

Osittaisintegroinnista

Eero-Matti Salonen, Jouni Freund ja Juha Paavola

Tiivistelmä. Artikkelissa tarkastellaan osittaisintegrointia lähinnä yksi- ja kaksidimensioisissa tapauksissa. Tarkoituksena on antaa käytännön sovelluskaavoja tilanteisiin, joissa tarkasteltavassa alueessa esiintyy tiettyjen funktioiden yhteydessä epäjatkuvuuksia. Erityisesti elementtimenetelmässä syntyviin hyppyehtoihin kiinnitetään huomiota. Kolmea sovellusesimerkkiä käytetään havainnollistamaan saatuja yleisiä kaavoja. Ensimmäinen esimerkki koskee vedettyä sauvaa, toinen tasojännitys- tai tasomuodonmuutostapausta ja kolmas vedetyn sauvan dynamiikkaa paikka-aika formulaatiota soveltaen. Epäjatkuvuuksien fysikaalista taustaa selostetaan. Virtuaalisen työn periaatteen asemaa korostetaan. Merkinnoissa pyritään havainnollisiin tunnuksiin ja joillekin englanninkielisessä kirjallisuudessa esiintyvillä termeille ehdotetaan mahdollisia suomenkielisiä vastineita. Useimpien esitettyjen kaavojen käyttö-mahdollisuus ei ole rajoittunut pelkästään rakenteiden mekaniikkaan.

Avainsanat: osittaisintegrointi, aika-paikka alue, epäjatkuva funktio, hyppyehto

Yksi dimensio

Johdanto

Osittaisintegrointi on tunnetusti oleellisen tärkeä matemaattinen operaatio, jota sovelletaan mm. integraalien avulla kuvattujen kenttäprobleemien eli ns. heikkojen muotojen yhteydessä. Kun tarkasteltavat funktiot eivät ole kovin sileitä — kuten on asian laita esimerkiksi elementtimenetelmän tapauksessa — osittaisintegroinnin soveltamisessa on oltava riittävän huolellinen, jotta vältettäisiin tiettyjä virheellisiä tulkintoja. Artikkelin päätarkoituksena on esittää osittaisintegrointiin liittyviä valmiita sovelluskaavoja, joita ei yleensä anneta suoraan alan kirjallisuudessa. Edelleen pyritään mahdollisimman selkeisiin tunnuksiin ja osuvaan suomenkieliseen terminologiaan. Tiettyjä termejä kuten “sileä funktio” tullaan käyttämään ilman eksaktia matemaattista sisältöä toivoen, että lukija voi seurata näin tekstiä ilman pitkäköjä keskeytyksiä.

Käsittely on jaoteltu siten, että aluksi aihetta tarkastellaan lähinnä vain yhdessä dimensiossa. Artikkelin loppuosa koskee kaksidimensioista tapausta, jonka jälkeen yleistyksen useampaan dimensioon ovat jo melko ilmeisiä.

Tämän artikkelin lähtökohtana on tietty keskustelu, joka käytiin Teknillisessä korkeakoulussa kevätlukukaudella 2001 pidetyn mekaniikan ja rakenteiden mekaniikan laboratorioden järjestämän seminaarin yhteydessä. Seminaarissa seurattiin elementtimenetelmään liittyvää oppikirjaa Belytschko et al. [1]. Kirjassa tarkastellaan tavallista yksityiskohtaisemmin epäjatkuvuuksien vaikutuksia. Tämän artikkelin aihepiiri pohjautuu voimakkaasti kyseiseen oppikirjaan. Koska artikkelin käsittely

rajoittuu rakenteiden mekaniikan osalta vain Lagrangen esitystapaan ja pieniin siirtymiin, käytetyt tunnuksot on kuitenkin voitu pitää verrattain yksinkertaisina.

Seuraavassa on lainattu kyseisen oppikirjan lukua 2.2.7:

“Fundamental Theorem of Calculus. The fundamental theorem of calculus states that for any C^0 function $f(x)$, the integral of the derivative gives the function, so for a definite integral

$$\int_a^b f_{,x}(x) dx = f(b) - f(a) \quad (2.2.33)$$

If the function is C^{-1} , then

$$\int_a^b f_{,x}(x) dx = f(b) - f(a) - \sum_i \llbracket f(x_i) \rrbracket \quad (2.2.34)$$

where x_i are the points of discontinuity.”

Huomautus 1. Tarkasti ottaen analyysin peruslause yleisessä muodossa (2.2.33) koskee C^1 -funktioita [4]. Kaava (2.2.33) pätee kuitenkin elementtimenetelmän C^0 -funktioille, koska mahdolliset derivaatan epäjatkuvuudet sijoittuvat elementtien rajapinnoille (nollamittainen pistejoukko). Oppikirjassa esiintyy kaavan (2.2.34) hyppytermin edessä itse asiassa plusmerkki. Tämän täytyy kuitenkin olla painovirhe, jos hyppytermi määritellään kirjan kaavan (2.2.32) esittämän tapaan:

$$\llbracket f(x) \rrbracket = f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1)$$

jossa ε on positiivinen. □

Seminaarissa syntyi keskustelua kaavan (2.2.34) oikeellisesta tulkinnasta ja selvästi kävi ilmi mahdollisuuksia väärinkäsityksiin. Osittaisintegroitikaavat johdetaan soveltamalla kaavaa (2.2.33) tai (2.2.34), joten tämä aihe on artikkelin sisällön kannalta oleellinen.

Merkintöjä

Määritellään läheisesti lähdetä [1, s. 27] seuraten jollakin tarkkuudella ensin C^0 - ja C^{-1} -funktion käsitteet. C^0 -funktio on jatkuva ja sen derivaatta on vähintään paloittain jatkuva. Yksidimensioisessa tapauksessa C^0 -funktion derivaatta voi saada arvoissaan epäjatkuvuuksia eli hyppyjä erillisissä epäjatkuvuusasteissa, (derivaatat) kaksidimensioisessa tapauksessa erillisillä epäjatkuvuusviivoilla ja kolmidimensioisessa tapauksessa erillisillä epäjatkuvuuspinnoilla. Epäjatkuvuuksien välillä funktion otaksutaan kuitenkin olevan niin sileä, että sillä on mielivaltaisen korkeaa kertalukua olevat derivaatat. C^{-1} -funktio on vastaavasti vain paloittain jatkuva. C^{-1} -funktio voi saada itse arvoissaan hyppyjä kuten edellä C^0 -funktion derivaatta. Epäjatkuvuuksien välillä funktion otaksutaan jälleen kuitenkin olevan niin sileä, että sillä on mielivaltaisen korkeaa kertalukua olevat derivaatat.

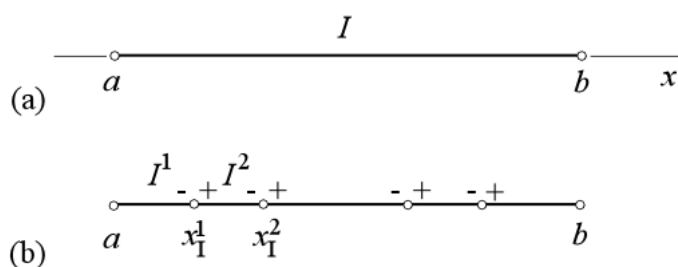
Yllä esitetyt määritelmät ovat ilmeisesti muotoiltu palvelemaan erityisesti elementtimenetelmää. Tavanomaiset elementtimenetelmässä käytetyt approksimaatiot ovat juuri C^0 -funktioita ja niiden derivaatat C^{-1} -funktioita.

Elementtimenetelmä määritellään joskus yleisesti menetelmänä, jossa lopulliset diskreetit yhtälöt synnytetään summeeraamalla osuuksia systeemin elementeistä. Tämä johtaa päätelmään, että ainakin elementtimenetelmän yhteydessä — jotta vältettäisiin virhetulkintoja — on syytä kirjoittaa yhtälö (2.2.34) huolellisemmin muotoon

$$\sum_e \int_{I^e} \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a) - \sum_i \left[\left[f(x_i^i) \right] \right]. \quad (2)$$

Nimitetään tätä muotoa tässä esityksessä *yleistetyksi* (analyysin) *peruslauseeksi*. Se on voimassa C^{-1} funktiolle $f(x)$ (ja niitä sileämmille funktioille). C^0 -funktioille hyppytermit katoavat ja päädytään (miltei) muotoon (2.2.33).

Seuraavassa esitellään tiettyjä yksityiskohtaisia merkintöjä selittämään tarkemmin kaavan (2) sisältöä. Kyseinen merkintäaineisto voidaan jatkossa laajentaa melko suoraviivaisesti koskemaan myös kahta ja kolmea dimensiota. Merkinnät on valittu pitäen erityisesti mielessä elementtimenetelmää, mutta myöhemmin johdettavat osittaisintegroitikaavat ovat täysin yleisiä.



Kuva 1 (a) Yksidimensioinen alue I ja sen reuna $\{a, b\}$. **(b)** Alueen jako osa-alueisiin

$$I^e, \quad e = 1, 2, \dots$$

Kuva 1 (a) esittää avointa yksidimensioista aluetta eli avointa väliä (tunnus I sanasta interval)

$$I =]a, b[. \quad (3)$$

Alueen reuna muodostuu tässä yksinkertaisesti kahdesta pisteestä $x = a$ and $x = b$ eli käyttäen joukko-opin merkintöjä joukosta $\{a, b\}$. Vastaava suljettu alue eli suljettu väli on I :n sulkeuma

$$\bar{I} = [a, b]. \quad (4)$$

Pistejoukon sulkeuma tarkoittaa joukkoa, joka saadaan lisäämällä alkuperäiseen joukkoon mukaan joukon reunapisteet (jotka eivät välttämättä kuulu alkuperäiseen joukkoon). Joukko-opin merkinnöin tässä $\bar{I} = [a, b] =]a, b[\cup \{a, b\} = I \cup \{a, b\}$ eli sulkeuma on kyseisen avoimen välin ja sen reunan yhdiste. Pisteet $x = x_1^1, x = x_1^2, \dots$

ovat mahdollisia epäjatkuvuuspisteitä (alaindeksi I sanasta *interface*). Epäjatkuvuuspisteet jakavat alueen avoimiin osa-alueisiin eli avoimiin väleihin (esimerkiksi elementteihin)

$$I^1 =]a, x_1^1[, \quad I^2 =]x_1^1, x_1^2[, \quad \dots \quad (5)$$

(Ei ole tietenkään välttämätöntä numeroida epäjatkuvuuspisteitä ja välejä juuri kuvan 1 (b) esittämässä järjestyksessä vasemmalta oikealle.) Tarkemmin sanoen osa-alueet I^e peittävät koko alueen ilman aukkoja ja päällekkäisyyksiä. Joukko-opin merkinnöin

$$\bar{I}^1 \cup \bar{I}^2 \cup \dots = \bar{I}, \quad (6)$$

eli osa-alueiden sulkeumien yhdiste muodostaa koko alueen sulkeuman ja

$$I^1 \cap I^2 \cap \dots = \emptyset, \quad (7)$$

eli osa-alueiden leikkaus on tyhjä joukko.

Summaus yhtälön (2) vasemmalla puolella tapahtuu osa-alueitten (esimerkiksi elementtien) yli ja oikealla puolella epäjatkuvuuspisteiden (esimerkiksi elementtien *yhdysreunojen* (engl. *interfaces*)) yli. *Hyppysulkeet* (engl. *jump brackets*) tarkoittavat seuraavaa:

$$\llbracket f(x_1^i) \rrbracket = f^+(x_1^i) - f^-(x_1^i). \quad (8)$$

“+” ja “-”-yläindeksimerkintöjä käytetään ilmaisemaan raja-arvoja lähestyttäessä epäjatkuvuuskohtaa vastaavasti “+” puolelta ja “-” puolelta.. Tässä + puoli on valittu olemaan epäjatkuvuuspisteiden oikealla puolella (kuva 1 (b)). Kuvan 1 avoimet ympyrät ilmaisevat pisteitä, jotka eivät kuulu avoimiin alueisiin.

Yhtälön (2) vasen puoli korostaa nyt erityisesti, että *integraalit lasketaan osa-alueiden sisäosista* (esimerkiksi elementeistä). Epämatemaattisesti sanoen yksinkertaisesti hylätään ne mahdolliset osuudet, jotka itse epäjatkuvuuspisteet voisivat ehkä jonkin rajankäynnin kautta tuottaa.

Kirjataan kaava (2.2.33) vielä uudestaan käyttäen esitettyjä merkintöjä:

$$\int_I \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a). \quad (9)$$

Tämä kaava — käytetään siitä tässä nimitystä *standardimuotoinen peruslause* — on voimassa C^0 -funktioille $f(x)$ (ja sileämmille). Kaavan oikea puoli kirjoitetaan usein myös esimerkiksi jollain seuraavista vaihtoehtoisista tavoista:

$$f(b) - f(a) \equiv \Big|_a^b f \equiv f \Big|_a^b \equiv [f]_a^b. \quad (10)$$

On ehkä paikallaan katsoa yksityiskohtaisesti, miten kaava (2) syntyy. Otaksutaan matemaattisen kirjallisuuden perusteella ilman johtoa, että oleellinen kaava (9) pätee C^0 -funktioille. Sovelletaan tätä kaavaa erikseen jokaisessa kuvassa 1 (b) esitettyssä osa-alueessa, jolloin saadaan (funktio on sileä kussakin osa-alueessa)

$$\int_{I^1} \frac{df}{dx} dx = f^-(x_1^1) - f(a),$$

$$\int_{I^2} \frac{df}{dx} dx = f^-(x_1^2) - f^+(x_1^1), \quad (11)$$

$$\int_{I^3} \frac{df}{dx} dx = f^-(x_1^3) - f^+(x_1^2),$$

...

Summaamalla kyseiset yhtälöt puolittain havaitaan, että hyppytermit ilmestyvät miinusmerkkisinä oikealle puolelle. Tuloksena saadaan kaava (2).

Osittaisintegrointi

Tarkastellaan kahta mielivaltaista C^0 -funktioita $g(x)$ and $h(x)$. Tulo gh on tällöin myös C^0 -funktio. Integroidaan identiteetti (saadaan tulon derivointisäännön avulla)

$$\frac{d}{dx}(gh) = \frac{dg}{dx}h + g\frac{dh}{dx}, \quad (12)$$

puolittain alueen $I =]a, b[$ yli:

$$\int_I \frac{d}{dx}(gh) dx = \int_I \frac{dg}{dx}h dx + \int_I g\frac{dh}{dx} dx. \quad (13)$$

Kaavan (9) soveltaminen yhtälön vasemmalla puolella ja pieni järjestely antaa yhtälön

$$\int_I g\frac{dh}{dx} dx = - \int_I \frac{dg}{dx}h dx + \Big|_a^b gh. \quad (14)$$

Tämä on osittaisintegrointikaava yksidimensioisessa tapauksessa; siitä tullaan käyttämään tässä esityksessä nimitystä *standardimuotoinen osittaisintegrointikaava*. Se on voimassa, kun g and h ovat C^0 -funktioita tai sileämpiä. Kaavassa (14) funktion h kohdistuva derivointi katoaa ja siirtyy kohdistumaan funktion g . Tämä manipulaatio osoittautuu monissa yhteyksissä tarpeelliseksi.

Jos g tai h molemmat ovat C^{-1} -funktioita, voidaan edetä seuraavasti. Kaava (12) on edelleen voimassa tyypillisessä avoimessa osa-alueessa, jossa funktiot ovat määritelmiensä perusteella sileitä:

$$\frac{d}{dx}(gh) = \frac{dg}{dx}h + g\frac{dh}{dx}, \quad I^e \text{ : ssä.} \quad (15)$$

Kun tämä yhteys integroidaan puolittain alueen I^e yli ja kaikki näin saadut yhtälöt vielä summataan, saadaan yhtälö

$$\sum_e \int_{I^e} \frac{d}{dx}(gh) dx = \sum_e \int_{I^e} \frac{dg}{dx} h dx + \sum_e \int_{I^e} g \frac{dh}{dx} dx. \quad (16)$$

Soveltamalla edelleen kaavaa (2) vasemmalla puolella ja järjestelemällä päädytään tulokseen

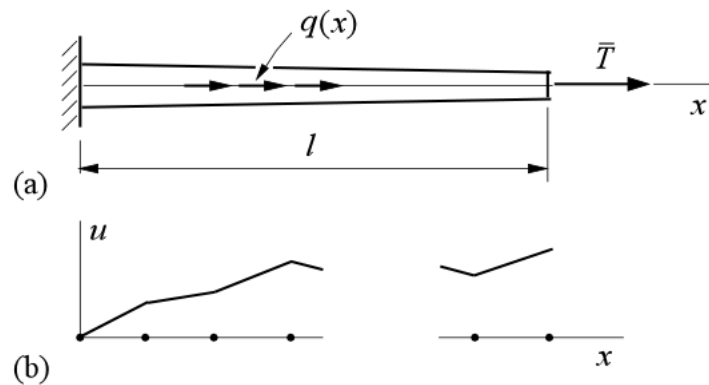
$$\sum_e \int_{I^e} g \frac{dh}{dx} dx = - \sum_e \int_{I^e} \frac{dg}{dx} h dx + \left[gh \right]_a^b - \sum_i \left[g(x_i^i) h(x_i^i) \right]. \quad (17)$$

Tämä on standardimuotoisen kaavan (14) yleistys. Sille tullaan käyttämään tässä nimitystä *yleistetty osittaisintegroitinkaava* yksidimensioisessa tapauksessa. Funktioiden g ja h tulee olla C^{-1} -funktioita tai sileämpiä. Sovelluksissa joko g tai h voi olla jatkuva ja se voidaan silloin viedä hyppysulkeiden ulkopuolelle. Jos g ja h ovat molemmat jatkuvia, hyppytermit katoavat ja päädytään (miltei) standardikaavaan (14).

Ensimmäinen sovellus

Tarkastellaan x -akselin välillä $[0, l]$ olevaa vedettyä suoraa sauva (kuva 2 (a)). Sauvaan vaikuttaa jakaantunut kuormitus pituutta kohti $q(x)$ ja voima \bar{T} sauvan oikeassa vapaassa päässä. Sauva on kiinnitetty vasemmasta päästään. Täten aksiaalinen siirtymä $u(x)$ tässä päässä häviää. Sauvan normaalivoimaa (positiivinen, kun vetoa) merkitään tunnuksella $T(x)$. Kirjataan tässä vaiheessa vain tehtävän siirtymään liittyvä reunaehto eli *siirtymäreunaehto*

$$u(0) = 0. \quad (18)$$



Kuva 2 (a) Vedetty sauva. **(b)** Esimerkinomainen siirtymän approksimaatio elementtimenetelmässä.

Sauvaa koskeva virtuaalinen työyhtälö — otaksutaan lukijalle tutuksi — on

$$- \int_I T \delta \varepsilon dx + \int_I q \delta u dx + \bar{T} \delta u(l) = 0, \quad (19)$$

jossa virtuaalinen venymä

$$\delta \mathcal{E} = \frac{d\delta u}{dx}. \quad (20)$$

Sanoin lausuttuna: kun sauva on tasapainoasemassa, yhtälö (19) on voimassa jokaisen virtuaalisen siirtymän $\delta u(x)$ suhteen, joka toteuttaa lisäksi ehdon $\delta u(0) = 0$ (ks. huomautus 3). Ensimmäinen integraali esittää sisäisten voimien ja toinen ja kolmas termi yhdessä ulkoisten voimien tekemää virtuaalista työtä. Kaavat yksinkertaistuvat merkinnällisesti hieman, kun virtuaalinen siirtymä tulkitaan kuten on tavallista *paino-eli testifunktioksi* (engl. weighting function, test function), jolle käytetään tässä tunnusta $w(x)$. Näin saadaan heikko muoto (ks. huomautus 2)

$$-\int_I T \frac{dw}{dx} dx + \int_I q w dx + \bar{T} w(l) = 0. \quad (21)$$

Seuraavaksi tutkitaan tavanomaiseen tapaan, mitä yksityiskohtaisia yhteyksiä voidaan päätellä yhtälöstä (21). Päätelmiä ei voida tehdä suoraan muodosta (21), koska painofunktio esiintyy integraaleissa sekä sellaisenaan että derivoituna. Derivaatta poistetaan ensin osittaisintegroinnilla. Tällöin täytyy tietenkin olettaa jotain vallitsevien funktioiden sileydestä. Jos otaksutaan aluksi, että sekä T ja w ovat C^0 -funktioita, voidaan soveltaa standardimuotoista osittaisintegrointikaavaa (14) ja saadaan

$$-\int_I T \frac{dw}{dx} dx = \int_I \frac{dT}{dx} w dx - \Big|_0^l T w. \quad (22)$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (21) ja otetaan huomioon rajoite $w(0) = 0$, päädytään tulokseen

$$\int_I \left(\frac{dT}{dx} + q \right) w dx + [\bar{T} - T(l)] w(l) = 0. \quad (23)$$

Koska painofunktio $w(x)$ on mielivaltainen, saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{dT}{dx} + q = 0 \quad I : \text{ssä} \quad (24)$$

ja traktioreunaehto $\bar{T} - T(l) = 0$ eli

$$T(l) = \bar{T}. \quad (25)$$

Yhtälöiden (24) ja (25) yksityiskohtainen päättely yhtälöstä (23) perustuu variaatiolaskennan peruslemman soveltamiseen; esimerkiksi [2, s. 185]. Tämä aihepiiri otaksutaan lukijalle tutuksi. Yhtälöiden (24) ja (25) nähdään olevan oikeellisia tuloksia. Ne voidaan johtaa vaihtoehtoisesti suoraan sopivien vapaakappalekuvioiden avulla. Yhtälön (25) ilmeinen tulkinta on yksinkertaisesti: sisäinen normaalivoima sauvan päässä on yhtä suuri kuin annettu ulkoinen voima.

Huomautus 2. Alan kirjallisuudessa käytetään usein termejä *vahva muoto* (engl. strong form) ja *heikko muoto* (engl. weak form, variational form). Yleisesti ottaen vahvalla

muodolla tarkoitetaan tietyn tehtävän formulointia siten, että esitetään vallitsevat — tiettyihin pisteisiin, pistejoukkoihin tai alueisiin liittyvät — kenttäyhtälöt (differentiaaliyhtälöt) sekä reuna- ja mahdolliset alkuehdot sellaisinaan. Heikossa muodossa kenttäyhtälöt ja yleensä jokin osa reuna- ja alkuehdoista on “kätkeyty” epäsuorasti integraalimuotoiseen esitykseen, jossa esiintyy mielivaltainen painofunktio (useiden differentiaaliyhtälöiden tapauksessa useita painofunktioita). Vaikka heikko muoto on aina näennäisesti yksi yhtälö (vrt. yhtälö (21)), siitä voidaan johtaa painofunktion (painofunktioiden) mielivaltaisuuden johdosta erillisiä yhtälöitä. Jos seurauksina näin saadut yhtälöt kuvaavat probleemaa oikein, on heikko muoto erityisesti diskreettejä menetelmiä käytettäessä usein sopivampi lähtökohta kuin vahva muoto. Myös reuna- ja alkuehtojen suhteen voidaan käyttää termejä vahva ja heikko muoto tai ehkä paremmin puhua niiden toteutumisesta heikossa muodossa joko *vahvassa mielessä* tai *heikossa mielessä*. Tällä tarkoitetaan seuraavaa. Heikossa muodossa esiintyvien tuntemattomien funktioiden täytyy ensinnäkin tyydyttää joitakin sileysvaatimuksia, mutta niiden voidaan lisäksi vaatia toteuttavan *etukäteen* jo valmiiksi joitakin reuna- tai alkuehtoja. Variaatiolaskennan terminologiaa lainaten sanotaan tällöin joskus, että kyseessä on *oleellinen ehto* (engl. essential condition) tai että ehto toteutetaan vahvassa mielessä. Heikon muodon (21) tapauksessa juuri siirtymäreunaehdon (18) toteutumista vaaditaan etukäteen eli vahvassa mielessä. Heikon muodon seurauksena syntyvää ehtoa nimitetään usein *luonnolliseksi ehdoksi* (engl. natural condition) tai sanotaan ehdon toteutuvan heikossa mielessä. Heikon muodon (21) tapauksessa traktioreunaehto (25) toteutuu heikossa mielessä. Se, että heikossa muodossa ei tarvitse välttämättä toteuttaa etukäteen kaikkia reuna- tai alkuehtoja on diskreettejä menetelmiä käytettäessä oleellinen helpotus. Artikkelin loppuosassa tullaan selostamaan tilannetta, jossa myös alkuehtojen suhteen tulee esille toteutuminen vahvassa tai heikossa mielessä. □

Huomautus 3. Virtuaalinen siirtymä on normaalisti tapana asettaa virtuaalisen työn periaatteessa nollassa niillä kappaleen reunan osilla — ns. siirtymäreuna, — joilla siirtymä on annettu. Näin juuri on tehty edellä. Mikään ei kuitenkaan estä antamasta virtuaalisen siirtymän olla mielivaltainen myös siirtymäreunalla. Tällöin virtuaaliseen työyhtälöön (19) tulee vain lisätä myös sauvan vasemmassa päässä vaikuttavan tukivoiman osuus. Koska tukivoima on luonteeltaan tuntematon rajoitevoima (reaktivoima), sen ei kuitenkaan yleensä haluta tulevan analyysin *tässä vaiheessa* mukaan yhtälöihin. □

Tarkastellaan asetelmaa seuraavaksi tavanomaisen siirtymäformulaation perustuvan elementtimenetelmän kannalta. Normaalivoiman lauseke on kimmoisella sauvalla (poikkileikkaustasojen otaksutaan pysyvän tasoina)

$$T = EA \frac{du}{dx}, \quad (26)$$

jossa EA on sauvan vetojäykkyys, jonka otaksutaan olevan C^0 -jatkuva (ks. huomautus 4). Jos käytetään esimerkiksi elementteittäin lineaarista C^0 -jatkovaa approksimaatiota (kuva 2 (b)), normaalivoimasta T tulee kuvaajan kulmapisteistä johtuen kaavan (26) perusteella C^{-1} -funktio.

Katsotaan nyt mitä seuraa, jos edellisen mukaisesti otaksutaan, että T on C^{-1} -funktio ja w säilyy edelleen C^0 -funktiona. Kirjoitetaan virtuaalinen työyhtälö eli heikko muoto (21) "varmuuden vuoksi" paloittaisella tavalla:

$$-\sum_e \int_{I^e} T \frac{dw}{dx} dx + \sum_e \int_{I^e} q w dx + \bar{T} w(l) = 0. \quad (27)$$

Yleistetyn osittaisintegrointikaavan (17) soveltaminen ensimmäiseen termiin antaa

$$-\sum_e \int_{I^e} T \frac{dw}{dx} dx = \sum_e \int_{I^e} \frac{dT}{dx} w dx - \left|_0^l T w + \sum_i w(x_1^i) \llbracket T(x_1^i) \rrbracket \right|, \quad (28)$$

jossa on otettu huomioon, että w on C^0 -funktio. Tuloksen sijoitus yhtälöön (27) ja rajoitteen $w(0) = 0$ ottaminen huomioon antaa yhtälön

$$\sum_e \int_{I^e} \left(\frac{dT}{dx} + q \right) w dx + \sum_i w(x_1^i) \llbracket T(x_1^i) \rrbracket + [\bar{T} - T(l)] w(l) = 0. \quad (29)$$

Koska w on mielivaltainen, seuraa tästä vahva muoto, joka koostuu (ensinnäkin vahvassa mielessä esitetystä reunaehdosta (18)) differentiaaliyhtälöistä

$$\frac{dT}{dx} + q = 0, \quad I^e : \text{ssä}, \quad e = 1, 2, \dots \quad (30)$$

hyppyehdoista

$$\llbracket T \rrbracket = 0, \quad \text{pisteissä } x_1^i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (31)$$

ja jälleen traktioreunaehdosta

$$T(l) = \bar{T}. \quad (32)$$

Heikon muodon (27) havaitaan antavan edelleen oikeellisen kuvauksen sauvaprobleemasta. Nyt differentiaaliyhtälö korvautuu epäjatkuvuuskohdissa fysikaalisesti oikeellisilla hyppyehdoilla (johdetaan artikkelin loppuosassa). Tuloksia (30), (31), (32) vastaavat yhtälöt on esitetty lähteessä [1, s. 30]. Tavanomaisessa siirtymäformulaatiota soveltavassa elementtimenetelmässä (ainakin kimmoisessa tapauksessa) T :n approksimaatio ja w kuuluvat vastaavasti C^{-1} - ja C^0 -funktioiden joukkoon. Elementtimenetelmää sovellettaessa siis itse asiassa yritetään ratkaista yhtälöiden (18), (30), (31) ja (32) kuvaamaa probleemaa.

Jos kontinuumiprobleeman ratkaisu on riittävän sileä, vallitseva differentiaaliyhtälö pätee alueen jokaisessa sisäpisteessä. Tällöin herää kysymys, voidaanko differentiaaliyhtälö korvata tietyissä sisäpisteissä hyppyehdoilla. Koska kuitenkin äärellisen pistejoukon mitta on nolla verrattuna itse alueen mittaan, kontinuumiprobleeman kuvausta ei ole itse asiassa muutettu. Mukaan otettujen hyppyehtojen tulee tietenkin olla fysikaalisesti oikeita, kuten on asianlaita tässä tapauksessa.

Huomautus 4. Tarkka ratkaisu ei ole tietenkään aina sileä. Jos esimerkiksi kimmoisen sauvan vetojäykkyydessä EA on tietyssä pisteessä hyppy, siirtymän derivaatassa on silloin myös hyppy. (Tämä nähdään kaavasta (26) ottamalla huomioon, että T on jatkuva.) Elementtimenetelmässä on normaalisti tapana asettaa elementtien yhdysreuna tällaiseen pisteeseen. Tämä lisää ratkaisun tarkkuutta, koska elementtimenetelmän approksimaatio kykenee antamaan siirtymän derivaattaan hypyn. Klassilliset sileät yritefunktiot — kuten sinit ja kosinit — ovat itse asiassa tällaisessa tilanteessa “liian sileitä” eikä niillä ole silloin hyviä mallinnusominaisuuksia. Edelleen, jos sauvaan sisäosassa vaikuttaa aksiaalinen pistevoima F (positiivinen, kun suunta on positiiviseen suuntaan), siirtymän derivaatta saa hypyn, vaikka EA olisi jatkuva. Silloin myös normaalivoimassa on hyppy. Vastaava hyppyehto saa muodon $\llbracket T \rrbracket + F = 0$. Tämä seuraa automaattisesti virtuaalisesta työyhtälöstä, kun voiman F virtuaalinen työ on sisällytetty mukaan. Tarkkuussyistä on tällöin jälleen hyödyllistä asettaa elementtien yhdysreuna paikkaan, jossa pistevoima vaikuttaa. \square

Tavanomaisessa diskreetissä siirtymäformulaatiossa lähdetään liikkeelle tyyppiä

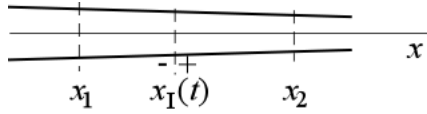
$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots \quad (33)$$

olevasta approksimaatiosta, jossa a_1, a_2, \dots ovat määräämättömiä parametreja ja $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ annettuja yritefunktioita. (Elementtimenetelmässä parametrit a ovat solmuarvoja ja suureet φ muotofunktioita.) Galerkinin menetelmässä yritefunktiot toimivat lisäksi diskreettejä yhtälöitä muodostettaessa erillisinä painofunktioina. On mielenkiintoista todeta, että klassillisia sileitä yritefunktioita käytettäessä diskreetit yhtälöt voidaan synnyttää yhtä hyvin käyttäen yhtälöä (21) tai (23) ja voidaan sanoa, että ne ovat tässä mielessä samanarvoiset. Elementtimenetelmää sovellettaessa ja käytettäessä yhtälöä (23) saadaan tuloksena “pelkkää roskaa”; vain (21) tai (27) (tai (29), joka on kömpelö) antaa oikean formulaation.

Lisää hyppyehdoista

Kontinuumimekaniikan perusaksioomat — kuten massan säilymisen periaate, liikemäärän taseen periaate, jne. — on muotoiltu normaalisti koskemaan äärellisiä kappaleita; aksioomat ovat globaaleja lakeja. Näistä laeista lähtien voidaan johtaa matemaattisten manipulaatioiden avulla lokaaleja muotoja: differentiaaliyhtälöitä ja hyppyehdoja. Kirjallisuus keskittyy hyvin usein käsittelemään vain differentiaaliyhtälöitä. Kuitenkin erityisesti elementtimenetelmän yhteydessä, jossa yritefunktiot eivät ole erityisen sileitä, hyppyehdoilla voi olla tärkeä asema kuten kävi ilmi edellä käsitellyn vedetyn sauvan tapauksessa. Seuraavassa selostetaan erään esimerkin avulla tyyppillistä logiikkaa, jolla hyppyehdot voidaan johtaa.

Tarkastellaan erittäin yksinkertaisena tapauksena edelleen vedettyä sauvaa; nyt kuitenkin dynaamisena probleemana ottaen hitausvoimat mukaan formulaatioon.



Kuva 3 Osa sauvaa alkuasemassa ja epäjatkuvuuspiste.

Liikemäärän taseen periaate voidaan ilmaista tässä yhteydessä muodossa (kuva 3)

$$T(x_2, t) - T(x_1, t) + \int_{x_1}^{x_1(t)} q(x, t) dx + \int_{x_1(t)}^{x_2} q(x, t) dx =$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1(t)} m(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx + \frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2} m(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \quad (34)$$

eli kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti on yhtä suuri kuin kappaleen liikemäärän muutosnopeus. Tässä x_1 and x_2 ovat kaksi mielivaltaista x -akselin pistettä, jotka määrittävät tarkastelun alaisen kappaleen. Koska käytetään Lagrangen esitystapaa, matematiikka palautetaan *alkuasemaan* tai yleisemmässä tapauksessa *referenssiasemaan* (engl. initial configuration, reference configuration) ja x_1 ja x_2 ovat siellä vakioita. Suure m on sauvan massa alkuaseman pituutta kohti. Samoin q on jatkuva kuormitus sauvan alkuaseman pituutta kohti. Sauvan poikkileikkausten otaksutaan pysyvän liikkeen tapahtuessa edelleen tasoina. Mahdollisten hyppyehtojen tutkimiseksi otaksutaan, että normaalivoimassa ja siirtymän derivaatassa voi olla epäjatkuvuuksia pisteessä $x = x_1(t)$, joka mahdollisesti liikkuu nopeudella dx_1/dt alkuaseman suhteen mitattuna. Korostettakoon vielä, että $x_1(t)$ on siis sauvan *nykyasemassa* (engl. current configuration) mahdollisesti esiintyvän epäjatkuvuuspisteen vastin piste alkuasemassa liikkeeseen liittyvässä kuvauksessa. (Epäjatkuvuuspisteen nopeus ei määräydy aksioomien perusteella, koska se riippuu ilmeisesti myös sauvan ainemallista; kimmainen, plastinen, jne. Kimmoiselle vakiovetojäykkyuden omaavalle sauvalle yksityiskohtainen analyysi osoittaa, että epäjatkuvuus liikkuu vauhdilla $|dx_1/dt| = \sqrt{EA/m}$.) Mahdollinen epäjatkuvuus on otettu huomioon jakamalla alue kahteen osa-alueeseen. Soveltamalla yleistettyä peruslausetta (2) osittain käänteisessä muodossa yhden epäjatkuvuuspisteen tapauksessa saadaan

$$T(x_2, t) - T(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_1(t)} \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_{x_1(t)}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} dx + \left[T(x_1(t)) \right]. \quad (35)$$

(On huomattava, että vaikka T on tässä kahden riippumattoman muuttujan funktio, derivoinnit ja integroinnit tapahtuvat pelkästään yhden muuttujan x suhteen, joten kaavaa (2) voidaan soveltaa sellaisenaan korvaamalla vain tavalliset derivaattatunnukset osittaisderivaattatunnuksilla.) Yhtälön (34) oikealla puolella olevien integraalien derivointi ajan suhteen antaa lisäksi

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_1(t)} m(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = \int_{x_1}^{x_1(t)} m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx + m^-(x_1) \frac{\partial u^-(x_1, t)}{\partial t} \frac{dx_1}{dt}, \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2} m(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = \int_{x_1(t)}^{x_2} m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx - m^+(x_1) \frac{\partial u^+(x_1,t)}{\partial t} \frac{dx_1}{dt}.$$

Jälkimmäiset termit ovat syntyneet Leibnitzin derivointisääntöä sovellettaessa. Niissä esiintyy integroimisrajan x_1 siirtymänopeus dx_1/dt . Lausekkeiden (35) ja (36) sijoitus yhtälöön (34) antaa muodon

$$\int_{x_1}^{x_1(t)} \left(-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + q \right) dx + \int_{x_1(t)}^{x_2} \left(-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + q \right) dx + \llbracket T \rrbracket + \left\| \left\| m \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \frac{dx_1}{dt} \right\| = 0. \quad (37)$$

Tästä päätellään, että vallitseva differentiaaliyhtälö on sileällä alueella

$$-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + q = 0 \quad (38)$$

ja hyppyehdoksi epäjatkuvuuskohdassa tulee

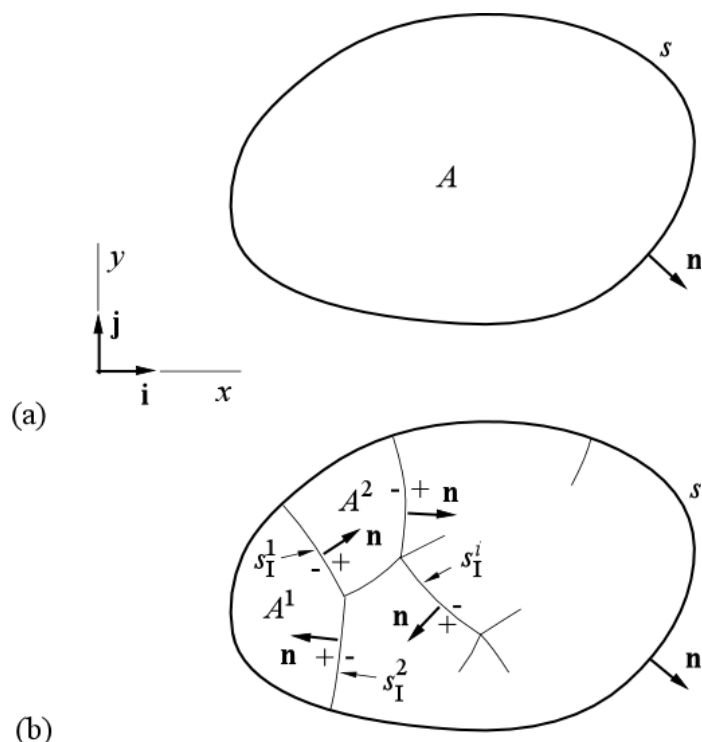
$$\llbracket T \rrbracket + \left\| \left\| m \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \frac{dx_1}{dt} \right\| = 0. \quad (39)$$

Logiikka, jolla nämä tulokset päätellään, perustuu seuraavaan ajatuskulkuun. Täysin yleinen liikemäärän taseen periaate on voimassa paitsi kuvan 3 esittämälle kappaleelle, esimerkiksi mille hyvänsä tämän kappaleen osakappaleelle. Otetaan ensin pisteet x_1 ja x_2 mielivaltaiseen kohtaan mielivaltaisen lähelle toisiaan ja jommallekummalle puolelle otaksuttua epäjatkuvuuspistettä, jolloin hyppytermi ei ole mukana yhtälössä (37). Tästä seuraa, että yhtälö (38) on voimassa kaikkialla paitsi pisteessä $x = x_1$. Yhtälön (38) johdosta integraalit yhtälössä (37) katoavat ja jäljelle jää vain hyppytermi eli saadaan hyppyehto (39). Staattisessa tapauksessa yhtälöistä (38) ja (39) tulee vastaavasti (30) ja (31), (epäjatkuvuuspisteen nopeus häviää). Jos sauvan päässä vaikuttaa kuvan 2 (a) esittämään tapaan pistevoima \bar{T} , ehto (32) voidaan myös johtaa äskeisellä tekniikalla asettamalla piste x_2 sauvan päähän ja sisällyttämällä voima \bar{T} kappaleeseen vaikuttavana ulkoisena voimana mukaan liikemäärän taseen periaatteeseen. Vastaavanlaista logiikkaa voidaan soveltaa hyppyehtojen johtamiseen myös kaksi- ja kolmidimensioisissa tapauksissa. On ilmeistä, että tämäntyyppinen matemaattinen tekniikka on etenkin dynaamisissa tapauksissa paljon uskottavampi kuin mahdollisten vapaakappalekuvioiden soveltaminen.

Seuraava kysymys tulee helposti mieleen. Heikkojen muotojen käyttö lähtökohtana elementtimenetelmän yhteydessä merkitsee ilmeisesti yleensä tiettyjen hyppyehtojen syntymistä elementtien yhdysreunoille. Ovatko nämä hyppyehdot automaattisesti samoja, joita mekaniikan aksioomat tuottavat? Jos eivät, mitä tästä seuraa? Näitä kysymyksiä tullaan käsittelemään jonkin verran artikkelin kolmannessa sovellusesimerkissä.

Kaksi dimensiota

Gaussin lause



Kuva 4 (a) Kaksidimensioinen alue A ja sen reuna s . (b) Alueen jako osa-alueisiin A^e , $e = 1, 2, \dots$.

Tarkastellaan kaksidimensioista avointa aluetta A (kuva 4). Alueen reuna muodostuu viivasta s . Gaussin lause voidaan esittää tasotapauksessa suorakulmaisia karteesisia koordinaatteja käyttäen (ehkä helpoiten muistissa pysyvässä) muodossa (ks. huomautus 5)

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_s f n_x ds, \quad (40)$$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dA = \int_s f n_y ds.$$

Nämä yhtälöt ovat voimassa C^0 -funktiolle $f(x, y)$ (ja sileämmille). Suureet n_x ja n_y ovat reunan ulkoisen yksikkönormalin $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}$ komponentit. Pinta-integraalit vasemmalla lasketaan alueen A ja viivaintegraalit oikealla reunan s yli. Gaussin lausetta tullaan tarvitsemaan kaksidimensioisten osittaisintegrointikaavojen johdossa.

Huomautus 5. Kun ensimmäistä ja toista kaavaa (40) sovelletaan vastaavasti funktioihin f_x and f_y ja saadut yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan tulos

$$\int_A \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) dA = \int_s (f_x n_x + f_y n_y) ds. \quad (41)$$

Tarkastelemalla vektoria

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} \quad (42)$$

yhtälö (41) voidaan kirjoittaa tavanomaisia vektorimerkintöjä käyttäen yleisessä muodossa

$$\int_A \nabla \cdot \mathbf{f} dA = \int_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} ds. \quad (43)$$

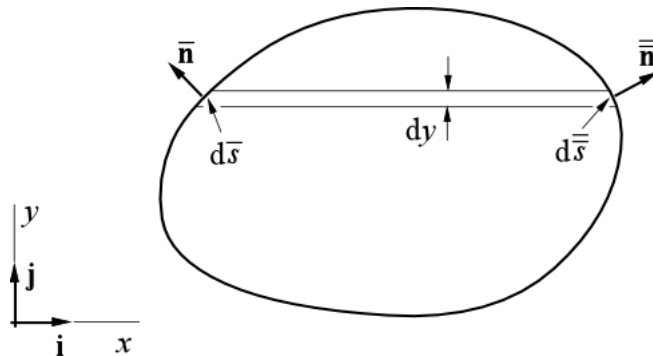
Itse asiassa juuri tätä versiota (lisäksi laajennettuna kolmeen dimensioon) nimitetään tavallisimmin Gaussin lauseeksi tai Gaussin kaavaksi tai divergenssilauseeksi. Vaihtoehtoinen tapa edetä kaavoista (40) on kertoa ensimmäinen yksikkövektorilla \mathbf{i} ja toinen yksikkövektorilla \mathbf{j} ja laskea syntyvät yhtälöt puolittain yhteen, jolloin saadaan kaava

$$\int_A \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right) dA = \int_s f (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}) ds \quad (44)$$

tai sama yleisessä muodossa:

$$\int_A \nabla f dA = \int_s \mathbf{n} f ds. \quad (45)$$

Myös tätä yhtälöä nimitetään usein Gaussin lauseeksi. Kaavojen (40) nähdään olevan kaavan (45) komponenttimuotoja suorakulmaisia karteesisia koordinaatteja käytettäessä. \square



Kuva 5 x -akselin suuntainen differentiaalinen kaistale.

Vaikka kaavat (40) johdetaan käytännöllisesti katsoen jokaisessa vektorianalyysin oppikirjassa, on jatkon kannalta ehkä paikallaan palauttaa mieleen johdon peruspiirteet. Johto pohjautuu suoraan yksidimensioisen peruslauseen (9) soveltamiseen. Aloitetaan ensimmäisen kaavan (40) vasemmasta puolesta:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dx dy. \quad (46)$$

Jaetaan alue differentiaaliin (leveys dy) x -akselin suuntaisiin kaistaleisiin (kuva 5). Otaksutaan aluksi kuvan esittämän tapauksen mukaisesti, että jokainen x -akselin suuntainen viiva leikkaa alueen korkeintaan kahdesti. Kaistaleen antama osuus integraaliin (46) on

$$dy \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} \frac{\partial f}{\partial x} dx = dy (\bar{f} - \bar{f}) = \bar{f} dy - \bar{f} dy, \quad (47)$$

jossa tilapäisesti käyttöön otetut yläviivoin merkityt tunnuksat viittaavat arvoihin kaistaleen päissä. Yhtälön (47) oikea puoli on saatu peruslauseen (9) avulla. Tällöin on siis otettu huomioon, että kaistaleella y -koordinaatin arvo on vakio ja x on siten ainoa riippumaton muuttuja. Kuvan 5 merkintöjen perusteella (ks. huomautus 6)

$$dy = \cos(\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{i}) ds = \bar{n}_x d\bar{s}, \quad (48)$$

$$dy = \cos(-\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{i}) ds = -\bar{n}_x d\bar{s}.$$

Näiden sijoitus yhtälöön (47) antaa

$$dy \int_{\bar{x}}^{\bar{x}} \frac{\partial f}{\partial x} dx = \bar{n}_x \bar{f} d\bar{s} + \bar{n}_x \bar{f} d\bar{s}. \quad (49)$$

Summaamalla kaikkien kaistaleiden antamat osuudet ja poistamalla tilapäismerkinnot saadaan ensimmäinen kaava (40). Toinen kaava syntyy vastaavalla tavalla käyttäen y -akselin suuntaisia kaistaleita. Lopuksi kaavojen voidaan osoittaa olevan voimassa mielivaltaisille alueille — esimerkiksi alueille, joissa on reikiä — jakamalla alue sopiviin osa-alueisiin, soveltamalla äskeisiä kaavoja erikseen niille ja summaamalla saadut tulokset.

Huomautus 6. Kaavojen (40) viivaintegraalit tulkitaan tässä siten, että viiva-alkiot ds ovat (mahdollisesta integroimissuunnasta riippumatta) samoin kuin pinta-alkiot dA aina positiivisia suureita. Jos alkioita dy pidetään kuvassa 5 positiivisena, se on alkioiden $d\bar{s}$ and $d\bar{s}$ projektio y -akselille. Tämä selittää kaavojen (48) sisällön. \square

Huomautus 7. Joskus on tarpeen kirjoittaa Gaussin kaavat (40) vaihtoehtoisella tavalla

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_s f dy, \quad (50)$$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dA = - \int_s f dx.$$

Nämä yhteydet syntyvät vastaavasti (mutta suuremmin) kuin edellä ja ne ovat itse asiassa yleisempää tyyppiä kuin kaavat (40), koska viiva-alkioita ds ei ole otettu mukaan. Esimerkiksi tämän artikkelin kolmannessa sovelluksessa koordinaatilla x on

pituuden dimensio ja koordinaatilla $y \rightarrow t$ ajan dimensio. Tällöin vinon kaarialkion muodollinen Pythagoraan lauseen antama tulos $ds^2 = dx^2 + dt^2$ johtaisi dimensionaalisesti epähomogeeniseen lausekkeeseen ja koko kaarialkiokäsitteestä täytyy siis luopua tämäntapaisissa tapauksissa. Ensimmäisen kaavan (50) sisältö nähdään alustavasti jo kaavan (47) perusteella. Nyt täytyy kuitenkin poiketa huomautuksessa 6 esitetystä alkion dy merkin tulkinnasta aina positiiviseksi. On ehkä havainnollisinta ottaa tarkastelun lähtökohdaksi ensimmäisen kaavan (50) oikeaa puolta vastaava Riemannin summa

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta y_i, \quad (51)$$

jonka merkintöjen sisältö on ilmeinen. Δy -levyisten, nyt äärellisten kaistaleiden reunaviivat synnyttävät alueen reunan leikatessaan sille pistejoukon. Valitaan reunaviivalle suuntaus ja numeroidaan kyseiset pisteet mielivaltaisesta pisteestä alkaen suuntauksen mukaan liikkuen pisteiksi P_0, P_1, \dots, P_n . Suure $\Delta y_i = y(P_i) - y(P_{i-1})$ ja se siis voi olla tilanteesta riippuen myös negatiivinen ja samoin siis rajalla myös alkio dy . Kaavat (50) pätevät (oikeakätisessä koordinaatistossa), kun reunaviivan suuntaus on valittu siten, että alue A jää vasemmalle puolelle kuljettaessa reunaa pitkin suuntauksen mukaisesti. (Kuvan 5 esittämässä tapauksessa reunaa kierretään vastapäivään. Mutta alueessa mahdollisesti olevan reiän ympäri kiertosuunta olisi siis myötäpäivään.) Havaitaan edelleen, että kuvan 5 tapauksessa suureet Δy_i ovat positiivisia (negatiivisia) alueen “oikealla (vasemmalla) reunalla” Täten kaava (47) antaa rajankäynnin jälkeen välittömästi ensimmäisen kaavan (50). Vastaavasti suureet $\Delta x_i = x(P_i) - x(P_{i-1})$ ovat negatiivisia (positiivisia) alueen “yläreunalla (alareunalla)”. Tämä seikka selittää jälkimmäiseen kaavaan (50) syntyvän miinusmerkin.

Käytännössä reunan tarkastelu vaatii yleisessä tilanteessa jonkin sopivan parametriesityksen

$$\begin{aligned} x &= x(\tau), \\ y &= y(\tau). \end{aligned} \quad (52)$$

Differentioimalla saadaan

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{d\tau} d\tau, \\ dy &= \frac{dy}{d\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (53)$$

Jos parametrin τ kasvusuunta valitaan yhtymään reunan suuntaukseen, nämä kaavat antavat automaattisesti oikeat merkit suureille dx ja dy . Kaavojen (50) oikeiden puolien integraalit saavat lopuksi yksityiskohtaiset muodot

$$\int_s f dy = \int_\tau f(x(\tau), y(\tau)) \frac{dy}{d\tau} d\tau, \quad (54)$$

$$\int_s f dx = \int_\tau f(x(\tau), y(\tau)) \frac{dx}{d\tau} d\tau.$$

Nämä ovat tavallisia τ -akselin yli otettuja integraaleja. Vastaavat rajat seuraavat esityksestä (52). Käytännössä voidaan tarvita useita paloittaisia esityksiä (52).

Tarpeen mukaan voidaan johtaa vaihtoehtoisia osittaisintegroitukaavoja ottaen lähtökohdaksi Gaussin kaavat (50). Näin toimitaan juuri tämän artikkelin toisen sovellusesimerkin yhteydessä. \square

Gaussin lause yleistetään nyt C^{-1} -funktioille. Otaksutaan, että alueessa A on epäjatkuvuusviivoja (esimerkiksi elementtien yhdysreunoja) s_1^i , $i = 1, 2, \dots$, joita ylitettäessä funktio $f(x, y)$ voi saada arvoonsa hypyn (kuva 4 (b)). Nämä viivat jakavat alueen avoimiin osa-alueisiin (esimerkiksi elementteihin) A^e , $e = 1, 2, \dots$. Merkitään epäjatkuvuusviivan mielivaltaisesti valittua toista puolta “+”puolena ja toista “-”puolena. Käytetään jälleen hyppysulkumerkintää

$$[[f]] = f^+ - f^-, \quad (55)$$

jossa f^+ and f^- ovat funktion f raja-arvoja viivalla s_1 , kun viivan pistettä lähestytään vastaavasti + puolelta tai - puolelta. (ks. huomautus 8). Määritellään yksikkönormaalivektori \mathbf{n} viivalle s_1 tässä kahdesta mahdollisuudesta siten, että se on suunnattu - puolelta kohti + puolta. Voidaan kirjata kaavojen (6) ja (7) vastineet:

$$\bar{A}^1 \cup \bar{A}^2 \cup \dots = \bar{A} \quad (56)$$

ja

$$A^1 \cap A^2 \cap \dots = \emptyset. \quad (57)$$

Esitetään seuraavaksi ensimmäisen standardimuotoisen Gaussin kaavan (40) yleistys. Soveltamalla kyseistä kaavaa erikseen jokaisessa osa-alueessa ja summaamalla syntyvät yhtälöt puolittain saadaan tulos

$$\sum_e \int_{A^e} \frac{\partial f}{\partial x} dA = \sum_e \int_{s^e} f n_x ds. \quad (58)$$

Tässä tunnus s^e merkitsee osa-alueen A^e reunaa. Kuvan 4 (b) avulla nähdään, että tietyltä epäjatkuvuusviivalta s_1^i kertyy aina kahdesta osa-alueesta kaksi viivaintegraalia, jotka antavat yhteensä osuuden (ks. huomautus 8)

$$\int_{s_1^i} f^- n_x ds - \int_{s_1^i} f^+ n_x ds = \int_{s_1^i} (f^- - f^+) n_x ds = - \int_{s_1^i} [[f]] n_x ds. \quad (59)$$

Alueen varsinainen reuna esiintyy kaavan (58) oikean puolen kautta vain kerran ja näin päädytään C^{-1} -funktioille f (tai sileämmille) pätevään yleistettyyn Gaussin lauseeseen (tässä artikkelissa käytetty nimitys):

$$\sum_e \int_{A^e} \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_s f n_x ds - \sum_i \int_{s_i^+} \llbracket f \rrbracket n_x ds, \quad (60)$$

$$\sum_e \int_{A^e} \frac{\partial f}{\partial y} dA = \int_s f n_y ds - \sum_i \int_{s_i^+} \llbracket f \rrbracket n_y ds.$$

Toinen kaava saadaan vastaavasti kuin ensimmäinen. Jos f on C^0 -funktio, päädytään takaisin (miltei) kaavoihin (40).

Huomautus 8. Havaitaan ensinnäkin, että lausekkeen (59) arvo ei riipu siitä, miten + ja – puolet on valittu. Jos puolet vaihdetaan keskenään, arvot f^+ ja f^- vaihtuvat toisikseen, mutta vastaavasti komponentti n_x vaihtaa merkkinsä. Jos sitten vektorin \mathbf{n} suunta valitaan vastakkaisella tavalla kuin tässä (suunnattu + puolelta kohti – puolta, kuten usein tehdään alan kirjallisuudessa), kaava (52) ja kaavat (60) tulevat muotoihin, joissa hyppytermit esiintyvät plusmerkkisinä. Tässä toimitaan kuitenkin kuvassa 4 (b) esitetyn valinnan mukaisesti.

Havaitaan edelleen, että myös yksidimensioisessa tapauksessa + ja – puolet olisi voitu valita mielivaltaisesti, toisin kuin kuvan kuva 1 (b) esittämällä systemaattisella tavalla. Tämä olisi kuitenkin vaatinut määrittelemään epäjatkuvuuspisteissä yksikkönormaalivektorit \mathbf{i} tai $-\mathbf{i}$ vastaavine komponentteineen $n_x = 1$ tai $n_x = -1$, joka olisi ollut melko kömpelöä.

Mainittakoon vielä eräs + ja – puolten valintaan liittyvä näkökohta. Jos kaavan (58) mukaisia manipulaatioita ja vastaavia osittaisintegrointeja joudutaan soveltamaan varsinaisen elementtimenetelmäohjelman yhteydessä elementti elementiltä, on kirjanpidon kannalta yksinkertaisinta määritellä \mathbf{n} kullekin elementille elementin reunan ulkoiseksi (esimerkiksi) yksikkönormaalivektoriksi. Ohjelman tekemä summaus elementtien reunojen yli hoitaa automaattisesti lopun. Kuvaan 4 (b) liittyvä suureiden \mathbf{n} valinta on taas luonteva, kun pyritään selvittämään analyttisesti yhdysreunoille mahdollisesti syntyviä hyppyehtoja. \square

Osittaisintegrointi

Kahta funktiota $g(x, y)$ ja $h(x, y)$ koskeva standardimuotoinen osittais-integrointikaava kaksidimensioisessa tapauksessa voidaan esittää seuraavasti:

$$\int_A g \frac{\partial h}{\partial x} dA = - \int_A \frac{\partial g}{\partial x} h dA + \int_s g h n_x ds, \quad (61)$$

$$\int_A g \frac{\partial h}{\partial y} dA = - \int_A \frac{\partial g}{\partial y} h dA + \int_s g h n_y ds.$$

Tässä funktioiden g ja h tulee olla C^0 -funktioita (tai sileämpiä). Kaavat syntyvät ilmeisellä tavalla palauttamalla mieleen kaavan (14) johto. Identiteetti

$$\frac{\partial}{\partial x}(gh) = \frac{\partial g}{\partial x}h + g\frac{\partial h}{\partial x} \quad (62)$$

integroidaan puolittain alueen A yli:

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x}(gh) dA = \int_A \frac{\partial g}{\partial x}h dA + \int_A g\frac{\partial h}{\partial x} dA. \quad (63)$$

Ensimmäisen Gaussin kaavan (40) soveltaminen yhtälön vasemmalla puolella ja pieni järjestely tuottaa ensimmäisen kaavan (61). Toinen kaava saadaan vastaavalla tavalla.

Yleistetyt osittaisintegroitikaavat kahdessa dimensiossa ovat

$$\sum_e \int_{A^e} g \frac{\partial h}{\partial x} dA = - \sum_e \int_{A^e} \frac{\partial g}{\partial x} h dA + \int_s g h n_x ds - \sum_i \int_{s_i} [[gh]] n_x ds, \quad (64)$$

$$\sum_e \int_{A^e} g \frac{\partial h}{\partial y} dA = - \sum_e \int_{A^e} \frac{\partial g}{\partial y} h dA + \int_s g h n_y ds - \sum_i \int_{s_i} [[gh]] n_y ds.$$

Tässä funktioiden g ja h tulee olla C^{-1} -funktioita (tai sileämpiä). Kaavojen (64) johto etenee aivan vastaavasti kuin yhdessä dimensiossa eikä sitä enää toisteta. Hyppytermit yksinkertaistuvat jälleen, jos g tai h tai molemmat ovat jatkuvia. Jos molemmat niistä ovat jatkuvia, päädytään takaisin (miltei) standardimuotoisiin kaavoihin (61).

Toinen sovellus

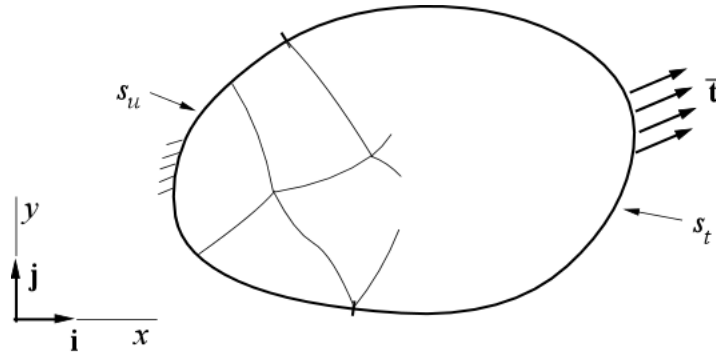
Tämä sovellus on tietynlainen ensimmäisen sovelluksen laajennus kahteen dimensioon. Kuva 6 pyrkii kuvaamaan tasojännitys- tai tasomuodonmuutostapausta. Kappaleen reunan s otaksutaan muodostuvan reunaehtoien kannalta *siirtymäreunasta* (engl. displacement boundary), jolla siirtymä on annettu:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad s_u : \text{lla} \quad (65)$$

ja *traktioreunasta* (engl. traction boundary), jolla traktio (jännitysvektori) on annettu

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad s_t : \text{llä}. \quad (66)$$

Yleisempiä reunaehtoja voitaisiin esittää, mutta nämä ovat riittäviä havainnollistamaan tilannetta. Reunojen s_u ja s_t vastineina kuvan 2 esittämässä tapauksessa ovat pisteet $x = 0$ ja $x = l$.



Kuva 6 Kaksidimensioinen alue A ja sen reuna s .

Asetelmaa vastaava standardimuotoinen virtuaalinen työyhtälö on

$$\begin{aligned}
 & - \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dA \\
 & + \int_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dA + \int_{s_t} (\bar{t}_x \delta u + \bar{t}_y \delta v) ds = 0, \quad (67)
 \end{aligned}$$

jossa virtuaaliset venymäkomponentit ovat

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta \varepsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \quad \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}. \quad (68)$$

Merkintöjen (67) ja (68) sisältö on ilmeinen. Luvallisten virtuaalisten siirtymäkomponenttien tulee toteuttaa (tavanomaisessa formulaatiossa) rajoitteet $\delta u = 0$ ja $\delta v = 0$ s_u :lla.

Johdetaan yhtälöä (67) vastaava vahva muoto otaksuen kuitenkin jo nyt, että alueessa voi esiintyä kuvan 4 (b) esittämään tapaan epäjatkuvuusviivoja. Yksinkertaistetaan merkintöjä kuten ensimmäisessä sovelluksessa tulkiten virtuaalinen siirtymävektori $\delta \mathbf{u}$ tässä nyt painofunktiovektoriksi \mathbf{w} , jonka karteesiset komponentit ovat w_x ja w_y . Näin saadaan heikko muoto

$$\begin{aligned}
 & - \sum_e \int_{A^e} \left[\sigma_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right] dA \\
 & + \sum_e \int_{A^e} (f_x w_x + f_y w_y) dA + \int_{s_t} (\bar{t}_x w_x + \bar{t}_y w_y) ds = 0. \quad (69)
 \end{aligned}$$

Otaksutaan jännityskomponenttien olevan C^{-1} -funktioita ja painofunktioikomponenttien C^0 -funktioita. Kaavojen (64) soveltaminen tuottaa lausekkeet

$$- \sum_e \int_{A^e} \sigma_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dA = \sum_e \int_{A^e} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} w_x dA - \int_{s_t} \sigma_x w_x n_x ds + \sum_i \int_{s_t^i} [\![\sigma_x]\!] w_x n_x ds,$$

$$-\sum_e \int_{A^e} \sigma_y \frac{\partial w_y}{\partial y} dA = \sum_e \int_{A^e} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} w_y dA - \int_{s_t} \sigma_y w_y n_y ds + \sum_i \int_{s_t^i} \llbracket \sigma_y \rrbracket w_y n_y ds, \quad (70)$$

$$-\sum_e \int_{A^e} \tau_{xy} \frac{\partial w_x}{\partial y} dA = \sum_e \int_{A^e} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} w_x dA - \int_{s_t} \tau_{xy} w_x n_y ds + \sum_i \int_{s_t^i} \llbracket \tau_{xy} \rrbracket w_x n_y ds,$$

$$-\sum_e \int_{A^e} \tau_{xy} \frac{\partial w_y}{\partial x} dA = \sum_e \int_{A^e} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} w_y dA - \int_{s_t} \tau_{xy} w_y n_x ds + \sum_i \int_{s_t^i} \llbracket \tau_{xy} \rrbracket w_y n_x ds.$$

Funktiot w_x ja w_y on voitu ottaa jatkuvina hyppysulkujen ulkopuolelle. Integraalit reunan s_u yli katoavat, koska sillä $w_x = 0$ ja $w_y = 0$. Lausekkeiden (70) sijoitus heikkoon muotoon (69) antaa yhtälön

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{A^e} \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x \right) w_x + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y \right) w_y \right] dA \\ & + \sum_i \int_{s_t^i} \llbracket \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \rrbracket w_x ds + \sum_i \int_{s_t^i} \llbracket \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x \rrbracket w_y ds \\ & + \int_{s_t} (\bar{t}_x - \sigma_x n_x - \tau_{xy} n_y) w_x ds + \int_{s_t} (\bar{t}_y - \sigma_y n_y - \tau_{xy} n_x) w_y ds = 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Kertoimet n_x ja n_y on viety hyppysulkujen sisälle, jolloin voidaan hyödyntää lausekkeitä yksinkertaistavia merkintöjä. Kontinuumimekaniikasta tuttu tulos (saadaan kiilamaisen ainealkion tasapainoyhtälöstä) sanoo, että pinta-alkioon, jonka ulkoinen yksikkönormaali on \mathbf{n} , vaikuttavan traktion \mathbf{t} komponentit saadaan lausekkeista

$$t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, \quad (72)$$

$$t_y = \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x.$$

Koska suureet w_x and w_y ovat mielivaltaisia, yhtälön (71) toteutuminen antaa täten seurauksina (ensinnäkin vahvassa mielessä esitetyn reunaehdon (65) lisäksi) differentiaaliyhtälöt

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad A^e : \text{ssä}, \quad e = 1, 2, \dots, \quad (73)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad A^e : \text{ssä}, \quad e = 1, 2, \dots,$$

hyppyyhdot

$$\begin{aligned} \llbracket t_x \rrbracket = 0 \quad s_1^i : \text{ssä, } i = 1, 2, \dots \\ \llbracket t_y \rrbracket = 0 \quad s_1^i : \text{ssä, } i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (74)$$

ja traktioreunaehdot

$$\begin{aligned} t_x = \bar{t}_x \quad s_t : \text{llä.} \\ t_y = \bar{t}_y \quad s_t : \text{llä.} \end{aligned} \quad (75)$$

Vahvat muodot (73), (74) ja (75) ovat problemaa oikein kuvaavia yhteyksiä. Oleellisesti samat tulokset on johdettu lähteessä [1, s. 148]. Etenkin yhtälöt (73) ja (75) ovat kontinuumimekaniikan harjoittajalle varsin tutut. Hyppyehdot (74) — ja itse asiassa myös yhtälöt (73) ja (75) — voidaan johtaa liikemäärän taseen periaatteen avulla samaan tapaan kuin mitä tehtiin luvussa “Lisää hyppyehdoista”. Tavanomaista siirtymäformulaatioon pohjautuvaa elementtimenetelmää sovellettaessa approksimaatiot kohdistuvat loppujen lopuksi juuri yhtälöiden (65), (73), (74) ja (75) toteuttamiseen.

Kolmas sovellus

Tässä sovelluksessa tarkastellaan ensimmäisen sovelluksen vedettyä sauvaa nyt dynaamisena problemana, jolloin paikkamuuttujan x lisäksi mukaan tulee myös aikamuuttuja t . Sovellus koskee lopuksi ns. *paikka-aika formulaatiota* (engl. space-time formulation), jonka suosio on lisääntynyt viime vuosina.

Valitut reunaehdot ovat

$$\begin{aligned} u(0, t) = \bar{u}(t), \\ T(l, t) = \bar{T}(t). \end{aligned} \quad (76)$$

Tässä on siis otettu mukaan mahdollisuus antaa sauvan vasemmassa päässä ajasta riippuva annettu siirtymä $\bar{u}(t)$. Sauvan oikeassa päässä vaikuttava annettu voima voi samoin olla ajan funktio. Dynamiikassa on lisäksi annettava alkuehtoina alkuasema (siirtymä) ja alkunopeus. Täten asetetaan

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \bar{u}(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{v}(x), \end{aligned} \quad (77)$$

jossa \bar{u} ja \bar{v} ovat annettuja x :n funktioita.

Virtuaalisen työn periaate on rakenteiden mekaniikan harjoittajalle lähes korvaamattoman tärkeä työkalu. Jos soveltaja on sisäistänyt periaatteen yleisen muodon staattisessa tapauksessa, on tavallisesti melko yksinkertaista muotoilla periaate koskemaan tiettyä rakenteen geometriaa ja tiettyjä kinemaattisia otaksumia

noudattavaksi ja yleistää se lisäksi dynamiikkaan. Toistetaan vielä ensimmäisessä sovelluksessa esitetty virtuaalinen työyhtälö eli heikko muoto (21):

$$-\int_I T \frac{dw}{dx} dx + \int_I q w dx + \bar{T} w(l) = 0. \quad (78)$$

Dynaaminen tapaus hoidetaan usein liittämällä hitausvoimien (tässä hitausvoima pituutta kohti on $-m \partial^2 u / \partial t^2$) antama osuus mukaan ulkoisten voimien tekemään virtuaaliseen työhön. Toisin sanoen q yhtälössä (78) korvataan termillä

$$q - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (79)$$

jolloin saadaan virtuaalinen työyhtälö (heikko muoto)

$$-\int_I m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w dx - \int_I T \frac{dw}{dx} dx + \int_I q w dx + \bar{T} w(l) = 0. \quad (80)$$

Tämän heikon muodon yhteydessä vaaditaan alkuehtojen (77) toteutumista etukäteen eli vahvassa mielessä (ks. huomautus 2).

Diskreetissä siirtymäformulaatioissa lähdetään vastaavasti tavallisimmin liikkeelle esityksen (33):

$$u(x) \approx \tilde{u}(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots \quad (81)$$

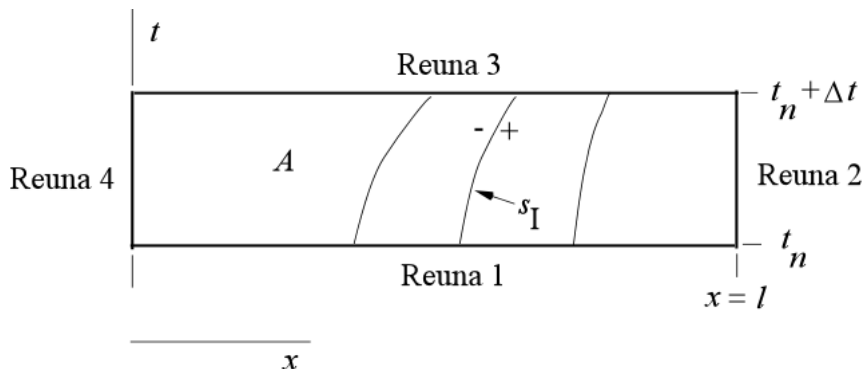
laajennuksesta muotoon

$$u(x, t) \approx \tilde{u}(x, t) = a_1(t) \varphi_1(x) + a_2(t) \varphi_2(x) + \dots \quad (82)$$

jossa tuntemattomat “parametrit” $a(t)$ ovat nyt ajan funktioita. Lausekkeen (82) mukaisesta esityksestä käytetään kirjallisuudessa usein nimitystä *semidiskretointi* (engl. semidiscretization). Galerkinin menetelmässä diskreetit yhtälöt synnytetään ottaen suureet $\varphi_i(x)$ kukin vuorollaan painofunktioiksi. Heikko muoto (80) tuottaa suureita $a(t)$ koskevia tavallisia differentiaaliyhtälöitä, joissa siis enää aika esiintyy riippumattomana muuttujana. Tällainen lähestymistapa on kiinteän aineen mekaniikassa hyvin luonteva, koska jo “luonnostaan diskreettien” systeemien kuten jäykistä osista muodostuvien mekanismien vallitsevat liikeyhtälöt ovat tavallisia differentiaaliyhtälöitä, joissa aika on riippumaton muuttuja. Tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisu vaatii käytännössä uuden diskretoinnin, numeerisen aikaintegroinnin, jossa ratkaisua viedään eteenpäin edeten ajan suhteen sopivan pituisten aika-askelten Δt avulla. Näillä menetelmillä on vakiintunut ja pitkä historia takanaan.

Paikka-aika formulaatiot poikkeavat lähtökohdiltaan edellä lyhyesti kuvatusta semidiskreetistä lähestymistavasta. Perusideana on käsittää aika pitkälti samankaltaisessa roolissa kuin paikkakoordinaatit. Näin ei kuitenkaan täysin, koska aika on joka tapauksessa luonteeltaan *yksisuuntainen koordinaatti* (engl. one-way coordinate) ja kaikki alkuehdot liittyvät samaan ajanhetkeen. Käytännössä tietyn tehtävän ratkaisualue paikan ja ajan suhteen jaetaan ns. *paikka-aika kaistaleisiin* (engl. space-time slabs) ja ratkaisu etenee peräkkäisesti kaistaleesta kaistaleeseen. Probleemana on määrittää

ratkaisu kaistaleen alueessa ottaen alkuehdot edellisessä kaistaleessa saadusta ratkaisusta sen loppuhetkellä. Oleellista on myös, että alkuehdot otetaan paikka-aikaformulaatiossa yleensä huomioon heikossa mielessä (ks. huomautus 2).



Kuva 7 Paikka-aika kaistale.

Kuva 7 esittää tyypillistä paikka-aika kaistaletta, kun kyseessä on tässä tarkasteltava yhden paikkakoordinaatin tapaus. Hetki $t = t_n$ viittaa kaistaleeseen liittyvään alkuhetkeen ja $t = t_n + \Delta t$ loppuhetkeen.

Tarkastellaan seuraavaa heikkoa muotoa:

$$\begin{aligned}
 & - \int_A m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w \, dA - \int_I m w \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \bar{v} \right) \Big|_{t=t_n} dx + \int_I m \frac{\partial w}{\partial t} (u - \bar{u}) \Big|_{t=t_n} dx \\
 & - \int_A T \frac{\partial w}{\partial x} dA + \int_A q w \, dA + \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \bar{T} w(l, t) dt = 0. \tag{83}
 \end{aligned}$$

Pintaintegraalit lasketaan kaistaleen alueen A yli. Viivaintegraalit x integraali-muuttujana ovat välin $I =]0, l[$ yli. Sijoitusmerkinnät viittaavat aikatasoon, jolla ensimmäisen rivin kaksi viimeistä integraalia lasketaan. On ehkä jälleen syytä korostaa, että I on tässä Lagrangen esitystavan mukaisesti kiinteä alkuaseman väli ja täten esimerkiksi sauvan massa pituutta kohti $m(x)$ on vakio ajan suhteen myös mahdollisten suurten siirtymien tapauksessa (joita ei tässä kuitenkaan käsitellä).

Seuraavassa kuvataan ensin yhtälön (83) syntyä ja tiettyä terminologiaa. Integroidaan heikko muoto (80) vielä kaistaleen aikavälin Δt yli. Tämä selittää yhtälön (83) toisen rivin. Oleellista on, että w voi olla nyt myös t :n funktio, joten mukaan ilmestyy w :n osittaisderivaattamerkintä. Jos funktion $u(x, t)$ vaadittaisiin toteuttamaan heikossa muodossa (83) alkuehdot (77) eksaktisti etukäteen eli vahvassa mielessä, heikko muoto voitaisiin kirjoittaa ilman ensimmäisen rivin kahta viimeistä termiä. Nyt ei kuitenkaan aseteta etukäteen mitään rajoituksia siirtymälle tai sen derivaatalle alkuhetkellä kaistaleessa. Sen sijaan alkuehdot ovat ilmestyneet tietyllä tavoilla painotettuina ja integroituna heikon muodon vasemmalle puolelle ja ne tulevat otetuksi huomioon heikossa mielessä. Ymmärretään, että koska painofunktio $w(x, t)$ on mielivaltainen, heikko muoto itsessään vaatii lopuksi alkuehtojen toteutumista. Tämän asetelman on havaittu tekevän paikka-aika formulaatiosta joustavan; mm. elementtimenetelmässä verkkoa voidaan muuttaa kaistaleesta kaistaleeseen

kulloistenkin tarkkuusvaatimusten mukaisesti. Todettakoon, että ei ole kuitenkaan suoraan nähtävissä, miksi alkuehtojen painot heikossa muodossa (83) ovat juuri $m \partial w / \partial t$ ja $-m w$. Painotusten logiikkaa on selostettu lähteessä [3] eikä siihen puututa tässä. Alkuehtojen käsittelyn suhteen on vielä täsmennettävä, että hetkellä $t = 0$ alkavan tilanteen jälkeen (jolloin \bar{u} ja \bar{v} on annettu kaavoissa (77)) suureiden \bar{u} ja \bar{v} arvot hetkellä $t = t_n$ otetaan edellisessä kaistaleessa saadusta ratkaisusta sen loppuhetkellä.

Diskreettiä ratkaisua etsitään kussakin kaistaleessa lausekkeen (82) sijasta muodossa

$$u(x, t) \approx \tilde{u}(x, t) = a_1 \varphi_1(x, t) + a_2 \varphi_2(x, t) + \dots, \quad (84)$$

jossa siis annetut suureet φ ovat nyt sekä paikan että ajan funktioita ja määräämättömät parametrit a tuntemattomia vakioita. Toinen laskennallisesti ehkä mukavampi vaihtoehto on katkaistu Taylorin sarja ajan suhteen

$$u(x, t) \approx \tilde{u}(x, t) = u_0(x) + u_1(x)t + u_2(x)t^2/2 + \dots, \quad (85)$$

jossa kunkin kerroinfunktion approksimaatio on tyyppiä (81). Kyseessä on *täysi diskretointi* (engl. full discretization) ja tavallaan hoidetaan kerralla se mikä semidiskreetissä formulaatiossa vaatii kaksi peräkkäistä diskretointia. Erityisesti elementtimenetelmää sovellettaessa, kun approksimaatio on yleistä tyyppiä (84), kaistaleessa mahdollisesti "vinossa" olevat C^0 -jatkuvat u :n paikka-aikaelementit aiheuttavat sen, että derivaatat $\partial u / \partial x$ ja $\partial u / \partial t$ kuuluvat vain C^{-1} -funktioiden joukkoon. (Sopivasti vinossa olevat elementit voivat lisätä tietyissä sovelluksissa ratkaisun tarkkuutta.) Tämän johdosta tarvittavat manipulaatiot suoritetaan jatkossa varmuuden vuoksi osa-alue osa-alueelta (elementti elementiltä).

Seuraavaksi tutkitaan heikosta muodosta (83) johdettavia vahvoja muotoja. Konsistenssi (vahvan muodon ratkaisu toteuttaa heikon muodon) on toivottava heikon muodon ominaisuus, vaikka elementtimenetelmän tuottaman ratkaisun konvergenssi on mahdollista ilman sitäkin. Nyt tiettyinä mutkistavana tekijänä on huomautuksessa 7 käsitelty aihe: koordinaattien eriävien fysikaalisten dimensioiden johdosta viiva-alkion ds käyttö ei ole mahdollista, joten ei voida soveltaa tavanomaisempia osittaisintegroitikaavoja (64). Ongelma voidaan tietenkin kiertää siirtymällä tilapäisesti esimerkiksi dimensiottomaan esitykseen. Tässä on ehkä kuitenkin suoraviivaisempaa soveltaa huomautuksessa 7 johdettuja kaavoja (50) kirjoitettuna vain nyt käytössä olevien koordinaattien ($x \hat{=} x$, $y \hat{=} t$) avulla muotoihin

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_s f dt, \quad (86)$$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial t} dA = - \int_s f dx.$$

Soveltamalla näitä ja toistamalla vastaavat askeleet kuin edellä saadaan kaavoja (64) vastaavat nyt käsiteltyyn problemaan sopivat yleistetyt osittaisintegroitikaavat

$$\sum_e \int_{A^e} g \frac{\partial h}{\partial x} dA = - \sum_e \int_{A^e} \frac{\partial g}{\partial x} h dA + \int_s gh dt - \sum_i \int_{s_i^1} \llbracket gh \rrbracket dt, \quad (87)$$

$$\sum_e \int_{A^e} g \frac{\partial h}{\partial t} dA = - \sum_e \int_{A^e} \frac{\partial g}{\partial t} h dA - \int_s gh dx + \sum_i \int_{s_i^1} \llbracket gh \rrbracket dx.$$

Tarkastellaan heikkoa muotoa (83). Kuvassa 7 on esitetty kaaviollisesti kolme mahdollista ratkaisun epäjatkuuusviivaa s_1 . Elementtimenetelmässä ne voivat olla myös tyyppiä (84) olevan approksimaation derivaattojen epäjatkuuusviivoja eli elementtien yhdysreunoja. Siirrytään jälleen paloittaiseen esitykseen osittaisintegroitivissa termeissä:

$$\begin{aligned} & - \int_A m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} w dA - \int_I m w \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \bar{v} \right) \Big|_{t=t_n} dx + \int_I m \frac{\partial w}{\partial t} (u - \bar{u}) \Big|_{t=t_n} dx \\ & - \sum_e \int_{A^e} T \frac{\partial w}{\partial x} dA + \int_A q w dA + \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \bar{T} w(l, t) dt = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Ensimmäisen kaavan (87) soveltaminen yhtälön (88) toisen rivin ensimmäiseen termiin antaa (poistetaan w :hen kohdistuva derivaatta)

$$- \sum_e \int_{A^e} T \frac{\partial w}{\partial x} dA = \sum_e \int_{A^e} \frac{\partial T}{\partial x} w dA - \int_s T w dt + \sum_i \int_{s_i^1} \llbracket T \rrbracket w dt. \quad (89)$$

Tässä siis w :n on otaksuttu olevan C^0 -funktio, joten se on voitu ottaa hyppysulkujen ulkopuolelle. Alueen A reuna s kuvassa 7 koostuu paloittain neljästä sileästä osasta, jotka on numeroitu. Eräs yksinkertainen kaavojen (50) mukainen parametriesitys reunaintegraalien käsittelemiseksi voi olla esimerkiksi seuraava:

reuna 1:

$$x = \tau, \quad t = t_n, \quad dx = d\tau, \quad dt = 0, \quad \tau : n \text{ rajat : } 0 \text{ ja } l, \quad (90)$$

reuna 2:

$$x = l, \quad t = (1 - \tau)t_n + \tau t_{n+1}, \quad dx = 0, \quad dt = \Delta t d\tau, \quad \tau : n \text{ rajat : } 0 \text{ ja } 1, \quad (91)$$

reuna 3:

$$x = l - \tau, \quad t = t_{n+1}, \quad dx = -d\tau, \quad dt = 0, \quad \tau : n \text{ rajat : } 0 \text{ ja } l, \quad (92)$$

reuna 4:

$$x = 0, \quad t = \tau t_n + (1 - \tau)t_{n+1}, \quad dx = 0, \quad dt = -\Delta t d\tau, \quad \tau : n \text{ rajat : } 0 \text{ ja } 1. \quad (93)$$

Parametrillä τ on reunan eri osilla oma merkityksensä. Nähdään, että τ :n kasvusuunta vastaa sovittua kiertosuuntaa reunan ympäri vastapäivään. Koska reunat

ovat tässä koordinaattiakselien suuntaiset, käsittely voitaisiin hoitaa nopeammin reuna reunalta ad hoc tyyliin ilman varsinaista parametriesitystä, mutta tässä on haluttu soveltaa systemaattisesti yhteyksiä (50). Täten yhtälössä (89) termiin

$$-\int_s Tw dt = -\Delta t \int_0^1 Tw|_{x=l} d\tau = -\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} Tw|_{x=l} dt \quad (94)$$

nähdään tulevan osuus vain reunalta 2, koska reunalla 4 käytetään siirtymäreunaan liittyvää rajoitetta $w(0,t) = 0$. Kun lausekkeet (89) ja (94) sijoitetaan heikkoon muotoon (88), siitä tulee yhtälö

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{A^e} \left(-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + q \right) w dA + \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} (\bar{T} - T) w|_{x=l} dt + \sum_i \int_{s_1^i} w [[T]] dt \\ - \int_I m w \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \bar{v} \right) \Big|_{t=t_n} dx + \int_I m \frac{\partial w}{\partial t} (u - \bar{u}) \Big|_{t=t_n} dx = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Koska painofunktio w on mielivaltainen, yhtälöstä (95) saadaan seurauksina (ensinnäkin vahvassa mielessä esitetyn ensimmäisen reunaehdon (76) lisäksi) differentiaaliyhtälöt

$$-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + q = 0, \quad A^e : \text{ssä}, \quad e = 1, 2, \dots \quad (96)$$

hyppyehdot

$$[[T]] = 0, \quad s_1^i : \text{llä}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (97)$$

traktioreunaehto

$$T(l,t) = \bar{T}(t), \quad (98)$$

ja alkuehdot

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_n) = \bar{v}(x), \\ u(x, t_n) = \bar{u}(x). \end{aligned} \quad (99)$$

Saadut differentiaaliyhtälöt, traktioreunaehdot ja alkuehdot ovat selvästi oikeellisia.

Luvussa "lisää hyppyehdoista" johdettiin yleinen tulos (39):

$$[[T]] + \left\| m \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \frac{dx_1}{dt} = 0 \quad (100)$$

koskien mahdollista epäjatkuvuutta. Täten edellä saatu ehto (97) on ristiriidassa yleisen ehdon (100) kanssa. Esimerkiksi, jos epäjatkuvuusviivoja on yksi, sekä vahvan että

heikon esitysmuodon mukaiset ratkaisut toteuttavat differentiaaliyhtälön (96) osalualueissa, joihin epäjatkuvuusviiva jakaa alkuperäisen ratkaisualan. Vahvassa muodossa ratkaisut sovitaan yhteen ehdolla (100) ja heikossa muodossa ehdolla (97). (Molemmissa tapauksissa ratkaisu oletetaan jatkuvaksi epäjatkuvuuden kohdalla eli $[[u]] = 0$). Lopputulokset ovat samoja ainoastaan, jos vahvan muodon mukaisessa ratkaisussa ehdon (100) vasemman puolen jälkimmäinen termi häviää. Tämä tulos ei kuitenkaan seuraa taseyhtälöistä, vaan riippuu tapauskohtaisesti ”datan”, mm. alkuehtojen ja massajakauman, säännöllisyydestä.

Kun heikon muodon (83) ensimmäinen rivi kirjoitetaan ”ajan suhteen osittaisintegroituun” muotoon, päädytään heikkoon muotoon

$$\int_A m \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} dA - \int_I m w \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_n+\Delta t} dx + \int_I m w (\bar{v}) \Big|_{t=t_n} dx + \int_I m \frac{\partial w}{\partial t} (u - \bar{u}) \Big|_{t=t_n} dx - \int_A T \frac{\partial w}{\partial x} dA + \int_A q w dA + \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} \bar{T} w(l, t) dt = 0. \quad (101)$$

Osittaisintegrointi kummankin rivin ensimmäisissä termeissä (poistetaan funktion w kohdistuvat derivoinnit) tuottaa nyt yhtälön

$$\sum_e \int_{A^e} \left(-m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + q \right) w dA + \sum_i \int_{s_1^i} w [[T]] dt + \sum_i \int_{s_1^i} w \left[m \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx + \int_{t_n}^{t_n+\Delta t} (\bar{T} - T) w \Big|_{x=l} dt + \int_I m \frac{\partial w}{\partial t} (u - \bar{u}) \Big|_{t=t_n} dx - \int_I m w \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \bar{v} \right) \Big|_{t=t_n} dx = 0, \quad (102)$$

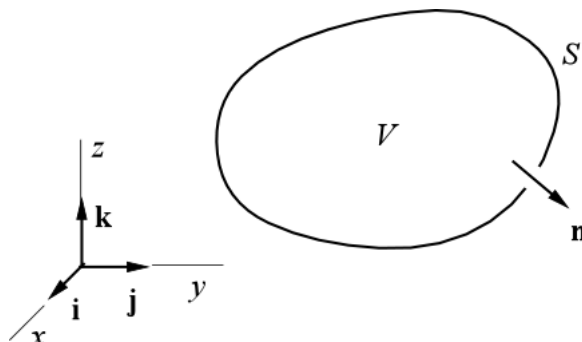
josta seuraa oikeellinen hyppyehto (100) (ratkaisun epäjatkuvuusviivalla kirjoitetaan $dx = (dx_1 / dt) dt$, jolloin ensimmäisen rivin kaksi viimeistä termiä voidaan yhdistää).

Elementtimenetelmässä voidaan tunnetusti käyttää approksimaatioita, jotka ovat jatkuvampia kuin tarkka ratkaisu. Esimerkiksi tyyppiä (85) olevan approksimaation aikaderivaatta on jatkuva. Tässä funktiojoukossa heikot muodot (83) ja (101) ovat ekvivalentteja (olettaen, että m on jatkuva) ja johtavat samaan numeeriseen ratkaisuun. Liioittelu approksimaation jatkuvuudessa johtaa kuitenkin helposti numeeriseen ongelmaan, joka näyttäytyy soveltajalle ratkaisun epäfysikaalisena heilahteluna erityisesti tarkan ratkaisun epäjatkuvuuskohtien läheisyydessä (ks. huomautus 4). Koska tarkan ratkaisun sileys riippuu ”datasta” kuten alkuehdoista, tuntuisi edulliselta soveltaa kaistaleessa ”vinossa” olevia C^0 -jatkuvia u :n paikka-aikaelementtejä ja heikkoa muotoa (101). Käytännössä tämän edun hyödyntämisessä tarvitaan kuitenkin adaptiivista ratkaisumenetelmää, jossa verkko valitaan tavalla tai toisella siten, että epäjatkuvuuskohdat sijoittuvat elementtirajoille.

Loppuhuomautuksia

Edellä esitetyt Gaussin kaavat ja osittaisintegrointikaavat voidaan yleistää helposti kolmeen dimensioon. (Kaavojen (50) yleistys on mutkikkaampaa, koska joudutaan tekemään sopimuksia tyyppiä $dydz$ jne. olevien alkioiden merkeistä kolmidimensioisen

kappaleen pinnan eri osilla. Aiheeseen ei puututa tässä.) Kuvassa 8 on esitetty oleellisia merkintöjä.



Kuva 8 Kolmidimensioinen alue V ja sen reuna S .

Esimerkiksi Gaussin lause saa muodon

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV &= \int_S f n_x dS, \\ \int_V \frac{\partial f}{\partial y} dV &= \int_S f n_y dS, \\ \int_V \frac{\partial f}{\partial z} dV &= \int_S f n_z dS.\end{aligned}\tag{103}$$

Nämä yhtälöt ovat voimassa C^0 -funktiolle $f(x, y, z)$. Vasemman puolen tilavuusintegraalit lasketaan avoimen alueen V ja oikean puolen pintaintegraalit alueen reunan S yli. Vastaavat osittaisintegrointikaavat ovat ilmeiset. Mahdolliset epäjatkuvuuspinnat S_I^i jakavat alueen osa-alueisiin V^e jne.

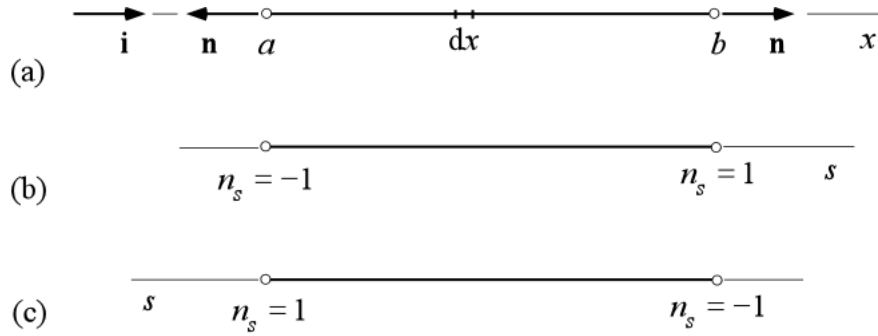
Ehkä yllättäen yksidimensioinen tapaus on verrattuna korkeampidimensioisiin tapauksiin merkittävästi hieman kömpelö. Peruslauseen (9):

$$\int_I \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)\tag{104}$$

vastine kahdessa dimensiossa on Gaussin kaava

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_S f n_x ds.\tag{105}$$

Reunatermien esitys yhtälössä (105) näyttää siistimmältä kuin yhtälössä (104). Yhdessä dimensiossa reuna muodostuu kahdesta erillisestä pisteestä. Ulkoiset yksikkönormaalivektorit ovat vastaavasti $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$ ja $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ välin alku- ja loppupäässä ja \mathbf{i} on x - akselin kasvavaan suuntaan osoittava yksikkövektori (kuva 9 (a)).



Kuva 9 (a) Yksidimensioinen alue. (b) ja (c) Riippumaton muuttuja s .

Täten yksikkönormaalivektoreilla voidaan ajatella olevan vastaavasti komponentit $n_x = -1$ and $n_x = 1$. Merkinnällisesti yksinkertaisempi kaavan (104) esitys saavutetaan kirjoittamalla esimerkiksi muoto

$$\int_I \frac{df}{dx} dx = \sum_{\Gamma} f n_x, \quad (106)$$

jossa

$$\sum_{\Gamma} f n_x \equiv f(b) n_x(b) + f(a) n_x(a) = f(b) - f(a). \quad (107)$$

Tämäntapainen lyhennysmerkintä esiintyy lähteessä [1, s. 28]. Erityisesti elementti-menetelmää koskevassa kirjallisuudessa on systemaattisuutta lisäävänä piirteenä melko tavallista merkitä tarkasteltavaa aluetta dimensiosta riippumatta yleisellä tunnuksella Ω ja alueen reunaa samoin yleisellä tunnuksella Γ . Niiden kulloinenkin yksityiskohtainen merkitys selviää asiayhteydestä. Tätä notaatiota käyttäen esimerkiksi kaava (105) voitaisiin esittää muodossa

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_x d\Gamma. \quad (108)$$

Vastaavasti kaavan (103) oikea puoli voidaan siis tulkita siten, että suure $f n_x$ reunalla $\Gamma = \{a, b\}$ summataan reunan yli samoin kuin integrandi kaavan (105) oikealla puolella integroidaan reunan yli. Standardimuotoinen osittaisintegointikaava (14) näyttäisi nyt seuraavalta

$$\int_I g \frac{dh}{dx} dx = - \int_I \frac{dg}{dx} h dx + \sum_{\Gamma} g h n_x. \quad (109)$$

Eräs toinen merkinnällinen näkökohta on seuraava. Tarkastellaan integraaleja edellä esiintyneiden alueiden A , s , V , S yli. Kun integraalit tulkitaan Riemannin summien raja-arvoina, summissa esiintyy termejä $f \Delta A$, $f \Delta s$, $f \Delta V$, $f \Delta S$, joissa on mielekästä pitää suureita ΔA , Δs , ΔV , ΔS aina positiivisina. Koska kuitenkin edellä on esiintynyt tilanteita, joissa esimerkiksi Δx ja dx voivat saada myös negatiivisia arvoja, olisi ehkä syytä käyttää yhdessä dimensiossa x :n sijasta vaikka tunnusta s ja kirjoittaa esimerkiksi kaava (109) muotoon

$$\int_I g \frac{dh}{ds} ds = - \int_I \frac{dg}{ds} h ds + \sum_{\Gamma} g h n_s, \quad (110)$$

jossa s (kaarenpituuskoordinaatti) on yksidimensioinen riippumaton muuttuja. Vastaavissa Riemannin summissa Δs tulkitaan sitten aina positiiviseksi. Riippuen valitusta s :n suuntauksesta saadaan kuvassa 9 esitetyt kaksi tulkintaa suureen n_s arvoissa. Jos jompaakumpaa kuvaa (b) tai (c) ajatellaan kierretyksi 180 astetta, merkintöjen sisällössä ei ole kuitenkaan itse asiassa mitään eroa.

Tämän artikkelin osittaisintegroitsovelluksissa on virtuaalisen työn periaatteen nimellä kulkeva heikko muoto ollut keskeinen aihe. Virtuaalisen työn periaatteen merkitystä rakenteiden mekaniikassa ei voida yliarvioida. Vaikka kyseessä on "ikivanha" periaate, sen merkitys on lisääntynyt edelleen elementtimenetelmän lähtökohtana. Vastaava hyvin käyttökelpoinen heikko muoto voidaan esittää myös esimerkiksi energiataseisiin liittyvissä probleemeissa kuten lämmönsiirrossa. Ajan suhteen pysyvässä tapauksessa tämä heikko muoto voidaan kirjata karteesisissa koordinaatistossa kolmessa dimensiossa seuraavasti:

$$- \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial x} q_x + \frac{\partial w}{\partial y} q_y + \frac{\partial w}{\partial z} q_z \right) dV - \int_V w s dV + \int_{S_q} w \bar{q} dS = 0. \quad (111)$$

Tässä q_x , q_y ja q_z ovat lämpövuovektorin (engl. heat flux vector) \mathbf{q} komponentit, s lämpölähteen voimakkuus tilavuutta kohti, \bar{q} annettu lämpövuon tiheys alueen reunalla S_q ja w painofunktio, joka häviää lopulla osaa reunaa S_T , jolla lämpötila on annettu. Lämmönsiirtoon ei ilmeisesti liity valmista heikko muoto-tyypistä, pitkää historiaa omaavaa periaatetta siten kuin virtuaalisen työn periaatteeseen klassillisessa mekaniikassa. Lämmönsiirrossa on vaikea keksiä luonnostaan diskreettejä systeemejä kuten mekaniikassa (esimerkiksi jäykistä kappaleista muodostuvat mekanismit), joka piirre ehkä myös selittää puuttuvan terminologian Täten mitään vakiintunutta nimeä heikolle muodolle (111) ja sen termeille ei valitettavasti näytä olevan käytössä. Paremman puutteessa muodosta (108) voitaisiin käyttää yksinkertaisesti nimeä *energiayhtälön heikko muoto*. Toinen mahdollisuus olisi *virtuaalisen lämpötilan periaate*, koska painofunktio voidaan tulkita tietyin perustein lämpötilan variaatioksi.

Itse asiassa heikko muoto (111) on yksinkertaisempi kuin virtuaalisen työn periaate, koska painofunktio on skalaari ja virtuaalisen työn periaatteessa painofunktio on sen sijaan yleisessä tapauksessa vektori. Jos virtuaalisen työn periaate on tuttu, on melko helppoa soveltaa myös periaatetta (111) analogioiden avulla eri tilanteissa. Samoin esitetyt osittaisintegroitikaavoja voidaan käyttää avuksi differentiaaliyhtälöiden, hyppyehtojen jne. johtamiseen.

Kirjallisuus

- [1] T. Belytschko, W. K. Liu and B. Moran, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, Wiley, Chichester, 2000.
- [2] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Volume I*. Interscience, New York, 1966.

- [3] J. Freund, Space-Time Finite Element Methods for Second Order Problems; an Algorithmic Approach, *Acta Polytechnica Scandinavica, Ma 79*, Helsinki 1996.
- [4] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

Eero-Matti Salonen
Teknillinen korkeakoulu
Insinööritieteiden ja arkkitehtuurin tiedekunta
Rakenne- ja rakennustuotantotekniikan laitos
PL 2100, 02015 TKK
email:eero-matti.salonen@tkk.fi

Jouni Freund
Teknillinen korkeakoulu
Insinööritieteiden ja arkkitehtuurin tiedekunta
Sovelletun mekaniikan laitos
PL 4300, 02015 TKK
email:jouni.freund@tkk.fi

Juha Paavola
Teknillinen korkeakoulu
Insinööritieteiden ja arkkitehtuurin tiedekunta
Rakenne- ja rakennustuotantotekniikan laitos
PL 2100, 02015 TKK
email:juha.paavola@tkk.fi