Rakenteiden Mekaniikka
Vol. 42, Nro 2, 2009, s. 75 – 82

Muutama huomio momenttimenetelmän käytöstä kehärakenteiden analysoinnissa

Reijo Kouhia

Tiivistelmä. Momenttimenetelmä on käyttökelpoinen ratkaisutapa sivusiirtymättömien staattisesti määräämättömien geometrisesti ja fysikaalisesti lineaaristen kehärakenteiden analysoinnissa. Se on yleisen voimamenetelmän erikoistapaus, joten staattisesti määräämättömien suureiden ratkaisemiseksi syntyvän lineaarisen yhtälösysteemin kerroinmatriisin on oltava symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Tässä artikkelissa tarkastellaan miten tuntemattomat sauvanpäämomentit on valittava, jotta syntyvä kerroinmatriisi olisi symmetrinen sekä pohditaan miten rakenteen stabiiliusehto tulisi ilmaista. Lisäksi tarkastellaan toisesta päästään jäykästi tai kimmoisesti kiinnitetyn sauvan tukimomentin eliminointia ennen varsinaisen yhtälösysteemin muodostamista.

Avainsanat: momenttimenetelmä, symmetrinen joustomatriisi, stabiiliusanalyysi

Johdanto

Yleisessä voimamenetelmässä tuntemattomina perussuureina ovat hyperstaattiset voimasuureet X_i, $i = 1, \dots, n_s$, missä n_s on hypertaattisuuden, eli staattisen määräämättömyyden aste. Tarvittavat ratkaisuyhtälöt saadaan yhteensopivuusehdoista, joilla taataan ratkaisun geometrinen luvallisuus. Yhteensopivuusehdoista saatu yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

jossa $\boldsymbol{A}$ on symmetrinen ja positiivisesti definiitti joustomatriisi, $\boldsymbol{x}$ on ratkaistavista hyperstattisista voimasuureista X_i koostuva vektori ja $\boldsymbol{b}$ on ulkoisista kuormituksista staattiseen perusmuotoon aiheutuvista yleistetyistä siirtymistä koostuva vektori.

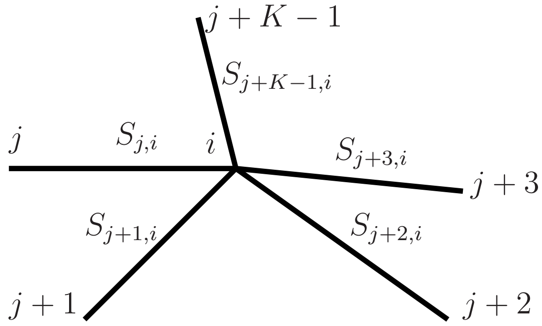
Momenttimenetelmä on erityisesti jatkuvia palkkeja ja kehärakenteita silmälläpitäen kehitetty yleisen voimamenetelmän virtaviivaistus, jossa ratkaistavan rakenteen sauvat otaksutaan aksiaalisesti venymättömiksi ja leikkauksen suhteen äärettömän jäykiksi. Tällöin ratkaistaviksi hyperstaattisiksi suureiksi jäävät ainoastaan sauvanpäämomentit.

Momenttimenetelmän perusyhtälöt

Momenttimenetelmän perusyhtälöt ovat sauvan päätepisteiden kiertymien lausekkeet

$$\varphi_{i,j} = \alpha_{i,j} M_{i,j} - \beta_{i,j} M_{j,i} + \psi_{i,j} + \alpha^0_{i,j}, \tag{2}$$

jossa $\alpha_{i,j}$ ja $\beta_{i,j}$ ovat sauvavakioita, $\psi_{i,j}$ sauvakiertymä, eli sauvan päätepisteiden välisen janan kiertymä ja $\alpha^0_{i,j}$ on staattisen perusmuotosauvan, eli niveltuetun sauvan nurkan i



Kuva 1. Nurkka i ja siihen liittyvät sauvat.

kiertymä ulkoisesta kuormituksesta. Suureet $M_{i,j}$ ja $M_{j,i}$ ovat sauvanpäämomentit sauvan päätepisteissä i ja j, jotka määritellään positiivisiksi myötäpäivään kiertävinä. Sivusiirtymättömän kehän kaikki sauvakiertymät häviävät, eli $\psi_{i,j} \equiv 0$. Sauvavakioiden fysikaalinen tulkinta on ilmeinen. Maxwellin säännön perusteella $\beta_{i,j} = \beta_{j,i}$, mutta yhteys $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$ pätee ainoastaan jäykkyysjakaumaltaan symmetrisille sauvoille.

Yhteensopivuusehdot

Tarkastellaan kuvan 1 mukaista kehärakenteen monoliittista nurkkaa i johon yhtyy K-kappaletta sauvoja $S_{i,j+k}$, $k = 0, \ldots, K-1$. Monoliittisen nurkan i yhteensopivuusehot, $K-1$ kappaletta, voidaan kirjoittaa muodossa

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{i,j+1} = \cdots = \varphi_{i,j+K-1}, \tag{3}$$

jossa $\varphi_{i,j}$ on sauvan $S_{i,j}$ pään i kiertymä. Sauvanpäämomentit $M_{i,j+k}, k = 0, \ldots, K-1$ eivät ole toisistaan riippumattomia, vaan niitä sitoo nurkan i momenttitasapainoehto

$$\sum_{k=0}^{K-1} M_{i,j+k} = 0, \tag{4}$$

mikäli nurkkaan i ei vaikuta ulkoisia momenttirasituksia. Täten yksi sauvanpäämomenteista $M_{i,j}$ voidaan eliminoida. Se, mikä sauvanpäämomenteista eliminoidaan, vaikuttaa syntyvän ratkaisuyhtälön kerroinmatriisin muotoon; kaikki valinnat eivät tuota symmetristä kerroinmatriisia mikäli nurkkaan liittyy enemmän kuin kaksi sauvaa. On varsin erikoista, että tätä kysymystä ei ole kirjoittajan tietämän mukaan käsitelty alan oppikirjoissa [1]-[3]. Lähteen [3] esimerkissä 9.3 (sivuilla 125-128) esitetty joustomatriisi on epäsymmetrinen.

Ratkaisu tähän ongelmaan on yksinkertainen. Valitaan yksi nurkan sauvanpääkiertymistä ja asetetaan tämä vuoron perään yhtäsuureksi nurkkaan liittyvien muiden sauvanpääkiertymien kanssa. Tätä yhteistä sauvanpäätä vastaava momentti eliminoidaan. Mikäli nurkan i yhteensopivuusehdot (3) kirjoitetaan muodossa

$$\begin{cases} \varphi_{i,j+1} & = \varphi_{i,j} \\ \varphi_{i,j+2} & = \varphi_{i,j} \\ \vdots & \\ \varphi_{i,j+K-1} & = \varphi_{i,j} \end{cases}, \tag{5}$$

tällöin on syytä eliminoida sauvanpäämomentti $M_{i,j}$, jolloin päädytään symmetriseen joustomatriisiin, ja nurkkaan i liittyvä diagonaalilohko on muotoa

$$\begin{bmatrix} \alpha_{i,j}+\alpha_{i,j+1} & \alpha_{i,j} & \dots & \alpha_{i,j} \\ \alpha_{i,j} & \alpha_{i,j}+\alpha_{i,j+2} & \dots & \alpha_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_{i,j} \\ \alpha_{i,j} & \alpha_{i,j} & \dots & \alpha_{i,j}+\alpha_{i,j+K-1} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Tukimomenttien eliminointi ratkaisuyhtälöistä

Momenttimenetelmässä tuntemattomien lukumäärää kasvattavat momenttijäykät tuennat. Tilanne on analoginen siirtymämenetelmän niveltuennan kanssa. Tälle tapaukselle on kuitenkin usein johdettu omat sauvavakiot, jotka eliminoivat nivelpään kiertymän tuntemattomien joukosta. Vastaavalla tavalla voidaan momenttimenetelmässä eliminoida momenttijäykän tuennan tuottama sauvanpäämomentti. Tätä yksinkertaista eliminointia ei yleensä ole esitetty alan kirjallisuudessa.

Tarkastellaan tapausta, jossa sauvanpää j on kimmoisesti kiinnitetty. Kimmoisesti kiinnitettyä nurkkaa vastaava sauvanpäämomentti voidaan eliminoida käyttäen hyväksi tuen yhteensopivuusehtoa

$$\varphi_{j,i} = \varphi_{\text{jousi}}. \tag{7}$$

Otaksumalla jousen konstitutiiviseksi yhteydeksi

$$\varphi_{\text{jousi}} = -\alpha_{\text{jousi}} M_{j,i}, \tag{8}$$

voidaan yhteensopivuusehdon (7) avulla sauvanpään j momentti eliminoida:

$$M_{j,i} = \frac{1}{\alpha_{j,i}+\alpha_{\text{jousi}}}(\beta_{j,i}M_{i,j} - \psi_{j,i} - \alpha^0_{j,i}). \tag{9}$$

Sijoittamalla tämä sauvanpään i kiertymän lausekkeeseen saadaan

$$\varphi_{i,j} = \bar{\alpha}_{i,j}M_{i,j} + \gamma_{i,j}\psi_{i,j} + \bar{\alpha}^0_{i,j}, \tag{10}$$

jossa

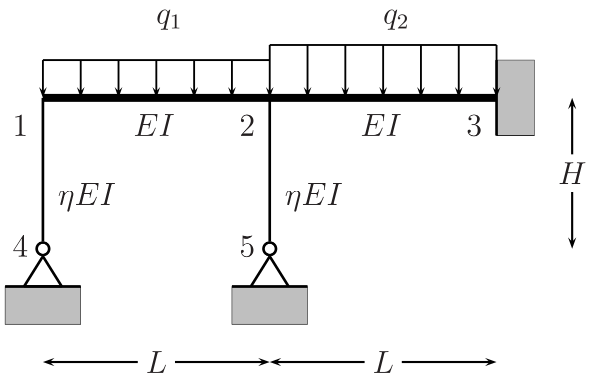
$$\bar{\alpha}_{i,j} = \alpha_{i,j} - \frac{\beta_{i,j}\beta_{j,i}}{\alpha_{j,i}+\alpha_{\text{jousi}}}, \quad \gamma_{i,j} = 1 + \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{j,i}+\alpha_{\text{jousi}}}, \quad \bar{\alpha}^0_{i,j} = \alpha^0_{i,j} + \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{j,i}+\alpha_{\text{jousi}}}\alpha^0_{j,i}. \tag{11}$$

Jäykän tuennan tapauksessa sen joustavuus häviää, eli $\alpha_{\text{jousi}} = 0$. Tasajäykän sauvan ja pään j jäykän tuennan tapauksessa nämä saavat yksinkertaisen muodon

$$\bar{\alpha}_{i,j} = \frac{L_{i,j}}{4EI_{i,j}}, \quad \gamma_{i,j} = \frac{3}{2}. \tag{12}$$

Stabiiliusanalyysi momenttimenetelmällä

Yleisen voimamenetelmän soveltamista rakenteiden stabiiliusanalyysiin on käsitelty Przemienieckin klassikkoteoksessa [4] luvussa 15.4. Stabiiliusehto (yhtälö 15.54, lähteen [4] sivulla 395) johdetaan kuitenkin yhtälösysteemille, jossa muuttujina ovat siirtymät.



Kuva 2. Esimerkkikehärakenne.

Ottamalla momenttimenetelmässä huomioon puristavan voiman vaikutus sauvan joustavuuteen, joustokertoimien α_{ij} ja β_{ij} lausekkeet tasajäykälle sauvalle ovat muotoa

$$\alpha_{ij} = \frac{L}{3EI}\psi(kL), \quad \beta_{ij} = \frac{L}{6EI}\phi(kL), \tag{13}$$

ja Berryn-funktiot ψ ja ϕ määritellään sauvassa vaikuttavan puristavan voiman $N_{i,j}$ funktioina seuraavasti (yhtälöt (1-27) ja (1-28) sivulla 13 lähteessä [5])

$$\psi(kL) = \frac{3}{kL}\left(\frac{1}{kL} - \frac{1}{\tan kL}\right), \tag{14}$$

$$\phi(kL) = \frac{6}{kL}\left(\frac{1}{\sin kL} - \frac{1}{kL}\right), \tag{15}$$

jossa $k^2 = N_{i,j}/EI_{i,j}$ ja L on sauvan pituus.

Systeemin liiketila on stabiili, mikäli potentiaalienergian toinen variaatio on positiivinen kaikkien kinemaattisesti luvallisten variaatioiden joukossa. Analysoitaessa rakennetta siirtymämenetelmällä, tämä ehto on ekvivalentti jäykkyysmatriisin positiivisen definiittiyden kanssa. Voimamenetelmän tapauksessa rakennemallin stabiiliutta ei voida määrittää tilana, jossa joustomatriisi muuttuu positiivisesti definiitistä matriisista indefiniittiseksi, kuten jäljempänä esitettävästä esimerkistä havaitaan.

Esimerkkejä

Joustomatriisin symmetrisyys

Tarkastellaan oheista kuvan 2 mukaista rakennetta. Yhteensopivuusehdot ovat nyt

$$\begin{cases} \varphi_{1,2} = \varphi_{1,4} \\ \varphi_{2,1} = \varphi_{2,3} = \varphi_{2,5} \\ \varphi_{3,2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi_{1,2} = \varphi_{1,4} \\ \varphi_{2,3} = \varphi_{2,1} \\ \varphi_{2,5} = \varphi_{2,1} \\ \varphi_{3,2} = 0 \end{cases}, \tag{16}$$

jolloin on syytä eliminoida sauvanpäämomentti $M_{2,1}$, jotta päädyttäisiin symmetriseen joustomatriisiin. Tuntemattomiksi sauvanpäämomenteiksi jää siten $M_{1,2}$, $M_{2,3}$, $M_{2,5}$ ja $M_{3,2}$.

Yhteensopivuusyhtälöistä (16) saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,2} + \alpha_{1,4} & \beta_{1,2} & \beta_{1,2} & 0 \\ \beta_{2,1} & \alpha_{2,1} + \alpha_{2,3} & \alpha_{2,1} & -\beta_{2,3} \\ \beta_{2,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,1} + \alpha_{2,5} & 0 \\ 0 & -\beta_{3,2} & 0 & \alpha_{3,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,3} \\ M_{2,5} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha^0_{1,4} - \alpha^0_{1,2} \\ \alpha^0_{2,1} - \alpha^0_{2,3} \\ \alpha^0_{2,1} - \alpha^0_{2,5} \\ -\alpha^0_{3,2} \end{Bmatrix}. \tag{17}$$

Tasajäykän sauvan vakiot ovat: $\alpha_{i,j} = \frac{1}{3}L_{i,j}/EI_{i,j}, \beta_{i,j} = \frac{1}{6}L_{i,j}/EI_{i,j}$. Määritellään myös pituusuhde $\xi = H/L$ sekä palkkien ja pilareiden jäykkyyssuhde seuraavasti: $EI_{1,2} = EI_{2,3} = EI$, ja $EI_{1,4} = EI_{2,5} = \eta EI$. Tällöin yhtälösysteemi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix} 2(1+\xi/\eta) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2(1+\xi/\eta) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,3} \\ M_{2,5} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha^0_{1,4} - \alpha^0_{1,2} \\ \alpha^0_{2,1} - \alpha^0_{2,3} \\ \alpha^0_{2,1} - \alpha^0_{2,5} \\ -\alpha^0_{3,2} \end{Bmatrix}. \tag{18}$$

Jos suhteiden ξ, η arvoiksi valitaan $\xi = \frac{1}{2}$ ja $\eta = \frac{1}{4}$, sekä $q_1 = q_2 = q$ saadaan systeemi

$$\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,3} \\ M_{2,5} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{24EI}\begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \tag{19}$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{Bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,3} \\ M_{2,5} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{19}{772} \\ -\frac{75}{772} \\ -\frac{1}{193} \\ \frac{59}{772} \end{Bmatrix} qL^2 \approx \begin{Bmatrix} 0,02461 \\ -0,09715 \\ -0,05181 \\ 0,07642 \end{Bmatrix} qL^2. \tag{20}$$

Nurkan 2 tasapainoyhtälöstä seuraa sauvanpäämomentin $M_{2,1}$ arvoksi

$$M_{2,1} = \frac{79}{772}qL^2 \approx 0,10233qL^2. \tag{21}$$

Mikäli ratkaistaviksi sauvanpäämomenteiksi olisi valittu $M_{1,2}, M_{2,1}, M_{2,5}$ ja $M_{3,2}$ saataisiin epäsymmetrinen yhtälösysteemi

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,2}+\alpha_{1,4} & -\beta_{1,2} & 0 & 0 \\ -\beta_{1,2} & \alpha_{2,1}+\alpha_{2,3} & \alpha_{2,3} & -\beta_{2,3} \\ \beta_{2,1} & -\alpha_{2,1} & \alpha_{2,5} & 0 \\ 0 & \beta_{3,2} & \beta_{3,2} & \alpha_{3,2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_{1,2} \\ M_{2,1} \\ M_{2,5} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha^0_{1,4} - \alpha^0_{1,2} \\ \alpha^0_{2,3} - \alpha^0_{2,1} \\ \alpha^0_{2,1} - \alpha^0_{2,5} \\ -\alpha^0_{3,2} \end{Bmatrix}. \tag{22}$$

Luonnollisesti systeemin (22) ratkaisu on yhtenevä ratkaisun (20) ja (21) kanssa.

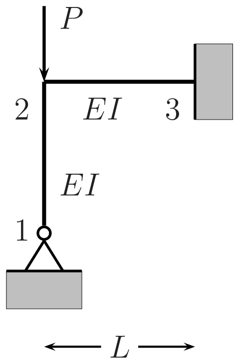
Tukimomenttien eliminointi

Käsinlaskussa päästään hieman helpommalla kun käytetään yhtälöitä (9) ja (10) tukimomentin $M_{3,2}$ eliminoimiseksi ja korvataan pystypilari 1-4 kimmoisalla jousella, jonka joustavuuskerroin on $\alpha_{\text{jousi}} = \frac{1}{3}H/\eta EI$. Tällöin tuntemattomiksi jäävät vain nurkan 2 sauvanpäämomentit $M_{2,3}$ ja $M_{2,5}$, jotka voidaan ratkaista yhteensopivuusehdoista

$$\begin{cases} \varphi_{2,3} = \varphi_{2,1} \\ \varphi_{2,5} = \varphi_{2,1} \end{cases}, \tag{23}$$

jotka johtavat yhtälösysteemiin

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{2,1}+\bar{\alpha}_{2,3} & \bar{\alpha}_{2,1} \\ \bar{\alpha}_{2,1} & \bar{\alpha}_{2,1}+\alpha_{2,5} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_{2,3} \\ M_{2,5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}^0_{2,1} - \bar{\alpha}^0_{2,3} \\ \bar{\alpha}^0_{2,1} \end{Bmatrix}. \tag{24}$$



Kuva 3. Kulmakehän nurjahdus.

Sauvavakiot ovat

$$\bar{\alpha}_{2,1} = \alpha_{2,1} - \frac{\beta_{2,1}^2}{\alpha_{2,1} + \alpha_{\text{jousi}}} = \frac{11}{36}\frac{L}{EI}, \quad \bar{\alpha}_{2,3} = \frac{1}{4}\frac{L}{EI}. \tag{25}$$

$$\frac{L}{36EI}\begin{bmatrix} 20 & 11 \\ 11 & 35 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_{2,3} \\ M_{2,5} \end{Bmatrix} = \frac{qL^3}{144EI}\begin{Bmatrix} -8 \\ -5 \end{Bmatrix}. \tag{26}$$

Ratkaisu on tietenkin yhtenevä tuloksen (20) kanssa. Muut sauvanpäämomentit $M_{1,2}$ ja $M_{3,2}$ voidaan laskea yhtälön (9) avulla.

Stabiiliustehtävä

Ratkaistaan kuvan 3 esittämän kulmakehän nurjahduskuorma. Nurkkien 2 ja 3 yhteensopivuusehdoista seuraa homogeeninen yhtälösysteemi

$$\frac{L}{6EI}\begin{bmatrix} 2(1+\psi) & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} M_{2,3} \\ M_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{27}$$

missä funktio ψ on yhtälön (14) mukainen ja nyt $k^2 = P/EI$. Homogeenisella yhtälösysteemillä (27) on ei-triviaali ratkaisu vain jos kerroinmatriisi on singulaarinen, ts. sillä on vähintään yksi nolla ominaisarvo ja täten sen determinantti on myös nolla. Kyseessä on siten *epälineaarinen ominaisarvotehtävä* kriittisen kuormaparametrin k löytämiseksi. Yhtälössä (27) esiintyvän dimensiottoman kerroinmatrisin

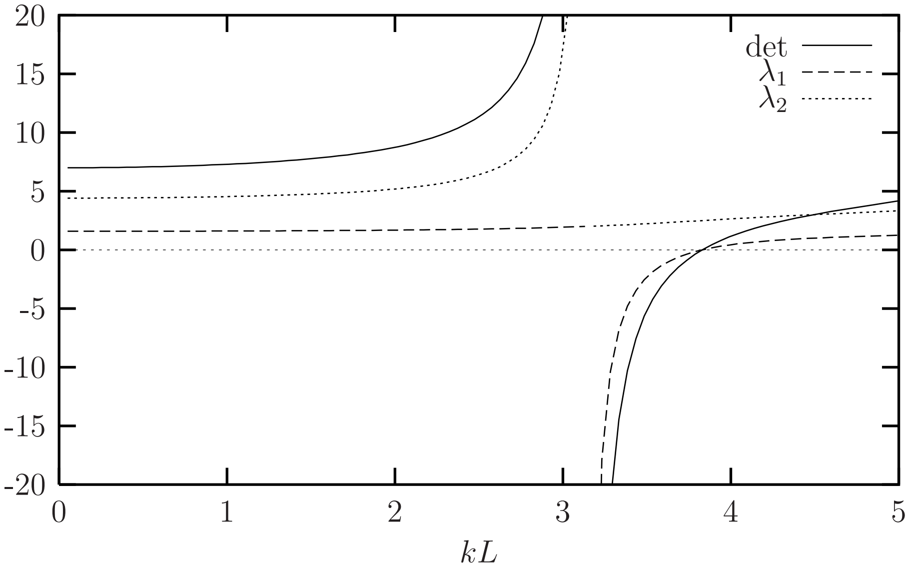
$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 2(1+\psi) & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

ominaisarvot ja determinatti ovat

$$\lambda_1 = 2 + \psi - \sqrt{1+\psi^2}, \quad \lambda_2 = 2 + \psi + \sqrt{1+\psi^2}, \quad \det = \lambda_1\lambda_2 = 4\psi + 3, \tag{29}$$

joiden kuvaajat on piirretty kuvaan 4. Kuvasta havaitaan, että ominaisarvo λ_1 on negatiivinen välillä $\pi < kL < 3,829$, muulloin positiivinen, ja λ_2 on kaikkialla positiivinen, lukuunottamatta pistettä $kL = \pi$, jossa funktio ψ on määrittelemätön.

Täten voimamenetelmän tuottaman yhtälösysteemin kerroinmatriisin positiivisen definiittisyyden perusteella ei voi tehdä päätelmiä rakenteen tasapainotilan stabiiliudesta. Kriittinen kuorma saadaan yhtälön (27) kerroinmatriisin singulaarisuusehdosta, ja se on



Kuva 4. Matriisin $\tilde{\boldsymbol{A}}$ ominaisarvot ja determinantti.

$P_{\mathrm{kr}} \approx (3,829)^2 EI/L^2 \approx 1,485\pi^2 EI/L^2$. Tällöin ominaisarvolla λ_1 on nolla-arvo, katso kuvaa 4.

Joustomatriisi menettää positiivisen definiittiyden, kun kuorma ylittää arvon $\pi^2 EI/L^2$. Tällöin sauvan 1-2 joustokertoimien arvot muuttuvat positiivisista negatiivisiksi seuraavalla tavalla:

$$\lim_{kl\to\pi-}(\alpha_{ij},\beta_{ij}) = +\infty, \quad \lim_{kl\to\pi+}(\alpha_{ij},\beta_{ij}) = -\infty. \tag{30}$$

Staattisen perusmuotosauvan joustavuus kasvaa rajatta kun puristava normaalivoima lähestyy Eulerin nurjahduskuormaa. Täten momenttimenetelmän mukainen stabiiliusmatriisi muuttuu positiivisesti definiitistä matrisiista indefiniitiksi, kun jonkin rakenneosan staattisen perusmuotosauvan nurjahduskuorma ylittyy.

Matriisin definiittiyttä voidaan tutkia myös sen pääalideterminanttien avulla. Matriisi on positiivisesti definiitti jos kaikki sen pääalideterminantit ovat positiivisia. Sovellettuna matriisiin (28), tämä tarkoittaa ehtoja

$$2(1+\psi) > 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 2(1+\psi) & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} > 0. \tag{31}$$

Lopuksi

Artikkelissa kuvataan tapa, miten momenttimenetelmän tuntemattomat eli stattisesti määräämättömät sauvanpäämomentit on valittava, jotta syntyvä rakenteen joustomatriisi olisi symmetrinen. Lisäksi johdetaan toisesta päästään jäykästi tai kimmoisesti kiinnitetyn sauvan joustokertoimet, joita käyttämällä voidaan ratkaistavan yhtälösysteemin kokoa pienentää. Lisäksi huomautetaan, että rakenteen tasapainotilan stabiiliuden menettämiskohtaa ei voida määrittää pisteenä, jossa rakenteen joustomatriisi muuttuu positiivisesti definiitistä indefiniitiksi.

Viitteet

[1] A. Ghali, A.M. Neville, *Structural analysis - A unified classical and matrix approach.* Chapman and Hall, 3. painos, London, New York, 1989.

[2] R. Guldan, *Rahmentragwerke und Durchlaufträger.* Springer-Verlag, 6. painos, Wien, 1959.

[3] P. Loikkanen, *Rakenteiden statiikka 2.* Otava, Helsinki, 1975.

[4] J.S. Przemieniecki, *Theory of matrix structural analysis.* Dover, 1985.

[5] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of elastic stability.* McGraw-Hill, International student edition, 2. painos, 1963.

Reijo Kouhia
TKK, Rakenne- ja rakennustuotantotekniikan laitos
PL 2100, 02015 TKK
s-posti: `reijo.kouhia@tkk.fi`