ERÄÄN ONNETTOMUUDEN ANALYSOINTI

Matti A Ranta
Ulf Holmlund

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 40
Nro 3, 2007, s. 7-14

TIIVISTELMÄ

Ajoneuvon tieltä suistuttua pyritään sen vauhti määrittämään maastosta löytyvien jälkien perusteella. Tällöin tulevat lähinnä kysymykseen jarrutusjäljet sekä kohta, jossa ajoneuvo on ryöstäytynyt tieltä, että kohta maastossa, johon ajoneuvo on päätynyt ilmalennon jälkeen. Kutsuttakoon näitä pisteitä lähtö- ja tulopisteeksi. Ajoneuvon massakeskipisteen liike näiden pisteiden välillä voidaan määrittää vinon heittoliikkeen eli heittoparaabelin kaavoilla, joissa ilmanvastus jätetään huomioon ottamatta. Probleema ei ole yksikäsitteisesti määrätty, ellei ole jotain kolmatta ehtoa käytettävissä. Jos kysytään, millä lähtökulmalla on lähtönopeudella minimi, saadaan ratkaisu ([2]), joka ei yleensä voi tulla kysymykseen. Jos tien geometriasta ei saada mitään vihjeitä lähtökulmasta, tutkijat olettavat tavallisesti, että lähtökulma on ollut nolla eli lentoonlähtö on tapahtunut vaakasuoralta tieltä. Tämä taas antaa usein liian suuren lähtönopeuden. Tarvittava lisäehto voidaan saada, jos lähtö- ja tulopisteen välillä on maastoeste, kuten toisen tien reuna tai iso kivi, jonka yli ajoneuvo on lentänyt. Jos ajoneuvo on lentäessään törmännyt puihin tai muihin esineisiin, kuten liikennemerkkeihin ja -opastimiin, saadaan niistä tarvittavaa lisätietoa ja probleema ratkeaa yksikäsitteisesti. Jos maahantulokulma onnistutaan määrittämään edes likimääräisesti, voidaan sen avulla laskea lentoonlähtökulma ja edelleen nopeus. Massiivisen kappaleen suhteellinen liike massakeskipisteensä ympäri on periaatteessa mahdollista myös määrittää, mutta sen alkuehtoja ei yleensä kyetä selvittämään.

HEITTOPARAABELIN LIIKEYHTÄLÖT

Tarkastellaan massapisteen liikettä ilmalennon aikana koordinaatistossa, jonka x-akseli on vaakasuorassa ja z-akseli pystysuoraan ylöspäin origon ollessa jossain sopivasti valitussa pisteessä. Massapiste lähtee lentoon lähtöpisteestä, jonka koordinaatit ovat (x_0, z_0), ja päätyy tulopisteeseen, jonka koordinaatit ovat (X, Z). Kirjoitetaan massapisteelle heittoparaabelin tunnettu yhtälö, jossa ilman vastus ja nosto on jätetty huomioon ottamatta, ([1], yhtälö (24.1))

$$x - x_0 = tN_0 \cos\alpha_0 \tag{1}$$

$$z - z_0 = tN_0 \sin\alpha_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 . \tag{2}$$

Tässä N_0 on lähtönopeus, α_0 lähtökulma sekä g maan vetovoiman kiihtyvyys.

Ratkaistaan aika yhtälöstä (1) ja sijoitetaan se yhtälöön (2), jolloin lentoparaabelin yhtälöksi saadaan

$$z - z_0 = (x - x_0)\tan\alpha_0 - \tfrac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{N_0^{\,2}}\left(1 + \tan^2\alpha_0\right) \ . \qquad (3)$$

Tämän yhtälön tulee olla voimassa koko lennon ajan aina loppupisteeseen (X, Z) saakka sekä kaikissa paraabelin välipisteissä.

RAJAPARAABELI (vertaa [2], s. 6)

Merkitään loppu- ja alkupisteiden pysty- ja vaakakoordinaattien välisiä eroja suureilla $\Delta z = Z - z_0$ ja $\Delta x = X - x_0$. Yhtälö (3) voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$\tan^2\alpha_0 - \frac{2N_0^2}{g\Delta x}\tan\alpha_0 + \frac{2N_0^2}{g\Delta x}\frac{\Delta z}{\Delta x} + 1 = 0 \ . \qquad (4)$$

Tämä on toisen asteen polynomi suureen $\tan\alpha_0$ suhteen ja sen ratkaisu on

$$\tan\alpha_0 = \frac{N_0^2}{g\Delta x} \pm \sqrt{\left(\frac{N_0^2}{g\Delta x}\right)^2 - 2\frac{\Delta z}{\Delta x}\frac{N_0^2}{g\Delta x} - 1} \ . \qquad (5)$$

Jos neliöjuuren sisällä oleva lauseke häviää, on olemassa vain yksi ratkaisu. Se johtaa pienimmän mahdollisen alkunopeuden lausekkeeseen

$$(N_0)_{\min} = \sqrt{g\Delta x\left[\frac{\Delta z}{\Delta x} + \sqrt{\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 + 1}\,\right]} \ . \qquad (6)$$

Siinä sisemmän neliöjuuren edessä tulee kysymykseen vain plusmerkki, koska N_0 on aina positiivinen reaalisuure. Sijoittamalla tämä lähtönopeus (6) takaisin lausekkeeseen (5) saadaan vastaava lähtökulma

$$(\alpha_0)_{\text{opt}} = \arctan\left[\frac{\Delta z}{\Delta x} + \sqrt{\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2 + 1}\,\right] \ . \qquad (7)$$

Jos lähtökulma on pienempi tai suurempi kuin optimikulma (7), tarvitaan aina minimiä (6) suurempi lähtönopeus, jotta massapiste voisi lentää pisteestä (x_0, z_0) pisteeseen (X, Z).

KOLMEN PISTEEN MÄÄRÄÄMÄ PARAABELI

Ratkaistaan kaavasta (3) lähtönopeus

$$N_0 = \sqrt{\frac{g}{2}\frac{(x-x_0)^2\left(1+\tan^2\alpha_0\right)}{(x-x_0)\tan\alpha_0-(z-z_0)}} \tag{8}$$

Tämä on voimassa paitsi loppupisteessä (X,Z) niin myös mielivaltaisessa välipisteessä (ξ,ζ). Koska lähtönopeus on tapauskohtainen vakio, seuraa siitä, että neliöjuuren alla kaavassa (8) oleva lauseke on myös vakio eli

$$\frac{g}{2}\frac{(X-x_0)^2\left(1+\tan^2\alpha_0\right)}{(X-x_0)\tan\alpha_0-(Z-z_0)} = \frac{g}{2}\frac{(\xi-x_0)^2\left(1+\tan^2\alpha_0\right)}{(\xi-x_0)\tan\alpha_0-(\zeta-z_0)} = \text{vakio}$$

Tästä voidaan lähtökulma ratkaista

$$\alpha_0 = \arctan\left[\frac{(\zeta-z_0)(X-x_0)^2-(Z-z_0)(\xi-x_0)^2}{(\xi-x_0)(X-x_0)\left[(X-x_0)-(\xi-x_0)\right]}\right] \tag{9}$$

Kun lähtökulma nyt tiedetään välipisteen (ξ,ζ) avulla, saadaan lähtönopeus kaavasta (8) sijoittamalla siihen lähtökulma α_0 kaavasta (9) sekä joko pisteen (X,Z) tai pisteen (ξ,ζ) koordinaatit.

LENTORADAN KALTEVUUS MIELIVALTAISESSA PISTEESSÄ

Derivoidaan yhtälö (3). Tällöin tulee kaltevuudelle lauseke

$$\frac{dz}{dx} = \tan\alpha = \tan\alpha_0 - g\frac{(x-x_0)}{N_0^2}\left(1+\tan^2\alpha_0\right) \tag{10}$$

Eliminoidaan tämän avulla yhtälöstä (3) jälkimmäinen termi eli lähtönopeus, jolloin saadaan

$$\tan\alpha + \tan\alpha_0 = 2\frac{z-z_0}{x-x_0} \tag{11}$$

Kaava tarkoittaa, että heittoparaabelin kahdessa mielivaltaisessa pisteessä olevien tangenttien kulmakertoimien summa on yhtä kuin kaksi kertaa näiden pisteiden välisen sekantin kulmakerroin. Jos tunnetaan jossain pisteessä tangentin kulmakerroin sekä koordinaattierot, voidaan kaavan (11) avulla laskea heittoparaabelin kaltevuuskulma mielivaltaisessa pisteessä, esim. lähtöpisteessä. Lähtönopeus saadaan sitten kaavasta (8).

ANALYSOITU ILMALENTO

Olkoon ajoneuvon ilmalennon tutkimuksissa todettu seuraavaa:

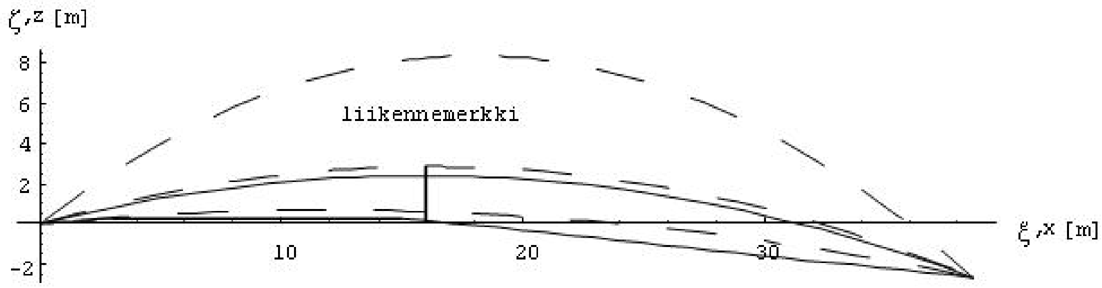
- Kokonaislentomatka eli lähtöpisteen ja tulopisteen vaakasuora ero on 38,60m
- Lähtöpisteen ja tulopisteen välinen pystysuora ero eli korkeusero on 2,67m.
- Paikaltaan pois ajetusta liikennemerkistä voidaan mitata, että 16m lähtöpisteestä ajoneuvo on ollut 2,40m lähtöpistettä korkeammalla.
- Liikennemerkin huipun korkeus on 3,1m korkeudella sen tyvestä.

Tehtävän lähtöarvot on esitetty Taulukossa 1, jossa on lisäksi esitetty liikennemerkin huippua ja sivutien etureunaa vastaavien pisteiden koordinaatit.

Taulukko 1. Laskelmien pohjana oleva lähtödata

Ilmalennon lähtöpiste	$x_0 = 0,00\,\mathrm{m}$	$z_0 = 0,00\,\mathrm{m}$
Ilmalennon loppupiste	$X = +38,60\,\mathrm{m}$	$Z = -2,67\,\mathrm{m}$
Välipiste liikennemerkissä	$\xi = +16,00\,\mathrm{m}$	$\zeta = +2,40\,\mathrm{m}$
Välipiste liikennemerkin huipussa	$\xi = +16,00\,\mathrm{m}$	$\zeta = +2,85\,\mathrm{m}$
Välipiste sivutien etureunassa	$\xi = +3,00\,\mathrm{m}$	$\zeta = +0,30\,\mathrm{m}$

Analyysissä ajoneuvon massa on keskitetty massakeskipisteeseen, jonka oletetaan kulkevan lähtöpisteestä loppupisteeseen jonkin edellä olevan välipisteen kautta. Kuvassa 1 on esitetty auton massakeskipisteen lentoparaabeli eri tapauksissa.



Kuva 1. Kuva lentoparaabelista T-risteyksessä sivutien yli maastoon lähtökulman eri arvoilla

Päätie kulkee x-akselin suuntaisesti vasemmalta oikealle ja sitä vastaan kohtisuorassa on sivutie (paksu musta viiva), jonka vieressä seisoo liikennemerkki.

Rajaparaabeli (ylin katkoviiva)

Kaavat (7), (6), (3) ja (10) tai (11) antavat rajaparaabelille arvot

$(\alpha_0)_{\mathrm{opt}} = 43,0°$	lähtökulma
$(N_0)_{\min} = 67,7\,\mathrm{km/h}$	lähtönopeus
$\zeta(\xi)_{\max} = 8,3\,\mathrm{m}$	lentää liikennemerkin yli
$\alpha_{\mathrm{tulo}} = -47,0°$	maahantulokulma

Matalin mahdollinen paraabeli (alin katkoviiva)

Matalin mahdollinen paraabeli saadaan, kun välipisteeksi otetaan sivutien reuna, jossa $\xi = +3,00\,\mathrm{m}$, $\zeta = +0,30\,\mathrm{m}$. Tällöin ajoneuvo lentää vielä sivutien yli eikä kieri sillä. Kaavat (9), (8), (3) ja (10) tai (11) antavat arvot

$(\alpha_0)_{\min} = 6,5°$	lähtökulma
$(N_0)_{\max} = 116,5\,\mathrm{km/h}$	lähtönopeus
$\zeta(\xi)_{\min} = +0,6\,\mathrm{m}$	osuu liikennemerkkiin kulmassa $\alpha = -2,2°$
$\alpha_{\mathrm{tulo}} = -14,2°$	maahantulokulma

Maaston geometriasta saadaan kulma $\alpha = \arctan\left(0,3/3,0\right) = 5,7°$. Kaava (8) antaisi nopeuden $121{,}1\,\mathrm{km/h}$, jolla ajoneuvo törmäisi sivutien reunaan, koska $\zeta(3,00\,\mathrm{m}) = +0,26\,\mathrm{m} < +0,30\,\mathrm{m}$. Todetaan, että sekantin käyttäminen lähtösuuntana johtaa $4,6\,\mathrm{km/h}$ liian suureen lähtönopeuteen ja sivutien reunaan törmäämiseen.

Liikennemerkin huippuun osuva paraabeli (keskimmäinen katkoviiva)

Kun on asetettu $\xi = +16,00\,\mathrm{m}$ ja $\zeta = +2,85\,\mathrm{m}$, saadaan kaavasta (9) lähtökulma, kaavasta (10) tai (11) muut kulmat sekä kaavasta (8) lähtönopeus

$\alpha_0 = 19,5°$	lähtökulma
$\alpha = +0,2°$	liikennemerkkiin osumiskulma
$\alpha_{\mathrm{tulo}} = -26,2°$	maahantulokulma
$N_0 = 80,9\,\mathrm{km/h}$	lähtönopeus

Liikennemerkin kautta kulkeva paraabeli (ehyt viiva)

Tutkimuksissa kerätyn datan perusteella todennäköinen törmäyspiste liikennemerkissä on pisteessä $\xi = +16,00\,\mathrm{m}$ ja $\zeta = +2,40\,\mathrm{m}$. Tällöin kaavasta (9) saadaan lähtökulma, kaavasta (10) tai (11) muut kulmat sekä kaavasta (8) lähtönopeus

$\alpha_0 = 17,0°$	lähtökulma
$\alpha = 0,0°$	liikennemerkkiin osumiskulma
$\alpha_{tulo} = -23,9°$	maahantulokulma
$N_0 = 84,7\,\text{km/h}$	lähtönopeus

MITÄ VOIDAAN LASKEA MAAHANTULOKULMASTA?

Tulopisteeseen jää useinkin enemmän jälkiä kuin lähtöpisteeseen. Sen tähden maastoa tulopisteessä kannattaa tutkia erityisellä huolella. On syytä muistaa, että tulopiste ei aina ole siinä, mihin ajoneuvo ilmalennon jälkeen on pysähtynyt maastossa. Oletetaan, että maahantulokulman on todettu olevan välillä $-25° \leq \alpha_{tulo} \leq -15°$. Kaavasta (11) voidaan laskea lähtökulman olevan välillä $+18,2° \geq \alpha_0 \geq +7,4°$ jolloin kaava (8) antaa nopeushaarukan $82,8\,\text{km/h} \leq N_0 \leq 112,1\,\text{km/h}$.

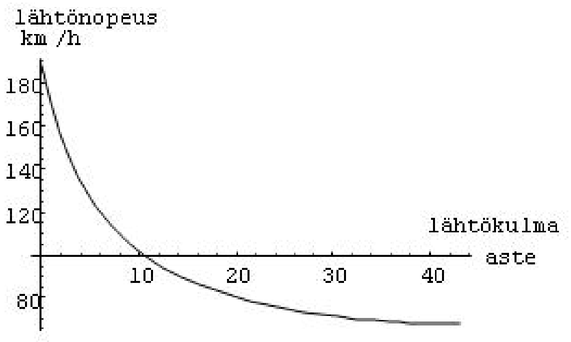
YHTEENVETO ILMALENNOSTA

Edellä esitetyn perusteella voidaan tehdä seuraavanlainen yhteenveto. Rajaparaabelin optimilähtökulma on $(\alpha_0)_{opt} = 43,0°$ ja sitä vastaava lähtönopeus on $(N_0)_{min} = 67,7\,\text{km/h}$. Lähtökulma on niin suuri, että tämä tapaus ei yleensä voine tulla kysymykseen. Jotta ajoneuvo ei törmäisi tien reunaan eikä kierisi sivutiellä, tulee lentoonlähtökulman olla vähintään $(\alpha_0)_{min} = 6,5°$ joka antaa lähtönopeuden ylärajan $N_{max} = 116,5\,\text{km/h}$. Liikennemerkin huippuun osuu lentoparaabeli $\alpha_0 = 19,5°$. Se antaa lähtönopeuden alarajan $N_{min} = 80,9\,\text{km/h}$. Näin ollen realistinen haarukka on

lähtökulma	$6,5° \leq \alpha_0 \leq 19,5°$
lähtönopeus	$116,5\,\text{km/h} \geq N_0 \geq 80,9\,\text{km/h}$

Välipiste eli todennäköinen törmäyspiste liikennemerkissä antaa lähtökulman $\alpha_0 = 17,0°$, joka on realistinen ja jää haarukkaan. Laskelmien mukainen lähtönopeus on tällöin $N_0 = 84,7\,\text{km/h}$. Liikenneopastimessa olevat jäljet ja opastimen sinkoutuminen pois paikaltaan viittaavat siihen, että auto on törmännyt opastimeen ei-negatiivisessa kulmassa. Jos sivutietä ei olisi välissä ja ilmalento tapahtuisi vaakasuoraan eli $\alpha_0 = 0,0°$, kuten tutkimuksissa tavallisesti oletetaan, olisi lähtönopeus kaavan (8) mukaan ollut $N_0 = 188,4\,\text{km/h}$.

Kuten kuvasta 2 nähdään on heittoparaabelin lähtökulmalla erittäin suuri vaikutus lähtönopeuteen varsinkin pienillä lähtökulman arvoilla ja se tulisi määrittää tarkasti.



Kuva 2. Lähtönopeus lähtökulman funktiona Taulukon 1 tapauksessa

JARRUTUKSEN VAIKUTUS

Jos ajoneuvoa on jarrutettu ennen ilmalentoa, voidaan jarrutuksen vaikutus ottaa huomioon tunnetulla kaavalla

$$V = \sqrt{N_0^2 + 2\mu g \Delta s} \qquad (12)$$

Lähteestä [3, s. 410] saadaan auton renkaalle Taulukon 2 mukaiset kitkakertoimen μ arvot eri tilanteissa.

Taulukko 2. Kitkakertoimen arvoja

kuiva betoni/asfaltti	0,3 – 0,7
kuiva betoni/asfaltti, lukkojarrutus	0,4
jäinen betoni/asfaltti	0,05
märkä betoni/asfaltti, sileä	0,1 – 0,15
märkä betoni/asfaltti, epätasainen	0,35 – 0,5
pehmeä nurmi, märkä ruoho	0,2
kova lumi	0,1 – 0,15

Jos nopeus ilmalennon alussa eli jarrutuksen jälkeen on ollut $N_0 = 84,7\,\mathrm{km/h}$, niin ennen $\Delta s = 20\,\mathrm{m}$ jarrutusta jäisellä asfaltilla ($\mu = 0,05$) on nopeus ollut $V = 86,2\,\mathrm{km/h}$. Vastaavasti kuivalla asfaltilla lukkojarrutuksessa ($\mu = 0,4$) nopeus ennen jarrutusta on ollut $V = 96,0\,\mathrm{km/h}$. Voidaan todeta, että keliolosuhteilla ja jarrutusmatkoilla on myös suuri vaikutus nopeuksiin.

LOPPUPÄÄTELMÄ

Tässä työssä on osoitettu miten ns. välipisteen eli kolmannen ehdon avulla lähtönopeus voidaan mittaustulosten puitteissa tarkasti määrittää. Suurin vaikeus lienee aina jälkien oikea tulkinta maastossa. Jälkien virheellinen tulkinta johtaa helposti lähtökulman väärään arvoon ja sitä kautta lähtönopeuden erittäin suureen virheeseen. Nollakulman käyttö kolmantena ehtona antaa useimmiten liian suuren lähtönopeuden.

KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] M. Sergelius ja E. Niskanen, *Teknillinen Mekaniikka*, III osa Dynamiikka. Werner Söderström Osakeyhtiö, 1953, s. 535.

[2] Matti A Ranta, Raimo von Hertzen ja Ulf Holmlund, *Kuulantyönnön matemaattinen malli*. TKK Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto, Laskennallinen dynamiikka, Otaniemi 1998/4, s. 10.

[3] S. Laine, J. Hoffren ja K. Renko, *Lentokoneen aerodynamiikka ja lentomekaniikka*. WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki, 2006.

Matti A Ranta , TkT, em. prof.
Teknillinen korkeakoulu, Matematiikan laitos, PL 1100, 02015 TKK,
email: matti.ranta@tkk.fi

Ulf Holmlund, TkL
email: ulf.holmlund@msoynet.com