

# EPÄLINEAARISEN AKSIAALISESTI LIIKKUVAN NAUHAN DYNAAMINEN KÄYTTÄYTYMINEN ALI- JA YLIKRIITTISILLÄ NOPEUKSILLA

Hannu Koivurova

Rakenteiden mekaniikka Vol. 40  
Nro 4, 2007, s. 5-18

## TIIVISTELMÄ

Aksiaalisesti liikkuvan nauhan dynaamista käyttäytymistä tutkittiin ympäröivässä ilmakentässä. Nauhaa mallinnettiin geometrisesti epälineaarilla aksiaalisesti liikkuvalla lankaelementillä ja ympäröivää ilmaa akustisella fluidilla. Systeemin liikeyhtälöt johdettiin Hamiltonin periaatteella kytketyksi fluidi-rakenne vuorovaikutusyhtälöksi. Systeemin liike oletettiin jaksolliseksi ja jaksollinen epälineaarinen ongelma ratkaistiin Fourier-Galerkin-Newton (FGN) menetelmällä. Ilma-alueen tuntemattomien määrä kasvaa suureksi harmonisten termien määrän noustessa, joten systeemi jaettiin epälineaariseen rakenteeseen ja lineaariseen fluidiosaan. Systeemin vapaanvärähtelyn alimman taajuuden relaatio värähtelyn amplitudiin, ns. selkärankakäyrät, eri kuljetusnopeuksilla osoittavat, että ilman vaikutus dynaamiseen käyttäytymiseen on suuri niin ali- kuin ylikriittisellä nopeusalueella. Ylikriittisillä nopeuksilla ilman vaikutus vahvistaa selvästi epälinearisuuden vaikutusta.

## JOHDANTO

Monet teollisuuden prosessit sisältävät mekaanisia komponentteja, joissa nauha tai kalvo liikkuu tukematta vapaan välin yli. Mekaniikan näkökulmasta tällaisella rakenteella, joka on jatkuvassa liikkeessä värähtelysuuntaansa nähden kohtisuorassa, on kuljetusliikkeensä vuoksi tyypillisiä värähtelyyn ja dynaamiseen stabiilisuuteen liittyviä ominaisuuksia. Tätä ns. aksiaalisesti liikkuvien materiaalin ongelmaa on tutkittu laajasti ja pitkään, alan viimeisintä kehitystä ovat esitelleet Chen [1] and Paidoussis and Li [2].

Muun muassa paperin valmistuksessa prosessi sisältää tilanteita, jossa ohut ja kevyt raina on vuorovaikutuksessa ympäröivän ilman kanssa aiheuttaen poikittaisvärähtelyä tai flutter-ilmion. Teoreettiset ja kokeelliset tulokset ovat osoittaneet, että ympäröivällä ilmalla on merkittävä vaikutus paperirainan dynaamiseen käyttäytymiseen. Pramilan [3] esittämien kokeellisten tulosten mukaan systeemin kriittinen nopeus ja ominaisarvot ovat vain 15 - 30% arvoista, jotka saadaan kun ympäröivän ilman vaikutus jätetään huomioimatta.

Ensimmäiset teoreettiset tutkimukset aksiaalisesti liikkuvan rainan värähtelystä ympäröivässä ilma-alueessa tehtiin Pramilan [4] ja Chang et al [5] toimesta.

He käyttivät analyttistä aksiaalisesti liikkuvan langan mallia jättäen huomioimatta rainan liikkeen leveysuuntaisen variaation, olettaen, että raina taipuu tasaisesti koko leveydeltään. Ympäröivän ilman liike kuvattiin ideaalifluidina käyttämällä erilaisia lisätyn massan malleja. Nämä analyttiset tutkimukset vahvistivat ympäröivän ilman merkityksen kevyen rainan käyttäytymiseen. Viimeksi Frondeliuksen et. al [6] täydensivät analyttistä mallia sisällyttämällä siihen ilmapartikkelien viskoosin käyttäytymisen rajakerroksessa. Heidän esittämät tulokset osoittavat, että ilman ja rainan rajakerrosvirtauksella on selvä merkitys rainan värähtelyyn ja merkitys kasvaa aksiaali-liikkeen vauhdin kasvaessa. Systemin kriittinen nopeus voi myös pudota merkittävästi, jos ilman virtaus on turbulენტista ja vapaan välin pituus on suuri.

Ohuen rakenteen dynaamista käyttäytymistä ympäröivässä fluidikentässä on tutkittu hyvin laajasti, muun muassa [7]:ssa, [8]:ssa and [9]:ssä, mutta systeemejä jotka tämän lisäksi sisältävät aksiaaliliikkeen, on käsitelty varsin harvoin. Ensimmäisissä kolmiulotteisissa tarkasteluissa aksiaalisesti liikkuva rakenne mallinettiin kalvona ja ympäröivää ilmaa kokoonpuristumattomana ideaalifluidina [10] ja kokoonpuristuvana ideaalifluidina [11]. Koivuova ja Pramila [12] sisällyttivät geometrisen epälineaarisuuden kalvoon ja tarkastelivat kapean nauhan liikettä ympäröivässä akustisessa ilmakentässä vuorovaikutuksessa ympäröiviin rakenteisiin. Äskettäin Kulachenko et. al [13] tarkasteli paperirainan käyttäytymistä painokonesovelluksessa käyttäen geometrisesti epälineaarista Mindlin kuorielementtiä ja ortotrooppista materiaalmallia paperirainan mallinna ja akustisia fluidielementtejä ympäröivän ilman mallinnuksessa. Tulosten mukaan ilma vaimentaa rypistymismuotojen syntyä alhaisilla efektiivisillä modaalimassoilla.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on parantaa edellä esitettyjen analyttisten tulosten tarkkuutta tarkastelemalla liikkuvan nauhan ja ympäröivän ilman vuorovaikutusta geometrisesti epälineaarisen langan ja sitä ympäröivän akustisen fluidin muodossa. Muodostuvan systeemin liikeyhtälöt on johdettu Hamiltonin periaatteella ja diskretisoitu elementtimenetelmällä. Systemin epälineaarista dynaamista käyttäytymistä on tutkittu analysoimalla aksiaalisesti liikkuvan ohuen nauhan vapaata värähtelyä ja harmonisen kuormituksen sille tuottamaa vakiotila vastetta. Jaksollinen epälineaarinen ongelma on ratkaistu käyttämällä Naraynan et. al. [14] esittämää Fourier-Galerkin-Newton (FGN) menetelmää, joka kuuluu harmonisen balanssin menetelmäluokkaan. Esitettävä formulaatio johtaa fluidi-rakenne vuorovaikutuksen kytkettyihin yhtälöihin, mutta koska ympäröivän ilma-alueen malli on laaja ja sisältää suuren määrän vapausasteita, kytketty ongelma jaetaan lineaariseen akustiseen fluidiosaan ja epälineaariseen aksiaalisesti liikkuvan lankaosaan. Vuorovaikutus otetaan huomioon rakenteessa fluidin painekuormana ja fluidissa rakenteen rajapinnan liikkeenä.

## **TEOREETTINEN FORMULAATIO**

Tarkasteltavan systeemin fysikaalinen malli jakautuu kuvan 1 mukaisesti ohueen ja kevyeen aksiaalisesti liikkuvaan nauhaan ja ympäröivään ilmaan. Rakenne mallinnetaan geometrisesti epälineaarilla lankaelementillä olettaen, että nauhan liikkuu samalla tavalla leveysuunnan yli. Ympäröivä ilma mallinnetaan akustisena fluidina käyttäen paineformulaatiota.

## Rakenteen malli

Rakenteen liikeyhtälö johdetaan Hamiltonin periaatteella. Vaikka periaatetta käytetään yleensä suljetuille systeemeille, voidaan sen käyttöä laajentaa [15] ja [16] mukaisesti systeemeille, jotka sisältävät partikkelien virtauksen rajapintojen läpi. Olettamalla, että tarkastelemme erityistapausta, jossa reunat ovat kiinnitetty niin sisäänvirtaus ja ulosvirtaus reunoilta ja energian kokonaisvirtaus reunojen ohi on nolla, voidaan Hamiltonin periaate kirjoittaa McIvarin [17] mukaan muotoon

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0, \quad (1)$$

missä  $\delta$  on variaatio-operaattori,  $T$  on liike-energia,  $U$  on kimmoenergia ja  $W$  on ulkoisten voimien tekemätyö.

Seuraamalla Chen et. al [18] käyttämää mallia ja merkintöjä sekä Laukkasen [19] ja Kulachenkon et. al [16] huomioita aksiaalisesti liikkuvan rakenteen ominaisuuksista, jotka syntyvät sen gyroskooppisista vaikutuksista, voidaan aksiaalisesti liikkuvan lankaelementin liikeyhtälö kirjoittaa

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e(\mathbf{q}_e) \mathbf{q}_e = \mathbf{F}_e - \mathbf{B}_{eV}, \quad (2)$$

missä  $\mathbf{M}_e$  on massamatriisi,  $\mathbf{C}_e$  vaimennusmatriisi,  $\mathbf{K}_e$  jäykkyysmatriisi,  $\mathbf{F}_e$  ulkoisten voimien vektori ja  $\mathbf{B}_{eV}$  on hitausvoimavektori. Elementin siirtymävektorilla  $\mathbf{q}_e$  on kaksi vapausastetta jokaista elementin solmua kohden ja se on

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T & \mathbf{w}_e^T \end{bmatrix}^T, \quad u(x) = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e \quad \text{and} \quad w(x) = \mathbf{N}_w \mathbf{w}_e, \quad (3)$$

missä  $\mathbf{u}_e$  ja  $\mathbf{w}_e$  ovat solmusiirtymävektoreita ja  $\mathbf{N}_u$  ja  $\mathbf{N}_w$  ovat muotofunktiota.

$\mathbf{M}_e$  on konsistentti massamatriisi ja siten

$$\mathbf{M}_e = \rho A \int_0^{L_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx, \quad (4)$$

missä  $\rho$  on tiheys,  $A$  on langan poikkipinnan ala ja  $\mathbf{N}$  on muotofunktio matriisi. Elementin vaimennusmatriisi

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{C}_{eD} + \mathbf{C}_{eG} \quad (5)$$

koostuu vaimennusmatriisista  $\mathbf{C}_{eD}$  ja gyroskooppisesta matriisista  $\mathbf{C}_{eG}$ , jotka ovat

$$\mathbf{C}_{eD} = v \int_0^{L_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx, \quad (6)$$

ja

$$\mathbf{C}_{eG} = v_a \int_0^{L_e} (\mathbf{N}^T \mathbf{N}_{,x} - \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}) dx, \quad (7)$$

missä  $v$  on vaimennuskerroin ja  $v_a$  on materiaalin kuljetusnopeus. Elementin jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{NL} - \mathbf{K}_G \quad (8)$$

koostuu lineaarisesta jäykkyysmatriisista  $\mathbf{K}_0$ , epälineaarista jäykkyysmatriisista  $\mathbf{K}_{NL}$  ja gyroskooppisesta jäykkyysmatriisista  $\mathbf{K}_G$ , jotka ovat

$$\mathbf{K}_0 = \int_0^{L_e} \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 dx, \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_{NL} = \int_0^{L_e} \left( \frac{1}{2} \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L \right) dx, \quad (10)$$

Ja

$$\mathbf{K}_G = v_a^2 \int_0^{L_e} \mathbf{B}_G^T \mathbf{B}_G dx, \quad (11)$$

missä  $\mathbf{B}_0$  on lineaarisen venymän matriisi ja  $\mathbf{B}_L$  on epälineaarisen elastisen ongelman venymämatriisi,  $\mathbf{D}$  on konstitutiivinen matriisi ja

$$\mathbf{B}_G = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} & \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Hitausvoimavektori saadaan seuraavasti

$$\mathbf{B}_{eV} = v_a^2 \int_0^{L_e} \left( \frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x} \right)^T dx. \quad (13)$$

Seuraamalla standardia elementtimenetelmän summauskäytäntöä saadaan rakenteen liikeyhtälöksi

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{F}(t) \quad (14)$$

missä  $\mathbf{q}$  on rakenteen siirtymävektori.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}(\mathbf{q})$  ja  $\mathbf{F}$  ovat rakenteen massamatriisi, vaimennusmatriisi, jäykkyysmatriisi ja voimavektori. Voimavektori sisältää nyt sekä ulkoisen, että hitausvoimavektorin.

### Akustinen fluidi

Tarkasteltavan systeemin fluidialue mallinnetaan lineaarisella akustisen fluidin mallilla, joka olettaa, että fluidi on kokoonpuristuva, ei-viskoosi ja sen virtauksen värähtely on pientä. Olettamukset johtavat hyvin tunnettuun Helmholtzin yhtälöön, joka on esitetty mm. lähteessä [20]. Käyttämällä standardia elementtimenetelmää akustinen aaltoyhtälö muuntuu diskretisoiduksi yhtälöksi mm. [20]:n ja [21]:n mukaisesti. Painejakaumaa fluidialueessa  $V$  voidaan approksimoida yhtälöllä

$$p(x, y, z) = \mathbf{N}_p \mathbf{p}, \quad (15)$$

missä  $\mathbf{N}_p$  on muotofunktio ja  $\mathbf{p}$  on solmujen painevektori. Fluidialueen diskretisoitu yhtälö on [20]:n mukaan

$$\mathbf{L} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{F}_p, \quad (16)$$

missä  $\mathbf{L}$  on fluidin massamatriisi

$$\mathbf{L} = \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p dV, \quad (17)$$

$\mathbf{D}$  on säteilyreunaehdon tuottama "vaimennusmatriisi" fluidialueen katkaisureunalla  $A_t$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{c} \int_{A_t} \mathbf{N}_p^T \mathbf{N}_p dA_t, \quad (18)$$

$\mathbf{H}$  on fluidin jäykkyyssmatriisi

$$\mathbf{H} = \int_V (\nabla \mathbf{N}_p)^T \nabla \mathbf{N}_p dV, \quad (19)$$

ja  $\mathbf{F}_p$  on fluidialueen ulkoinen voimavektori

$$\mathbf{F}_p = \int_{A_t+A_u} \mathbf{N}_p^T \frac{\partial p}{\partial n} dA_u. \quad (20)$$

### Fluidi-rakenne vuorovaikutus

Fluidi ja rakenne kytkeytyvät ulkoisten voimavektorien kautta lähteen [20]:n mukaisesti. Fluidin paine  $\mathbf{p}$  fluidi-rakenteen rajapinnassa aiheuttaa ulkoisen kuormituksen rakenteeseen fluidialueen ulkonormaalien  $\mathbf{n}$  suuntaan ja voimavektori on tällöin

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}^T \mathbf{p}, \quad (21)$$

missä  $\mathbf{S}$  on kytkentämatriisi rajapinnassa  $A_u$

$$\mathbf{S} = \int_{A_u} \mathbf{N}_p^T \mathbf{n} \mathbf{N} dA_u. \quad (22)$$

Puolestaan rakenteen kiihtyvyys rajapinnassa siirretään fluidiin ulkoisena painekuormituksena

$$\mathbf{F}_p = -\rho_f \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}}, \quad (23)$$

missä  $\rho_f$  on fluidin tiheys. Kolmiulotteisen fluidialueen kytkemisessä lankaan käytettyä oletusta, että mallinnettava nauha liikkuu yhdenmukaisesti leveyssuunnan yli ja siten fluidin nauhan leveydellä olevat kaksi solmua on kytketty lankaan kuvan 1 mukaisesti. Määrittelemällä  $A_u$  sekä rakenteen, että fluidin pinnaksi rajapinnalla, kytketyn systeemin yhtälö voidaan esittää muodossa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \rho_f \mathbf{S} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{q}) & \mathbf{S} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

### KYTKETYN SYSTEEMIN JAKSOLLINEN RATKAISU

Oletetaan ulkoiset voimat harmonisiksi ja siten systeemin dynaaminen vaste jaksolliseksi taajuudella  $\omega$ . Käyttämällä dimensiotonta aikaa  $\tau = \omega t$ , saadaan systeemin liikeyhtälöstä (24)

$$\omega^2 \mathbf{M}_c \mathbf{x}'' + \omega \mathbf{C}_c \mathbf{x}' + \mathbf{K}_c(\mathbf{q}) \mathbf{x} = \mathbf{F}_c(\tau), \quad (25)$$

missä yläpilkku merkitsee derivointia dimensiottoman ajan  $\tau$  suhteen ja alaindeksi  $c$  termien olevan kytketyn systeemin matriiseja. Fourier-Galerkin-Newtonmenetelmän ensimmäinen vaihe on Newton-Raphson proseduurin, missä systeemin liikeyhtälöä approksimoidaan Taylorin sarjalla jonkin tunnetun tasapainotilan ympäristössä [14].

Olettamalla tunnetuksi tilaksi  $\mathbf{x}_0$  ja  $\omega_0$ , ympäristön tilaa saavutetaan parametrien inkrementoinnilla

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}, \\ \omega &= \omega_0 + \Delta\omega.\end{aligned}\quad (26)$$

Sijoittamalla (26) (25):een ja jättämällä korkeampien asteiset pienet termit huomioimatta, saadaan lineaarinen inkrementaalinen yhtälö

$$\omega_0^2 \mathbf{M}_c \Delta\mathbf{x}'' + \omega_0 \mathbf{C}_c \Delta\mathbf{x}' + \mathbf{K}_{cT}(\mathbf{q}_0) \Delta\mathbf{x} = \mathbf{R}_c - (2\omega_0 \mathbf{M}_c \mathbf{x}_0'' + \omega_0 \mathbf{C}_c \mathbf{x}_0') \Delta\omega, \quad (27)$$

missä  $\mathbf{R}_c$  on jäännöstermi

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{F}_c(\tau) - [2\omega_0 \mathbf{M}_c \mathbf{x}_0'' + \omega_0 \mathbf{C}_c \mathbf{x}_0' + \mathbf{K}_{cT}(\mathbf{q}_0) \mathbf{x}_0] \quad (28)$$

ja  $\mathbf{K}_{cT}$  on tangenttijäykkyysmatriisi. Koska ratkaisulla haetaan jaksollista ratkaisua,  $\mathbf{x}$  ja sen inkrementti  $\Delta\mathbf{x}$  voidaan esittää Fourier sarjalla eli

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{X}_0 + \sum_{j=1}^M [\mathbf{X}_{2j-1} \cos(j\tau) + \mathbf{X}_{2j} \sin(j\tau)], \\ \Delta\mathbf{x} &= \Delta\mathbf{X}_0 + \sum_{j=1}^M [\Delta\mathbf{X}_{2j-1} \cos(j\tau) + \Delta\mathbf{X}_{2j} \sin(j\tau)],\end{aligned}\quad (29)$$

missä  $\mathbf{X}_0$  ja  $\mathbf{X}_j$  sekä  $\Delta\mathbf{X}_0$  ja  $\Delta\mathbf{X}_j$  ovat Fourier kertoimia ja  $M$  esittää harmonisten termien lukumäärää. Samanlaiset sarjat muodostetaan myös yhtälöissä (27) ja (28) esiintyvillä nopeuksilla ja kiihtyvyyksillä. Tehdyn approksimaation virhettä minimoidaan Galerkinin menetelmällä käyttäen harmonisia painofunktioita  $[1, \cos \tau, \sin \tau; \dots, \cos j\tau; \sin j\tau, \dots]$ , yhtälö (27) saadaan taajuusalueessa [14] mukaisesti muotoon

$$\overline{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{X} = \overline{\mathbf{R}} - \overline{\mathbf{R}}_\omega \Delta\omega, \quad (30)$$

Missä

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{K}} &= \omega_0^2 \overline{\mathbf{M}}_c + \omega_0 \overline{\mathbf{C}}_c + \overline{\mathbf{K}}_{cT}(\mathbf{q}_0), \\ \overline{\mathbf{R}} &= \overline{\mathbf{F}}_c - [\omega_0^2 \overline{\mathbf{M}}_c + \omega_0 \overline{\mathbf{C}}_c + \overline{\mathbf{K}}_{cT}(\mathbf{q}_0)] \mathbf{X}, \\ \overline{\mathbf{R}}_\omega &= (2\omega_0 \overline{\mathbf{M}}_c + \overline{\mathbf{C}}_c) \mathbf{X}.\end{aligned}\quad (31)$$

$\mathbf{M}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$ ,  $\mathbf{K}_{cT}$  ja  $\mathbf{F}_c$  saadaan joko käyttämällä FFT:tä tai DFT:tä. Lineaarinen ja algebralinen yhtälö (30) voidaan ratkaista Newton-Raphson menetelmällä. Epälineaarinen amplitudi-voima vaste saadaan inkrementtoimalla taajuutta  $\omega$  tai yhtä vektorin  $\mathbf{X}$  komponenttia. Konvergenssin parantamiseksi Jacobin matriisia  $\mathbf{K}$  päivitetään Broydenin menetelmällä iteraatioiden aikana[22].

### Ongelman jakaminen Fluidi ja rakennealueisiin

Ongelman formulaatio johtaa kytkettyyn rakenne-fluidi vuorovaikutusyhtälöön (30), mutta koska fluidialue on suuri ja se sisältää paljon vapausasteita, nousee tuntemattomien määrä korkeaksi harmonisten termien määrän kasvaessa suureksi. Ongelman kokoa voidaan pienentää erottamalla epälineaarinen rakenne ja lineaarinen akustinen fluidialue

omiksi ongelmikseen. Jos oletamme, että fluidialueen paine  $\mathbf{p}$  on jaksollinen ja lineaarinen voidaan se kirjoittaa

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}} e^{\tau}. \quad (32)$$

Sijoittamalla edellinen ratkaisuyritteenä kytkettyyn rakennevuorovaikutusyhtälöön (25) saadaan paineen amplitudi  $\mathbf{p}$  ratkaistua

$$\hat{\mathbf{p}}(\omega, \mathbf{q}'') = \mathbf{K}_p^{-1}(\omega) \mathbf{F}_p(\omega, \mathbf{q}''), \quad (33)$$

missä

$$\mathbf{K}_p(\omega) = \omega^2 \mathbf{L} + \omega \mathbf{D} + \mathbf{H} \quad (34)$$

ja  $\mathbf{F}_p$  on ulkoinen voimavektori, joka aiheutuu rakenteen rajapinnan kiihtyvyydestä ja, joka on yhtälön (23) mukainen. Rakenteeseen rajapinnassa fluidialueesta vaikuttava painekuormituksen voimavektori saadaan sijoittamalla (33) yhtälöön (21) ja se on

$$\mathbf{F} = \omega^2 \rho_f \mathbf{S}^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{S} \mathbf{q}'' . \quad (35)$$

Sijoittamalla yhtälö (35) yhtälöön (25) systeemin yhtälö muuttuu muotoon

$$\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{q}'' + \omega \mathbf{C} \mathbf{q}' + \mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} + \omega^2 \rho_f \mathbf{S}^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{S} \mathbf{q}'' = \mathbf{F}(\tau). \quad (36)$$

Käyttämällä yhtälöön Newton-Raphson proseduuria Taylorin sarja kehitelmän kanssa sekä inkrementointeja  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}$  ja  $\omega = \omega_0 + \Delta \omega$ , saadaan liikeyhtälöksi

$$\begin{aligned} \omega^2 \mathbf{M} \Delta \mathbf{q}'' + \omega \mathbf{C} \Delta \mathbf{q}' + \mathbf{K}_T(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{q} + \omega^2 \rho_f \mathbf{S}^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{S} \Delta \mathbf{q}'' = \\ = \mathbf{R} - (2\omega_0 \mathbf{M}_c \mathbf{q}_0'' + \omega_0 \mathbf{C}_c \mathbf{q}_0' + 2\omega \rho_f \mathbf{S}^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{S} \mathbf{q}_0'') \Delta \omega, \end{aligned} \quad (37)$$

missä jäännöstermi on nyt

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}(\tau) - [2\omega_0 \mathbf{M} \mathbf{q}_0'' + \omega_0 \mathbf{C} \mathbf{q}_0' + \mathbf{K}_T(\mathbf{q}_0) \mathbf{q}_0 + \omega^2 \rho_f \mathbf{S}^T \mathbf{K}_p^{-1} \mathbf{S} \mathbf{q}_0'']. \quad (38)$$

Yhtälöstä (34) voi nähdä, että  $\mathbf{K}_p$  on riippuu taajuudesta  $\omega$  ja siten sen käänteismatriisi tulee laskea aina kun taajuus  $\omega$  muuttuu. Fluidialueeseen liittyvää laskentaa voidaan vielä vähentää muuntamalla se modaalikoordinaatistoon eli

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{L} \Phi &= \Lambda, \\ \Phi^T \mathbf{D} \Phi &= \Delta, \\ \Phi^T \mathbf{H} \Phi &= \Theta, \end{aligned} \quad (39)$$

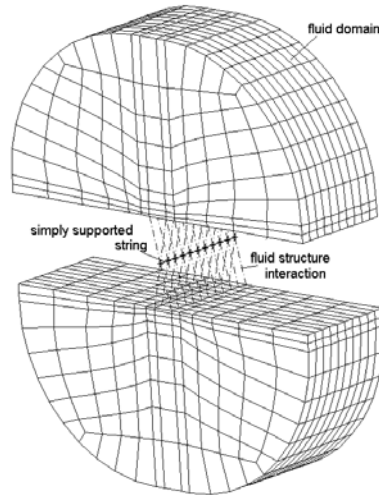
missä  $\Phi$  on ominaismuotomatriisi,  $\Lambda$  on diagonaalinen modaalimassamatriisi,  $\Delta$  on diagonaalinen säteilyreunaehdon tuottama modaalivaimennusmatriisi ja  $\Theta$  on diagonaalinen modaalijäykkyysmatriisi. Muunnoksessa  $\mathbf{K}_p$  muuttuu diagonaaliseksi ja sen kääntäminen skalaarien jakolaskuksi.

## TULOKSET

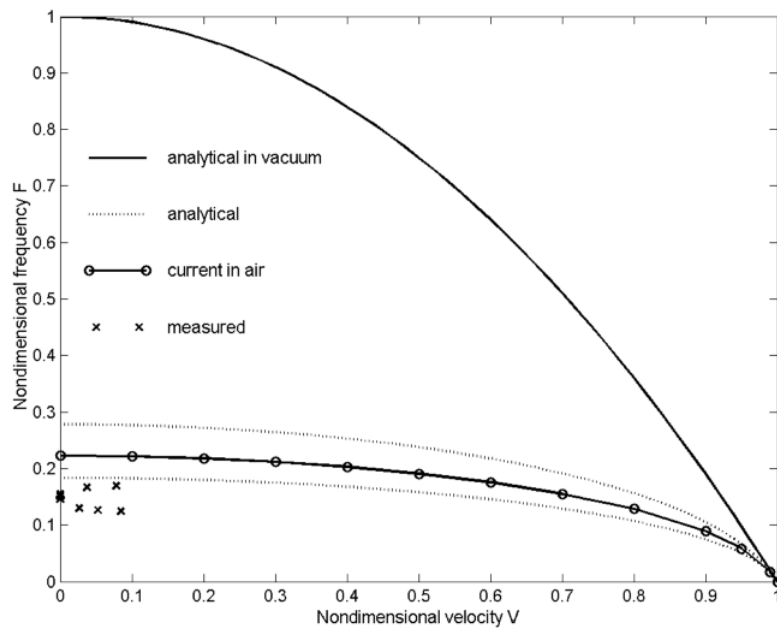
### Mallin verifiointi

Mallin tarkkuuden varmentaminen on varsin vaikeaa, sillä aksiaalisesti liikkuvan ohuen nauhan systeemejä on tutkittu kokeellisesti vain alhaisilla nopeuksilla rajoittuen pieniin värähdysamplitudeihin. Pramila [3] mittasi kapean paperinauhan alinta ominaistajuutta koepäällystyskoneella rainalle, jonka pituus  $L = 2.4$  m, leveys  $b = 0.47$  m ja paino pituusyksiköllä  $m = 17$  g/m. Kokeen lähtöarvoja on käytetty laskennalliseen malliin,

akσιαalisesti liikkuvalla kapealla nauhalle, joka on kiinnitetty sisään ja ulos virtausreunoilta nivel tuilla. Ilma-alueen dimensiot ja reunaehdot on valittu Niemen ja Pramilan [10] sekä Laukkasen ja Pramilan [11] mallien mukaisesti. Muita mallissa käytettyjä parametrejä ovat nauhan paksuus  $h = 0.49$  mm, alkukireys  $t_0 = 170$  N ja kimmomoduuli  $E = 1 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>.



**Kuva 1.** Aksiaalisesti liikkuvan kapean nauhan malli ympäröivässä ilmakentässä.



**Kuva 2.** Aksiaalisesti liikkuvan kapean nauhan alin ominaisvärähtelytaajuus aksiaalinopeuden funktiona

Lineaarisen vapaan värähtelyn taajuus aksiaalinopeuden funktiona on esitetty kuvassa 2 yhdessä Pramilan [3] kokeellisten tulosten sekä katkoviivalla esitettyjen Pramilan [4]



kahden eri analyttisen ominaisvärähtelytapauksen tuloksen kanssa. Tulokset on selvyiden vuoksi esitetty dimensiottomassa muodossa, missä taajuus esitetään suhteessa liikkumattoman systeemin alimpaan ominaistajuuteen  $f_{l0}$  ja aksiaalinopeus suhteessa kriittiseen nopeuteen  $v_{a(cr)}$ .

$$F = f 2L \sqrt{\frac{m}{t_0}} = f / f_{l0} \quad (40)$$

$$V = v_a \sqrt{\frac{m}{t_0}} = v_a / v_{a(cr)}. \quad (41)$$

Siitä huolimatta, että käytettävää mallia ei voida verrata kokeellisiin tuloksiin värähtelyn epälineaarilla alueella, on varsin mielenkiintoista verrata sitä ilman ilma-alueita esitettyihin Wickertin [23] analyttisiin ja Koivurovan ja Pramilan [12] numeerisiin tuloksiin. Wickert [23] tutki liikkuvan langan ja palkin värähtelyä toisen Kyrlovin, Bogoliubovin ja Mitropolskin asympotoottisella perturbatiomenetelmällä ja vertasi tuloksia numeerisen integroinnin ja muiden laskemiin tuloksiin. Koivurova ja Pramila [12] laskivat epälineaarisen aksiaalisesti liikkuvan kalvon alinta vapaan värähtelyn taajuutta numeerisella integroinnilla.

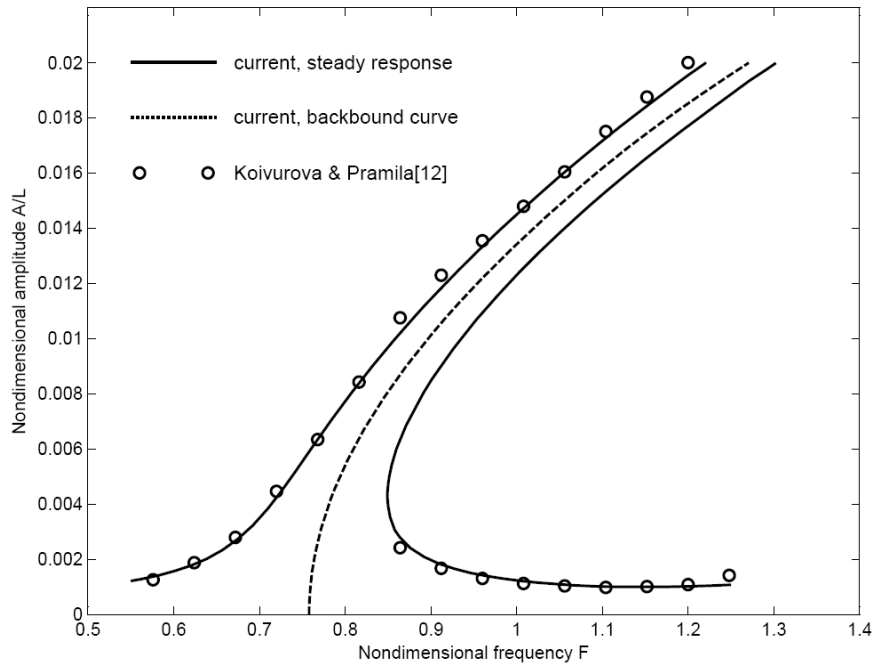
Tarkastellaan aksiaalisesti liikkuvan nauhan vapaata epälineaarista värähtelyä huomioiden ympäröivän ilman vaikutusta. Värähtelyn taajuus lasketaan aksiaalinopeuden funktiona, kun värähtelyn dimensioton amplitudi  $A/L = 0.017$ . Epälineaarinen malli jaetaan 11 elementtiin ja harmonisia termejä käytetään 16:sta 32:een. Mallin parametrit valitaan lähteiden [23] ja [24] mukaisesti.

Taulukko 1. Vertailu alimman lineaarisen ja epälineaarisen vapaan värähtelyn taajuuksista alikriittiselle nopeusalueelle, kun  $A/L = 0.017$ .

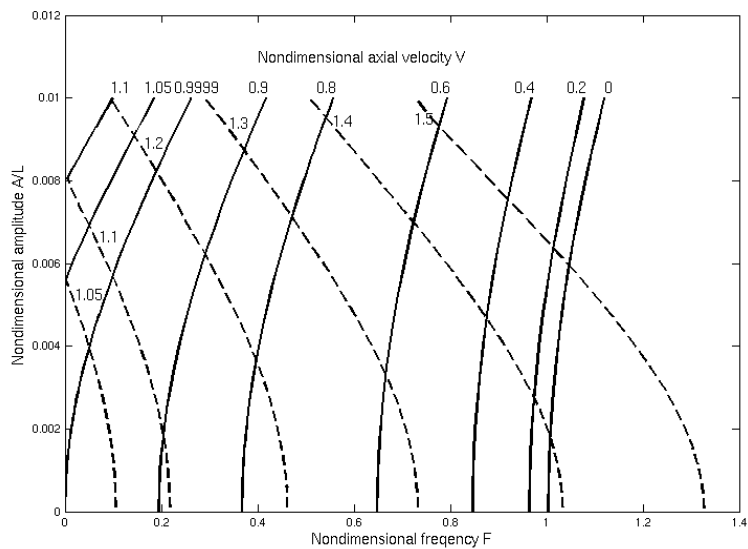
Dimensioton aksiaalinopeus V	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Lineaarinen	1	0,96	0,84	0,64	0,36	0
Tarkasteltava malli	1.106	1.068	0.958	0.78	0.538	0.237
FEM integroitu [12]	1,11	1,07	0,96	0,78	0,55	0,25
Integroitu [23]	1,109	1,069	0,955	0,78	0,558	0,308
Asympotoottinen [23]	1,112	1,077	0,966	0,792	0,569	0,308
Thurman and Mote [24]	1,103	1,067	0,955	0,77	-	-

Tarkasteltavan mallin tulokset yhtenevät Wickert [23] esittämiin tuloksiin, kun aksiaalinopeus on  $V \leq 0.8$ . Kriittisellä nopeudella ero on jo varsin suuri. Selitys erolle voidaan löytyä Wickertin käyttämästä approksimaatiosta pitkittäisen siirtymän laskemisessa. Hän olettaa, että kireys jakautuu tasan koko vapaan välin yli ja laskee pitkittäissiirtymän suoraan poikittaisliikkeestä. Lähteen [12] tulokset tukevat esitettyä selitystä.

Koivurova ja Pramila [12] tarkastelivat harmonisen reunasiirtymän aiheuttamaa vastetta edellä esitetyn kaltaiselle aksiaalisesti liikkuvalla kapealla nauhalla. He laskivat vasteen suoraan aikaintegroimalla systeemin liikeyhtälöä. Kuvassa 3 on esitetty harmonisen kuormituksen vaste dimensiottoman aksiaalinopeuden arvolle 0.50. Harmonisen reunasiirtymän amplitudi on 0.0024 m ja muut parametrit:  $L = 2.4$  m,  $b = 0.47$  m,  $h = 0.49$  mm,  $m = 17$  g/m,  $t_0 = 170$  N ja  $E = 1 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>. Tarkasteltavan mallin tulokset yhtyvät hyvin lähteen [12] tuloksiin.



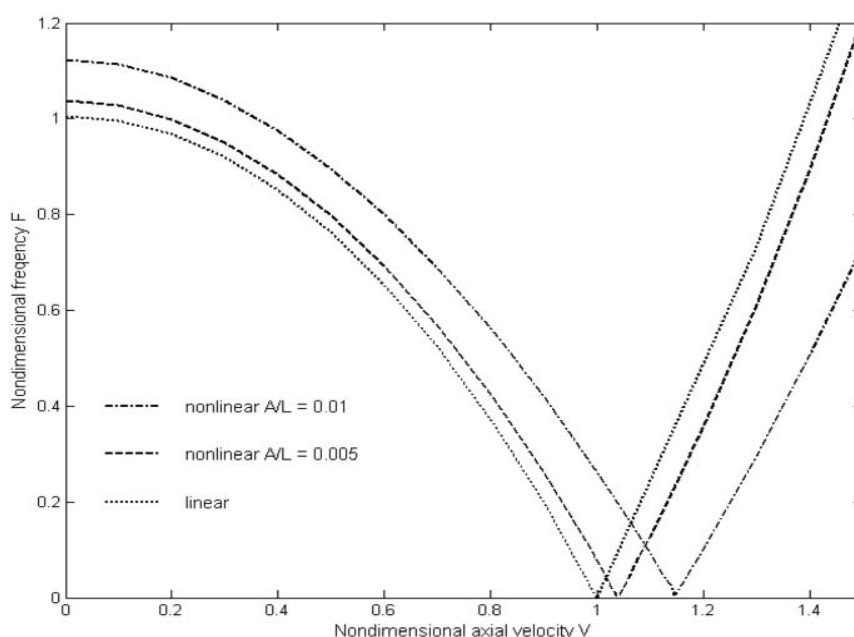
**Kuva 3.** Harmonisen reunasiirtymän (0.0024 m) aiheuttaman vasteen amplitudi vapaanvälin keskikohdassa. Aksiaalinopeus on 50% kriittisestä arvosta.



**Kuva 4.** Aksiaalisesti liikkuvan nauhan vapaan värähtelyn dimensioton amplitudi eri aksiaalinopeuksilla alimman dimensiottoman taajuuden funktiona.

## Tuloksia tyhjiössä

Epälineaarisen aksiaalisesti liikkuvan nauhan dynaamista käyttäytymistä tarkastellaan tutkimalla alimman vapaan värähtelyn taajuuden riippuvuutta aksiaalinopeuteen ja värähtelyamplitudiin. Mallin parametreiksi valitaan samat kuin edellisessä sovellutuksessa. Kuvassa 4 esitetyt ns. selkärankakäyrät kuvaavat värähtelyn amplitudin ( $=A/L$ ) ja taajuuden relaatiota eri aksiaalinopeuden arvoilla. Tarkasteltava systeemi toimii lujittuvan jousen tavoin alikriittisillä aksiaalinopeuksilla (yhtenäiset viivat,  $0 \leq V < 1$ ) ja pehmenevän jousen tavoin ylikriittisillä nopeuksilla (katkoviivat,  $V > 1$ ). Geometrisen epälineaarisuuden systeemiä jäykistävä vaikutus näyttää hieman vahvistuvan aksiaalinopeuden kasvaessa alikriittisillä nopeuksilla. Ylikriittisillä nopeuksilla epälineaarisuuden pehmentävä vaikutus vahvistuu sen sijaan selvästi. Kuvasta 4 voidaan nähdä myös kriittisen nopeuden vaeltaminen amplitudin kasvaessa taajuuden nolla kohdassa. Nolla amplitudilla eli lineaarisessa rajatapauksessa kriittinen nopeus saavutetaan nopeudella  $V_{(cr)} = 1.0$  ja dimensiottomalla amplitudilla  $A/L = 0.008$  kriittinen nopeus on noin  $V_{(cr)} = 1.1$ . Kriittisen nopeuden muuttuminen amplitudin kasvaessa nähdään paremmin kuvasta 5, jossa on esitetty taajuuden ja aksiaalinopeuden relaatiot eri amplitudeilla. Aksiaalisesti liikkuvan langan käyttäytyminen muistuttaa Wickertin [23] geometrisesti epälineaarille palkille esittämää käyttäytymistä. Lineaarinen teoria aliarvioi systeemin stabiilisuutta alikriittisillä nopeuksilla ja yliarvioi ylikriittisillä.

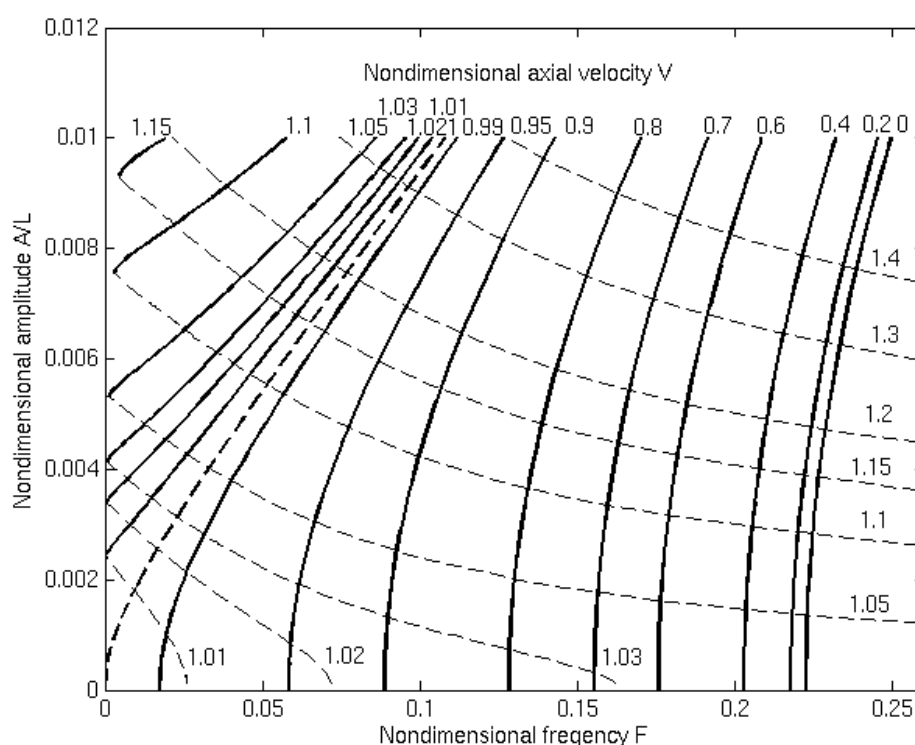


**Kuva 5.** Aksiaalisesti liikkuvan nauhan vapaan värähtelyn alin dimensioton taajuus dimensiottoman aksiaalinopeuden funktiona.

Suurin ero epälineaarisen langan ja palkin dynaamisessa käyttäytymisessä on ylikriittinen käyttäytyminen. Langan tasapainoasema ei kaareudu palkin tavoin, vaan pysyy suorana ylikriittisillä nopeuksilla ja alin värähtelytaajuus kasvaa paljon palkin vastaavaa nopeammin aksiaalinopeuden kasvaessa.

### Tuloksia vuorovaikutuksessa ympäröivään ilmaan

Ympäröivän ilman vaikutuksia tutkittiin samalla rakenteen elementtimallilla kuin edellisissä sovellutuksissa ja ilma-alueen elementtimalli ja parametrit valitaan samoiksi kuin ensimmäisessä verifiointi sovellutuksessa. Ympäröivän ilman vaikutusta dynaamiseen käyttäytymiseen tarkastellaan vertaamalla kuvan 6 “selkärankakäyriä”, vapaan värähtelyn amplitudin relaatiota taajuuteen, eri aksiaalinopeuksilla kuvan 4 vastaaviin. Alikriittisillä nopeuksilla muutos ei ole kovin dramaattinen. Taajuudet pienenevät kyllä viidenteen osaan niin kuin aikaisemmat tutkimukset ovat esittäneet ja käyrien muoto jäykistyvän jousen käyrän muotoisena säilyy.



**Kuva 6.** Aksiaalisesti liikkuvan nauhan vapaan värähtelyn dimensioton amplitudi eri aksiaalinopeuksilla alimman dimensiottoman taajuuden funktiona ympäröivässä ilma-alueessa.

Ylikriittisillä nopeuksilla dynaaminen käyttäytyminen muuttuu voimakkaammin. “Selkärankakäyrän” muoto pehmenevänä säilyy, mutta alhaisilla amplitudin arvoilla ympäröivän ilman vaikutus muuttuu käänteiseksi alikriittisiin nopeuksiin verrattuna. Linearisella raja-arvolla ( $A/L = 0$ ) ja aksiaalinopeudella  $V = 1.03$  vapaa värähtely saa taajuuden  $F \approx 0.17$  ilman vaikuttaessa. Ilman ilma-alueella aksiaalinopeudella  $V = 1.05$  taajuudeksi tulee  $F \approx 0.1$ . Ympäröivä ilma näyttää kasvattavan lineaarisia värähdystaajuuksia. Käyttäytyminen muuttuu voimakkaasti, kun värähtelyn amplitudi ja näin ollen epälinearisuuden vaikutus kasvavat. Amplitudilla  $A/L = 0.01$  ja aksiaalinopeudella  $V = 1.4$  ilman vaikuttaessa värähdystaajuus saa arvon  $F \approx 0.127$  ja ilman ilmaa taajuus

$F \approx 0.51$ . Ilma-alueen vaikutus värähtelytaajuuteen muuttuu lineaarisen raja-arvon kasvattavasta vaikutuksesta epälinearisuuden hallinnan pienentävään vaikutukseen. Kriittisen nopeuden “vaeltamiseen” amplitudin muuttuessa ympäröivä ilma ei näytä paljoakaan vaikuttavan.

## PÄÄTELMÄT

Ympäröivän ilman vaikutusta geometrisesti epälineaarisen nauhan dynaamiseen käyttäytymiseen tutkittiin niin ali- kuin ylikriittisillä nopeuksilla. Epälineaarisen systeemin jaksollinen vaste ratkaistiin harmonisen balanssin luokaan kuuluvalla Fourier-Galerkin-Newton menetelmällä. Mallilla saatavia tuloksia verrattiin käytettävissä oleviin kokeellisiin ja laskennallisiin tuloksiin hyvällä menestyksellä.

Vapaanvärähtelyn tarkastelut alikriittisellä nopeusalueella eivät tuoneet uusia aikaisemmista tutkimuksista poikkeavia tuloksia. Ilman vaikutus pienensi värähtelytaajuuksia merkittävästi niin lineaarisessa rajatapauksessa kuin epälineaarisilla värähtely amplitudeilla. Lineaarinen malli aliarvioi systeemin stabiilisuutta ja epälinearisuuden vaikutus jäykistää systeemiä siten, että vaikutuksen merkitys kasvaa nopeuden kasvaessa. Ylikriittisen nopeusalueen tulokset sen sijaan toivat esille uuden odottamattoman ilmiön. Linearisella raja-arvoamplitudilla ilma-alue vaikuttaa käänteisesti alikriittiseen nopeusalueeseen verrattuna, se kasvattaa systeemin alinta vapaan värähtelyn taajuutta. Epälinearisuuden vaikutus kääntää kuitenkin ilman vaikutuksen amplitudin kasvaessa riittävän suureksi. Epälineaarisen aksiaalisesti liikkuvan nauhan alin vapaan värähtelyn taajuus pienenee samaan suuruus luokaan kuin alikriittisellä nopeusalueella.

## LÄHTEET

- [1] L.-Q. Chen, Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings, *Applied Mechanics Reviews* 58(2005) 91–116.
- [2] M. P. Païdoussis, Fluid-Structure Interactions. Slender Structure and Axial Flow. Elsevier Academic Press, London, 2004.
- [3] A. Pramila, Sheet flutter and the interaction between sheet and air, *Tappi Journal* 69(1986) 70–74.
- [4] A. Pramila, Natural frequencies of a submerged axially moving band *Journal of Sound and Vibration*, 113(1987) 198–203.
- [5] B. C. Chang, P. M. Moretti, Interaction of fluttering webs with surrounding air, *Tappi Journal* 74(1991) 236–41.
- [6] T. Frondelius, H. Koivurova, A. Pramila, Interaction of an axially moving band and surrounding fluid by boundary layer theory, *Journal of Fluids and Structures* 22(2006) 1047–1056.
- [7] Y. Lee, Structural-acoustic coupling effect on the nonlinear natural frequency of a rectangular box with one flexible plate, *Applied Acoustics* 63(2002) 1157–1175.
- [8] D. J. Gee, Numerical Continuation Applied to Panel Flutter, *Nonlinear Dynamics* 22(2000) 271–280.

- [9] M. Amabili, M. P. Paidoussis. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction, *Appl Mech Rev.* 56(2003) 349–381.
- [10] J. Niemi, A. Pramila, FEM-analysis of transverse vibration of an axially moving membrane immersed in ideal fluid, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24(1987) 2301–2313.
- [11] J. Laukkanen, A. Pramila, FEM analysis of a travelling paper web and surrounding air. In: Godoy L A, Rysz M & Suarez L E (Ed.) *Applied Mechanics in the Americas*, vol. 4, Iowa City, USA, 1997, pp. 505–508.
- [12] H. Koivurova, A. Pramila, Nonlinear vibration of axially moving membrane by finite element method, *Computer Mechanics* 20(1997) 573–81.
- [13] A. Kulachenko, P. Gradin, H. Koivurova, Modelling the dynamical behaviour of a paper web. Part II, *Computer and Structures* 85 (2007) 148–157.
- [14] S. Narayanan, S. Sekar, A frequency domain based numeric–analytical method for non-linear dynamical systems, *Journal of Sound and Vibration* 211(1998) 409–424.
- [15] H. Koivurova, E-M, Salonen, Comments on non-linear formulations for travelling string and beam problems, *Journal of Sound and Vibration* 225(1999) 845–856.
- [16] A. Kulachenko, P. Gradin, H. Koivurova, Modelling the dynamical behaviour of a paper web. Part I, *Computer and Structures* 85 (2007) 131–147.
- [17] D.B McIver, Hamilton’s principle for system of changing mass. *Journal of Mathematics* 7(1972) 249–261.
- [18] S. H. Chen, Y. K. Cheung, H. X. Xing, Nonlinear Vibration of Plane Structures by Finite Element and Incremental Harmonic Balance Method, *Nonlinear Dynamics* 26(2001) 87–104.
- [19] J. Laukkanen, FEM analysis of a travelling web, *Computer and Structures* 80(2002) 1827–1842.
- [20] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method: The basis.* 5th ed. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [21] G.C. Everstine. Finite element formulations of structural acoustics problems. *Computers & Structures* 65(1997) 307–321.
- [22] C.G. Broyden, A new method of solving non-linear simultaneous equations. *Computer Journal* 12(1969) 94–99.
- [23] J.A. Wickert, Nonlinear vibration of a travelling tensioned beam, *International Journal of Nonlinear Mechanics* 27(1992) 503–517.
- [24] A. L. Thurman, C. D. Jr Mote, Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving strip, *Journal of Appl. Mechanics* 36 (1969) 83–91.

Hannu Koivurova, yliassistentti

Oulun yliopisto, konetekniikan osasto, PL  
4200, 90014 Oulun yliopisto  
Email: Hannu.Koivurova@oulu.fi