

SAUVAN PITUUDENMUUTOSYHTÄLÖ JA SEN SOVELLUKSIA

Jukka Aalto

Rakenteiden mekaniikka, Vol. 40
Nro 3, 2007, s. 38-62

TIIVISTELMÄ

Artikkelissa tarkastellaan yhtälöä, joka ilmaisee suoran sauvan pituudenmuutoksen ja sauvan päiden siirtymien välisen yhteyden. Yhtälöä sovellutuksena esitetään yksinkertainen menettely staattisesti määrätyn ristikon siirtymätilan laskemiseksi sekä systemaattinen menettely aksiaalisesti jäykän tasokehän ratkaisemiseksi. Menetelmiä demonstroidaan kahden esimerkkiprobleeman avulla.

KIITOKSET

Keväällä 1968, vajaat 40 vuotta sitten, osallistuin rakennusinsinööriopintoihini kuuluvalla Rakennusstatiikka I kurssille, jota luennoi *Pauli Jumppanen*. Luennot käsittelivät mm. sauvarakenteiden ratkaisemista yksikkövoima-, kulmanmuutos- ja matriisisiirtymämenetelmillä. Hänen tapansa esittää asiat selkeästi ja yksinkertaisesti vaikutti osaltaan siihen, että rakenteiden mekaniikka alkoi kiinnostaa myös minua. Kiitokset siitä hänelle tämän artikkelin muodossa!

JOHDANTO

Tekniikan kehitys on ollut huimaa viimeisten vuosikymmenien aikana. Rakenteiden mekaniikan alalla tähän kehitykseen on keskeisesti kuulunut elementtimenetelmä ja sen antamat uudet mahdollisuudet. Rakenteiden mekaniikan perusopetuksessa käsiteltävät asiat, jotka pohjautuvat Newtonin mekaniikan pysyviin totuuksiin, ovat muuttuneet hillitymmin. Elementtimenetelmän antamat mahdollisuudet analysoida yhä monimutkaisempia ilmiöitä lisäävät kuitenkin tarvetta opettaa alan teoriaa entistä syvemmin. Koska 60-luvulla numeeriset laskelmat jouduttiin suorittamaan laskutikkua käyttäen, graafiset menetelmiä olivat vielä yleisiä ja analyttiset menetelmät oli formuloitu siten, että käsittely olisi fysikaalista ja laskentatyö mahdollisuuksien mukaan pieni. Nykyajan opiskelijoilla on käytettävissään taskulaskimet, tietokoneet ja erityisesti matematiikka-ohjelmat, joiden avulla ennen paljon aikaa vieneet rutiinitehtävät, kuten yhtälöryhmien ratkaiseminen ja tulosten graafinen esittäminen, on mahdollista suorittaa vaivatta.

Vaikka elementtimenetelmään perustuvien valmisohjelmien käyttö rakenteiden mekaniikan ongelmien ratkaisemisessa on nykyisin suunnittelijoiden arkipäivää, ei alan opetusta voida perustaa niihin. Oppiminen on kypsymisprosessi, joka muodostuu teorian opiskelusta, demonstraatioista ja omatoimisesti laskettavista harjoitustehtävistä.

Näiden harjoitustehtävien ratkaiseminen on tarkoituksenmukaista suorittaa ”käsin” käyttäen luonnollisesti hyväksi tietotekniikan tarjoamia matemaattisia apuvälineitä. Vaikka pitkään käytössä olleet klassiset käsinlaskumenetelmät, kuten yksikkövoimamenetelmä ja kulmanmuutosmenetelmä, ovat osoittautuneet vieläkin käyttökelpoisiksi, tehokkaat taskulaskimet ja matematiikkaohjelmat haastavat opettajia harkitsemaan voitaisiinko jotkut perinteiset käsinlaskumenetelmät pukea modernimpaan asuun.

Staattisesti määrätyn ristikon nivelen siirtymän määrittämiseen on totuttu käyttämään yksikkövoimamenetelmää ([1], ss. 174-177, [3])¹. Mikäli halutaan määrittää useiden tai kaikkien nivelten siirtymät (siirtymätila) laskelmat muuttuvat työläiksi ja yksitoikkoisiksi. Luonteva valinta tässä tapauksessa olisi elementtimenetelmän systematiikkaan perustuva siirtymämenetelmä [3], mutta realististen esimerkkien ratkaiseminen käsin sitäkin käyttäen on suuritöistä ja menetelmällistä. Eräs mahdollisuus olisi Williotin menetelmä ([1], ss. 178-186), mutta pääosin graafisena se alkaa olla aikansa elänyt. Tässä artikkelissa esitettävä menetelmä perustuu yhteen helposti mieleen painuvaan kaavaan, jota kutsutaan tässä sauvan pituudenmuutosyhtälöksi. Soveltamalla tätä yhtälöä erikseen ristikon kuhunkin sauvaan saadaan yhtälöryhmä, jonka ratkaisu antaa suoraan ristikon siirtymätilan.

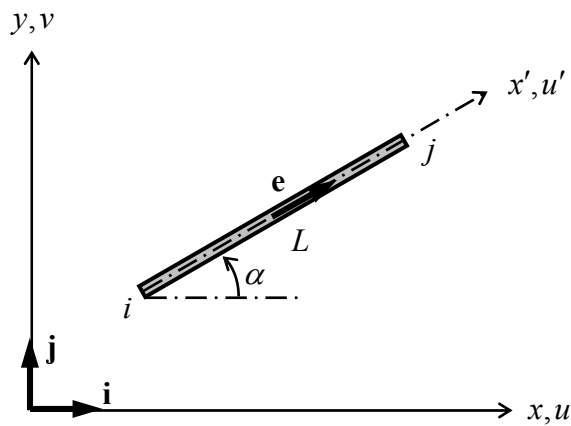
Kulmanmuutosmenetelmä ([2], ss. 276-319, [3]) on tunnetuimpia tasokehän klassisia ratkaisumenetelmiä, joka soveltuu hyvin käsinlaskentaan. Menetelmällä voidaan ratkaista aksiaalisesti jäykistä sauvoista koostuvia tasokehäjä. Jos kehää liittyy vinoja sauvoja, laskelma muodostuu kuitenkin varsin monimutkaiseksi, monivaiheiseksi ja työlääksi. Toinen mahdollisuus tasokehän ratkaisemiseksi on elementtimenetelmän systematiikkaan perustuva sauvarakenteiden siirtymämenetelmä [3]. Pienten ristikoiden ja palkkien ratkaiseminen käsin tällä menetelmällä onnistuu kohtuullisella työllä, mutta realististen kehien ratkaiseminen osoittautuu varsin työlääksi. Keskeinen syy tähän on se, että kehäsauva otaksutaan menetelmässä aksiaalisesti venyväksi, jolloin elementin jäykkyysmatriisiin sisältyy sekä aksiaalijäykkyyden EA että taivutusjäykkyyden EI sisältäviä termejä. Haittana on ensiksikin se, että aksiaalijäykkyyden sisältävät termit ovat käytännön tehtävissä huomattavasti taivutusjäykkyyden sisältäviä termejä suurempia ja toiseksi se, että näiden termien mukana olo lisää huomattavasti rakenteen jäykkyysmatriisin kokoamistyötä. Tässä artikkelissa esitettävässä aksiaalisesti jäykkien kehien ratkaisumenetelmässä elementin jäykkyysmatriisiin ei sisälly aksiaalijäykkyyden EA sisältäviä termejä, joten se on rakenteeltaan tavanomaisen tasokehäkehäelementin jäykkyysmatriisia huomattavasti yksinkertaisempi. Käytännön laskelmat rakenteen jäykkyysmatriisin ja kuormitustermivektorin kokoamiseksi tapahtuvat samaan tapaan kuin elementtimenetelmän systematiikkaan perustuvassa siirtymämenetelmässä, mutta työmäärä ja virhemahdollisuudet jäävät yksinkertaisemman elementin jäykkyysmatriisin ansiosta huomattavasti pienemmiksi. Lisäyhtälöiksi tässä menetelmässä tulevat kunkin sauvan pituudenmuutosyhtälöt, jotka toimivat normaalivoimasta aiheutuvan aksiaalivenymän estävinä rajoiteyhtälöinä. Näiden yhtälöiden kerroin-

¹ Tässä artikkelissa viitataan lähinnä kotimaiseen opetusmateriaaliin, oppikirjoihin ja artikkeleihin

matriisiin ja vakiovektorin kokoaminen elementtiosuuksistaan on yksinkertainen lisäoperaatio, joka on työmäärältään hyvin pieni. Kun menetelmään liittyvät systeemimatriisit on koottu, probleeman ratkaisu voidaan haluttaessa suorittaa sopivaan matematiikkaohjelmaa hyväksi käyttäen muutamalla komennolla.

1. SAUVAN PITUUDENMUUTOSYHTÄLÖ

Tarkastellaan kuvan 1 suoraa sauvaa ij . Merkitään sauvan akseliin yhtyvää pituuskoordinaattia ja sen aksiaalista siirtymää symboleilla x' ja u' sekä siirtymiä globaalissa x, y -koordinaatistossa symboleilla u ja v .



Kuva 1: Suora sauva tasossa.

Sauvan suuntaiselle yksikkövektorille saadaan kuvan 1 perusteella

$$\mathbf{e} = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}, \quad (1)$$

missä sauvan kaltevuuskulman α sinille ja kosinille on voimassa

$$\cos \alpha = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad \sin \alpha = \frac{y_j - y_i}{L}. \quad (2)$$

Jos sauvan tarkasteltavan pisteen siirtymävektori on

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (3)$$

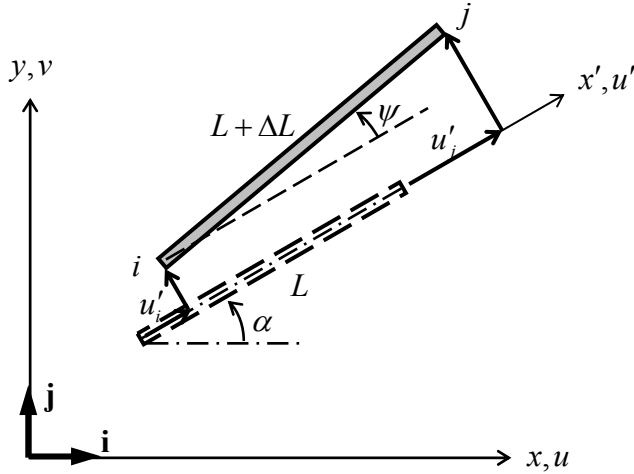
sauvan aksiaaliselle siirtymälle saadaan lauseke

$$u' = \mathbf{e} \cdot \mathbf{u} = \cos \alpha \cdot u + \sin \alpha \cdot v. \quad (4)$$

Kuvan 2 perusteella saadaan yhtälö

$$(L + \Delta L) \cos \psi = L + u'_j - u'_i, \quad (5)$$

missä u'_i ja u'_j ovat sauvan päiden aksiaaliset siirtymät ja ψ on sauvan rotaatiokulma.



Kuva 2: Sauvan siirtyminen.

Jos tehdään tavanomainen pienten rotaatioiden oletus, jossa ψ on niin pieni, että voidaan merkitä $\cos \psi = 1$, yhtälö (5) saa muodon

$$u'_j - u'_i = \Delta L. \quad (6)$$

Soveltamalla kaavaa (4) sauvan päissä i ja j , saadaan tästä

$$\boxed{\cos \alpha (u_j - u_i) + \sin \alpha (v_j - v_i) = \Delta L}. \quad (7)$$

Tämä yhtälö ilmaisee sauvan päiden i ja j siirtymien u_i , v_i , u_j ja v_j sekä sen pituudenmuutoksen ΔL välisen yhteyden. Tässä artikkelissa yhtälölle käytetään nimitystä *sauvan pituudenmuutosyhtälö*.

2. NIVELSAUVAN PITUUDENMUUTOSYHTÄLÖ RISTIKON SIIRTYMÄTILAN MÄÄRITTÄMISESSÄ

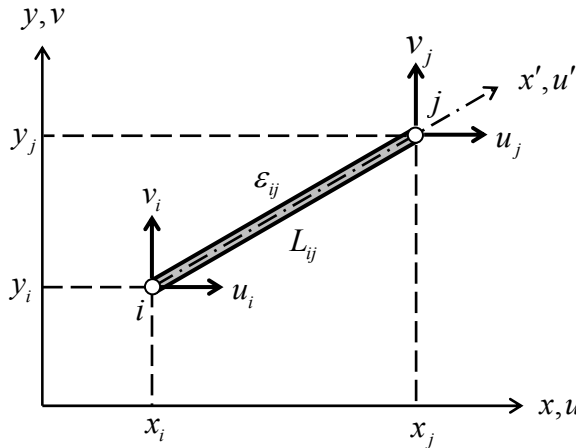
Tarkastellaan kuvan 3 nivelsauvaa ij . Otaksutaan sauva homogeeniseksi ja poikkileikkaukseltaan vakioksi. Tällöin sauvan pituudenmuutokselle saadaan $\Delta L_{ij} = \varepsilon_{ij} L_{ij}$, missä ε_{ij} on sauvan venymä ja sauvan pituudenmuutosyhtälö (7) voidaan kaavoja (2) käyttäen saattaa muotoon

$$\boxed{(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^2}, \quad (8)$$

Samalla periaatteella voidaan johtaa pituudenmuutosyhtälö

$$(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i) + (z_j - z_i)(w_j - w_i) = \varepsilon_{ij} L_{ij}^2 \quad (9)$$

myös kolmidimensioiselle nivelsauvalle. Nämä kaavat ovat sellaisessa muodossa, että ne on helppo muistaa.



Kuva 3: Nivelsauvan pituudenmuutosyhtälöön liittyvät merkinnät.

Kun kysymyksessä on staattisesti määrätty, *mekaanisesti kuormitettu* ristikko, jonka sauvavoimat S_{ij} voidaan määrittää tavanomaiseen tapaan, sauvojen venymät voidaan laskea kaavalla

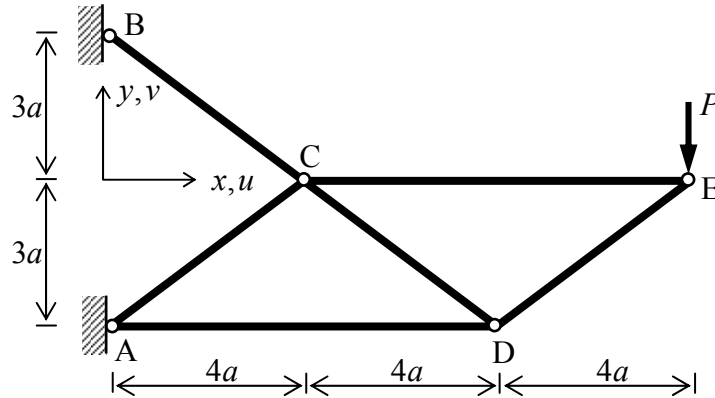
$$\varepsilon_{ij} = \frac{S_{ij}}{EA_{ij}}, \quad (10)$$

missä EA_{ij} on sauvan aksiaalijäykkyys ja S_{ij} on sen sauvavoima. Kun kysymyksessä on staattisesti määrätty ristikko, joka sauvat kokevat *lämpötilan muutoksen* ΔT_{ij} , sauvojen venymät voidaan laskea kaavalla

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T_{ij} \quad (11)$$

missä α_{ij} on sauvan pituuden lämpötilakerroin. Yhtälöiden (8) käyttöä staattisesti määrätyn tasoristikon sauvavoimien määrittämiseen tarkastellaan seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 1: Määritä kuvan E1.1 tasoristikon nivelten siirtymät. Kaikkien sauvojen aksiaalijäykkyys on EA .



Kuva E1.1: Tasoristikko

Ratkaisu:

Ristikon sauvavoimat: Ristikon sauvavoimat voidaan määrittää tavanomaiseen tapaan nivelmenetelmällä. Tulos on esitetty taulukon E1.1 viidennessä sarakkeessa.

Taulukko E1.1: Sauvojen venymien laskeminen.

Sauva	$x_j - x_i$	$y_j - y_i$	L_{ij}	S_{ij}	ε_{ij}
AC	$4a$	$3a$	$5a$	$5P/6$	$5P/(6EA)$
BC	$4a$	$-3a$	$5a$	$5P/2$	$5P/(2EA)$
AD	$8a$	0	$8a$	$-8P/3$	$-8P/(3EA)$
CD	$4a$	$-3a$	$5a$	$5P/3$	$5P/(3EA)$
CE	$8a$	0	$8a$	$4P/3$	$4P/(3EA)$
DE	$4a$	$3a$	$5a$	$-5P/3$	$-5P/(3EA)$

Sauvojen venymät: Sauvojen venymät lasketaan kaavaa (10) käyttäen. Tulos on esitetty taulukon E1.1 kuudennessa sarakkeessa. Nivelten siirtymät: Kirjoitetaan pituudenmuutosyhtälö (8) kullekin sauvalle ja otetaan huomioon tukiehdot, jolloin saadaan

$$\text{Sauva AC: } 4a(u_C - \overset{0}{u}_A) + 3a(v_C - \overset{0}{v}_A) = \frac{5P(5a)^2}{6EA},$$

$$\text{Sauva BC: } 4a(u_C - \overset{0}{u}_B) - 3a(v_C - \overset{0}{v}_B) = \frac{5P(5a)^2}{2EA},$$

$$\text{Sauva AD: } 8a(u_D - \overset{0}{u}_A) + 0 \cdot (v_D - \overset{0}{v}_A) = -\frac{8P(8a)^2}{3EA},$$

$$\text{Sauva CD: } 4a(u_D - u_C) - 3a(v_D - v_C) = \frac{5 P(5a)^2}{3 EA},$$

$$\text{Sauva CE: } 8a(u_E - u_C) + 0 \cdot (v_E - v_C) = \frac{4 P(8a)^2}{3 EA},$$

$$\text{Sauva DE: } 4a(u_E - u_D) + 3a(v_E - v_D) = -\frac{5 P(5a)^2}{3 EA}.$$

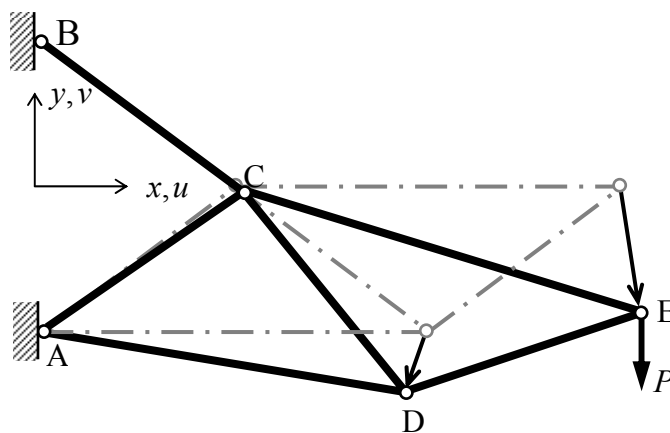
Tulokseksi saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \\ u_E \\ v_E \end{bmatrix} = \frac{Pa}{EA} \begin{bmatrix} 125/6 \\ 125/2 \\ -64/3 \\ 125/3 \\ 32/3 \\ -125/3 \end{bmatrix},$$

jonka ratkaisu saadaan helposti taskulaskimella tai matematiikkaohjelmalla. Se on

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ u_D \\ v_D \\ u_E \\ v_E \end{bmatrix} = \frac{Pa}{EA} \begin{bmatrix} 10,4 \\ -6,9 \\ -21,3 \\ -63,2 \\ 21,1 \\ -133,6 \end{bmatrix}.$$

Ristikön siirtymäkuvio: Ristikön siirtymäkuvio on esitetty kuvassa E1.2.

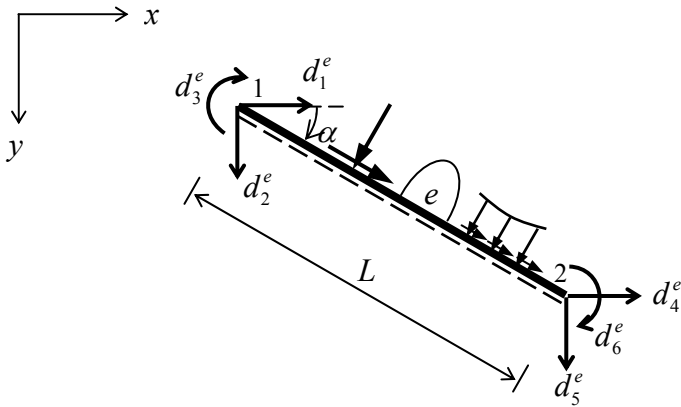


Kuva E1.2: Ristikön siirtymätila

3. SAUVAN PITUUDENMUUTOSYHTÄLÖ AKSIAALISESTI JÄYKÄN KEHÄN RATKAISEMISESSA

3.1 Elementin pituudenmuutosyhtälö

Seuraavassa tarkastellaan aksiaalisesti jäykistä sauvoista koostuvan tasokehän ratkaisemista. Käytetään tavanomaiseen tapaan elementtimenetelmän terminologiaa ja systematiikkaa. Kuvassa 4 on esitetty kehäelementtiin liittyviä merkintöjä.



Kuva 4: Tasokehäelementtiin liittyviä merkintöjä

Elementti ei voi saada normaalivoimasta aiheutuvia akselin venymiä. Akselin alkuvenymä ε_0 , joka aiheutuu esimerkiksi lämpötilan muutoksesta, on sen sijaan mahdollinen. Näitä merkintöjä käyttäen sauvan pituudenmuutosyhtälö (7) voidaan kirjoittaa muotoon

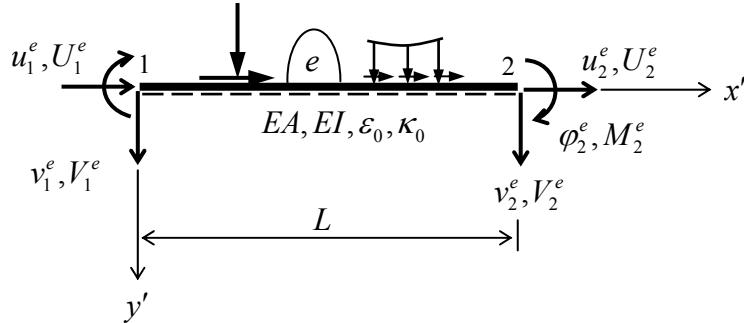
$$\boxed{[C]^e \{d\}^e = Q^e}, \quad (12)$$

missä

$$[C]^e = [-c, -s, 0, c, s, 0], \quad Q^e = \varepsilon_0 L^e, \quad (13)$$

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_1^e \\ d_2^e \\ d_3^e \\ d_4^e \\ d_5^e \\ d_6^e \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

$c = \cos \alpha$ ja $s = \sin \alpha$. Yhtälö (12) on tässä tapauksessa rajoiteyhtälö, joka vaatii, että elementin pituuden muutos aiheutuu pelkästään alkuvuonemästä ε_0 .



Kuva 5: Tasokehäelementti sauva koordinaatistossa

3.2 Elementin jäykkymatriisi ja kuormitusvektori

Tarkastellaan tasajäykkää tasokehäsauvaa ns. sauvakoordinaatistossa x', y' (kuva 5), jonka x' -akseli yhtyy sauvan akseliin ja y' -akseli on sitä vastaan kohtisuorassa. Tyypilliset tasokehäelementin sauvan päiden voima- ja siirtymäsuureiden yhteydet tässä koordinaatistossa ovat

$$U_1^e = \frac{EA}{L}u_1^e - \frac{EA}{L}u_2^e + UK_1^e, \quad (15a)$$

$$V_1^e = 12 \frac{EI}{L^3}v_1^e + 6 \frac{EI}{L^2}\phi_1^e - 12 \frac{EI}{L^3}v_2^e + 6 \frac{EI}{L^2}\phi_2^e + VK_1^e, \quad (15b)$$

$$M_1^e = 6 \frac{EI}{L^2}v_1^e + 4 \frac{EI}{L^2}\phi_1^e - 6 \frac{EI}{L^2}v_2^e + 2 \frac{EI}{L}\phi_2^e + MK_1^e, \quad (15c)$$

$$U_2^e = -\frac{EA}{L}u_1^e + \frac{EA}{L}u_2^e + UK_2^e, \quad (15d)$$

$$V_2^e = -12 \frac{EI}{L^3}v_1^e - 6 \frac{EI}{L^2}\phi_1^e + 12 \frac{EI}{L^3}v_2^e - 6 \frac{EI}{L^2}\phi_2^e + VK_2^e, \quad (15e)$$

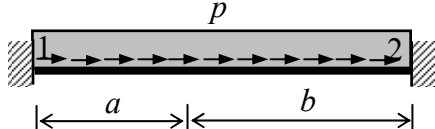
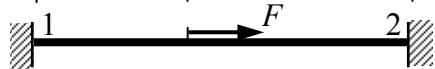
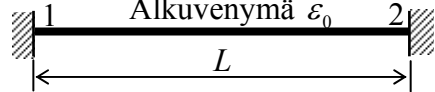
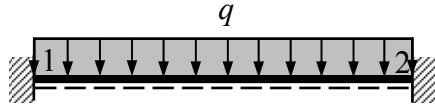
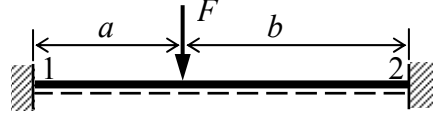
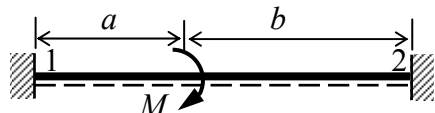
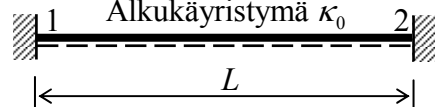
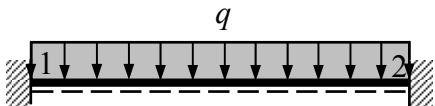
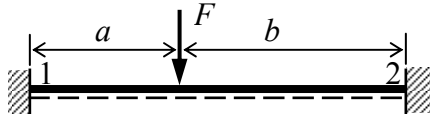
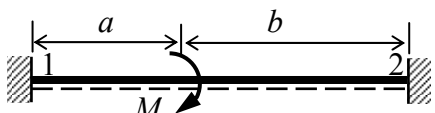
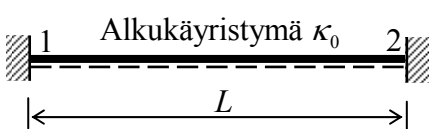
$$M_2^e = 6 \frac{EI}{L^2}v_1^e + 2 \frac{EI}{L^2}\phi_1^e - 6 \frac{EI}{L^2}v_2^e + 4 \frac{EI}{L}\phi_2^e + MK_2^e, \quad (15f)$$

missä UK_i^e , VK_i^e ja MK_i^e ovat elementillä vaikuttavaan aksiaaliseen ja poikittaiseen kuormitukseen liittyvät kuormitustermit. Merkinnät käyvät ilmi kuvasta 5. Tavallisimpia kuormitustermejä on esitetty taulukossa 1.

Yhtälöt (15a) ja (15d) voidaan esittää muodossa

$$U_1^e = -EA\bar{\varepsilon}^e + UK_1^e, \quad U_2^e = EA\bar{\varepsilon}^e + UK_2^e, \quad (16)$$

Taulukko 1: Tasokehän kuormitustermejä

Pitkittäiset sauvanpävoimat:	
	$UK_1 = -\frac{pL}{2}, UK_2 = -\frac{pL}{2}$
	$UK_1 = -\frac{Fb}{L}, UK_2 = -\frac{Fa}{L}$
	$UK_1 = EA\varepsilon_0, UK_2 = -EA\varepsilon_0$
Poikittaiset sauvanpävoimat:	
	$VK_1 = -\frac{qL}{2}, VK_2 = -\frac{qL}{2}$
	$VK_1 = -\frac{Fb}{L} \left[1 + \frac{a(b-a)}{L^2} \right], VK_2 = -\frac{Fa}{L} \left[1 + \frac{b(a-b)}{L^2} \right]$
	$VK_1 = \frac{M}{L} \left(2 - 3 \frac{a^2 + b^2}{L^2} \right), VK_2 = -\frac{M}{L} \left(2 - 3 \frac{a^2 + b^2}{L^2} \right)$
	$VK_1 = 0, VK_2 = 0$
Sauvanpäämomentit:	
	$MK_1 = -\frac{qL^2}{12}, MK_2 = \frac{qL^2}{12}$
	$MK_1 = -\frac{Fab^2}{L^2}, MK_2 = \frac{Fa^2b}{L^2}$
	$MK_1 = \frac{Mb}{L} \left(2 - 3 \frac{b}{L} \right), MK_2 = \frac{Ma}{L} \left(2 - 3 \frac{a}{L} \right)$
	$MK_1 = -EI\kappa_0, MK_2 = EI\kappa_0$

missä $\bar{\varepsilon}^e = (u_2^e - u_1^e) / L^e$ on elementin keskimääräinen venymä. Kun elementin jäykkyys kasvaa rajatta $EA \rightarrow \infty$, niin venymä samanaikaisesti pienenee $\bar{\varepsilon}^e \rightarrow 0$ siten, että niiden tulo, sauvan keskimääräinen normaalivoima $\bar{N}^e = EA\bar{\varepsilon}^e$, säilyy äärellisenä. Aksiaalisesti jäykän sauvan tapauksessa lausekkeet (16) voidaan siis esittää muodossa

$$U_1^e = -\bar{N}^e + UK_1^e, \quad U_2^e = \bar{N}^e + UK_2^e. \quad (17)$$

Lausekkeet (17), (15b), (15c), (15e) ja (15f) esittävät aksiaalisesti jäykän tasokehäelementin päiden voima- ja siirtymäsuureiden yhteydet sauvakoordinaatistossa. Matriisimuodossa ne ovat

$$\{F'\}^e = [K']^e \{d'\}^e + [C']^{eT} \bar{N}^e + \{FK'\}^e \quad (18)$$

missä

$$\{F'\}^e = \begin{Bmatrix} U_1^e \\ V_1^e \\ M_1^e \\ U_2^e \\ V_2^e \\ M_2^e \end{Bmatrix}, \quad \{d'\}^e = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \varphi_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \varphi_2^e \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

$$[K']^e = [K]^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad \{FK'\}^e = \begin{Bmatrix} UK_1^e \\ VK_1^e \\ MK_1^e \\ UK_2^e \\ VK_2^e \\ MK_2^e \end{Bmatrix} \quad (20)$$

ja

$$[C']^e = [-1, 0, 0, 1, 0, 0]. \quad (21)$$

Siirtymällä tavanomaiseen tapaan rakennekoordinaatistoon x, y nämä yhtälöt saavat muodon

$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + [C]^{eT} \bar{N}^e + \{FK\}^e, \quad (22)$$

missä

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \\ F_5^e \\ F_6^e \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

$$[K]^e = [L]^T [K']^e [L], \quad \{FK\}^e = [L]^T \{FK'\}^e, \quad \{C\}^e = \{C'\}^e [L] \quad (24)$$

ja

$$[L] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

on koordinaatiston muunnosmatriisi. Suorittamalla matriisikertolaskut kaavoista (24) seuraa matriisille $[K]^e$, pystyvektorille $\{FK\}^e$ ja vaakavektorille $[C]^e$ tulokset

$$[K]^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12s^2 & -12sc & -6Ls & -12s^2 & 12sc & -6Ls \\ -12sc & 12c^2 & 6Lc & 12sc & -12c^2 & 6Lc \\ -6Ls & 6Lc & 4L^2 & 6Ls & -6Lc & 2L^2 \\ -12s^2 & 12sc & 6Ls & 12s^2 & -12sc & 6Ls \\ 12sc & -12c^2 & -6Lc & -12sc & 12c^2 & -6Lc \\ -6Ls & 6Lc & 2L^2 & 6Ls & -6Lc & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\{FK\}^e = \begin{Bmatrix} cUK_1 - sVK_1 \\ sUK_1 + cVK_1 \\ MK_1 \\ cUK_2 - sVK_2 \\ sUK_2 + cVK_2 \\ MK_2 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

ja

$$[C]^e = [-c, -s, 0, c, s, 0]. \quad (28)$$

Näistä tuloksista voidaan todeta seuraavaa: Matriisi $[K]^e$ on rakenteeltaan yksinkertaisempi kuin tavanomaisen tasokehäelementin jäykkyyismatriisi (vrt. liite A). Itse asiassa edellinen saadaan jälkimmäisestä merkitsemällä aksiaalijäykkyydet EA nolliksi. Se, että matriisi $[K]^e$ on yksinkertaisempi ja että siitä puuttuvat aksiaalijäykkyyden omaavat termit, on varsin suuri etu, kun tässä käsiteltävää menettelyä sovelletaan kehärakenteiden ratkaisemiseen käsin. Pystyvektori $\{FK\}^e$ on tavanomaisen kehäelementin kuormitustermivektori. Vaakavektorin $[C]^e$ nähdään olevan elementin pituudenmuutosyhtälön kerroinmatriisi (13).

3.3 Rakenteen jäykkyyismatriisin, kuormitustermivektorin ja rajoitematriisin kokoaminen

Rakenteen jäykkyyismatriisin ja kuormitustermivektorin alkiot kootaan elementti-osuuksistaan tavanomaiseen tapaan. Seuraavat elementtimenetelmän kokoamisprosessin kaavat, jotka ovat peräisin lähteestä [4], soveltuvat hyvin käsinlaskuun. Rakenteen jäykkyyismatriisin $[K]$ kokoaminen voidaan esittää kaavalla

$$K_{ij} = \sum_e K_{rs}^e, \quad (29)$$

missä summaus käy yli niiden elementtien, jotka liittyvät systeemivapausasteisiin i ja j , sekä r ja s ovat elementin e systeemivapausasteita i ja j vastaavat elementtivapausastenumerot. Rakenteen kuormitustermivektorin $\{FK\}$ kokoaminen voidaan vastaavasti esittää kaavalla

$$FK_i = \sum_e FK_r^e, \quad (30)$$

missä summaus käy yli niiden elementtien, jotka liittyvät systeemivapausasteeseen i , sekä r on elementin e systeemivapausastetta i vastaavat elementtivapausastenumero.

Rakenteen rajoiteyhtälön kerroinmatriisiin $[C]$ tulee jokaista elementtiä e kohti yksi rivi. Sen rivin e alkiot saadaan yksinkertaisesti kaavalla

$$C_{ei} = C_r^e, \quad (31)$$

missä r on elementin e systeemivapausastetta i vastaava elementtivapausastenumero. Rakenteen rajoiteyhtälön vakiovektoriin $\{Q\}$ tulee jokaisesta elementistä e yksi alkio, joten sen alkiot ovat

$$Q_e = Q^e. \quad (32)$$

3.4 Yhtälöryhmä solmuparametrien ja elementtien normaalivoimien ratkaisemiseksi

Probleeman ratkaisemiseksi saadaan kaksi yhtälöryhmää rakenteen tasapainoyhtälöt

$$[K]\{d\} + [C]^T \{\bar{N}\} = \{R\} \quad (33)$$

ja rakenteen rajoiteyhtälöt

$$[C]\{d\} = \{Q\}. \quad (34)$$

Näissä yhtälöissä matriisia $[K]$ kutsutaan rajoittamattoman rakenteen jäykkyyss-matriisiksi, $[C]$ on rakenteen rajoiteyhtälön kerroinmatriisi

$$\{R\} = \{P\} - \{FK\}, \quad (35)$$

on rakenteen kuormitusvektori, $\{Q\}$ rakenteen rajoiteyhtälön vakiovektori, $\{FK\}$ on rakenteen kuormitustermivektori ja $\{P\}$ on vapausastekuormista muodostettu pystyvektori. Näissä kahdessa yhtälössä tuntemattomina ovat siirtymävapausasteet $\{d\}^e$ ja elementtien keskimääräiset normaalivoimat $\{\bar{N}\}$. Sekä yhtälöiden että tuntemattomien lukumäärä tehtävässä on $M + E$, missä M on systeemivapausasteiden lukumäärä ja E on elementtien lukumäärä. Yhtälöitä on yhtä paljon kuin tuntemattomia ja tehtävä näin normaalisti ratkaistavissa.

3.5 Yhtälöryhmän redusointi

Koska tavoitteena on kehittää opetustarkoituksiin soveltuva käsinlaskumenetelmä, muokataan tehtävä sellaiseen muotoon, että syntyvä lopullinen yhtälöryhmä olisi mahdollisimman pieni. Etsitään ensin yhtälöryhmän (34) ratkaisu. Koska tehtävä on alimääräytyvä (tuntemattomia enemmän kuin yhtälöitä), ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$\{d\} = [T]\{d_r\} + \{d_0\} \quad (36)$$

missä $[T]$ on vakio matriisi, $\{d_r\}$ on $M - E$ tuntematonta parametria sisältävä pystyvektori ja $\{d_0\}$ on vakiovektori. Pienissä tehtävissä matriisi $[T]$ ja vektori $\{d_0\}$ on helppo määrittää käsin laskien, kuten seuraavasta esimerkistä 2 käy ilmi. Suuremmissa tehtävissä voidaan käyttää sopivaa matematiikkaohjelmaa, jolla voidaan käsitellä alimääräytyviä yhtälöryhmiä. Esimerkiksi MATLAB-ympäristössä [5] matriisi $[T]$ voidaan määrittää komennolla $T = \text{null}(C, 'r')$ ja vakiovektori $\{d_0\}$ komennolla $d_0 = C \setminus Q$, missä T , C , d_0 ja Q ovat vastaavat MATLAB'in matriisit ja vektorit.

Kertomalla yhtälö (33) puolittain matriisin $[T]$ transpoosilla saadaan

$$[T]^T [K] \{d\} + ([C][T])^T \{\bar{N}\} = [T]^T \{R\}. \quad (37)$$

Ottamalla yhtälössä (37) huomioon, että matriisien $[C]$ ja $[T]$ tulolle on voimassa² $[C][T] = [0]$, ja sijoittamalla siihen lauseke (36) saadaan yhtälö

$$[K_r] \{d_r\} = \{R_r\}, \quad (38)$$

missä

$$[K_r] = [T]^T [K] [T] \quad (39)$$

ja

$$\{R_r\} = [T]^T (\{R\} - [K] \{d_0\}) \quad (40)$$

ovat redusoidun tehtävän jäykkymatriisi ja kuormitusvektori. Yhtälö (38) muodostaa lopullisen yhtälöryhmän parametrien $\{d_r\}$ määrittämiseksi. Tuntemattomien lukumäärä tässä yhtälöryhmässä on $M - E$. Se on $2 \cdot E$ vähemmän kuin alkuperäisissä yhtälöissä (33) ja (34).

Kun parametrit $\{d_r\}$ yhtälöryhmän ratkaisuna on saatu määritetyksi, voidaan lopulliset solmuparametrit $\{d\}$ laskea kaavalla (36).

3.6 Elementtien keskimääräisten normaalivoimien määrittäminen

Kertomalla yhtälö (33) puolittain matriisilla $[C]$ saadaan yhtälöryhmä

$$[M] \{\bar{N}\} = \{S\}, \quad (41)$$

missä

$$[M] = [C][C]^T, \quad \{S\} = [C](\{R\} - [K] \{d\}). \quad (42)$$

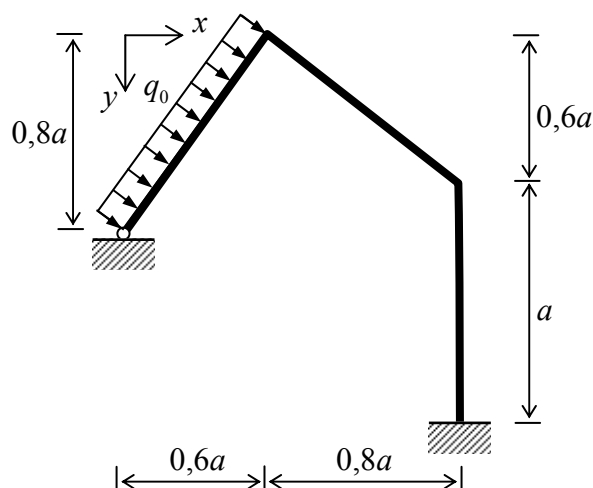
Elementtien keskimääräiset normaalivoimat $\{\bar{N}\}$ saadaan tämän yhtälöryhmän ratkaisuna.

² Olkoon yhtälö (34) homogeeninen (ts. vakiovektori $\{Q\} = \{0\}$), jolloin yhtälöstä (36) saadaan $\{d\} = [T] \{d_r\}$. Sijoittamalla tämä yhtälöön (34) saadaan $[C][T] \{d_r\} = \{0\}$. Koska $\{d_r\}$ on mielivaltainen vektori, tästä seuraa tulos $[C][T] = [0]$.

3.7 Leikkausrasitusten määrittämisestä

Leikkausrasitukset elementtien alueella voidaan määrittää samaan tapaan kuin tavanomaisen kehäelementin yhteydessä. Ensinnäkin määritetään leikkausrasituksia N , Q ja M vastaavat sauvanpääsuureet U_i , V_i ja M_i ($i=1,2$). Kun nämä tunnetaan, saadaan leikkausrasitusten lausekkeet elementin alueella statiikan keinoin. Aksiaalisesti jäykän elementin aksiaaliset sauvanpäävoimat U_i ($i=1,2$) määritetään tavanomaisesta käsittelystä poiketen suoraan kaavoilla (17). Siinä tapauksessa, että elementin alueella ei ole aksiaalista ulkoista kuormaa eikä alkuvuonua ε_0 , normaalivoima N^e on elementin alueella vakio ja keskimääräisen normaalivoiman \bar{N}^e suuruinen.

Esimerkki 2: Määritä kuvan E2.1 tasokehän nurkkien siirtymät ja kiertymät. Määritä myös normaalivoima- ja taivutusmomenttikuviot. Sauvat ovat aksiaalisesti jäykkiä ja niiden taivutusjäykkyys on EI .



Kuva E2.1: Tasokehä

Ratkaisu:

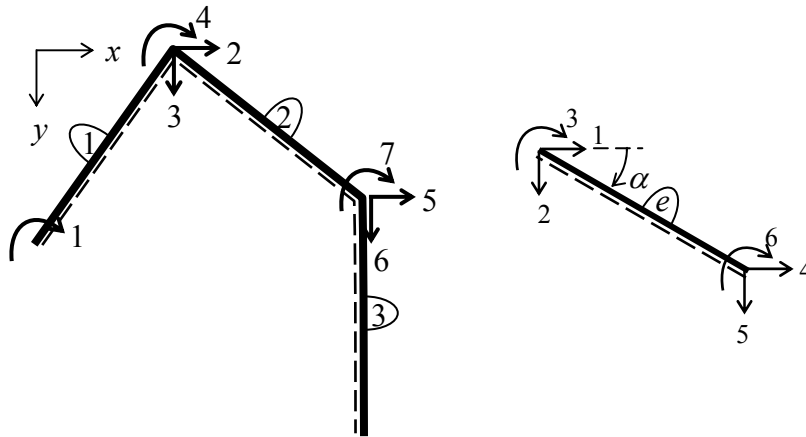
Elementtien pituudet ja kaltevuuskulmien kosinit ja sinit:

Elementti 1: $L = a$, $c = \cos \alpha = 0,6$, $s = \sin \alpha = -0,8$

Elementti 2: $L = a$, $c = \cos \alpha = 0,8$, $s = \sin \alpha = 0,6$

Elementti 3: $L = a$, $c = \cos \alpha = 0$, $s = \sin \alpha = 1$

Rakenteen jäykkymatriisin kokoaminen: Rakenteen jäykkymatriisi kootaan termi kerrallaan käyttäen hyväksi kaavaa (29), kuvaa E2.2 ja elementin jäykkymatriisin lauseketta (26). Kokoaminen suoritetaan vaakariveittäin. Koska matriisi on symmetrinen, kootaan vain sen yläkolmion termit.



Kuva E2.2: Elementit, systeemivapausasteet ja elementtivapausasteet

Rivi 1:

$$K_{11} = K_{33}^1 = \frac{EI}{a^3} \cdot 4a^2 = 4 \frac{EI}{a}$$

$$K_{12} = K_{34}^1 = \frac{EI}{a^3} \cdot 6a(-0,8) = -4,8 \frac{EI}{a^2}$$

$$K_{13} = K_{35}^1 = \frac{EI}{a^3} \cdot (-6) \cdot a \cdot 0,6 = -3,6 \frac{EI}{a^2}$$

$$K_{14} = K_{36}^1 = \frac{EI}{a^3} \cdot 2a^2 = 2 \frac{EI}{a}$$

$$K_{15} = K_{16} = K_{17} = \underline{0}$$

Rivi 2:

$$K_{22} = K_{44}^1 + K_{11}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot 12(-0,8)^2 + \frac{EI}{a^3} \cdot 12 \cdot 0,6^2 = 12 \frac{EI}{a^3}$$

$$K_{23} = K_{45}^1 + K_{12}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot (-12) \cdot (-0,8) \cdot 0,6 + \frac{EI}{a^3} \cdot (-12) \cdot 0,6 \cdot 0,8 = \underline{0}$$

$$K_{24} = K_{46}^1 + K_{13}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot 6a \cdot (-0,8) + \frac{EI}{a^3} \cdot (-6)a \cdot 0,6 = -8,4 \frac{EI}{a^2}$$

$$K_{25} = K_{14}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot (-12) \cdot 0,6^2 = -4,32 \frac{EI}{a^3}$$

$$K_{26} = K_{15}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot 12 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 5,76 \frac{EI}{a^3}$$

$$K_{27} = K_{16}^2 = \frac{EI}{a^3} \cdot (-6) \cdot a \cdot 0,6 = -3,6 \frac{EI}{a^2}$$

Samaan tapaan jatkaen saadaan koko rakenteen jäykkyysmatriisi kootuksi. Se on

$$[K] = \frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 4a^2 & -4,8a & -3,6a & 2a^2 & 0 & 0 & 0 \\ -4,8a & 12 & 0 & -8,4a & -4,32 & 5,76 & -3,6a \\ -3,6 & 0 & 12 & 1,2a & 5,76 & -7,68 & 4,8a \\ 2a^2 & -8,4a & 1,2a & 8a^2 & 3,6a & -4,8a & 2a^2 \\ 0 & -4,32 & 5,76 & 3,6a & 16,32 & -5,76 & -2,4a \\ 0 & 5,76 & -7,68 & -4,8a & -5,76 & 7,68 & -4,8a \\ 0 & -3,6a & 4,8a & 2a^2 & -2,4a & -4,8a & 8a^2 \end{bmatrix}.$$

Rakenteen kuormitustermivektorin kokoaminen: Rakenteen kuormitustermivektori kootaan termi kerrallaan käyttäen hyväksi kaavaa (30), kuvaa E2.2 ja elementin kuormitustermivektorin lauseketta (27) sekä taulukkoa 1.

$$FK_1 = FK_3^1 = MK_1^1 = -\frac{q_0 a^2}{12} = \underline{\underline{-\frac{1}{12} q_0 a^2}}$$

$$FK_2 = FK_4^1 + \overbrace{FK_1^2}^0 = cUK_2^1 - sVK_2^1 = 0,6 \cdot 0 - (-0,8) \left(-\frac{q_0 a}{2}\right) = \underline{\underline{-0,4 q_0 a}}$$

$$FK_3 = FK_5^1 + \overbrace{FK_2^2}^0 = sUK_2^1 + cVK_2^1 = -0,8 \cdot 0 + 0,6 \left(-\frac{q_0 a}{2}\right) = \underline{\underline{-0,3 q_0 a}}$$

$$FK_4 = FK_6^1 + \overbrace{FK_3^2}^0 = MK_2^1 = \frac{q_0 a^2}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{12} q_0 a^2}}$$

Koska vain elementillä 1 on kuormitusta, muut kuormitustermivektorin alkioit ovat nollia. Rakenteen kuormitustermivektori on siis

$$\{FK\} = \begin{Bmatrix} -a/12 \\ -0,4 \\ -0,3 \\ a/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} q_0 a.$$

Rakenteen kuormitusvektori: Koska rakenteeseen ei kohdistu vapausastekuormia, $\{P\} = \{0\}$ ja rakenteen kuormitusvektori on

$$\{R\} = -\{FK\} = \begin{Bmatrix} a/12 \\ 0,4 \\ 0,3 \\ -a/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} q_0 a.$$

Rakenteen rajoitematriisin kokoaminen: Rakenteen rajoitematriisi kootaan termi kerrallaan käyttäen hyväksi kaavaa (31), kuvaa E2.2 ja elementin rajoiterivimatriisin lauseketta (28).

Rivi 1:

$$C_{11} = C_3^1 = \underline{0}, C_{12} = C_4^1 = c = \underline{0,6}, C_{13} = C_5^1 = s = \underline{-0,8}, C_{14} = C_6^1 = \underline{0}, C_{15} = C_{16} = C_{17} = \underline{0},$$

Rivi 2:

$$C_{21} = \underline{0}, C_{22} = C_1^2 = -c = \underline{-0,8}, L_{23} = C_2^2 = -s = \underline{-0,6}, C_{24} = C_3^2 = \underline{0}, C_{25} = C_4^2 = c = \underline{0,8}, \\ C_{26} = C_5^2 = s = \underline{0,6}, C_{27} = \underline{0}$$

Rivi 3:

$$C_{31} = C_{31} = C_{33} = C_{34} = \underline{0}, C_{35} = C_1^3 = -c = \underline{0}, C_{36} = C_2^3 = -s = \underline{-1}, C_{37} = \underline{0}.$$

Rakenteen rajoitematriisi on siten

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,8 & -0,6 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rakenteen rajoitevektorin kokoaminen: Rakenteen rajoitevektori kootaan termi kerrallaan käyttäen hyväksi kaavaa (32) ja elementin rajoityhtälön vakiotermin Q^e lauseketta (13).

$$Q_1 = Q^1 = 0, Q_2 = Q^2 = 0, Q_3 = Q^3 = 0.$$

Rakenteen rajoitevektori on siten

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rajoiteyhtälöiden ratkaisu, matriisit [T] ja {d₀}: Rajoiteyhtälöt ovat auki kirjoitettuna

$$\begin{cases} 0,6d_2 - 0,8d_3 = 0, \\ -0,8d_2 - 0,6d_3 + 0,8d_5 + 0,6d_6 = 0, \\ -1 \cdot d_6 = 0 \end{cases}$$

Nämä ovat 3 yhtälöä, joissa on 4 tuntematonta. Tuntemattomat voidaan siten esittää yhden tuntemattoman parametrin avulla. Valitaan siksi d₂, jolloin saadaan

$$d_2 = d_2, d_3 = \frac{3}{4}d_2, d_5 = \frac{25}{16}d_2, d_6 = 0.$$

Esitetään tulos matriisimuodossa siten, että siihen sisältyvät myös riippumattomiksi jäävät vapausasteet d₁, d₄ ja d₇. Saadaan

$$\{d\} = [T]\{d_r\} + \{d_0\},$$

missä

$$\{d_r\} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_4 \\ d_7 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

sisältää jäljelle jäävät tuntemattomat ja

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \{d_0\} = \{0\}.$$

Jos matriisi [T] ja pystyvektori {d₀} määritettäisiin MATLAB-komennoilla, niistä tulisi erilaisia. Tämä johtuu siitä, että riippumattomat parametrit {d_r} voidaan valita eri tavoin. Valinnalla ei luonnollisesti ole vaikutusta tehtävän lopputulokseen.

Lopullinen yhtälöryhmä ja sen ratkaisu: Nyt saadaan redusoidulle jäykkyyismatriisille

$$[K_r] = [T]^T [K] [T] = \frac{EI}{a^3} \begin{bmatrix} 4a^2 & 2a^2 & 0 & -7,5a \\ 2a^2 & 8a^2 & 2a^2 & -1,875a \\ 0 & 2a^2 & 8a^2 & -3,75a \\ -7,5a & -1,875a & -3,75a & 58,5938 \end{bmatrix}$$

ja redusoidulle kuormitusvektorille

$$\{R_r\} = [T]^T \{R\} = \begin{Bmatrix} a/12 \\ -a/12 \\ 0 \\ -a/12 \end{Bmatrix} q_0 a .$$

Yhtälöryhmän

$$[K_r] \{d_r\} = \{R_r\}$$

ratkaisuksi saadaan

$$\{d_r\} = \frac{q_0 a^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0725 \\ -0,0279 \\ 0,0164 \\ 0,0201a \end{Bmatrix} .$$

Alkuperäiset vapausasteet: Nyt saadaan alkuperäisille vapausasteille

$$\{d\} = [T] \{d_r\} = \frac{q_0 a^3}{EI} \begin{Bmatrix} 0,0725 \\ 0,0201a \\ 0,0151a \\ -0,0279 \\ 0,0314a \\ 0 \\ 0,0164 \end{Bmatrix} .$$

Elementtien keskimääräiset normaalivoimat: Matriisille $[M]$ saadaan

$$[M] = [C][C]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -0,6 \\ 0 & -0,6 & 1 \end{bmatrix}$$

ja elementtien keskimääräisille normaalivoimille

$$\{\bar{N}\} = [M]^{-1}[C](\{R\} - [K]\{d\}) = \begin{Bmatrix} 0,1570 \\ -0,4658 \\ -0,4051 \end{Bmatrix} q_0 a.$$

Elementtien normaalivoimat: Koska kehän sauvoilla ei vaikuta aksiaalista jakautunutta kuormitusta ja niillä ei ole alkuvienymää, elementtien normaalivoimat N^e ovat keskimääräisen normaalivoiman \bar{N}^e suuruisia. Näin

$$N^1 = \underline{0,1570q_0a}, \quad N^2 = \underline{-0,4658q_0a}, \quad N^3 = \underline{-0,4051q_0a}.$$

Elementtien solmumomentit: Elementin 1 solmumomenteille saadaan

$$\begin{aligned} M_1^1 &\equiv F_3^1 = \sum_{j=1}^6 K_{3j}^1 d_j^1 + FK_3^1 \\ &= K_{31}^1 \overbrace{d_1^1}^0 + K_{32}^1 \overbrace{d_2^1}^0 + K_{33}^1 \overbrace{d_3^1}^{d_1} + K_{34}^1 \overbrace{d_4^1}^{d_2} + K_{35}^1 \overbrace{d_5^1}^{d_3} + K_{36}^1 \overbrace{d_6^1}^{d_4} + FK_3^1 \\ &= K_{33}^1 d_1^1 + K_{34}^1 d_2^1 + K_{35}^1 d_3^1 + K_{36}^1 d_4^1 + FK_3^1 \\ &= [4 \cdot 0,0725 + 6 \cdot (-0,8) \cdot 0,0201 + (-6) \cdot 0,6 \cdot 0,0151 + 2 \cdot (-0,0279) - \frac{1}{12}] q_0 a^2 \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$

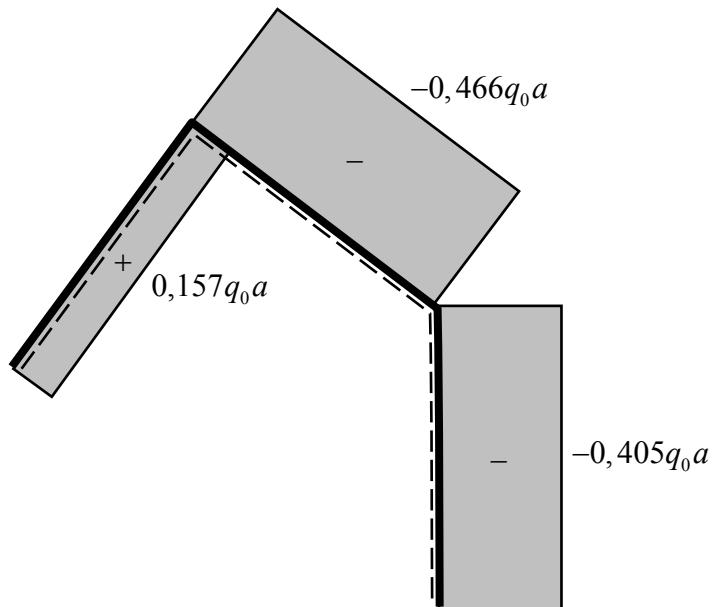
$$\begin{aligned} M_2^1 &\equiv F_6^1 = \sum_{j=1}^6 K_{6j}^1 d_j^1 + FK_6^1 \\ &= K_{61}^1 \overbrace{d_1^1}^0 + K_{62}^1 \overbrace{d_2^1}^0 + K_{63}^1 \overbrace{d_3^1}^{d_1} + K_{64}^1 \overbrace{d_4^1}^{d_2} + K_{65}^1 \overbrace{d_5^1}^{d_3} + K_{66}^1 \overbrace{d_6^1}^{d_4} + FK_6^1 \\ &= K_{63}^1 d_1^1 + K_{64}^1 d_2^1 + K_{65}^1 d_3^1 + K_{66}^1 d_4^1 + FK_6^1 \\ &= [2 \cdot 0,0725 + 6 \cdot (-0,8) \cdot 0,0201 + (-6) \cdot 0,6 \cdot 0,0151 + 4 \cdot (-0,0279) + \frac{1}{12}] q_0 a^2 \\ &= \underline{-0,034q_0a^2} \end{aligned}$$

Vastaavaan tapaan saadaan elementtien 2 ja 3 solmumomenteille tulokset

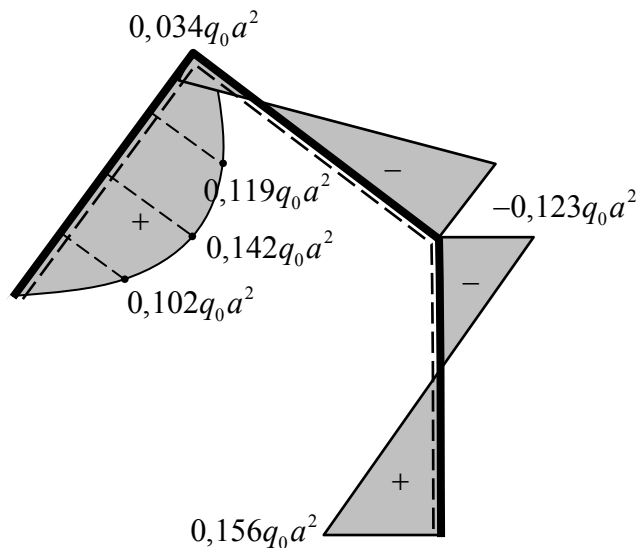
$$M_1^2 = \underline{0,034q_0a^2}, M_2^2 = \underline{0,123q_0a^2}, M_1^3 = \underline{-0,123q_0a^2}, M_2^3 = \underline{-0,156q_0a^2}.$$

Elementtien taivutusmomenttijakautumat: Kun elementtien solmumomentit (sauvanpäämomentit) tunnetaan voidaan niiden taivutusmomenttijakautuman määrittää tavanomaiseen tapaan.

Normaalivoima- ja taivutusmomenttikuviot: Kuvissa E2.3 ja E2.4 on esitetty kehän normaalivoima- ja taivutusmomenttikuviot.



Kuva E2.3: Normaalivoimakuvio



Kuva E2.4: Taivutusmomenttikuvio

JOHTOPÄÄTÖKSIA

Artikkelissa esiteltiin kaksi käsinlaskentaan soveltuvaa menetelmää, joita voidaan käyttää rakenteiden mekaniikan peruskurssien opetuksessa. Menetelmillä on yhteisenä piirteenä ns. sauvan pituudenmuutosyhtälö.

Ensimmäinen menetelmä antaa varteenotettavan vaihtoehdon, kun halutaan määrittää siirtymätila ristikolle, jonka sauvojen venymät tunnetaan. Sen avulla voidaan määrittää staattisesti määrätyn ristikon nivelten siirtymät, kun sauvavoimat on ensin määritetty esimerkiksi nivelmenetelmällä. Myöskin sauvojen alkumuodonmuutoksista, kuten niiden lämpölaajenemisesta, aiheutuva siirtymätila voidaan määrittää. Siirtymätilasta piirretty kuvio on yksi tapa havainnollistaa ristikon toimintaa.

Sauvan pituudenmuutosyhtälön soveltaminen aksiaalisesti jäykän kehän analysointiin voitaisiin toteuttaa kahdella eri tavalla. Ensimmäinen mahdollisuus olisi käyttää tätä yhtälöä helpottamaan ns. riippumattomien sauvakiertymien määrittämistä kulmanmuutosmenetelmässä. Toinen mahdollisuus, jota käytettiin tässä artikkelissa, oli sisällyttää sauvojen pituudenmuutosyhtälöt elementtimenetelmän systematiikkaan perustuvaa siirtymämenetelmään rajoiteyhtälöiksi, jotka vaativat sauvojen normaali-voimasta aiheutuvien pituudenmuutosten häviävän. Kehitetyllä menetelmällä voidaan modernien matematiikkaohjelman matriisioperaatioita apuna käyttäen laskea käsin suurempia ja realistisempia kehätehtäviä kuin kulmanmuutosmenetelmällä tai elementtimenetelmän systematiikkaan perustuvalla siirtymämenetelmällä. Menetelmän implementointi on myös huomattavasti helpompi tehtävä kuin kulmanmuutosmenetelmän [6].

LÄHTEET

1. P. Loikkanen, *Rakenteiden statiikka 1, Staattisesti määrättyt sauvarakenteet*, Otava, Helsinki, 1972.
2. P. Loikkanen, *Rakenteiden statiikka 2, Staattisesti epämääräiset sauvarakenteet*, Otava, Helsinki, 1975.
3. J. Aalto, *Rakenteiden mekaniikan luentomateriaalia: Rakenteiden mekaniikka I*, <http://www.tkk.fi/Yksikot/Rakenteidenmekaniikka/ojkoti/rml/pruju/index.html/>
4. E-M. Salonen, *Elementtimenetelmä mekaniikassa*, luentomoniste, Teknillinen korkeakoulu, Mekaniikka, 1984.
5. MATLAB *Mathematics* (version 7), The Math Works, Inc., 2005.
6. J. Aalto, *Kulmanmuutosmenetelmästä ja sen implementoinnista*, VIII Suomen mekaniikkapäivien esitelmät, Toim. Peter Råback, K. Santaoja ja R. Stenberg, Teknillinen korkeakoulun lujuusopin laboratorion julkaisuja, TKK-LO-36, 2002, ss. 382-394.

Liite A: Tavanomaisen kehäelementin jäykkyyismatriisi rakennekoordinaatistossa

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}sc - \frac{12EI}{L^3}sc & -\frac{6EI}{L^2}s & -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & -\frac{EA}{L}sc + \frac{12EI}{L^3}sc & -\frac{6EI}{L^2}s \\ \frac{EA}{L}sc - \frac{12EI}{L^3}sc & \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c & -\frac{EA}{L}sc + \frac{12EI}{L^3}sc & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 & \frac{6EI}{L^2}c \\ -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L}c^2 - \frac{12EI}{L^3}s^2 & -\frac{EA}{L}sc + \frac{12EI}{L^3}sc & \frac{6EI}{L^2}s & \frac{EA}{L}c^2 + \frac{12EI}{L^3}s^2 & \frac{EA}{L}sc - \frac{12EI}{L^3}sc & \frac{6EI}{L^2}s \\ -\frac{EA}{L}sc + \frac{12EI}{L^3}sc & -\frac{EA}{L}s^2 - \frac{12EI}{L^3}c^2 & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{EA}{L}sc - \frac{12EI}{L^3}sc & \frac{EA}{L}s^2 + \frac{12EI}{L^3}c^2 & -\frac{6EI}{L^2}c \\ -\frac{6EI}{L^2}s & \frac{6EI}{L^2}c & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}s & -\frac{6EI}{L^2}c & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$