Rakenteiden Mekaniikka
Vol. 42, Nro 2, 2009, s. 61–74

Kuntoilijan juoksumalli

Matti A Ranta ja Laila Hosia

Tiivistelmä. Urheilututkimuksen mielenkiinnon kohteena ovat yleensä huippu-urheilijat. Tuokon yksinkertaistettu juoksumalli soveltuu kuitenkin myös satunnaisen kuntoilijan tulosten tarkasteluun.

Avainsanat: juoksumalli, energiatasapaino, pika- ja kestävyysjuoksun raja sekä aerobinen vauhti

Juoksun mallintaminen

Fil.tri Reino Tuokko esittää kirjassaan [1] koulufysiikkaan perustuvan näppärän mallin ”Juoksun dynamiikka”. Tuokon malli sisältää kaksi fysiologista parametria: k on aerobinen parametri eli hengitysilman hapen avulla kehitetty teho ja parametri A ovat hapettomasti eli anaerobisesti kehitetty energian vakioerä.

Tuokon kirjan [1] jälkeen prof. Keller julkaisi kaksi ansiokasta artikkelia [2] ja [3]. Hän käytti ilmanvastukselle nopeuteen verrannollista lakia ja lasketut juoksut oletettiin suoritetun suoralla radalla (ilman kaarteita). Kellerin optimijuoksun periaatteet: *ensin nopea kiihdytys, sitten tasainen matkavauhti ja lopussa hidastusvaihe eli energian loppuminen* ovat vieläkin yleisesti hyväksytyt.

TKK:n Mekaniikan laitokselle muotoutunut tutkijaryhmä ([4], [5] ja [6]) otti käyttöön neliöllisen ilmanvastuslain sekä mallinsi myös kaarrejuoksun. Mallit ([2]…[6]) sisältävät neljä parametria. Mallien [2]…[6] soveltaminen on melko työlästä ja vaatii runsaasti dataa. Tuokon kaksiparametrinen malli tarkastelee periaatteessa vain juoksun tasaista keskiosuutta, missä $s = vt$. Tuokon malli on siksi epätarkka juoksun alkuvaiheessa.

Tutkimuksessa selvitettiin, kuinka Tuokon malli sopii tavallisen kuntoilijan satunnaisten juoksutulosten tarkasteluun.

Tuokon malli ”Juoksun dynamiikka”

Tuokko esittää kirjassaan ([1] s. 9-16) päättelyyn perustuvan johdon tasaisen vauhdin energiayhtälölle. Samaan kaavaan päädytään, jos lähdetään massayksikköä kohden määritellyistä perusyhtälöistä ([7] s. 3 ja 4).

Liikeyhtälö tyynessä ilmassa alkuehtoineen on

$$\frac{dv}{dt} + k_T v^2 = f \quad , \quad v(0) = 0$$

Lähteiden [4] ja [7] mukaan kokonaisvastuskerroin muodostuu jalkojen rotaatiovastuksesta $k_R \approx 0.0464\,\mathrm{m}^{-1}$ ja juoksijan ilmanvastuksesta ja $k_D \approx 0.0033\,\mathrm{m}^{-1}$ eli $k_T = k_R + k_D \approx 0.0497\,\mathrm{m}^{-1} < 0.0680\,\mathrm{m}^{-1}$. Eteenpäin vievä voima on $f < f_{\max} \approx 8.46\,\mathrm{Nkg}^{-1}$

Energiayhtälö alku- ja rajoitusehtoineen on

$$\frac{de}{dt} = \sigma - fv \quad , \quad e(0) \equiv e_0 \geq e(t) \geq 0$$

Aerobinen kerroin on $\sigma \leq 18.05\,\mathrm{Wkg}^{-1}$ ja anaerobisen energiavaraston $e(t)$ alkuehto on $e(0) \leq 1794.0\,\mathrm{Jkg}^{-1}$. Eliminoimalla voima f saadaan tehoyhtälö

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}v^2 + e\right) = \sigma - k_T v^3$$

Koska matkavauhti on vakio $v = s/t$, saadaan tehoyhtälöstä integroimalla

$$e(t) - e_0 = \sigma t - k_T t v^3 \equiv \sigma t - k_T t^{-2} s^3$$

Sievennetään tämä vielä muotoon

$$\frac{\sigma}{k_T} t^3 + \frac{e_0 - e(t)}{k_T} t^2 = s^3$$

Paras loppuaika saadaan, jos kaikki anaerobinen energia on käytetty maalilinjaa ylitettäessä eli $e(t) = 0$.

Kun otetaan käyttöön merkinnät $k = \sigma/k_T$ ja $A = e_0/k_T$, saadaan Tuokon peruskaava ([1] s. 16)

$$k t^3 + A t^2 = s^3 \tag{1}$$

Tämän kaavan kertoimien dimensiot käyvät ilmi yllä olevasta johdosta. Käytetään laskuissa SI-mittajärjestelmää.

Sovitus pienimmän neliösumman menetelmällä

Ajatellaan, että testijuoksuissa on saatu joukko aika-matka-pareja (t_i, s_i). Nämä eivät täysin toteuta kaavaa (1) vaan syntyy virheitä

$$\varepsilon_i = k t_i^3 + A t_i^2 - s_i^3 \tag{2}$$

Muodostetaan Gaussin virhefunktio

$$e = \sum \varepsilon_i^2 \tag{3}$$

Sillä on minimi, kun seuraavat osittaisderivaatat häviävät

$$\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial k} = \sum \varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial k} \equiv \sum \varepsilon_i t_i^3 = \sum \left(k t_i^3 + A t_i^2 - s_i^3 \right) t_i^3 = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial A} = \sum \varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial A} \equiv \sum \varepsilon_i t_i^2 = \sum \left(k t_i^3 + A t_i^2 - s_i^3 \right) t_i^2 = 0 \tag{4}$$

Nämä johtavat yhtälöryhmään

$$k\sum t_i^6 + A\sum t_i^5 - \sum s_i^3 t_i^3 = 0 \tag{5}$$

$$k\sum t_i^5 + A\sum t_i^4 - \sum s_i^3 t_i^2 = 0 \tag{6}$$

Merkitään yhtälöryhmän kerroindeterminantti

$$D = \begin{vmatrix} \sum t_i^6 & \sum t_i^5 \\ \sum t_i^5 & \sum t_i^4 \end{vmatrix} \tag{7}$$

sekä determinantit

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sum s_i^3 t_i^3 & \sum t_i^5 \\ \sum s_i^3 t_i^2 & \sum t_i^4 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \sum t_i^6 & \sum s_i^3 t_i^3 \\ \sum t_i^5 & \sum s_i^3 t_i^2 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Yhtälöryhmästä (5) ja (6) seuraa kaavan (1) kertoimille ratkaisut

$$k = D_1 / D\,, \tag{9}$$

$$A = D_2 / D \tag{10}$$

Yhtälöt (5) ja (6) voitaisiin ratkaista myös valmisohjelmilla kuten Mathematican Solve-ohjelmalla.

Teorian tarkastelu

Lähteen [1] s. 16…17 mukaan, jos hengityksen kautta saatu energia kt_c tulee yhtä suureksi kuin perusenergian vakioerä *A*, on saavutettu raja, jossa anaerobinen pikajuoksu ja aerobinen kestävyysjuoksu kohtaavat toisensa. Tämä raja on lähdöstä sekunteina

$$t_c = A/k = D_2/D_1 \tag{11}$$

jolloin juostu matka s_c ja rajavauhti v_c ovat

$$s_c = t_c \sqrt[3]{k}\,\sqrt[3]{2} \tag{12}$$

$$v_c = \sqrt[3]{k}\,\sqrt[3]{2} \tag{13}$$

Kaavasta (1) seuraa matkan lauseke ajan funktiona

$$s = t\,\sqrt[3]{k}\,\sqrt[3]{1+\frac{A/k}{t}} = t\,\sqrt[3]{k}\,\sqrt[3]{1+t_c/t} \tag{14}$$

Vauhti ajan funktiona, kun $t > 0$, on

$$v = \frac{s}{t} = \sqrt[3]{k}\,\sqrt[3]{1+t_c/t} \tag{15}$$

Kun aika kasvaa suureksi $t \to \infty$, lähestyy vauhti (15) aerobista raja-arvoa

$$v_{aer} = \lim_{t\to\infty}\frac{s}{t} = \sqrt[3]{k} \tag{16}$$

Tiettyä matkaa s vastaava juoksuaika t johtaa kaavasta (14) ratkaistuna suhteen $\tau = t/t_c$ kolmannen asteen polynomiin, kun on merkitty $c^3 = \left(s/t_c v_{aer}\right)^3$,

$$\tau^3 + \tau^2 - c^3 = 0 \tag{17}$$

Sen ratkaisu saadaan Cardanon kaavojen avulla. Merkitään $p = -1/3$ ja $q = -c^3 + 2/27$. Tarkasteltavaan tapaukseen sopiva ratkaisu on ([8] s. 434…436 kaavat 7…17)

$$\tau = \sqrt[3]{-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}} - 1/3 \tag{18}$$

Jos $\tau >> 1$, saadaan sarjakehitelmän avulla likikaava

$$t \cong s/v_{aer} - \tfrac{1}{3}t_c \tag{19}$$

Merkitään laskettuja aikoja $T_i = T\left(s_i\right)$.

Sovellutus

Tutkimuksen satunnainen kuntourheilija on v. 1942 syntynyt nainen. Hän juoksi eripituisia matkoja Otaniemen urheilukentällä ilman varsinaista alkuverryttelyä itselleen sopivantuntuisella vauhdilla. Juoksuaika otettiin sekuntikellolla tai rannekellolla. ”Naisten Kympillä” juosten ja välillä kävellen saatu 10 km:n aika on likimääräinen. Tulokset ovat taulukossa 1. Näistä tuloksista määritettiin Gaussin pienimmän neliösumman menetelmällä vakiot k ja A. Näiden avulla voitiin sitten määrittää anaerobisen ja aerobisen juoksun raja. Samoin voitiin määrittää ns. aerobinen vauhti, jota juoksija pidemmillä matkoilla kykenee teoriassa ylläpitämään. Tuokon teoria ja juoksijan omat kokemukset juoksusta sopivat hyvin yhteen.

Juoksija on saavuttanut seuraavat tulokset eri matkoilla $\left(s_i, t_i\right)$; matka metreinä ja aika sekunteina. Lisäksi on sovituksen jälkeen laskettu aika T_i

Taulukko 1. Juostut matka-aika-parit (s_i, t_i) sekä kaavasta (18) laskettu aika T_i

s_i[m]	80	100	200	300	400	1750	2000	4000	10000
t_i[s]	19.57	24.66	55.36	90.41	145	720	900	1800	4540
T_i[s]	21.30	28.79	69.89	113.52	158.04	771.75	885.84	1799.12	4540

Kun on laskettu determinantit (7) ja (8), saadaan kaavasta (9) aerobinen kerroin

$$k = 10.49\,\mathrm{m^3s^{-3}}$$

ja kaavasta (10) perusenergia

$$A = 904.86\,\mathrm{m^3s^{-2}}$$

Kaavasta (16) saadaan aerobinen vauhti

$$v_{aer} = \sqrt[3]{k} = 2.19\,\mathrm{ms^{-1}} \approx 2.2\,\mathrm{ms^{-1}}$$

Kaavoista (11) ja (12) seuraa anaerobisen ja aerobisen juoksun raja

$$t_c = A/k = 86.28\,\mathrm{s}$$

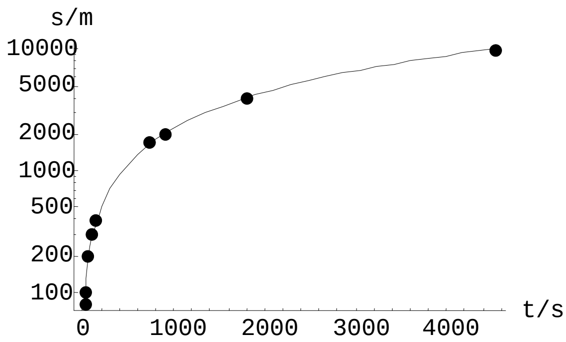
$$s_c = A/k\,\sqrt[3]{k}\,\sqrt[3]{2} = 237.95\,\mathrm{m} \approx 238\,\mathrm{m}$$

Vauhti on tällöin kaavasta (13)

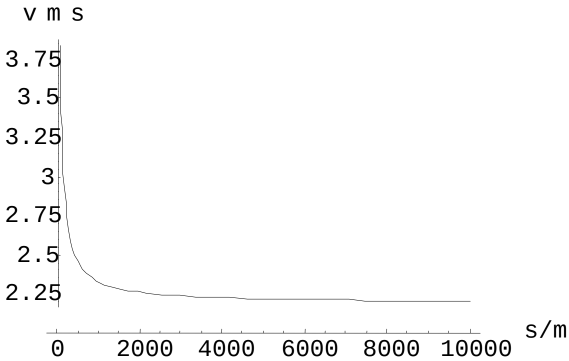
$$v_c = \sqrt[3]{2}\,v_{aer} = 2.76\,\mathrm{ms^{-1}} \approx 2.8\,\mathrm{ms^{-1}}$$

Juoksija kertoi, että eräässä ennätysyrityksessä hänelle tuli juoksussa tällä vauhdilla vaikeuksia juuri 240 m kohdalla ja hän keskeytti juoksun. Syynä oli, että vauhti oli ollut aerobiseen vauhtiin nähden 0,6 m/s liian kova.

Piirretään puolilogaritminen aika-matka kuvaaja jolloin saadaan sen lyhyt anaerobinen alku eroon aerobisesta jälkiosasta. Kuvasta 2 nähdään miten juoksuvauhti vähenee matkan pidentyessä Kuten kuvasta nähdään osuvat pisteet (s_i, t_i) käyrälle (14)



Kuva 1. Juoksijan puolilogaritminen aika-matka kuvaaja



Kuva 2. Juoksijan matka-vauhti kuvaaja

Sovituksen tarkkuus

Virhefunktion (3) kuvaaja osoittautuu olevan kaukalomainen pinta, jonka pitkien reunojen jyrkkyyttä määrittää parametri *k,* kun taas parametri *A* määrittää kaukalon pohjan käyryyden pituussuunnassa. Näin ollen [12] parametri *k* vaihtelee hieman mutta parametri *A* voi vaihdella huomattavastikin. Esimerkiksi Mathematican FindMinimum antaa $k = 10.48\,\mathrm{m^3 s^{-3}}$ ja $A = 945.70\,\mathrm{m^3 s^{-2}}$ ja NonlinearFit antaa $k = 10.31\,\mathrm{m^3 s^{-3}}$ ja $A = 1581.34\,\mathrm{m^3 s^{-2}}$

Lasketaan ajan virheiden neliöllinen keskiarvo eli *RMS*-arvo, joka on hajonnan mitta

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n=9}\left(t_i - T_i\right)^2} = 21.63\,\mathrm{s} \approx 22\,\mathrm{s} \qquad (20)$$

Koska alussa esitetty sovitusmenetelmä antaa parhaan *RMS*-arvon, ei muita menetelmiä käsitellä tässä enempää.

Koska virheet johtuvat yleensä monista tekijöistä, voidaan niiden olettaa noudattavan Gaussin kellokäyrää. Se antaa todennäköisyyden *p*, että juostu aika poikkeaa lasketusta määrän vakio kertaa *RMS* ([9] s. 101–103).

Merkitään $(t-T)/RMS = x$, jolloin todennäköisyydellä *p* on voimassa

$$P\{-r < x < +r\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^{+r} e^{-x^2/2} dx = \Phi(-r,+r) = p \tag{21}$$

Juostu tulos *t* eroaa lasketusta *T* todennäköisyydellä *p* vähemmän kuin $\pm r\,RMS$ eli

$$T - r\,RMS < t < T + r\,RMS \tag{22}$$

Suureen *r* ratkaisemista varten tarvitaan käänteistä virhefunktiota $\Phi^{-1}(p) = r$. Sen arvo saadaan joko taulukosta ([9] s. 121–122) tai Mathematican *InverseErf*[p]-funktiolla. Laskutulokset 95 %: n todennäköisyydelle ovat

$$r = \Phi^{-1}(p = 0.95) = \sqrt{2} \cdot InverseErf[p = 0.95] = 1.96$$

$$rRMS = 1.96 \cdot 21.63\,\mathrm{s} \approx 43\,\mathrm{s} \tag{23}$$

Yksinkertainen sovitus

Ei käytetä Gaussin pienimmän neliösumman menetelmää vaan lasketaan vakiot k ja A esim. matkojen 100m ja 4000m arvoista, jotka ovat kriittisen pisteen molemmin puolin. Verrataan saatuja arvoja pienimmän neliösumman menetelmän avulla saatuihin arvoihin. Ensin saadaan parametrit $k = 10.20\,\mathrm{m^3s^{-3}} \quad < 10.49\,\mathrm{m^3s^{-3}}$ ja $A = 1392.89\,\mathrm{m^3s^{-2}} \quad > 904.86\mathrm{m^3s^{-2}}$. Lasketaan näiden perusteella sitten muut suureet. Aerobinen vauhti on

$$v_{aer} = \sqrt[3]{k} = 2.17\,\mathrm{ms^{-1}} \approx 2.2\,\mathrm{ms^{-1}} \quad \cong 2.2\,\mathrm{ms^{-1}}$$

ja kriittiset arvot aika, matka ja vauhti ovat

$$t_c = A/k = 136.56\,\mathrm{s} \quad > 86.28\mathrm{s}$$

$$s_c = A/k\,\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{k} = 373.13\,\mathrm{m} \approx 373\,\mathrm{m} \quad > 238\mathrm{m}$$

$$v_c = \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{k} = 2.73\,\mathrm{ms^{-1}} \approx 2.7\,\mathrm{ms^{-1}} \quad < 2.8\mathrm{ms^{-1}}$$

sekä viimeksi sovituksen tarkkuus

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n=9}\left(t_i - T_i\right)^2} = 20.37\,\mathrm{s} \approx 20\,\mathrm{s} \quad < 22\mathrm{s} \tag{24}$$

Nähdään, että aerobinen parametri k ei paljonkaan muuttunut, josta syystä aerobinen vauhti v_{aer} ja kriittinen vauhti v_c pysyivät likimain ennallaan. Anaerobisen parametrin A kasvamisen myötä kriittinen aika t_c ja matka s_c kasvoivat huomattavasti. Sovituksen tarkkuuden *RMS*-arvo pieneni yllättäen kahdella sekunnilla, mikä on käytännössä merkityksetöntä. Tärkeintä on todeta, että parametrit k ja A saatiin määritetyksi melko yksinkertaisesti kahdesta juoksutuloksesta.

Parametrien *k* ja *A* muuttumisen eli harjoittelun vaikutus

Oletetaan, että juoksija olisi harjoituksella lisännyt parametrien k ja A arvoja eli suhteellinen muutos olisi ollut $dk/k = \varepsilon_k$ ja $dA/A = \varepsilon_A$. Miten voidaan arvioida juoksutuloksien parantuminen?

Ensinnäkin parametrien arvon muuttuminen vaikuttaa kriittiseen pisteeseen eli suureisiin t_c, s_c, v_c ja v_{aer}; kaavat (11), (12), (13) ja (16). Kaava (11) korvautuu nyt kaavalla

$$t_c = \frac{A}{k}\cdot\frac{1+\varepsilon_A}{1+\varepsilon_k} = \frac{A}{k}\cdot f\left(\varepsilon_A, \varepsilon_k\right) \tag{25}$$

josta näkyy myös parametrien uudet lausekkeet $A\left(1+\varepsilon_A\right)$ ja $k\left(1+\varepsilon_k\right)$.

Periaatteessa voitaisiin kaavojen (17) ja (18) avulla tutkia miten juoksuajat muuttuvat uuden t_c:n myötä. Helpommin saadaan likimääräinen vastaus seuraavasti.

Pitämällä matkaa s vakiona ja differentioimalla lauseke (1) voidaan johtaa kaava

$$-\frac{dt}{t} = \frac{t/t_c}{3t/t_c + 2}\,\varepsilon_k + \frac{1}{3t/t_c + 2}\,\varepsilon_A \equiv -\frac{d_k t}{t} - \frac{d_A t}{t} \tag{26}$$

Tämän kaavan avulla on mahdollista arvioida, miten juoksutulos muuttuisi parametrien muuttuessa. Seuraavassa taulukossa 3 nähdään miten parametrit ja kriittinen piste muuttuvat kaavan (26) mukaan ja taulukossa 4 nähdään juoksuaikojen muutokset.

Oletetaan esimerkiksi, että ε_A = 0.0 tai 0.2 ja ε_k = 0.0 tai 0.1. Olkoon tapaus a: ε_A = 0.2 ja ε_k = 0.1 → f(0.2,0.1) = 1.09, tapaus b: ε_A = 0.2 ja ε_k = 0.0 → f(0.2,0.0) = 1.20 sekä tapaus c: ε_A = 0.0 ja ε_k = 0.1 → f(0.0,0.1) = 0.91.

Taulukosta 3 nähdään miten kriittinen piste siirtyy eri tapauksissa. Ero matkoissa b ja c tapauksien välillä on vähän päälle 60m.

Taulukko 3. Testijuoksijan eräiden arvojen muuttuminen parametrin *k* ja *A* muuttuessa

suure/tapaus	testi	a	b	c
$k\left[\mathrm{m^3 s^{-3}}\right]$	10.49	11.54	10.49	11.54
$A\left[\mathrm{m^3 s^{-2}}\right]$	904.86	1085.83	1085.83	904.86
$t_c\left[\mathrm{s}\right]$	86.28	94.13	103.54	78.44
$s_c\left[\mathrm{m}\right]$	237.95	267.96	285.54	223.30
$v_c\left[\mathrm{m/s}\right]$	2.76	2.85	2.76	2.85
$v_{aer}\left[\mathrm{m/s}\right]$	2.19	2.26	2.19	2.26

Taulukko 4. Testijuoksijan juoksuaikojen parannukset Δt_i parametrin *k* ja *A* muuttuessa

s_i[m]	80	100	200	300	400	1750	2000	4000	10000
t_i[s]	19.57	24.66	55.36	90.41	145	720	900	1800	4540
Δt_i^a[s]	1.65	2.00	3.81	5.48	7.75	27.85	33.91	64.04	155.46
Δt_i^b[s]	1.52	1.82	3.07	3.91	4.68	6.30	6.41	6.65	6.80
Δt_i^c[s]	0.18	0.26	0.95	1.91	3.55	22.37	28.35	58.31	149.61

Kun $d_k t = d_A t$ niin startista on juostu aikana $t = t_c\, \varepsilon_A / \varepsilon_k$ matka $s = \sqrt[3]{k}\, t_c \left(\varepsilon_A / \varepsilon_k\right) \sqrt[3]{1 + \varepsilon_k / \varepsilon_A}$ jolloin molemmat ajan parannukset, anaerobinen ja aerobinen ovat yhtä suuret. Sen jälkeen aerobinen dominoi. Tapauksessa a on tämä aika 188.26s ja matka 486.93m. Koska t_c:t ovat taulukon 3 mukaan eri tapauksissa eri suuret, ei superponointia voida käyttää. Kuten taulukosta 4 nähdään, on $\Delta t_i^a < \Delta t_i^b + \Delta t_i^c$.

Testijuoksijan sekä SE että ME ennätysten vertailu

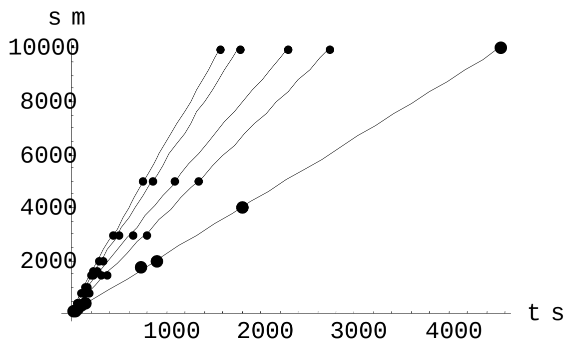
Lähteestä [10] saadaan Suomen Veteraaniurheilijaliiton (SVU) ennätykset sarjassa yli 65 vuotta. Lähteestä [11] saadaan IAAF:n voimassa olevat naisten ja miesten juoksun maailmanennätykset. Ennätykset olivat voimassa heinäkuulla 2008. Lisäksi lasketaan mihin päädytään Tuokon kirjan [1] antamien *k* ja *A* arvojen perusteella.

Taulukko 5. Testijuoksijan, suomalaisten 65v naisten ja miesten sekä naisten ja miesten maailmanennätysten vertailu ja Tuokon arviot

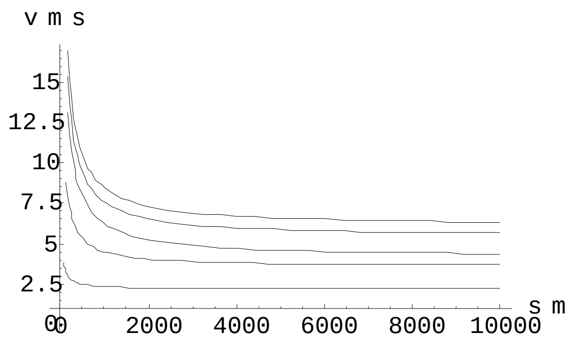
	Testijuoksija	SVUN65	SVUM65	IAAFN	IAAFM	Tuokko
$k\left[\mathrm{m^3s^{-3}}\right]$	10.49	44.89	70.91	159.28	226.14	185
$A\left[\mathrm{m^3s^{-2}}\right]$	904.86	10056.40	27585.10	36357.90	45109.20	28000
$t_c\left[\mathrm{s}\right]$	86.28	224.01	389.03	228.27	199.47	151.35
$s_c\left[\mathrm{m}\right]$	237.95	1003.07	2028.72	1558.97	1531.15	1086.56
$v_c\left[\mathrm{ms^{-1}}\right]$	2.76	4.57	5.21	6.83	7.68	7.18
$v_{aer}\left[\mathrm{ms^{-1}}\right]$	2.19	3.55	4.14	5.42	6.09	5.70
$RMS\left[\mathrm{s}\right]/\mathrm{kpl}$	21.8/9	9.5/8	17.1/8	11.8/11	9.6/11	

Vaikka ennätykset [10] ja [11] ovat eri henkilöiden tekemät, suoritetaan niiden perusteella kuitenkin samat laskutoimitukset kuin testijuoksijalle. Keskeiset tulokset näkyvät taulukossa 5. Ensimmäisessä pystysarakkeessa on testijuoksijan saavuttamat arvot. Toisessa ja kolmannessa pystysarakkeessa ovat suomalaisten naisten ja miesten sarjassa 65 vuotta ennätyksistä lasketut arvot. Neljännessä ja viidennessä pystysarakkeessa ovat IAAF:n naisten ja miesten maailmanennätyksistä lasketut arvot. Kuudennessa pystysarakkeessa on Tuokon kirjassaan ([1] s. 31) arvioimat k ja A arvot sekä niistä lasketut muut arvot. Alimmalla vaakarivillä nähdään sovituksen tarkkuus: *RMS*-luku sekä kuinka monesta juoksutuloksesta se on laskettu.

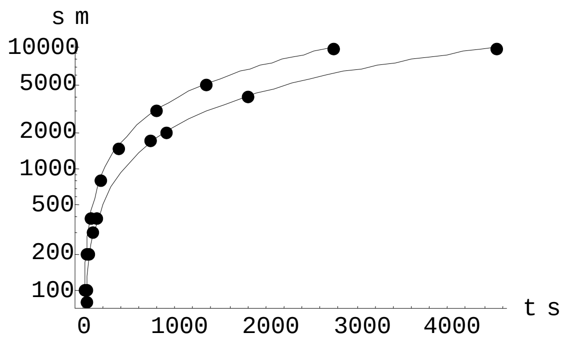
Seuraavista kuvista 3 ja 4 näkyy vertailussa ero selvästi. Vasemmalta oikealle: ensin IAAF:n ME-miesten ja -naisten käyrät, sitten tulevat SVU 65v miesten ja naisten ennätyksistä lasketut käyrät ja lopuksi tekstijuoksijan juoksemat tulokset näkyvät eniten oikealla olevalla käyrällä.



Kuva 3. IAAF:n ennätysmiesten ja -naisten ja SVU:n 65v ennätysmiesten ja – naisten sekä testijuoksijan aika-matka käyrät



Kuva 4. IAAF:n ennätysmiesten ja -naisten ja SVU:n 65v ennätysmiesten ja – naisten sekä testijuoksijan matka-vauhti käyrät



Kuva 5. SVU:n 65v ennätysnaisten ja testijuoksijan puolilogaritminen aika-matka kuvaaja

Käyrän kulmakerroin kertoo juoksuvauhdin, joka paranee oikealta vasemmalle mentäessä. Kuva 4 kertoo miten juoksuvauhti hiipuu matkan pidentyessä maailmanennätysjuoksijoilla sekä suomalaisilla 65v ennätysjuoksijoilla että testijuoksijalla. Kannattaa muistaa, että kuvan 4 käyrät ovat alkupäässään vääristyneitä. Kaikki saavuttavat lähes aerobisen vauhdin noin 4000m jälkeen.

Kuvan 5 puolilogaritmisissa aika-matka käyrissä nähdään SVU:n 65v ennätysnaisten ja testijuoksijan ero.

Kuten taulukosta 5 näkyy, tarkkuus on IAAF:n miesten ennätyksissä ja SVU:n 65v naisten ennätyksissä samaa suuruusluokkaa. Testijuoksijan sovituksen tarkkuus oli $RMS \approx 22\text{s}$. Ennätysmiesten ja –naisten sovituksen tarkkuuden hyvä arvo johtunee siitä, että ennätysjuoksijat muodostavat varsin homogeenisen joukon.

Vauhdin hiipuminen maratonmatkoilla

Taulukossa 5 lasketut arvot pohjautuvat radalla juostuihin tuloksiin. Sekä puolimaraton että kokomaraton juostaan maastossa, joten maaston laatu vaikuttaa hidastavasti vauhtiin. Lisäksi tulee”tankkaamisesta” ynnä muista häiriöistä lisää hidastusta. Taulukon 5 kahden ensimmäisen vaakarivin k ja A arvoja käyttäen voidaan laskea puoli- ja kokomaratonille teoreettinen aika-arvio. Vertaamalla niitä lähteistä [10] ja [11] saataviin todellisiin ennätyksiin saadaan prosentuaaliset hidastumiset. Ne näkyvät seuraavassa taulukossa 6.

Taulukosta näkyy että ME-juoksijoilla meno puolimaratonilta kokomaratonille aiheuttaa naisilla vain yhden %-yksikön kun taas miehillä 5%-yksikön lisähiipuman. ME-naiset kestävät pitkään tasaista kovaa vauhtia. Suomalaisilla veteraanijuoksijoilla puolimaratonilla hiipuminen on n. 2% mutta kokomaratonilla jo selvästi suurempi varsinkin naisilla.

Taulukko 6. Nais- ja miesjuoksijoiden juoksuaikojen suhteellinen hidastuminen taulukon 5 arvoihin nähden maraton matkoilla

Matka $[\mathrm{km}]$	SVUN65	SVUM65	IAAFN	IAAFM
21.1	2.0%	1.6%	4.4%	3.4%
42.2	9.1%	6.0%	5.4%	8.4%

Tulevaisuuden ennustus

Juoksija on päättänyt osallistua puolimaratonille. Kaava (18) antaa ennustetun juoksuajan ja kaava (23) vaihteluvälin. Estimoitu aika on

$$T = 9609.90\,\mathrm{s} \pm 43\mathrm{s} = 2^{\mathrm{h}}40^{\mathrm{m}}10^{\mathrm{s}} \pm 43^{s} \tag{27}$$

Ennuste on aika tiukka ja juoksijan kuntoon nähden nopein teoreettinen aika. Juoksijalla tuskin on mahdollisuuksia alittaa tätä aikaa.

Koska harjoitellutkin kuntoilija yltää tavallisesti vain noin puoleen huippujen vauhdista, on todennäköistä, että juoksijan hiipumisaste puolimaratonilla on samaa suuruusluokkaa kuin SVUN65 juoksijan kokomaratonilla eli noin 10 %. Tämä huomioon ottaen juoksijan aikaennuste on

$$T = 1.1 \cdot 9609.90\,\mathrm{s} = 10570.89\mathrm{s} = 2^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}11^{\mathrm{s}} \approx 3^{\mathrm{h}} \tag{28}$$

Tämän perusteella noin kolmen tunnin juoksuaika lienee mahdollinen.

Lähteestä [13] käy ilmi, että juoksija saavutti puolimaratonilla 21.1 km ajan $t = 2^{\mathrm{h}}59^{\mathrm{m}}26^{\mathrm{s}}$, joka on juuri laskelmien perusteella arvioidun (28) suuruinen eli noin kolme tuntia. Juostu aika oli 12.0 % suurempi kuin kaavan (27) laskettu aika. Juoksijan hiipumisaste oli siis 12.0 %.

Yhteenveto

Tuokon malli"Juoksun dynamiikka" sopii oikein hyvin testijuoksijan tulosten analysointiin, sillä hän juoksee usein tasaisella vauhdilla, jonka hän sovittaa aiotun matkan pituuteen. Pikajuoksun ja kestävyysjuoksun välillä oleva kriittinen raja näytti tulevan myös testijuoksuissa hyvin esille sekä teoriassa että käytännössä. Tämä johtui siitä, että testijuoksuissa puuttui varsinainen kiihdytysvaihe niin kuin Tuokon mallistakin. Jopa kahdesta testijuoksusta lasketut arvot antoivat hyvän sovituksen. Pidemmillä testimatkoilla mahdollinen ns. aerobinen eli hengitettyyn happeen perustuva vauhti tuli myöskin laskuista selvästi ilmi. Teoria ei ennusta kuinka pitkän matkan juoksija kykenee juoksemaan tällä tasapainovauhdilla. Luultavasti maratoonareiden käyttämä"tankkaus matkan varrella" tulisi matkan pidentyessä ennen pitkää tarpeelliseksi.

Tuokon mallissa suhde rajavauhti/aerobinen vauhti on $v_c / v_{aer} = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$. Se ei voi olla juoksijoista riippumaton luonnon vakio. Tuokon malli toimii parhaiten kriittistä matkaa pidemmillä matkoilla. Se ei lainkaan ennusta juoksijan maksimivauhtia. Mutta muissa malleissa ([4]…[7]) maailmanennätyksistä laskettuna suhde maksimivauhti/aerobinen vauhti, on $V/U = 11.15/6.43 \approx 1.73$. Tämä sama suhteen arvo oli testijuoksijallakin eli $v_{100\mathrm{m}}/v_{\mathrm{aer}} \approx 1.74$

Ennätysjuoksijoiden tuloksista lasketut arvot taulukossa 5 antavat eräänlaisen ryhmäkeskiarvon, joka ei välttämättä päde yksittäiseen ennätysjuoksijaan vaikka sovituksen tarkkuuden RMS-arvot olisivat hyvät.

Viitteet

[1] Reino Tuokko, *Urheilija luonnonlakien kahleissa*, WSOY, Porvoo-Helsinki, 1965, s. 1-36 ja 120–121.

[2] Keller, J.B., *A Theory of Competitive Running*. Physics Today 26 (1973) 9, s.42-47.

[3] Keller, J.B., *Optimal Velocity in Race*. American Mathematical Monthly 51 (1974) 5, s. 474-480.

[4] Holmlund, U., von Hertzen, R. ja Ranta, M.A., *Eräs pikajuoksun matemaattinen malli.* Arkhimedes 3/96, s. 8-13.

[5] Holmlund, U., von Hertzen, R., *Models of Sprinting based on Newton's second Law of Motion and their Comparison*, Journal of Structural Mechanics, Vol. 30, 1997, No 2. s. 7-16.

[6] von Hertzen, R., Holmlund, U., Rahikainen, A. and Ranta, M. A., *On the mathematical theory of competitive running*, Transworld Research Network. Biomechanics, 1(2003), Kerala, India.

[7] Ranta, M. A., *Optimaalinen kilpajuoksu*, Rakenteiden Mekaniikka, Vol 36, 2003, Nro 1. s. 22–37.

[8] Myrberg, P. J., *Differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirja*, Otava, Helsinki, 1952, s. 466.
[9] Juva, Y., *Todennäköisyyslaskennan alkeita*, Kirjayhtymä, Suomalaisen Kirjallisuuden Kirjapaino Oy, Helsinki, 1966, s. 145.
[10] Suomen Veteraaniurheiluliitto, http://www.svu.fi/ennatykset/
[11] Maailmanennätysjuoksut, IAAF International Association of Athletics Federation, http://www.iaaf.org/index.html
[12] Holmlund, U., Yksityiset keskustelut ja sähköpostin vaihto, 2008
[13] Espoon Rantamaraton 21.9.2008 http://www.rantamaraton.fi/tulokset.php → www.racetimer.se → 21.1 km naiset 60v (juoksijan kilpailunumero 1443)

Matti A Ranta
TKK, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
PL 100, 02015TKK
s-posti: matti.ranta@tkk.fi

Laila Hosia
Nallenpolku 2 C 38
02110 Espoo
s-posti: laila.hosia@gmail.com