

Kompleksimuodot, bi-ortogonaliteetti ja yleinen viskoosi vaimennus

Raimo von Herten

Tiivistelmä. Työssä tutkitaan ei-verrannollisesti vaimennetun diskreetin systeemin värähtelyjä. Ei-verrannollisen vaimennuksen tapauksessa ominaismuodot ovat kompleksisia ja perinteiset ortogonaalisuusrelaatiot eivät ole voimassa. Uudenlaiset bi-ortogonaalisuusrelaatiot voidaan kuitenkin muodostaa alkuperäisen ongelman ja sen kanssa adjungoidun ongelman ominaisvektoreiden avulla ensimmäisen kertaluvun tilamuuttujaesityksessä. Tämän ansiosta pakkovärähtelytilan ominaismuotokehityksessä termien välinen kytkentä voidaan poistaa. Tilamuuttujaesityksessä tilavektorin komponentit koostuvat yleistetyistä koordinaateista ja vastaavista yleistetyistä nopeuksista, joten tilavektorin komponentit eivät ole toisistaan riippumattomia. Kirjallisuuden mukaan tähän saattaa liittyä ongelmia pakkovärähtelytilan kompleksisessa ominaismuotokehityksessä. Tässä työssä osoitetaan, että tilavektorin komponenttien välinen riippuvuus ei aiheuta ongelmia, vaan kyseinen riippuvuus toteutuu likeyhtälöiden ratkaisun kautta automaattisesti. Esitettyä kompleksista ominaismuotoanalyysiä verrataan perinteiseen vaimentamattoman tai verrannollisesti vaimennetun systeemin ominaismuotoanalyysiin. Lisäksi osoitetaan, että ei-verrannollinen vaimennus tuottaa systeemin taajuusvastefunktion uuden kontribuution, jollaista ei verrannollisen vaimennuksen tapauksessa esiinny. Kompleksista ominaismuotoanalyysiä voidaan soveltaa myös gyroskooppiin ja sirkulatooriin systeemeihin. Menetelmää havainnollistetaan numeerisella esimerkillä.

Avainsanat: Ei-verrannollinen vaimennus, ei-itseadjungoitu, bi-ortogonaliteetti, riippumattomat kompleksimuodot, ominaismuotoanalyysi

Johdanto

Kaikissa värähtelevissä rakenteissa esiintyy vaimennusta, joka muuttaa rakenteen makroskooppista energiaa mikroskooppisten vapausasteiden energiaksi. Lukuisista tutkimuksista huolimatta vaimennuksen mekanismit ovat edelleenkin värähtelyanalyysin heikoiten tunnettu osa-alue eikä vaimennukselle ole voitu kehittää yhtä ainoata universaalia matemaattista mallia. Yksi syy tähän on se, että ei ole lainkaan selvää, mitkä tilamuuttujat vaikuttavat vaimennukseen. Yleisimmin käytetyn, alkuaan Rayleighin esittämän mallin mukaan vaimennus riippuu ainoastaan hetkellisistä yleistetyistä nopeuksista [1], jolloin pienten värähtelyjen tapauksessa päädytään lineaariseen viskoottiseen vaimennusmalliin ja vastaavaan vaimennusmatriisiin. On kuitenkin syytä korostaa, että tämä ei ole ainoa lineaarinen vaimennusmalli, vaan vaimennus voi riippua muistakin tilamuuttujista tai myös systeemin historiasta konvoluutiointegraalin kuvaamalla tavalla [2].

Vaimennusmekanismit voidaan karkeasti ottaen jakaa kolmeen luokkaan: koko materiaalin alueelle jakautunut energian kulutus (materiaalivaimennus), rakenteen

liitoksiin ja eri osien kontaktipintoihin keskittynyt vaimennus (reunavaimennus) ja rakenteen ympärillä olevan nesteen tai kaasun liikkeisiin liittyvä energiankulutus (väliaineen vaimennus). Materiaalivaimennus voi syntyä useiden mikrorakenteeseen liittyvien mekanismien tuloksena (kaso esim. [3]). Usein sitä kuten myös väliaineen vaimennusta voidaan kuvata tyydyttävästi ekvivalentin lineaarisen viskoosivaimennuksen avulla, joka on jakautunut koko materiaalin alueelle. Sitä vastoin reunavaimennus on tyypillisesti paikallista, esimerkiksi liitosten kontaktipintojen mikroluistosta aiheutuvaa, ja sen lisäksi useissa insinöörirakenteissa huomattavasti materiaalivaimennusta suurempaa, joten sen käytännön merkitystä ei voi jättää huomiotta.

Transientin tai epäharmonisen värähtelytilan kuvaamisessa on ominaismuotoanalyysillä (moodianalyysillä) ollut perinteisesti suuri merkitys. Itseadjungoidun systeemin ominaismuotoanalyysi on esitetty käytännöllisesti katsoen kaikissa värähtelymekaniikan oppikirjoissa. Ominaismuotojen ortogonaalisuusrelaatioiden avulla saadaan värähtelytilaa kuvaavan ominaismuotokehityksen kertoimet kytkettyä irti toisistaan, jolloin ratkaisu helpottuu huomattavasti. Tämä on mahdollista, mikäli systeemin vaimennus on verrannollista. Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että systeemin vaimennusmatriisi diagonalisoituu samalla kongruenssimuunnoksella kuin massa- ja jäykkyyssmatriisit. Merkittävä havainto on, että läheskään aina rakenteen vaimennus ei ole verrannollista. Useasta komponentista koostuvan insinöörirakenteen tapauksessa tämä on pikemminkin sääntö kuin poikkeus, sillä liitosten aiheuttama vaimennus on tyypillisesti ei-verrannollista.

Ei-verrannollisesti vaimennetulle ei-itseadjungoidulle systeemille voidaan hakea ajan suhteen eksponentiaalisella yrittellä ominaismuotoratkaisua. Saadut ominaisarvot ja -muodot tulevat kuitenkin kompleksisiksi eivätkä ominaismuodot enää ole systeemin massa- tai jäykkyyssmatriisin suhteen ortogonaalisia, joten muotojen välistä kytkentää ominaismuotokehityksessä ei saada purettua. Ongelma kuitenkin ratkeaa siirtymällä toisen kertaluvun liikeyhtälöistä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin tilamuuttujaesitystä käyttämällä. Tilamuuttujavektori muodostuu alkuperäisistä koordinaateista ja niiden aikaderivaatoista, jolloin myös kerroinmatriisien lineaariset dimensiot kaksinkertaistuvat. Kun tilamuuttujaesityksessä ratkaistaan sekä alkuperäisen että sen kanssa adjungoidun ongelman ominaisvektorit, voidaan osoittaa, että nämä ovat tilamuuttuja-avaruudessa toisiinsa nähden ortogonaalisia (ns. *bi-ortogonaliteetti*). Bi-ortogonaliteettia hyväksi käyttäen voidaan pakkovärähtelytilan ratkaisussa suorittaa jälleen kompleksimuotojen irtikytkentä, jolloin ongelman ratkaisu helpottuu huomattavasti.

Yleisimmin käytetyissä oppikirjoissa ei ole käsitelty ei-verrannollista vaimennusta eikä kompleksisia ominaismuotoja juuri lainkaan [4-9]. Poikkeuksena voidaan mainita Newlandin [10], Meirovitchin [11] ja Kellyn [12] oppikirjat. Newland esittelee yleisen lineaarisen viskoottisesti vaimennetun systeemin matemaattisen ratkaisun varsin perusteellisesti ja kompaktisti matriisiesitystä käyttäen. Kelly kehittää teorian ei-itseadjungoitujen operaattoreiden avulla sisätuloavaruuksissa. Nämä esitykset ovat matemaattisesti oikeita, mutta niiden kautta ei välity samanlaista selkeää ja havainnollista fysikaalista kuvaa kuin perinteisen ominaismuotoanalyysin kautta. Meirovitch esittää asian kompleksisten ominaisvektoreiden superpositiona, mikä

parhaiten vastaa perinteistä ominaisuotoanalyysiä. Esitys kompleksivektoreina jää kuitenkin hieman abstraktiksi eikä lähempää vertailua perinteiseen ominaisuotoanalyysiin suoriteta. Aihetta on lisäksi käsitelty vastaavalla tavalla useissa julkaisuissa, katso esim. [13-19]. On syytä huomata, että kompleksista ominaisuotoanalyysiä voidaan soveltaa paitsi ei-vertailemattomasti vaimennettuihin myös gyroskooppisiin ja sirkulatorisiin systeemeihin.

Tässä työssä esitetään kompleksinen ominaisuotoanalyysi lähinnä viitteiden [10,11] parhaita puolia yhdistämällä ja laajentamalla siten, että ensimmäistä kertaa muodostuu yhtenäinen kuva, jota on helppo verrata perinteiseen ominaisuotoanalyysiin. Sen lisäksi todistetaan, että tilaesitykseen liittyvä tilavektorin komponenttien välinen yhteys (so. tilavektorin jälkimmäinen puolisko on ensimmäisen puoliskon aikaderivaatta) ei aiheuta ongelmia kompleksisessa ominaisvektorikehitelmässä. Tätä ei ole todistettu yhdessäkään edellä mainitussa viitteessä, vaikkakin se on mainittu mahdollisena ongelmana viitteissä [17,18]. Numeerisena esimerkkinä käsitellään ei-vertailemattomasti vaimennettun rakennuksen dynaamista vastetta.

Teoria

Tilamuoto, ominaisvektorit ja adjungoitu ongelma

Tarkastellaan yleistä värähtelevää lineaarista systeemiä, jolla on N kappaletta riippumattomia vapausasteita. Systeemin liikeyhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$M \ddot{\mathbf{X}} + C \dot{\mathbf{X}} + K \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

missä M on systeemin massamatriisi, C vaimennusmatriisi ja K jäykkyysmatriisi (symmetrisiä $N \times N$ -matriiseja) ja \mathbf{F} ulkoinen voimavektori ($N \times 1$ -vektori). Tässä C on täysin yleinen symmetrinen matriisi, joten vaimennus voi olla myös ei-vertailemattomaa. Todetaan, että on voimassa

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \ddot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}\mathbf{F} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

missä 0 on $N \times N$ -nollamatriisi, $\mathbf{0}$ on $N \times 1$ -nollavektori ja I on $N \times N$ -yksikkö-matriisi. Havaitaan, että ylempi puolisko tuottaa identiteetin $\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}$ ja alempi puolisko palauttaa alkuperäiset liikeyhtälöt (1). Tässä on oletettu, että massamatriisi M on ei-singulaarinen, jolloin sen käänteismatriisi on olemassa. Muunnetaan liikeyhtälöt tilaesitykseen, joten määritellään aluksi $2N \times 1$ tilavektori

$$\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Yhtälöt (2) voidaan kirjoittaa nyt lyhyesti muodossa

$$\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y} + \mathbf{f}, \quad (4)$$

missä $2N \times 2N$ -kerroinmatriisi A ja voimavektorista aiheutuva $2N \times 1$ -vektori \mathbf{f} ovat muotoa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1}\mathbf{F} \end{Bmatrix}. \quad (5), (6)$$

Tarkastellaan aluksi systeemin vapaita värähtelyjä ja haetaan ratkaisua muodossa

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}e^{\lambda t}, \quad (7)$$

missä \mathbf{U} on $2N \times 1$ -vektori. Sijoitus yhtälöön (4) antaa ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$)

$$A\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}. \quad (8)$$

Kyseessä on reaalisen matriisin A ominaisarvotehtävä, jonka numeerinen ratkaisu onnistuu yleensä helposti. Ominaisarvot λ määräytyvät yhtälöstä $\det(A - \lambda I) = 0$. Koska A ei ole symmetrinen matriisi, on sen ominaisarvoista ainakin osa yleisessä tapauksessa kompleksisia, jolloin vastaavat ominaisvektorit tulevat myös kompleksiksi. Kerroinmatriisin A reaalisuudesta johtuen on helppo todeta yhtälö (8) konjugoimalla, että jos \mathbf{U} ja λ toteuttavat yhtälön (8), niin myös \mathbf{U}^* ja λ^* toteuttavat sen, missä $*$ tarkoittaa kompleksista konjugaattia. Näin ollen matriisin A kompleksiset ominaisarvot ja $-$ vektorit esiintyvät konjugaattipareina. Tämän lisäksi voi esiintyä reaalisia ominaisarvoja ja $-$ vektoreita. Yhtälöstä (3) johtuen eivät ominaisvektorin \mathbf{U} komponentit ole toisistaan riippumattomia. Merkitään

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{(up)} \\ \mathbf{U}^{(low)} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

missä $\mathbf{U}^{(up)}$ ja $\mathbf{U}^{(low)}$ ovat $N \times 1$ -vektoreita. Kun ratkaisu $\mathbf{U}e^{\lambda t}$ sijoitetaan yhtälöön (4) ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), saadaan

$$\mathbf{U}^{(low)} = \lambda\mathbf{U}^{(up)}, \quad (10)$$

$$M \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{U}^{(up)} e^{\lambda t}) + C \frac{d}{dt}(\mathbf{U}^{(up)} e^{\lambda t}) + K(\mathbf{U}^{(up)} e^{\lambda t}) = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Tästä nähdään, että

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}^{(up)} e^{\lambda t} \quad (12)$$

on alkuperäisen likeyhtälön ratkaisu eli vapaan värähtelyn ominaismuotoratkaisu. Mikäli $\mathbf{U}^{(up)}$ ja λ ovat kompleksisia, on myös \mathbf{X} kompleksinen, joten se ei ole varsinainen fysikaalinen ratkaisu. Yhdistämällä ratkaisuja $\mathbf{U}^{(up)}$, λ ja $\mathbf{U}^{(up)*}$, λ^* vastaavat ominaismuotoratkaisut saadaan reaalinen fysikaalinen ratkaisu

$$\mathbf{X}_{real} = \mathbf{U}^{(up)} e^{\lambda t} + \mathbf{U}^{(up)*} e^{\lambda^* t} = 2 \operatorname{Re}(\mathbf{U}^{(up)} e^{\lambda t}). \quad (13)$$

Yhtälöstä (10) nähdään edelleen, että ominaismuoto \mathbf{U} on muotoa

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{(up)} \\ \lambda \mathbf{U}^{(up)} \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

kuten yhtälöiden (3) ja (7) nojalla pitääkin olla.

Ominaisvektoreiden bi-ortogonaliteetti

Palautetaan aluksi mieliin, että verrannollisesti vaimennetun systeemin tapauksessa liikeyhtälöstä

$$M \ddot{\mathbf{X}} + C \dot{\mathbf{X}} + K \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (15)$$

voidaan koordinaattien välinen kytkentä poistaa muunnoksella $\mathbf{X} = U \mathbf{q}$, missä U on vastaavan vaimentamattoman ongelman ominaismuotovektoreista muodostettu $N \times N$ -matriisi ja $N \times 1$ -vektori \mathbf{q} sisältää ominaismuotokoordinaatit [8]. Kytkennän häviäminen perustuu siihen, että matriisit $U^T M U$, $U^T C U$ ja $U^T K U$ ovat kaikki diagonaalisia eli matriisit M , C ja K diagonalisoituvat samalla kongruenssimuunnoksella, jolloin ominaismuodot \mathbf{u}_n ($n = 1, \dots, N$) toteuttavat perinteiset ortogonaalisuusrelaatiot

$$\mathbf{u}_n^T M \mathbf{u}_m = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = m \\ 0, & \text{kun } n \neq m \end{cases}. \quad (16)$$

Viitteessä [20] on osoitettu, että välttämätön ja riittävä ehto sille, että näin tapahtuu, on

$$C M^{-1} K = K M^{-1} C. \quad (17)$$

Riittävä, mutta ei kuitenkaan välttämätön, ehto yhtälön (17) toteutumiseksi on, että vaimennusmatriisi on muotoa $C = \alpha M + \beta K$. Toisaalta on helppoa todeta, että yleisen symmetrisen vaimennusmatriisin C tapauksessa ehto (17) ei toteudu, joten yllä mainitulla kongruenssimuunnoksella ei liikeyhtälöiden kytkentää voida purkaa.

Ei-verrannollisesti vaimennetun systeemin tapauksessa on koordinaattien välisen kytkennän purkamiseksi ratkaistava tilamuuttujasityksessä alkuperäisen ominaisarvo-yhtälön (8) rinnalla yhtälö

$$A^T \mathbf{V} = \mu \mathbf{V}, \quad (18)$$

missä T tarkoittaa transpoosia. Tämä on itse asiassa yhtälön (8) adjungoitu yhtälö, sillä on helppoa osoittaa, että matriisioperaattorin A adjungoitu operaattori on A^T [12]. Ominaisarvot μ määräytyvät ehdosta $\det(A^T - \mu I) = 0$. Koska on voimassa

$$0 = \det(A^T - \mu I) = \det[(A - \mu I)^T] = \det(A - \mu I), \quad (19)$$

määräytyvät ominaisarvot μ täsmälleen samasta karakteristisesta yhtälöstä kuin alkuperäisen ongelman ominaisarvot λ , joten ne ovat samoja (eli $\{\mu\} = \{\lambda\}$). Aivan kuten edellä voidaan todeta, että jos \mathbf{V} ja μ toteuttavat yhtälön (18), niin myös \mathbf{V}^* ja μ^* toteuttavat sen, koska A^T on reaalinen matriisi.

Tarkastellaan nyt alkuperäisen ongelman ja adjungoidun ongelman ominaisarvotekävien ratkaisuja \mathbf{U} , λ ja \mathbf{V} , μ (yhtälöt (8) ja (18)). Kerrotaan yhtälö (8) vasemmalta vektorilla \mathbf{V}^T sekä yhtälö (18) vasemmalta vektorilla \mathbf{U}^T ja transponoidaan näin saatu yhtälö. Tällöin saadaan yhtälöt

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{V}^T\mathbf{U}, \quad (20)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{V} = \mu\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{U}^T\mathbf{A}^T\mathbf{V} = \mu\mathbf{U}^T\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{U} = \mu\mathbf{V}^T\mathbf{U}. \quad (21)$$

Vähentämällä ylemmästä yhtälöstä alempi saadaan

$$0 = (\lambda - \mu)\mathbf{V}^T\mathbf{U}. \quad (22)$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbf{V}^T\mathbf{U} = 0, \text{ kun } \lambda \neq \mu. \quad (23)$$

Näin ollen voidaan todeta, että alkuperäisen ongelman ja sen kanssa adjungoidun ongelman ominaisvektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa vektoriavaruuden \mathbb{C}^{2N} tavanomaisen sisätulon (tässä ilman toisen tekijän konjugointia!) mielessä, mikäli ominaisvektoreita vastaavat ominaisarvot ovat eri suuret. Tätä tulosta kutsutaan ominaisvektoreiden *bi-ortogonaliteetiksi*. Bi-ortogonaliteetin nojalla voidaan pakko-värähtelytilan ratkaisussa poistaa ominaisvektoreiden välinen kytkentä, kuten jatkossa osoitetaan.

Vapaat värähtelyt ja alkuehto

Rajoitutaan seuraavassa käytännössä yleisimpään tapaukseen, jossa alkuperäisen ongelman ominaisvektorit \mathbf{U}_n ($n = 1, 2, \dots, 2N$) ovat lineaarisesti riippumattomia, jolloin ne virittävät $2N$ -ulotteisen kompleksisen vektoriavaruuden \mathbb{C}^{2N} . Vapaan systeemin ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) yleinen tila voidaan siis esittää ratkaisuiden (7) lineaarikombinaationa

$$\mathbf{Y} = \sum_{n=1}^{2N} c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{U}_n \quad (24)$$

eli täydellisemmin kirjoitettuna

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{2N} c_n e^{\lambda_n t} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n^{(up)} \\ \lambda_n \mathbf{U}_n^{(up)} \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

Alkuperäiset vapausasteet \mathbf{X} (ks. yhtälö (1)) on siis lausuttu muodossa

$$\mathbf{X} = \sum_{n=1}^{2N} c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{U}_n^{(up)}. \quad (26)$$

Olkoon systeemin alkuehto $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, $\dot{\mathbf{X}}(0) = \dot{\mathbf{X}}_0$ annettu, jolloin tilavektorin alkuehto on

$$\mathbf{Y}(0) = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}(0) \\ \dot{\mathbf{X}}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \dot{\mathbf{X}}_0 \end{Bmatrix}. \quad (27)$$

Nyt voidaan ratkaista vapaan tilan kehittämäkertoimet. Kirjoitetaan yhtälö (24) hetkellä $t = 0$ ja kerrotaan näin saatu yhtälö vasemmalta vektorilla \mathbf{V}_m^T , jolloin saadaan

$$\mathbf{V}_m^T \mathbf{Y}(0) = \sum_{n=1}^{2N} c_n \mathbf{V}_m^T \mathbf{U}_n = \sum_{n=1}^{2N} c_n \delta_{mn} = c_m. \quad (28)$$

Tässä on oletettu, että samaan ominisarvoon λ_m liittyvien ominaisvektorien \mathbf{U}_m ja \mathbf{V}_m normeeraus on suoritettu siten, että niiden sisätulo on yksi (eli $\mathbf{V}_m^T \mathbf{U}_m = 1$). Näin ollen alkuehdot (27) toteuttavaksi vapaan liikkeen ratkaisuksi saadaan tilamuodossa

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{V}_n^T \mathbf{Y}(0) e^{\lambda_n t} \mathbf{U}_n \quad (29)$$

ja alkuperäisissä koordinaateissa

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{n=1}^{2N} \mathbf{V}_n^T \mathbf{Y}(0) e^{\lambda_n t} \mathbf{U}_n^{(up)}. \quad (30)$$

Todetaan seuraavaksi, että tämä ratkaisu on aina reaalinen, vaikka summassa esiintyvät termit voivat olla myös kompleksisia. Kuten aikaisemmin on jo todettu, esiintyvät karakteristisen yhtälön juuret joko reaalijuurina tai kompleksikonjugaattipareina. Merkitään reaalisia juuria alaindeksillä i ja kompleksisia konjugaattipareja alaindeksillä j varustettuina, ts. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ja $\lambda_j, \lambda_j^* \in \mathbb{C}$. Summa (30) voidaan nyt kirjoittaa muodossa ($c_j = \mathbf{V}_j^T \mathbf{Y}(0)$)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{U}_i^{(up)} + \sum_j \left(c_j e^{\lambda_j t} \mathbf{U}_j^{(up)} + c_j^* e^{\lambda_j^* t} \mathbf{U}_j^{(up)*} \right) \\ &= \sum_i c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{U}_i^{(up)} + 2 \operatorname{Re} \sum_j c_j e^{\lambda_j t} \mathbf{U}_j^{(up)}, \end{aligned} \quad (31)$$

missä on käytetty hyväksi sitä, että myös ominaisvektorit \mathbf{V}_j esiintyvät konjugaattipareina. Mikäli kaikki karakteristisen yhtälön juuret ovat kompleksisia (reaalisia), puuttuu yhtälöstä (31) luonnollisesti ensimmäinen (toinen) summalauseke. Yhtälön (31) mukainen lauseke on reaalinen, sillä alkuehtovektori $\mathbf{Y}(0)$ on aina reaalinen ja reaalista ominisarvoa vastaavat ominaisvektorit \mathbf{U}_i ja \mathbf{V}_i ovat reaalisia. Ensimmäinen summa-

lauseke koostuu eksponentiaalisesti vähenevistä ($\lambda_i < 0$), kasvavista ($\lambda_i > 0$) tai jäykän kappaleen liikkeen ($\lambda_i = 0$) termeistä. Jälkimmäisen summalausekkeen muokkamiseksi kirjoitetaan kompleksiset ominaisarvot muodossa

$$\lambda_j = \alpha_j + j\beta_j. \quad (32)$$

Kun käytetään merkintöjä

$$\mathbf{U}_j^{(up)} = \begin{Bmatrix} |u_1^{(j)}| e^{j\psi_1^{(j)}} \\ |u_2^{(j)}| e^{j\psi_2^{(j)}} \\ \vdots \\ |u_N^{(j)}| e^{j\psi_N^{(j)}} \end{Bmatrix} \quad \text{ja} \quad c_j = |c_j| e^{j\phi_j}, \quad (33), (34)$$

saadaan yhtälön (31) jälkimmäiselle summalausekkeelle (ratkaisun värähtelevä osa) muoto

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{vib}(t) &= 2 \sum_j e^{\alpha_j t} \operatorname{Re} \left(c_j e^{j\beta_j t} \mathbf{U}_j^{(up)} \right) \\ &= 2 \sum_j e^{\alpha_j t} \operatorname{Re} \left\{ |c_j| \begin{Bmatrix} |u_1^{(j)}| e^{j(\beta_j t + \phi_j + \psi_1^{(j)})} \\ |u_2^{(j)}| e^{j(\beta_j t + \phi_j + \psi_2^{(j)})} \\ \vdots \\ |u_N^{(j)}| e^{j(\beta_j t + \phi_j + \psi_N^{(j)})} \end{Bmatrix} \right\} = 2 \sum_j e^{\alpha_j t} |c_j| \begin{Bmatrix} |u_1^{(j)}| \cos(\beta_j t + \phi_j + \psi_1^{(j)}) \\ |u_2^{(j)}| \cos(\beta_j t + \phi_j + \psi_2^{(j)}) \\ \vdots \\ |u_N^{(j)}| \cos(\beta_j t + \phi_j + \psi_N^{(j)}) \end{Bmatrix}. \quad (35) \end{aligned}$$

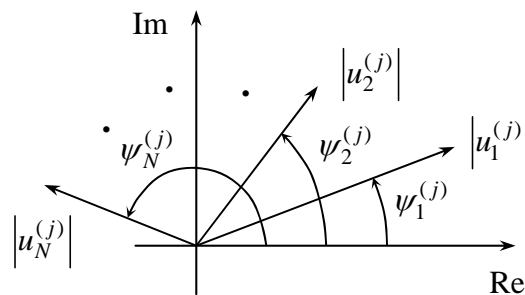
Todetaan, että suuret α_j ja β_j määräytyvät ominaisarvotehtävän ominaisarvoista, suuret $|u_k^{(j)}|$ ja $\psi_k^{(j)}$ ($k=1, \dots, N$) ominaisvektoreista ja suuret $|c_j|$ ja ϕ_j liikkeen alkuehdoista. Mikäli systeemi on vaimentamaton tai verrannollisesti vaimennettu, on ratkaisu tunnetusti muotoa [8]

$$\mathbf{X}_{vib} = 2 \sum_j e^{\alpha_j t} |c_j| \cos(\beta_j t + \phi_j) \begin{Bmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ \vdots \\ u_N^{(j)} \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

Yhtälöstä (36) nähdään, että verrannollisesti vaimennetun systeemin vapaa värähtely voidaan lausua reaalisten ominaismuotojen $[u_1^{(j)} \ u_2^{(j)} \ \dots \ u_N^{(j)}]^T$ lineaarikombinaationa. Kukaan ominaismuoto suorittaa eksponentiaalisesti vaimenevaa (tai kasvavaa) harmonista värähtelyliikettä. Yleensä ratkaisun (36) yhteydessä käytetään merkintöjä [8]

$$\alpha_j = -\zeta_j \omega_j, \beta_j = \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \Leftrightarrow \omega_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, \zeta_j = -\frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}}. \quad (37)$$

Tässä ζ_j edustaa ominaisuuden j suhteellista vaimennusvakiota ja ω_j vaimentamaton ominaiskulmataajuutta. Ei-verrannollisesti vaimennetun systeemin vapaita värähtelyjä kuvaa yhtälö (35). Havaitaan, että systeemin vapausasteet värähtelevät nyt yleensä eri vaiheissa, kun taas yhtälön (36) tapauksessa kaikki vapausasteet värähtelevät joko samassa tai vastakkaisessa vaiheessa. Erilaisten vaiheiden takia ei yhtälössä (35) cosini-funktioita saada vektorista ulos yhteiseksi tekijäksi. Vapausasteet värähtelevät kuitenkin samalla kulmataajuudella β_j ja suhteellisia värähtelyamplitudeja voidaan edelleen kuvata suureilla $|u_1^{(j)}|, |u_2^{(j)}|, \dots, |u_N^{(j)}|$. Näin ollen ominaisuudet ovat edelleen olemassa, vaikkakaan eivät aivan yhtä ”staattisessa” mielessä kuin verrannollisesti vaimennetulla systeemillä. Erityisesti voidaan todeta, että ominaisuusmuotojen solmupisteet (pistemassojen välisten interpolaatioiden nollakohdat) eivät pysy paikoillaan vaan liikkuvat jatkuvasti ja että jopa solmupisteiden lukumäärä voi muuttua liikkeen aikana. Havaitaan, että yhtälön (33) mukaiset vektorit $\mathbf{U}_j^{(up)}$ sisältävät kaiken ratkaisussa (35) esiintyviin ominaisuusmuotoihin liittyvän amplitudi- ja vaihetiedon. Näin ollen niitä voidaan kutsua systeemin *kompleksisiksi ominaisuusmuodoiksi*. Niiden fysikaalinen merkitys käy ilmi yhtälöstä (35) ja kuvan 1 mukaisesta osoitin-diagrammista. Ratkaisusta (35) nähdään, että ei-verrannollisesti vaimennetun systeemin ominaisuusmuotoon j liittyy eksponentiaalinen vaimennusvakio $-\alpha_j$ ja vaimennettu ominaiskulmataajuus β_j . Nämä saadaan tilamuotoisen ominaisarvotehtävän (8) ratkaisuna. Näin ollen ominaisuusmuotojen suhteelliset vaimennusvakiot ja vaimentamattomat ominaiskulmataajuudet saadaan laskettua suoraan yhtälöistä (37) eikä suhteellisille vaimennusvakioille ζ_j tarvitse esittää irrallisia arvioita, kuten usein tehdään verrannollisesti vaimennettuja malleja käytettäessä.



Kuva 1. Kompleksisen ominaisuuden osoittimesitys ei-verrannollisesti vaimennetulle systeemille. Yhtälö (35) vastaa tilannetta, jossa osoittimien vaihekulmiin lisätään kulma $\beta_j t + \phi_j$. Tällöin osoittimet pyörivät origon ympäri kulmanopeudella β_j . Koordinaattien fysikaaliset arvot saadaan projisioimalla osoittimet reaaliakselille ajan funktiona. Verrannollisesti vaimennetun systeemin tapauksessa osoittimien vaihekulmat ovat joko yhtäsuuria tai poikkeavat toisistaan kulman π verran, jolloin osoittimet kulkevat pitkin suoraa. Normeerauksen avulla tämä suora voidaan kääntää reaaliakselin suuntaiseksi, joten verrannollisesti vaimennetun systeemin ominaisuudet voidaan valita reaalisiksi.

Pakkovärähtelyt

Myös pakkovärähtelytilanteen yleinen tila voidaan esittää ominaisvektoreiden (7) lineaarikombinaationa, sillä ominaisvektorit \mathbf{U}_n ($n=1,2,\dots,2N$) oletettiin lineaarisesti riippumattomiksi, jolloin ne virittävät $2N$ -ulotteisen kompleksisen vektoriavaruuden \mathbb{C}^{2N} . Voidaan siis kirjoittaa

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{n=1}^{2N} c_n(t) \mathbf{U}_n. \quad (38)$$

Kun yrite (38) sijoitetaan liikeyhtälöön

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{f}, \quad (39)$$

ja käytetään hyväksi yhtälöä (8), saadaan

$$\sum_{n=1}^{2N} \dot{c}_n(t) \mathbf{U}_n = \sum_{n=1}^{2N} c_n(t) \mathbf{A} \mathbf{U}_n + \mathbf{f} = \sum_{n=1}^{2N} c_n(t) \lambda_n \mathbf{U}_n + \mathbf{f} \quad (40)$$

ja edelleen puolittain vektorilla \mathbf{V}_m^T kertomalla

$$\sum_{n=1}^{2N} \dot{c}_n(t) \underbrace{\mathbf{V}_m^T \mathbf{U}_n}_{\delta_{mn}} = \sum_{n=1}^{2N} c_n(t) \lambda_n \underbrace{\mathbf{V}_m^T \mathbf{U}_n}_{\delta_{mn}} + \mathbf{V}_m^T \mathbf{f} \quad \text{eli} \quad \dot{c}_m(t) = \lambda_m c_m(t) + \mathbf{V}_m^T \mathbf{f}. \quad (41)$$

Kun määritellään modaalinen kuormavektori

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{V}_m^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m^{(up)T} & \mathbf{V}_m^{(low)T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \mathbf{V}_m^{(low)T} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \quad (42)$$

ja vaihdetaan indeksi $m \rightarrow n$, voidaan kehittämäkertoimien differentiaaliyhtälöt kirjoittaa muodossa

$$\dot{c}_n(t) = \lambda_n c_n(t) + f_n(t) \quad (n=1, \dots, 2N). \quad (43)$$

Tämän ratkaisu on

$$c_n(t) = A_n e^{\lambda_n t} + e^{\lambda_n t} \int_0^t e^{-\lambda_n \tau} f_n(\tau) d\tau \quad (n=1, \dots, 2N). \quad (44)$$

Alkuehdosta $\mathbf{Y}(0) = [\mathbf{X}_0^T \quad \dot{\mathbf{X}}_0^T]^T$ seuraa nyt

$$\mathbf{Y}(0) = \sum_{n=1}^{2N} c_n(0) \mathbf{U}_n = \sum_{n=1}^{2N} A_n \mathbf{U}_n \quad (45)$$

ja yhtälön (28) tapaan edelleen

$$A_n = \mathbf{V}_n^T \mathbf{Y}(0). \quad (46)$$

Lopullinen ratkaisu on näin ollen

$$\mathbf{Y}(t) = \sum_{n=1}^{2N} e^{\lambda_n t} \left[\mathbf{V}_n^T \mathbf{Y}(0) + \int_0^t e^{-\lambda_n \tau} f_n(\tau) d\tau \right] \mathbf{U}_n. \quad (47)$$

Tulos (47) ilmaisee ei-verrannollisesti vaimennetun systeemin pakkovärähtelytilan ratkaisun vapaan värähtelyn ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa ilman ominaisvektoreiden välistä kytkentää.

Ratkaisun ristiriidattomuus

Kun otetaan huomioon yhtälöt (3) ja (14), seuraa ratkaisusta (47) yhtälöt

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{n=1}^{2N} e^{\lambda_n t} \left[\mathbf{V}_n^T \mathbf{Y}(0) + \int_0^t e^{-\lambda_n \tau} f_n(\tau) d\tau \right] \mathbf{U}_n^{(up)}, \quad (48)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \sum_{n=1}^{2N} e^{\lambda_n t} \left[\mathbf{V}_n^T \mathbf{Y}(0) + \int_0^t e^{-\lambda_n \tau} f_n(\tau) d\tau \right] \lambda_n \mathbf{U}_n^{(up)}. \quad (49)$$

On merkille pantavaa, että yhtälöstä (48) saadaan ajan suhteen derivoimalla nopeudet $\dot{\mathbf{X}}(t)$, jotka toisaalta saadaan suoraan yhtälöstä (49). Ovatko näin saadut tulokset yhtäpitävät? Useimmissa viitteissä tähän asiaan ei ole kiinnitetty mitään huomiota [10-12,16,19]. Viitteessä [18], joka käsittelee pistemassan liikettä pitkin taipuisaa kaapelia, vastaava ongelma mainitaan ja osoitetaan, että ristiriitaa ei ole. Seuraavassa osoitetaan yleisesti, että tässä työssä käsiteltävässä diskreetissä tapauksessa tulokset (48) ja (49) ovat yhtäpitävät. Kun yhtälö (48) derivoidaan ajan suhteen, saadaan

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \sum_{n=1}^{2N} \left\{ \lambda_n e^{\lambda_n t} \left[\mathbf{V}_n^T \mathbf{Y}(0) + \int_0^t e^{-\lambda_n \tau} f_n(\tau) d\tau \right] + f_n(t) \right\} \mathbf{U}_n^{(up)}. \quad (50)$$

Jotta tämä antaisi saman tuloksen kuin yhtälö (49), on oltava

$$\sum_{n=1}^{2N} f_n(t) \mathbf{U}_n^{(up)} = 0 \quad (51)$$

mielivaltaisella kuormalla $f_n(t)$. Kun tähän sijoitetaan yhtälön (42) mukainen kuorma-vektori, käytetään lyhennysmerkintää $\alpha_i = (M^{-1} \mathbf{F}(t))_i$ ($i=1, \dots, N$) ja sievennetään, saadaan yhtälön (51) vasemmaksi puoleksi lauseke

$$\sum_{n=1}^{2N} \mathbf{V}_n^{(low)\top} M^{-1} \mathbf{F}(t) \mathbf{U}_n^{(up)} = \sum_{i=1}^N a_i \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^{2N} V_{in}^{(low)} U_{1n}^{(up)} \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{2N} V_{in}^{(low)} U_{Nn}^{(up)} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N a_i \begin{Bmatrix} (VU^T)_{(N+i)1} \\ \vdots \\ (VU^T)_{(N+i)N} \end{Bmatrix}, \quad (52)$$

missä on käytetty alkuperäisen ongelman ja adjungoidun ongelman $2N \times 2N$ -ominaisvektorimatriiseja

$$U = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{U}_{2N}] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1,2N} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2,2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{2N,1} & U_{2N,2} & \cdots & U_{2N,2N} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

$$V = [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{V}_{2N}] = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1,2N} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2,2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{2N,1} & V_{2N,2} & \cdots & V_{2N,2N} \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Ominaisvektoreiden ortogonaalisuudesta ja normeerauksesta (eli $\mathbf{V}_m^T \mathbf{U}_n = \delta_{mn}$) johtuen on ominaisvektorimatriiseille voimassa

$$V^T U = I_{2N \times 2N}. \quad (55)$$

Näin ollen $V^T = U^{-1}$, joten $V = (U^{-1})^T = (U^T)^{-1}$ ja edelleen

$$VU^T = I_{2N \times 2N} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Havaitaan, että lausekkeessa (52) esiintyy ainoastaan matriisin VU^T vasemman alaneljänneksen alkioita, jotka ovat kaikki nollia. Näin ollen yhtälö (51) on aina voimassa, joten ratkaisu (47) on sisäisesti ristiriidaton.

Vertailu perinteiseen moodianalyysiin

Yhtälön (48) mukainen ratkaisu sisältää ei-vertaillisen vaimennuksen tapauksessa yleensä kompleksisia suureita, sillä yleensä ainakin osa ominaisarvoista ja ominaisvektoreista on kompleksisia. Fysikaalisiin alkueteihin sovitettu ratkaisu $\mathbf{X}(t)$ on luonnollisesti reaalin. Muokataan ratkaisun lauseketta siten, että ratkaisun reaalisuus on suoraan nähtävissä. Summa voidaan jakaa aivan yhtälön (31) tapaan reaalisia ominaisarvoja λ_i ja kompleksisia ominaisarvopareja λ_j, λ_j^* vastaaviin osiin, jolloin saadaan

$$\mathbf{X}(t) = \sum_i c_i(t) \mathbf{U}_i^{(up)} + 2 \operatorname{Re} \sum_j c_j(t) \mathbf{U}_j^{(up)}, \quad (57)$$

missä kehitelmäkertoimet ovat nyt muotoa

$$c_n(t) = \left(\mathbf{V}_n^T \mathbf{Y}(0) + \int_0^t e^{-\lambda_n \tau} f_n(\tau) d\tau \right) e^{\lambda_n t}. \quad (58)$$

Alkuehtoa $\mathbf{Y}(0)$ vastaavat termit voidaan lausua kuten aikaisemmin (ks. yhtälöt (31)-(35)). Ulkoista voimaa vastaava ratkaisun osa on

$$\mathbf{X}_f(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} f_i(\tau) d\tau \mathbf{U}_i^{(up)} + 2 \operatorname{Re} \sum_j \int_0^t e^{\lambda_j(t-\tau)} f_j(\tau) d\tau \mathbf{U}_j^{(up)}. \quad (59)$$

Ensimmäinen summa koostuu yksinomaan eksponentiaalisesti pienenevistä (tai kasvavista) termeistä, kun taas jälkimmäinen summa sisältää myös harmonisesti värähteleviä tekijöitä. Kun merkitään yhtälön (33) kanssa analogisesti

$$\mathbf{V}_j^{(low)} = \begin{Bmatrix} |v_1^{(j)}| e^{j\theta_1^{(j)}} \\ |v_2^{(j)}| e^{j\theta_2^{(j)}} \\ \vdots \\ |v_N^{(j)}| e^{j\theta_N^{(j)}} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

ja käytetään modaalin kuormavektorin lauseketta (42), saadaan yhtälön (59) jälkimmäinen summa sievennysten jälkeen muotoon

$$\mathbf{X}_{f vib} = 2 \sum_j \begin{Bmatrix} |u_1^{(j)}| \int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)} \sum_{k=1}^N |v_k^{(j)}| (M^{-1} \mathbf{F})_k(\tau) \cos[\beta_j(t-\tau) + \psi_1^{(j)} + \theta_k^{(j)}] d\tau \\ \vdots \\ |u_N^{(j)}| \int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)} \sum_{k=1}^N |v_k^{(j)}| (M^{-1} \mathbf{F})_k(\tau) \cos[\beta_j(t-\tau) + \psi_N^{(j)} + \theta_k^{(j)}] d\tau \end{Bmatrix}, \quad (61)$$

missä j -summaus käy yli ominaisarvojen konjugaattiparien. Havaitaan, että vasteen värähtelevä osa sisältää konvoluutiointegraalin tyyppisiä suuria kompleksisten ominaismuotojen itseisarvojen $|u_1^{(j)}|, \dots, |u_N^{(j)}|$ tekijöinä. Näitä ei kuitenkaan saada pystyvektorista yhteiseksi tekijäksi vaihekulmista $|\psi_1^{(j)}|, \dots, |\psi_N^{(j)}|$ johtuen, joten komponentit värähtelevät toisiinsa nähden eri vaiheessa. Yhtälön (61) ilmaisema ratkaisu osoittaa havainnollisesti, kuinka ei-verrannollisesti vaimennetun systeemin pakkovärähtelytilan ratkaisu muodostuu, kun systeemiä ajaa ulkoinen voima $\mathbf{F}(\tau)$.

Erityisesti voidaan todeta, että ratkaisun komponenttien vaiheisiin vaikuttavat sekä kompleksisten ominaismuotojen $\mathbf{U}_j^{(up)}$ vaiheet $|\psi_1^{(j)}|, \dots, |\psi_N^{(j)}|$ että adjungoidun ongelman ominaisvektorien alempien puoliskojen $\mathbf{V}_j^{(low)}$ vaiheet $\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_N^{(j)}$.

Verrannollinen vaimennus ja Duhamelin integraali

Osoitetaan seuraavaksi, että ratkaisu (61) redusoituu verrannollisen vaimennuksen tapauksessa perinteiseen Duhamelin integraalin avulla lausuttuun ominaismuoto-ratkaisuun [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{Duh} &= \sum_j \left\{ \begin{array}{c} u_1^{(j)} \\ \vdots \\ u_N^{(j)} \end{array} \right\} \frac{1}{\omega_{dj}} \int_0^t e^{-\zeta_j \omega_j (t-\tau)} \sum_{k=1}^N u_k^{(j)} \mathbf{F}_k(\tau) \sin \omega_{dj} (t-\tau) d\tau \\ &= \sum_j \mathbf{u}_j \frac{1}{\omega_{dj}} \int_0^t e^{-\zeta_j \omega_j (t-\tau)} \mathbf{u}_j^T \mathbf{F}(\tau) \sin \omega_{dj} (t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (62)$$

missä vaimentamattoman (ja verrannollisesti vaimennetun) systeemin ominaismuodot $\mathbf{u}_j^T = [u_1^{(j)}, \dots, u_N^{(j)}]$ toteuttavat perinteisen massaortonormeerausehdon

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j = \delta_{ij}. \quad (63)$$

Kun otetaan lähtökohdaksi ratkaisun muoto (59) ja modaalin kuormavektori (42), saadaan

$$\mathbf{X}_{fvib}(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_j \int_0^t e^{\lambda_j (t-\tau)} \mathbf{V}_j^{(low)T} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{U}_j^{(up)} d\tau. \quad (64)$$

Lasketaan nyt suure $\mathbf{V}_j^{(low)T} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}(\tau)$, kun vaimennus muuttuu verrannolliseksi. Yhtälöistä (23) ja (14) seuraa

$$[\mathbf{U}_i^{(up)T} \lambda_i \mathbf{U}_i^{(up)T}] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{V}_i^{(up)} \\ \mathbf{V}_i^{(low)} \end{array} \right\} = 1 \quad \text{eli} \quad \mathbf{U}_i^{(up)T} (\mathbf{V}_i^{(up)} + \lambda_i \mathbf{V}_i^{(low)}) = 1. \quad (65)$$

Ehdosta (17) seuraa, että verrannollisen vaimennuksen tapauksessa ominaisvektoreille on voimassa ehdot

$$\mathbf{V}_i^{(up)} + \lambda_i^* \mathbf{V}_i^{(low)} = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad \mathbf{M} \mathbf{U}_i^{(up)*} = \mathbf{V}_i^{(up)} + \lambda_i \mathbf{V}_i^{(low)}. \quad (66), (67)$$

Kun käytetään merkitään $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$, seuraa näistä edelleen

$$\mathbf{M} \mathbf{U}_i^{(up)*} = (\lambda_i - \lambda_i^*) \mathbf{V}_i^{(low)} = 2j\beta_i \mathbf{V}_i^{(low)}. \quad (68)$$

Nyt voidaan laskea

$$\mathbf{V}_j^{(low)\text{T}} M^{-1} \mathbf{F}(\tau) = \frac{1}{2j\beta_j} \mathbf{U}_j^{(up)\text{T}*} M M^{-1} \mathbf{F}(\tau) = \frac{1}{2j\beta_j} \mathbf{U}_j^{(up)\text{T}*} \mathbf{F}(\tau). \quad (69)$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (64), saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{f_{vib}}(t) &= 2 \operatorname{Re} \sum_j \int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)} e^{j\beta_j(t-\tau)} \frac{1}{2j\beta_j} \mathbf{U}_j^{(up)\text{T}*} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{U}_j^{(up)} d\tau \\ &= \operatorname{Re} \sum_j \frac{1}{\beta_j} \int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)} e^{j[\beta_j(t-\tau)-\pi/2]} \mathbf{U}_j^{(up)\text{T}*} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{U}_j^{(up)} d\tau \\ &= \sum_j \mathbf{u}_j \frac{1}{\beta_j} \int_0^t e^{\alpha_j(t-\tau)} \sin \beta_j(t-\tau) \mathbf{u}_j^{\text{T}} \mathbf{F}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (70)$$

missä on käytetty hyväksi sitä, että verrannollisen vaimennuksen tapauksessa kompleksinen ominaisuusvektori $\mathbf{U}_j^{(up)}$ redusoituu muotoon $\mathbf{U}_j^{(up)} = \mathbf{u}_j e^{j\psi^{(j)}}$, missä vektori \mathbf{u}_j sisältää ainoastaan positiivisia tai negatiivisia reaaliarvoja ja vaihe ψ_j on kaikille komponenteille yhteinen, jolloin

$$\mathbf{U}_j^{(up)\text{T}*} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{U}_j^{(up)} = \left(\mathbf{u}_j e^{-j\psi^{(j)}} \right)^{\text{T}} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{u}_j e^{j\psi^{(j)}} = \mathbf{u}_j^{\text{T}} \mathbf{F}(\tau) \mathbf{u}_j. \quad (71)$$

Yllä vektori \mathbf{u}_j on luonnollisesti verrannollisesti vaimennetun systeemin ominaisuusmuoto. Kun vielä palautetaan mieliin yhtälöstä (37) yhteydet $\alpha_j = -\zeta_j \omega_j$ ja $\beta_j = \omega_j (1 - \zeta_j^2)^{1/2} = \omega_{dj}$, voidaan todeta, että tulos (70) yhtyy perinteiseen tulokseen (62). Lukijaa pyydetään vielä vertaamaan ei-verrannollisesti ja verrannollisesti vaimennettujen sistemien vasteita (61) ja (62) toisiinsa.

Harmonisen herätteen vaste ja resonanssi

Ei-verrannollisesti vaimennetun systeemin taajuusvasteikäyttäytymisen selvittämiseksi tarkastellaan tilannetta, jossa systeemiin kohdistuva ulkoinen voima on puhtaasti harmonista muotoa

$$\mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_{01} \\ \vdots \\ F_{0N} \end{Bmatrix} \cos \omega t = \mathbf{F}_0 \cos \omega t. \quad (72)$$

Pysyvän tilan laskemiseksi sijoitetaan tämä voima ratkaisun lausekkeeseen (59), jolloin saadaan

$$\mathbf{X}_f(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} \mathbf{V}_i^{(low)\text{T}} M^{-1} \mathbf{F}_0 \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} \cos \omega \tau d\tau \mathbf{U}_i^{(up)} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \operatorname{Re} \sum_j e^{\lambda_j t} \mathbf{V}_j^{(low)T} M^{-1} \mathbf{F}_0 \int_0^t e^{-\lambda_j \tau} \cos \omega \tau d\tau \mathbf{U}_j^{(up)} \\
& = \sum_i \mathbf{V}_i^{(low)T} M^{-1} \mathbf{F}_0 \left(\frac{\omega \sin \omega t - \lambda_i \cos \omega t}{\lambda_i^2 + \omega^2} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} e^{\lambda_i t} \right) \mathbf{U}_i^{(up)} + \\
& + 2 \operatorname{Re} \sum_j \mathbf{V}_j^{(low)T} M^{-1} \mathbf{F}_0 \left(\frac{\omega \sin \omega t - \lambda_j \cos \omega t}{\lambda_j^2 + \omega^2} + \frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \omega^2} e^{\lambda_j t} \right) \mathbf{U}_j^{(up)}. \quad (73)
\end{aligned}$$

Kun tästä poistetaan transienttiin liittyvä vapaa värähtely, saadaan pysyvän tilan (*steady state*) ratkaisuksi

$$\mathbf{X}_{st}(t) = \sum_i b_i \frac{\omega \sin \omega t - \lambda_i \cos \omega t}{\lambda_i^2 + \omega^2} \mathbf{U}_i^{(up)} + 2 \operatorname{Re} \sum_j b_j \frac{\omega \sin \omega t - \lambda_j \cos \omega t}{\lambda_j^2 + \omega^2} \mathbf{U}_j^{(up)}, \quad (74)$$

missä on käytetty lyhennysmerkintää $b_k = \mathbf{V}_k^{(low)T} M^{-1} \mathbf{F}_0$ ($k = 1, \dots, N$). Ensimmäisessä summalausekkeessa kaikki suureet ovat reaalisia, joten se kuvaa sellaisenaan reaalisia ominaisarvoja vastaavaa ratkaisun osaa. Toisessa summalausekkeessa ovat suureet b_j , $\lambda_j = \alpha_j + j\beta_j$ ja $\mathbf{U}_j^{(up)}$ kompleksisia. Kun yhtälön (74) mukainen reaaliosa lasketaan, saadaan pysyvän tilan ratkaisun yleiseksi lausekkeeksi

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{st}(t) & = \sum_i b_i \frac{\omega \sin \omega t - \lambda_i \cos \omega t}{\lambda_i^2 + \omega^2} \mathbf{U}_i^{(up)} + \\
& + 2 \sum_j \left\{ \frac{\omega(\alpha_j^2 - \beta_j^2 + \omega^2) \sin \omega t - \alpha_j(\alpha_j^2 + \beta_j^2 + \omega^2) \cos \omega t}{(\omega^2 - \alpha_j^2 - \beta_j^2)^2 + 4\omega^2 \alpha_j^2} \operatorname{Re} [b_j \mathbf{U}_j^{(up)}] \right. \\
& \left. - \frac{\beta_j(\alpha_j^2 + \beta_j^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2\alpha_j \beta_j \omega \sin \omega t}{(\omega^2 - \alpha_j^2 - \beta_j^2)^2 + 4\omega^2 \alpha_j^2} \operatorname{Im} [b_j \mathbf{U}_j^{(up)}] \right\}. \quad (75)
\end{aligned}$$

Havaitaan, että ei-vertaillisesti vaimennetun systeemin harmonisen herätteen vaste on huomattavasti monimutkaisempi kuin vertaillisesti vaimennetun systeemin. Tämä johtuu jälkimmäisessä summalausekkeessa esiintyvistä tekijästä $\operatorname{Re} [b_j \mathbf{U}_j^{(up)}]$, joka ei-vertaillisesti vaimennetulle systeemille on nolasta poikkeava. Sen sijaan vertaillisesti vaimennetulle systeemille saadaan yhtälöiden (69) ja (71) nojalla

$$b_j \mathbf{U}_j^{(up)} = \mathbf{V}_j^{(low)T} M^{-1} \mathbf{F}_0 \mathbf{U}_j^{(up)} = -\frac{j}{2\beta_j} \mathbf{u}_j^T \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_j, \quad (76)$$

jolloin

$$\operatorname{Re}\left[b_j \mathbf{U}_j^{(up)}\right] = 0 \quad , \quad \operatorname{Im}\left[b_j \mathbf{U}_j^{(up)}\right] = -\frac{1}{2\beta_j} \mathbf{u}_j^T \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_j . \quad (77)$$

Kun merkitään vielä yhtälöiden (37) mukaisesti

$$\alpha_j = -\zeta_j \omega_j \quad , \quad \beta_j = \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \quad , \quad (78)$$

saadaan ratkaisun (75) jälkimmäinen summalauseke verrannollisen vaimennuksen tapauksessa muotoon

$$\begin{aligned} & \sum_j \frac{(\alpha_j^2 + \beta_j^2 - \omega^2) \cos \omega t - 2\alpha_j \omega \sin \omega t}{(\omega^2 - \alpha_j^2 - \beta_j^2)^2 + 4\omega^2 \alpha_j^2} \mathbf{u}_j^T \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_j = \\ & \sum_j \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\zeta_j \omega_j \omega \sin \omega t}{(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + (2\zeta_j \omega_j \omega)^2} \mathbf{u}_j^T \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_j = \sum_j \frac{\cos(\omega t - \Phi)}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + (2\zeta_j \omega_j \omega)^2}} \mathbf{u}_j^T \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_j \quad , \end{aligned} \quad (79)$$

missä

$$\sin \Phi = \frac{2\zeta_j \omega_j \omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + (2\zeta_j \omega_j \omega)^2}} \quad , \quad \cos \Phi = \frac{\omega_j^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + (2\zeta_j \omega_j \omega)^2}} . \quad (80)$$

Tulos on täsmälleen sama kuin perinteisellä tavalla johdettu verrannollisesti vaimennetun systeemin vaste harmoniselle herätteelle [8]. Moodille j tämän huippuarvo saavutetaan tunnetusti herätteen kulmataajuudella $\omega_{peak} = \omega_j (1 - 2\zeta_j^2)^{1/2}$. Mielenkiintoinen kysymys on, millä herätteen kulmataajuuksilla yleisen lausekkeen (75) termit saavuttavat maksiminsa, toisin sanoen, millä herätteen taajuuksilla ei-verrannollisesti vaimennettu systeemi resonoi. Tätä kysymystä tullaan tutkimaan toisessa yhteydessä. Voidaan kuitenkin heti todeta, että yhtälön (75) mukainen harmonisen herätteen vaste lähenee edelleen nollaa herätteen taajuuden kasvaessa, joten perinteisestä moodi-analyysistä tuttu taajuuskatkaisu (*frequency cutoff*) voidaan suorittaa myös ei-verrannollisesti vaimennetun systeemin tapauksessa.

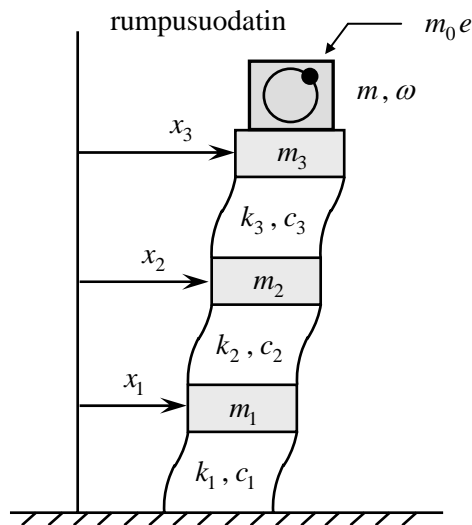
Numeerinen esimerkki

Tarkastellaan esimerkkinä kolmikerroksisen rakennuksen poikittaisvärähtelyjä. Rakennus mallinnetaan jousi-massa-vaimennin -systeeminä kuvan 2 mukaisesti. Kerrosten massoille ja kerrosten välisille jousi- ja vaimennusvakioille käytetään Taulukon 1 mukaisia arvoja. Alkutilanteessa rakenne on levossa staattisessa tasapainoasemassaan. Ajanhetkellä $t = 0$ käynnistetään talon kolmannessa kerroksessa sijaitseva rumpusuodatin. Suodattimen kokonaismassa on $m = 2000$ kg ja epä-tasapainossa olevan rummun massaeksentrisyys $m_0 e = 100$ kgm. Suodatin ajetaan levosta käyttönopeuteensa lineaarisella rampilla (eli vakiokulmakiinnoitetyydellä) ajassa $T = 400$ s, jonka jälkeen laite jää pyörimään vakiokulmanopeudella $\Omega = 60$ r/min .

Tehtävänä on määrittää systeemin dynaaminen vaste. Laskutoimitukset suoritettiin Matlab-ohjelmistoa käyttäen.

Taulukko 1. Laskuissa käytetyt kerrostalon parametrien arvot.

i	kerroksen i massa m_i (kg)	kerrosten $i-1$ ja i välinen jousivakio k_i (N/m)	vaimennusvakio c_i (Ns/m)
1	40 000	180 000	5 000
2	20 000	120 000	10 000
3	10 000	80 000	2 000



Kuva 2. Kerrostalon vaakasuuntaisten poikittaisvärähtelyjen keskitettyjen massojen malli (*lumped mass model*).

Systeemin massa-, jäykkyy- ja vaimennusmatriisit ovat (SI-yksiköt)

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \cdot 10^3, \quad (81)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -12 & 0 \\ -12 & 20 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^4, \quad (82)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 12 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^3. \quad (83)$$

Tutkitaan seuraavaksi ehdon (17) avulla, onko systeemin vaimennus verrannollista. Matriiseja (81) - (83) käyttäen saadaan

$$CM^{-1}K = \begin{bmatrix} 1725 & -1450 & 400 \\ -1470 & 1633 & -613 \\ 120 & -333 & 213 \end{bmatrix} \cdot 10^2 \neq \begin{bmatrix} 1725 & -1470 & 120 \\ -1450 & 1633 & -333 \\ 400 & -613 & 213 \end{bmatrix} \cdot 10^2 = KM^{-1}C. \quad (84)$$

Koska ehto (17) ei ole voimassa, ei systeemin vaimennus ole verrannollista.

Lasketaan seuraavaksi alkuperäisen ongelman ja adjungoidun ongelman ominaisarvot ja ominaisvektorit. Kerroinmatriisi A on nyt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7.5 & 3 & 0 & -0.375 & 0.25 & 0 \\ 6 & -10 & 4 & 0.5 & -0.6 & 0.1 \\ 0 & 6.667 & -6.667 & 0 & 0.167 & -0.167 \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Ominaisarvoiksi saadaan

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.0379 + 1.278j, \quad \lambda_2 = -0.136 + 2.681j, \quad \lambda_3 = -0.396 + 3.888j, \\ \lambda_4 &= -0.0379 - 1.278j, \quad \lambda_5 = -0.136 - 2.681j, \quad \lambda_6 = -0.396 - 3.888j, \end{aligned} \quad (86)$$

alkuperäisen ongelman ominaisvektorit ovat

$$\mathbf{U}_1 = \begin{Bmatrix} 0.0226 + 0.1933j \\ 0.0596 + 0.3748j \\ 0.0745 + 0.4973j \\ -0.2479 + 0.0216j \\ -0.4814 + 0.0619j \\ -0.6386 + 0.0764j \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{Bmatrix} -0.1574 + 0.2160j \\ -0.0319 + 0.0132j \\ 0.2627 - 0.2841j \\ -0.5576 - 0.4513j \\ -0.0311 - 0.0874j \\ 0.7257 + 0.7430j \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U}_3 = \begin{Bmatrix} 0.0070 + 0.1114j \\ -0.0496 - 0.2796j \\ 0.0765 + 0.2023j \\ -0.4360 - 0.0169j \\ 1.1069 - 0.0821j \\ -0.8170 + 0.2170j \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_4 = \mathbf{U}_1^*, \quad \mathbf{U}_5 = \mathbf{U}_2^*, \quad \mathbf{U}_6 = \mathbf{U}_3^*, \quad (87)$$

ja adjungoidun ongelman ominaisvektorit ovat

$$\mathbf{V}_1 = \begin{Bmatrix} 0.1533 - 0.5142j \\ -0.0014 - 0.5118j \\ 0.0568 - 0.4032j \\ -0.4043 - 0.0713j \\ -0.3967 - 0.0533j \\ -0.3151 - 0.0451j \end{Bmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{Bmatrix} -0.8306 - 0.8008j \\ 0.0293 - 0.1251j \\ 0.2945 + 0.4090j \\ -0.3233 + 0.2862j \\ -0.0275 + 0.0049j \\ 0.1540 - 0.1071j \end{Bmatrix}, \mathbf{V}_3 = \begin{Bmatrix} 0.1393 - 0.8300j \\ -0.0988 + 1.0824j \\ 0.0150 - 0.4969j \\ -0.2063 - 0.0695j \\ 0.2707 + 0.0583j \\ -0.1265 - 0.0033j \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_1^*, \mathbf{V}_5 = \mathbf{V}_2^*, \mathbf{V}_6 = \mathbf{V}_3^* \quad (88)$$

(ks. yhtälöt (8) ja (18)). Kompleksiset ominaismuodot $\mathbf{u}_i = \mathbf{U}_i^{(up)}$ ($i=1,2,3$) polaari-
muodossa ovat

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} 0.1946 \langle 83.33^\circ | \\ 0.3795 \langle 80.97^\circ | \\ 0.5028 \langle 81.48^\circ | \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} 0.2673 \langle 126.1^\circ | \\ 0.0346 \langle 157.5^\circ | \\ 0.3869 \langle -47.24^\circ | \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{Bmatrix} 0.1116 \langle 86.40^\circ | \\ 0.2840 \langle -100.1^\circ | \\ 0.2163 \langle 69.30^\circ | \end{Bmatrix}. \quad (89)$$

Koska ominaismuodot ovat kerrannaista vakiota vailla yksikäsitteiset, voitaisiin ominaismuodot (89) haluttaessa normeerata siten, että ensimmäisten komponenttien vaihekulmat tulisivat nolliksi. Tällä tavalla saataisiin ensimmäisen muodon vaiheiksi $\langle 0^\circ |$, $\langle -2.36^\circ |$ ja $\langle -1.85^\circ |$, toisen muodon vaiheiksi $\langle 0^\circ |$, $\langle 31.4^\circ |$ ja $\langle -173.3^\circ |$ sekä kolmannen muodon vaiheiksi $\langle 0^\circ |$, $\langle -186.5^\circ |$ ja $\langle -17.1^\circ |$. Mikäli vaimennus olisi verrannollista, olisivat vaihekulmat joko $\langle 0^\circ |$ tai $\langle \pm 180^\circ |$. Tässä työssä on kuitenkin käytetty yhtälöiden (89) mukaisia Matlabin antamia ominaismuotoja, sillä normeeraus ei luonnollisestikaan vaikuta lopullisiin tuloksiin.

Koska kaikki ominaisarvot ovat kompleksilukuja, on yleinen ratkaisu yhtälön (57) mukaan

$$\mathbf{X}(t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 c_j(t) \mathbf{U}_j^{(up)}, \quad (90)$$

missä kertoimet c_j toteuttavat yhtälöt (43) eli

$$\begin{Bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} + \left[\mathbf{V}_1^{(low)} \mathbf{V}_2^{(low)} \mathbf{V}_3^{(low)} \right]^T M^{-1} \mathbf{F}. \quad (91)$$

Tässä rumpusuodattimen massaepätasapainosta aiheutuva voima \mathbf{F} on muotoa

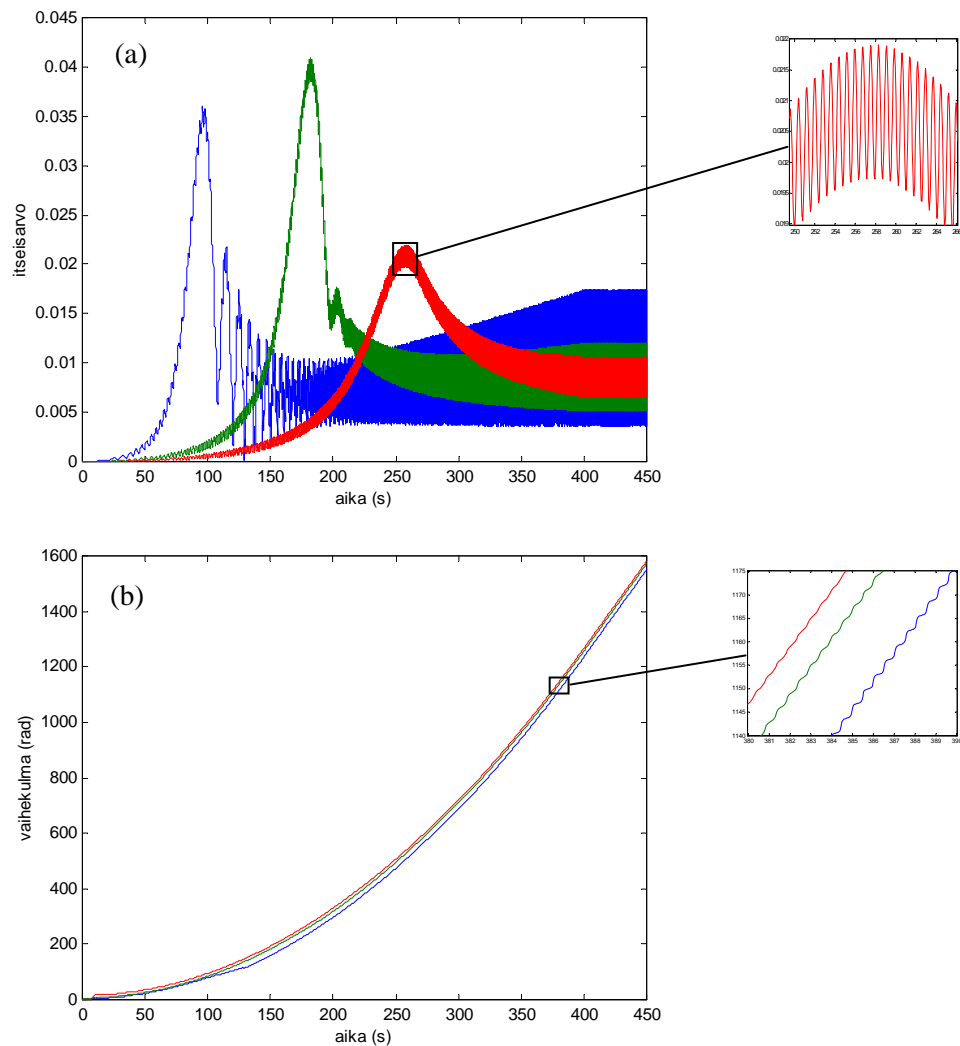
$$\mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3(t) \end{Bmatrix}, \quad F_3(t) = m_0 e (\omega^2 \sin \theta - \alpha \cos \theta), \quad (92)$$

missä suodattimen kulmakiiktyvyys α , kulmanopeus ω ja kulma θ ovat

$$\begin{aligned} \alpha &= \Omega / T, \quad \omega = \alpha t, \quad \theta = \alpha t^2 / 2, & \text{kun } 0 \leq t < T \\ \alpha &= 0, \quad \omega = \Omega, \quad \theta = \Omega T / 2 + \Omega(t - T), & \text{kun } t \geq T. \end{aligned} \quad (93)$$

Yhtälössä (91) on kerroinmatriisin nauhanleveys luonnollisesti yksi, koska kaikki kompleksiset ominaismuodot kytkeytyvät toisistaan täydellisesti irti.

Kuvassa 3 on esitetty kompleksisten moodikertoimien c_j itseisarvot ja vaihekulmat välillä $0 \leq t \leq 450$ s. Moodikertoimien itseisarvoista näkyy selvästi ominaismuotojen

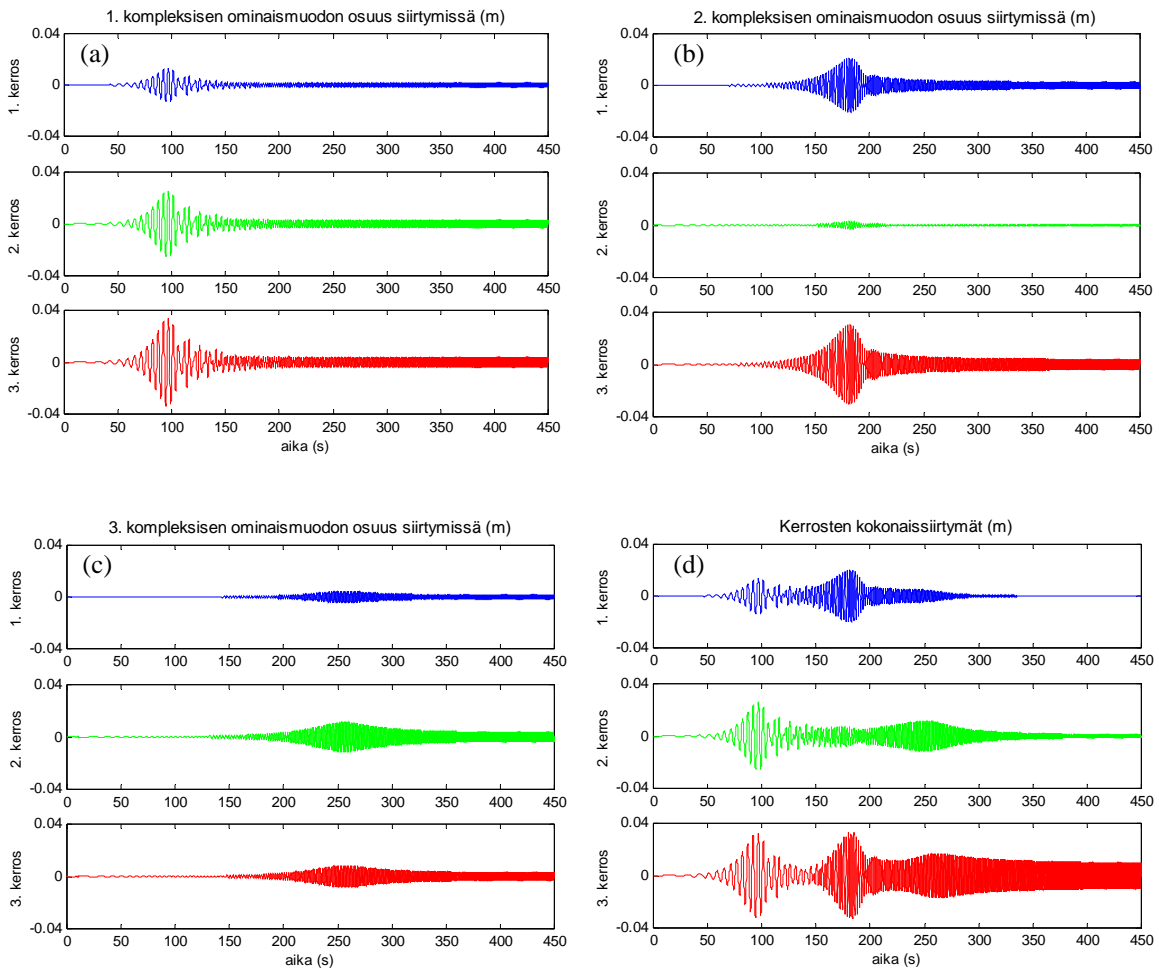


Kuva 3. (a) Kompleksisten ominaismuotokertoimien itseisarvot $|c_j|$ ja (b) vaihekulmat ϕ_j ($i=1,2,3$) ajan funktiona.

resonanssit massaepätasapainon aiheuttaman herätteen kulmataajuuden ohittaessa ominaiskulmataajuudet. Kuvasta voidaan havaita sekä moodikertoimien itseisarvojen että vaihekulmien oskilloivan ulkoisen herätteen tahdissa. Tämä piirre jatkuu myös

välillä $400 \text{ s} \leq t \leq 450 \text{ s}$, jolloin suodattimen pyörimisnopeus pysyy vakiona ja systeemi asettuu puhtaasti harmoonisen voiman aiheuttamaan stationaariseen tilaan. Tämä käyttäytyminen poikkeaa verrannollisesti vaimennetun systeemin harmoonisesta pakkovärähtelyratkaisusta, jossa ominaismuotojen kertoimien (normaalikoordinaattien) amplitudi pysyy vakiona ja vaihekulma kasvaa lineaarisesti ajan funktiona.

Kuvissa 4 (a)-(c) on esitetty ajan funktiona kunkin kompleksisen ominaismuodon osuus kerrosten siirtymissä ja kuvassa 4 (d) näiden summat eli kerrosten kokonaissiirtymät. Ensimmäinen ominaismuoto resonoi ajanhetken $t = 95 \text{ s}$ ympäristössä ja



Kuva 4. Ensimmäisen (a), toisen (b) ja kolmannen (c) kompleksisen ominaismuodon osuus kerrosten siirtymissä sekä kerrosten kokonaissiirtymät (d).

tuottaa ensimmäiseen, toiseen ja kolmanteen kerrokseen asteittain kasvavan vasteen kuvan 4 (a) mukaisesti. Toinen ominaismuoto resonoi ajanhetken $t = 180 \text{ s}$ ympäristössä. Toisessa kerroksessa tämä aiheuttaa erittäin pienen vasteen, kun taas ensimmäisessä ja kolmannessa kerroksessa vasteet ovat varsin huomattavat. Kolmas ominaismuoto resonoi ajanhetken $t = 260 \text{ s}$ ympäristössä. Suurin vaste esiintyy nyt toisessa kerroksessa. Kaikkiin resonansseihin liittyvät vasteet ovat sopuinnossa

kompleksisten ominaismuotojen (89) itseisarvojen kanssa. Kuvassa 4 (d) on esitetty kaikkien edellisten summa eli kunkin kerroksen kokonaisvaste. Suurimmat kokonaissiirtymät esiintyvät kolmannessa kerroksessa ensimmäisen ja kolmannen resonanssin yhteydessä ja ovat suuruusluokkaa 3,5 cm. Todettakoon vielä, että yllä esitetyt kompleksiseen ominaismuotoanalyysiin perustuvat tulokset yhtyvät täysin yhtälöistä (2) suoralla numeerisella integroinnilla saatuihin tuloksiin numeerisen laskentatarkkuuden rajoissa.

Johtopäätökset

Tässä työssä on esitetty perinteisen ominaismuotoanalyysin laajennus ei-verrannollisesti vaimennetuille systeemeille. Vaikka tulokset alunperin johdetaan laajennetussa ensimmäisen kertaluvun tilavektoriesityksessä, palautetaan tulokset ja niiden tulkinta samantyyppisiksi kuin perinteisessä ominaismuotoanalyysissä ottamalla käyttöön tilaesityksen ominaisvektorin ylempi puolisko, joka on verrattavissa perinteiseen ominaismuotoon, vaikkakin sen komponentit ovat kompleksilukuja. Vapaat värähtelyt ja pakkovärähtelyt voidaan lausua kompleksisten ominaisvektoreiden lineaarikombinaationa ja ominaisvektoreiden keskinäinen kytkentä voidaan poistaa bi-ortogonaaliteetin avulla. Tämän johdosta kerroinmatriisin nauhan leveys on yksi, jolloin laskenta muodostuu varsinkin suurissa ja kytketyissä ongelmissa erittäin paljon nopeammaksi kuin alkuperäistä tilamuotoesitystä suoraan integroimalla. Vasteen tulkinta toisistaan riippumattomien ominaismuotojen superpositiona antaa ongelmalle vahvan ja havainnollisen fysikaalisen tulkinnan. Harmonisen herätteen vasteeseen ei-verrannollinen vaimennus synnyttää uuden kontribuution, joka kuitenkin edelleen menee kohti nollaa herätetaajuuden kasvaessa, vaikkakin hitaammin kuin verrannollisesti vaimennetulla systeemillä. Tämän ansiosta voidaan ominaismuotokehityelmä katkaista sopivasta kohtaa herätetaajuuksien yläpuolelta (*frequency cutoff*), sillä korkeammat muodot eivät käytännössä tuota kontribuutiota vasteeseen. Tilanne on samankaltainen kuin perinteisessä moodianalyysissä ja yleensä merkittävästi keventää laskentatyötä. Taajuuskatkaisu poistaa lisäksi ratkaistavan differentiaaliyhtälösystemin jäykkyyden, koska korkean taajuuden muodot, joiden kontribuutio vasteeseen on käytännössä nolla, voidaan jättää pois kehityelmästä. Tässä työssä on lisäksi todistettu tilavektoriesitykseen perustuvan ratkaisun ristiriidattomuus diskreettien systeemien pakkovärähtely-tilanteessa. Numeerisessa esimerkissä havaittiin kompleksimuotojen kertoimien sekä itseisarvojen että vaihekulmien oskilloivan pakkoherätteen tahdissa myös vakio-kulmataajuudella, mikä edustaa uudentyyppistä käyttäytymistä. Tämä mahdollistaa huomattavasti monipuolisemman vasteen kuin perinteinen moodivaste, jossa ominaismuodon amplitudi on vakio ja vaihekulma lineaarisesti kasvava. Kiinnostavia jatkotutkimuksen aiheita ovat ei-verrannollisesti vaimennetun systeemin resonanssin tarkempi tutkiminen ja esitetyn teorian soveltaminen gyroskooppisiin systeemeihin (pyörivät muodot) sekä teorian laajentaminen lineaarisesti riippuvien ominaisvektoreiden tapaukseen.

Kirjallisuusviitteet

- [1] Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Dover Publications, New York, 1897.
- [2] J. Woodhouse, Linear Damping Models for Structural Vibration, *Journal of Sound and Vibration* (1998) 215(3), 547-569.
- [3] C.W. Bert, Material damping: an introductory review of mathematical models, measures and experimental techniques, *Journal of Sound and Vibration* (1973) 29, 129-153.
- [4] W.T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications*, George Allen & Unwin, London, 1981.
- [5] L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [6] R.W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [7] Roy. R. Craig, Jr., *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*, John Wiley&Sons, Inc. Publishers, 1981.
- [8] D.J. Inman, *Engineering Vibration*, Prentice Hall, New Jersey, 2000.
- [9] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [10] D.E. Newland, *Mechanical Vibration Analysis and Computation for Structural Vibration*, Longman Scientific & Technical, Singapore, 1989.
- [11] L. Meirovitch, *Principles and Techniques of Vibration*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.
- [12] S.G. Kelly, *Advanced Vibration Analysis*, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, 2007.
- [13] J. Bellos and D.J. Inman, *A Survey on Nonproportional Damping*, *The Shock and Vibration Digest* (1989) 21(10), 7-12.
- [14] S. Adhikari and J. Woodhouse, Identification of Damping: Part 1, Viscous Damping, *Journal of Sound and Vibration* (2001) 243(1), 43-61.
- [15] S. Adhikari and J. Woodhouse, Identification of Damping: Part 2, Non-Viscous Damping, *Journal of Sound and Vibration* (2001) 243(1), 63-88.
- [16] R.P.S. Han and J.W. Zu, Pseudo Non-Selfadjoint and Non-Selfadjoint Systems in Structural Dynamics, *Journal of Sound and Vibration* (1995) 184(4), 725-742.
- [17] B. Yang and X. Wu, Transient Response of One-Dimensional Distributed Systems: A Closed Form Eigenfunction Expansion Realization, *Journal of Sound and Vibration* (1997) 208(5), 763-776.
- [18] K.-Y. Lee and A.A. Renshaw, Solution of the Moving Mass Problem Using Complex Eigenfunction Expansions, *Journal of Applied Mechanics* (2000) 67 Dec., 823-827.
- [19] S. Krenk, Complex modes and frequencies in damped structural vibrations, *Journal of Sound and Vibration* 270 (2004), 981-996.
- [20] T.G. Caughey and M.E.J. O'Kelly, Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, *Journal of Applied Mechanics* (1965) 32, 583-588.
- [21] K.A. Foss, Coordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, *Journal of Applied Mechanics* 25 (1958), 361-364.

Raimo von Hertzen,
Lappeenrannan teknillinen yliopisto,
PL 20, 53851 Lappeenranta,
rhertzen@lut.fi