf{n}_E \rrbracket\|_{L^2(E)}^2, \quad (43)$$

missä f_h on kuormituksen f approksimaatio, w_h on taipuman w elementtiapproksimaatio ja \mathbf{n}_E elementtireunan E normaalivektori. Merkintä $\partial K'$ tarkoittaa elementin K niiden reunaviivojen E muodostamaa joukkoa, jotka ovat joko ratkaisualan sisällä, vapaasti tuetulla reunalla tai jäykästi tuetulla reunalla. Merkintä $\partial K''$ puolestaan tarkoittaa niiden reunaviivojen muodostamaa joukkoa, jotka ovat joko ratkaisualan sisällä tai jäykästi tuetulla reunalla. Elementin K halkaisijalle käytetään merkintää h_K ja elementin reunan E pituudelle merkintää h_E . Merkintä $\llbracket \cdot \rrbracket$ tarkoittaa funktion arvojen hyppäystä kahden elementin välisellä reunaviivalla; elementin reunaviivan sijaitessa koko ratkaisualan reunalla, tämä merkintä pelkistyy funktion reuna-arvoksi. Lisäksi valitaan $c_E = 1/2$, jos elementtireuna E on ratkaisualan sisällä, muussa tapauksessa pätee $c_E = 1$.

Virheen mittaamista varten määritellään tehtävälle luonnollinen verkontiheydestä h riippuva normi

$$\|v\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} |v|_{H^2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}'} h_E^{-3} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}''} h_E^{-1} \|\llbracket \nabla v \cdot \mathbf{n}_E \rrbracket\|_{L^2(E)}^2, \quad (44)$$

missä \mathcal{E}' tarkoittaa kaikkien niiden elementtireunojen E muodostamaa joukkoa, jotka ovat joko ratkaisualan sisällä, vapaasti tuetulla reunalla tai jäykästi tuetulla reunalla. Merkintä \mathcal{E}'' puolestaan tarkoittaa niiden reunaviivojen muodostamaa joukkoa, jotka ovat joko ratkaisualan sisällä tai jäykästi tuetulla reunalla. Normin ensimmäinen termi vastaa H^2 -normia, joka elementtiapproksimaation epäjatkuvuuden takia lasketaan nyt elementteittäin. Kaksi seuraavaa termiä puolestaan mittaavat itse elementtiapproksimaation ja sen gradientin epäjatkuvuutta yli elementtirajojen. Nämä kaksi mittaria esiintyvät myös virheindikaattorissa (43), jonka ensimmäinen termi vastaa yhtälön (27) residuaalia – ottaen huomioon, että $\Delta^2 w_h = 0$ kvadraattiselle elementtiapproksimaatiolle w_h . Tämän normin suhteen koko ratkaisualan kattavalle virheelle saadaan virheindikaattorin avulla yläraja

$$\|w - w_h\|_h \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{C}_h} \eta_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^4 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2}, \quad (45)$$

missä epäyhtälön oikean puolen kuormitustermi on suuruudeltaan virhe-estimaattoritermiä oleellisesti pienempi, joten voidaan olettaa, että kuormitustermillä ei ole juurikaan käytännön merkitystä. Virhearvion perusteella virhe-estimaattoria voidaan siis pitää luotettavana (*reliability*): Elementtimenetelmän antama approksimaatio voidaan kelpuuttaa, kun

virhe-estimaattorin arvo saadaan halutun toleranssin alle, sillä tällöin myös todellinen virhe on haluttua toleranssia pienempi (oletuksella $C \approx 1$). Virhe-estimaattoria voidaan siis pitää myös adaptiivisen uudelleenverkotuksen lopetuskriteerinä.

Elementtikohtaiselle virheelle saadaan virheindikaattorin avulla alaraja

$$\eta_K \leq c(\|w - w_h\|_{h,K} + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}), \quad (46)$$

missä epäyhtälön oikean puolen kuormitustermi on jälleen varsinaista virhetermiä oleellisesti pienempi. Elementtikohtaista alarajaa tarvitaan erityisesti adaptiivisessa verkontihennyksessä (*effectivity*): Virhearviosta nimittäin nähdään, että silloin, kun elementtikohtainen virheindikaattori η_K on suuri, silloin myös todellinen virhe on suuri (oletuksella $c \approx 1$), ja verkkoa on tihennettävä kyseisen elementin alueelta. Alarajasta voidaan johtaa myös vastaava koko ratkaisualuetta koskeva versio.

Eksplisiittisen residuaalimenetelmän [3][luku 2] huonona puolena voidaan pitää erityisesti sitä, että virhearvioissa (45) ja (46) esiintyy tuntemattomat vakiot C ja c , jotka tosin ovat riippumattomia verkontihennyksestä ja ratkaisusta, mutta joiden arvoja ei yleensä voida määrätä teoreettisesti. Niille voidaan kuitenkin saada likiarvot numeerisilla testeillä. Eksplisiittisen residuaalimenetelmän hyvänä puolena voidaan puolestaan pitää sitä, että virheindikaattorit saadaan suoraan elementtiapproksimaatiosta, toisin kuin implisiittisissä menetelmissä, joissa joudutaan ratkaisemaan elementtikohtaisia osatehtäviä [3][luku 3]. Residuaalimenetelmät ylipäänsä ovat tehtävä- ja elementtikohtaisia, joten esimerkiksi edellä esitellyt indikaattorit ja arviot pätevät sellaisenaan periaatteessa vain Kirchhoff–Love-laattatehtävän Morleyn elementille. Residuaalimenetelmistä poiketen esimerkiksi silloittavat jälkikäsittelemenetelmät [3][luku 4] ja funktionaalimenetelmät [53] voivat olla ainakin pääosin menetelmästä ja osin myös tehtävästä riippumattomia. Toisaalta riippuvuudella on myös hyvät puolensa, sillä tällöin indikaattoreista on mahdollista saada jossakin mielessä tarkempia ja teoreettisen analyysin kannalta pätevämpiä [3][luku 4.7].

Kuvassa 4 on esitetty esimerkki Morleyn menetelmän residuaaliestimaattorin osoittamasta virhekeskittymästä ja adaptiivisesti kohti virhekeskittymää tihennetystä verkosta. Kyseessä on tasaisesti kuormitettu Kirchhoff–Love-laatta, jonka sisäkulmassa tehtävän tarkassa ratkaisussa on laatan geometriasta johtuva kulmasingulariteetti, eli ratkaisun säännöllisyys on alhainen verrattuna muun alueen säännöllisyyteen. Kuvan 4 adaptiivisesti tihennetystä verkosta nähdään, että tihennys keskittyy erityisesti singulaarisen kulman läheisyyteen. Tämän lisäksi verkko tihentyy myös alueen reunoilta, mikä johtuu siitä, että Morleyn menetelmän elementtiapproksimaatio ei toteuta tarkasti yksinkertaisesti tuetun laatan oleellisia reunaehtoja (19)₂. Tätä reunavirhettä mittaa erityisesti virheindikaattorin (43) keskimäinen termi.

Kuvassa 5 on verrattu virhe-estimaattorin pienenemistä tasaisesti ja adaptiivisesti tihennetyillä verkoilla. Kulmasingulariteetin takia tehtävän tarkan ratkaisun w säännöllisyys on luokkaa $H^{11/5}$ [49], minkä seurauksena virheen teoreettinen suppenemisnopeus normin (44) suhteen on tasaiselle tihennykselle luokkaa $\mathcal{O}(h^{1/5})$. Säännölliselle ratkaisulle Morleyn menetelmän teoreettinen suppenemisnopeus olisi luokkaa $\mathcal{O}(h)$ [50, 17]. Molemmat suppenemisnopeudet on merkitty kuvaan käyttäen logaritmista asteikkoa ottaen huomioon elementtikoon h ja elementtilukumäärän N välinen yhteys $h \sim N^{-1/2}$. Kuvan 5 mukaan tasaisella tihennyksellä (ympyrät) todellinen suppenemisnopeus näyttäisi verkkoa tihennettäessä kääntyvän noudattamaan juuri kulmasingulariteetin määräämää nopeutta $\mathcal{O}(h^{1/5})$. Ensimmäiset adaptiivisen tihennyksen (kolmiot) verkot seuraavat tasaista tihennystä mutta tihennyksen keskittyessä kohti kriittistä kulmaa myös virheen pieneneminen nopeutuu. Suppenemiskäyristä nähdään, että adaptiivinen verkontihennysprosessi

johtaa lopulta tiettyyn tarkkuuteen huomattavasti pienemmällä elementtilukumäärällä (noin 1800) kuin tasainen tihennys (noin 20 000).

Laattaelementtien virheanalyysin päälinjoja

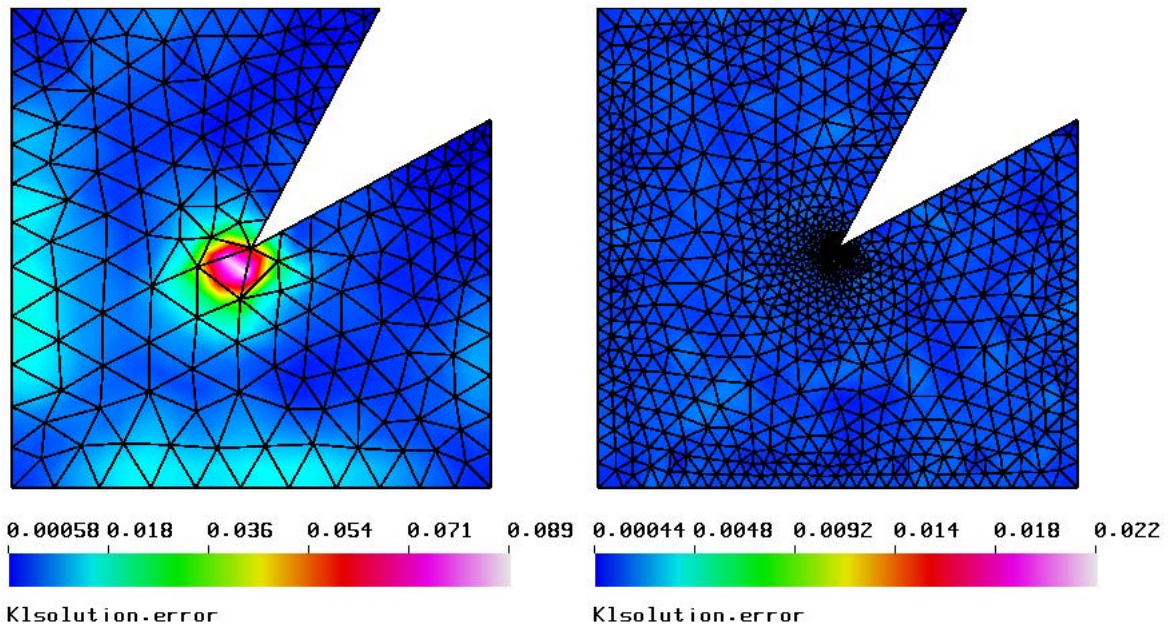
Elementtimenetelmää on sovellettu ohuiden rakenteiden ja erityisesti laattarakenteiden laskennalliseen analysointiin jo vuosikymmeniä, joten myös erilaisia menetelmiä on ehditty kehitellä kymmenittäin. Myös matemaattinen *a priori* -analyysi on monien elementtien osalta vahvalla pohjalla [55]. Eri elementtien ominaispiirteitä ja virheanalyysiä on käsitelty monilta osin elementtimenetelmän ja insinöörilaskennan peruskirjallisuudessa [30, 10, 23, 20, 28, 66, 65, 21]. Seuraavaksi mainitaankin vain lyhyesti joitakin laattaelementtien virheanalyysin päälinjoja viitteineen.

Reissner–Mindlin-laattaelementtien osalta numeerinen lukkiutumislmiö on ollut elementtien suunnittelun ja erityisesti virheanalyysin suurin kompastuskivi. Lukkiutumislmiö voidaan nähdä erityisesti matala-asteisten elementtien antaman numeerisen approksimaation kyvyttömyytenä seurata parametririippuvaisen laattatehtävän asymptootista käyttäytymistä. Laattatehtävässä elementtimenetelmän polynomiuotoiset approksimaatiofunktiot eivät kykene toteuttamaan pienillä paksuusparametrin arvoilla vahvistuvaa Kirchhoffin ehtoa (6), jonka tehtävän tarkka ratkaisu toteuttaa paksuusparametrin raja-arvolla $t = 0$.

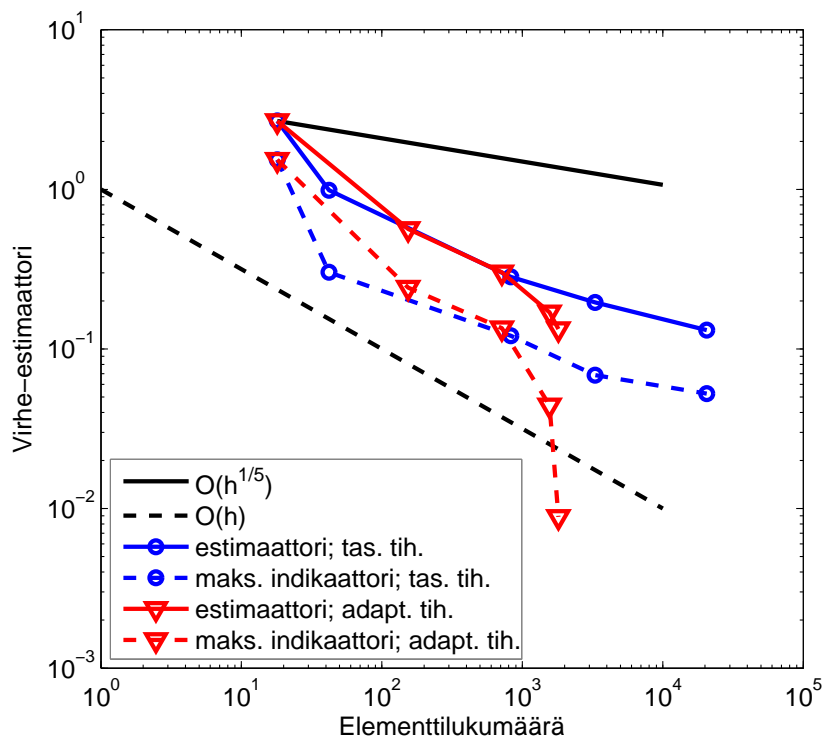
Tänä päivänä löytyy kuitenkin monia elementtejä ja elementtiperheitä, jotka välttävät lukkiutumislmiön ja joiden suppenemisominaisuudet ovat matemaattisen virheanalyysin ja numeeristen testien perusteella optimaaliset. Esimerkiksi MITC-laattaelementeissä [11, 24, 56, 61, 4, 46, 47, 55] ja muissa vastaavissa redusoiduissa menetelmissä [7, 38] lukkiutumisongelma on tyypillisesti ratkaistu pelkistämällä Kirchhoffin ehtoon johtavaa leikkaustermiä ja rikastamalla kiertymän approksimaatiota stabiloivilla lisävapausasteilla. MITC-elementtien *a priori* -virheanalyysin kulmakivenä on satulapistetehtävien stabiiliusanalyysi [22, 23]. Stabiloidut formulaatiot on toinen tyypillinen laattaelementtiluokka, joka on kyetty analysoimaan ja osoittamaan optimaalisesti suppenevaksi [42, 37, 40, 60, 48, 55].

Kirchhoff–Love-laattaelementtien kehittämisen ja analysoinnin erityisongelmana voidaan pitää sitä, että neljännen kertaluvun Kirchhoffin tehtävän (27) luonnollinen variaatioavaruus on toisen asteen Sobolevin avaruus H^2 . Näin ollen konforminen elementtiapproksimaatio vaatii C^1 -jatkuvan taipumakentän [30][luku 6], joka puolestaan johtaa korkea-asteisiin elementteihin – esimerkkinä mainittakoon viidennen asteen Argyriksen kolmio [30, 21]. Toisaalta konformiset menetelmät noudattavat kuitenkin klassista elementtimenetelmän virheanalyysiä [30][luvut 3 ja 6]. Kirjallisuudessa esiintyy myös monia epäkonformisia tai muuten tavanomaisesta poikkeavia matala-asteisempia elementtejä kuten Hsieh–Clough–Tocher-kolmio [12, 30], diskreetti Kirchhoff-kolmio [12, 13] ja Morleyn kolmio [51, 30, 50], sekä myös joitakin modernimpia menetelmiä [39, 35, 34, 14, 16, 55].

Laattamaisten rakenteiden adaptiivisten elementtimenetelmien matemaattisessa tutkimuksessa on tähän mennessä otettu vasta joitakin ensiaskelia: staattinen ja materiaalisesti isotrooppinen tehtävä on analysoitu sekä useille Reissner–Mindlin-elementeille [43, 44, 27, 25, 26, 45] että myös joillekin Kirchhoff–Love-elementeille [29, 52, 15, 14, 16, 17]. Sen sijaan esimerkiksi ominaisarvotehtävät, ajasta riippuvat tehtävät sekä epälineaariset tehtävät ovat pitkälti vailla kattavaa *a posteriori* -analysointia [41].



Kuva 4. Tasaisesti kuormitettu, reunoiltaan yksinkertaisesti tuettu Kirchhoff–Love-laatta: Virheindikaattorijakauma ja adaptiivinen verkontihennys.



Kuva 5. Tasaisesti kuormitettu, reunoiltaan yksinkertaisesti tuettu Kirchhoff–Love-laatta: Virhe-estimaattorin suppeneminen tasaisella (ympyrät) ja adaptiivisella (kolmiot) verkontihennyksellä; koko alueen kattava estimaattori yhtenäisellä viivalla, suurin elementtikohtainen indikaattori katkoviivalla.

Yhteenveto ja johtopäätökset

Tässä artikkelissa käsiteltyjen laskennallisten menetelmien peruseriaatteista voidaan vetää seuraavat käytännön laskentaan ja suunnitteluun tähtäävät johtopäätökset. Ensimmäiseksi, suunnitteluprosessin eri virhekomponentit olisi tiedostettava ja pyrittävä analysoimaan kukin erikseen. Toiseksi, mallinnuksen taustalla tulisi olla tarkoin määrätty suunnittelukriteerit, jotta mallinnus pystyisi ottamaan huomioon fyysikaalisen todellisuuden kannalta oleelliset ilmiöt ja antamaan näin vastaukset oikeisiin kysymyksiin. Kolmanneksi, numeerisilla laskelmilla tulisi päästä – mallinnustarkkuuden sallimissa rajoissa – nimenomaan suunnittelukriteerien kannalta riittävän tarkkoihin tuloksiin.

Käytettäessä elementtimenetelmään perustuvia ohjelmistoja olisi varmistuttava siitä, että ohjelmistojen tarjoamat menetelmät ovat sekä tehokkaita että myös tarkkoja ja luotettavia, toisin sanoen stabiileja, optimaalisesti tarkentuvia ja adaptiivisia. Jos käytössä ei ole automaattisia adaptiivisia menetelmiä virherajoihin, laskentatulokset tulisi verifioida vertailemalla eri menetelmillä, verkontiheyksillä ja elementtiasteilla saatuja tuloksia. Ja laskentaresurssit tulisi kohdentaa erityisesti niille alueille, joissa suureiden muutosnopeus on suuri – varsinkin, jos on kyse suunnittelukriteerien kannalta oleellisista suureista [41]. Kaiken kaikkiaan käytössä tulisi olla erilaisia menetelmiä ja lähestymistapoja, jotta laskennallisista ratkaisuista saadaan sekä tarkkoja että luotettavia – kohtuullisilla kustannuksilla ja mitä erilaisimmissa sovelluskohteissa.

Kiitokset

Tämä artikkeli on kirjoitettu osana Suomen Akatemian rahoittamaa tutkijatohtorin projektia *Ohuiden rakenteiden adaptiiviset elementtimenetelmät* (päättö 128467). Esimerkitapausten laskentaan on käytetty Tieteen tietotekniikan keskuksen (CSC) laskentapalveluja.

Viitteet

- [1] R. L. Actis, B. A. Szabo, and C. Schwab. Hierarchic models for laminated plates and shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 172:79–107, 1999.
- [2] M. Ainsworth and J. T. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 142:1–88, 1997.
- [3] M. Ainsworth and J. T. Oden. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, New-York, 2000.
- [4] M. Ainsworth and K. Pinchedez. The *hp*-MITC finite element method for the Reissner–Mindlin plate problem. *J. Comp. Appl. Math.*, 148:429–462, 2002.
- [5] A. H.-S. Ang and W. H. Tang. *Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering, Vol. 1*. John Wiley & Sons, 2007.
- [6] D. N. Arnold and R. S. Falk. Edge effects in the Reissner–Mindlin plate theory. In A. K. Noor, T. Belytschko, and J. C. Simo, editors, *Analytic and Computational Models of Shells*, pages 71–90, New York, 1989. ASME.

- [7] D. N. Arnold and R. S. Falk. A uniformly accurate finite element method for the Reissner–Mindlin plate. *SIAM J. Num. Anal.*, 26:1276–1290, 1989.
- [8] D. N. Arnold, A. L. Madureira, and S. Zhang. On the range of applicability of the Reissner–Mindlin and Kirchhoff–Love plate bending models. *J. Elasticity*, 67:171–185, 2002.
- [9] I. Babuška and T. Strouboulis. *The Finite Element Method and its Reliability*. Clarendon Press, 2001.
- [10] I. Babuška and B. Szabo. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
- [11] K.-J. Bathe, F. Brezzi, and M. Fortin. Mixed-interpolated elements for Reissner–Mindlin plates. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 28:1787–1801, 1989.
- [12] J.-L. Batoz, K.-J. Bathe, and L. W. Ho. A study of three-node triangular plate bending elements. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 15:1771–1812, 1980.
- [13] J.L. Batoz, C. L. Zheng, and F. Hammadi. Formulation and evaluation of new triangular, quadrilateral, pentagonal and hexagonal discrete Kirchhoff plate/shell elements. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 52:615–630, 2001.
- [14] L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, and R. Stenberg. A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates I: Error analysis. *SIAM J. Num. Anal.*, 45:2047–2071, 2007.
- [15] L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, and R. Stenberg. A posteriori error estimates for the Morley plate bending element. *Numer. Math.*, 106:165–179, 2007.
- [16] L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, and R. Stenberg. A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates II: Numerical results. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 197:1850–1864, 2008.
- [17] L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, and R. Stenberg. A posteriori error analysis for the Morley plate element with general boundary conditions. Research Reports A 556, Helsinki University of Technology, Institute of Mathematics, December 2008. <http://www.math.tkk.fi/reports>.
- [18] E. Bellenger and P. Coorevits. Adaptive mesh refinement for the control of cost and quality in finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41:1413–1440, 2005.
- [19] N. Billade and K. Vemaganti. Hierarchical models of thin elastic structures: Overview and recent advances in error estimation and adaptivity. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 196:3508–3523, 2007.
- [20] D. Braess. *Finite Elements. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [21] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, New York, 2008.

- [22] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO Anal. Num.*, 2:129–151, 1974.
- [23] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [24] F. Brezzi, M. Fortin, and R. Stenberg. Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner–Mindlin plates. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 1:125–151, 1991.
- [25] C. Carstensen. Residual-based a posteriori error estimate for a nonconforming Reissner–Mindlin plate finite element. *SIAM J. Num. Anal.*, 39:2034–2044, 2002.
- [26] C. Carstensen and J. Schöberl. Residual-based a posteriori error estimate for a mixed Reissner–Mindlin plate finite element method. *Numer. Math.*, 103:225–250, 2006.
- [27] C. Carstensen and K. Weinberg. Adaptive mixed finite element method for Reissner–Mindlin plate. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 190:6895–6908, 2001.
- [28] D. Chapelle and K.-J. Bathe. *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [29] A. Charbonneau, K. Dossou, and R. Pierre. A residual-based a posteriori error estimator for the Ciarlet–Raviart formulation of the first biharmonic problem. *Num. Meth. Part. Diff. Eq.*, 13:93–111, 1997.
- [30] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [31] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity – Volume II: Theory of Plates*. Elsevier, Amsterdam, 1997.
- [32] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity – Volume III: Theory of Shells*. Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [33] P. Destuynder. Explicit error bounds for the Kirchhoff–Love and Reissner–Mindlin plate models. *C. R. Acad. Sci. Series I*, 325:233–238, 1997.
- [34] P. Destuynder and T. Nevers. A new finite element scheme for bending plates. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 68:127–139, 1988.
- [35] P. Destuynder and T. Nevers. Une modification du modèle de Mindlin pour les plaques minces en flexion présentant un bord libre. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 22:217–242, 1988.
- [36] P. Destuynder and M. Salaun. *Mathematical Analysis of Thin Plate Models*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [37] R. Durán and A. Ghioldi. A finite element method for the Mindlin–Reissner plate model. *SIAM J. Num. Anal.*, 28(4):1004–1014, 1991.
- [38] R. Durán and E. Liberman. On mixed finite element methods for the Reissner–Mindlin plate model. *Math. Comp.*, 58(198):561–573, 1992.

- [39] G. Engel, K. Garikipati, T. J. R. Hughes, M. G. Larson, L. Mazzei, and R. L. Taylor. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 191:3669–3750, 2002.
- [40] L. P. Franca and R. Stenberg. A modification of a low-order Reissner–Mindlin plate bending element. In J. R. Whiteman, editor, *The Mathematics of Finite Elements and Applications VII, MAFELAP 1990*, pages 425–436. Academic Press, 1991.
- [41] T. Grätsch and K.-J. Bathe. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Comp. Struct.*, 83:235–265, 2005.
- [42] T. J. R. Hughes and L. P. Franca. A mixed finite element formulation for Reissner–Mindlin plate theory: Uniform convergence of all higher-order spaces. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 67:223–240, 1988.
- [43] C. K. Lee and R. E. Hobbs. Automatic adaptive refinement for plate bending problems using Reissner–Mindlin plate bending elements. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 41:1–63, 1998.
- [44] E. Liberman. A posteriori error estimator for a mixed finite element method for Reissner–Mindlin plate. *Math. Comp.*, 70:1383–1396, 2001.
- [45] C. Lovadina and R. Stenberg. A posteriori error analysis of the linked interpolation technique for plate bending problems. *SIAM J. Num. Anal.*, 43:2227–2249, 2005.
- [46] M. Lyly, J. Niiranen, and R. Stenberg. A refined error analysis of MITC plate elements. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 16:967–977, 2006.
- [47] M. Lyly, J. Niiranen, and R. Stenberg. Superconvergence and postprocessing of MITC plate elements. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 196:3110–3126, 2007.
- [48] M. Lyly and R. Stenberg. Stabilized finite element methods for Reissner–Mindlin plates. Forschungsbericht 4, Universität Innsbruck, Institut für Mathematik und Geometrie, Juli 1999. <http://www.math.tkk.fi/~rstenber>.
- [49] H. Melzer and R. Rannacher. Spannungskonzentrationen in Eckpunkten der vertikal belasteten Kirchhoffschen Platte. *Bauingenieur*, 55:181–189, 1980.
- [50] W. Ming and J. Xu. The Morley element for fourth order elliptic equations in any dimensions. *Numer. Math.*, 103:155–169, 2006.
- [51] L. S. D. Morley. The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems. *Aero. Quart.*, 19:149–169, 1968.
- [52] P. Neittaanmäki and S. Repin. A posteriori error estimates for boundary value problems related to the biharmonic operator. *East–West J. Numer. Math.*, 9:157–178, 2001.
- [53] P. Neittaanmäki and S. Repin. *Reliable Methods for Computer Simulation: Error Control and A Posteriori Estimates*. Elsevier, Amsterdam, 2004.

- [54] J. Nečas and I. Hlaváček. *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*. Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [55] J. Niiranen. A priori and a posteriori error analysis of finite element methods for plate models. Research Reports A 534, Helsinki University of Technology, Institute of Mathematics, October 2007. Dissertation overview, <http://www.math.tkk.fi/reports>.
- [56] P. Peisker and D. Braess. Uniform convergence of mixed interpolated elements for Reissner–Mindlin plates. *ESAIM Math. Mod. Numer. Anal.*, 26:557–574, 1992.
- [57] C. Schwab. A-posteriori modeling error estimation for hierarchic plate models. *Numer. Math.*, 74:221–259, 1996.
- [58] C. Schwab. *p- and hp-Finite Element Methods – Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [59] C. Schwab and S. Wright. Boundary layers of hierarchical beam and plate models. *J. Elasticity*, 38:1–40, 1995.
- [60] R. Stenberg. A new finite element formulation for the plate bending problem. In P. Ciarlet, L. Trabucho, and J. M. Viano, editors, *Asymptotic Methods for Elastic Structures*, pages 209–221. Walter de Gruyter & Co., Berlin – New York, 1995.
- [61] R. Stenberg and M. Suri. An *hp* error analysis of MITC plate elements. *SIAM J. Num. Anal.*, 34:544–568, 1997.
- [62] B. Szabo and R. Actis. On the importance and uses of feedback information in FEA. *Appl. Num. Math.*, 52:219–234, 2005.
- [63] R. Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. John Wiley & Sons and B. G. Teubner, Chichester, 1996.
- [64] S. Zhang. On the accuracy of Reissner–Mindlin plate model for stress boundary conditions. *ESAIM Math. Mod. Numer. Anal.*, 40:269–294, 2006.
- [65] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [66] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, Amsterdam, 2005.

Jarkko Niiranen

Teknillinen korkeakoulu, Rakenne- ja rakennustuotantotekniikan laitos

PL 2100, 02015 TKK

s-posti: jarkko.niiranen@tkk.fi