

# RISTIKKOPALKKIEN STABIILIUDESTA

Juha Hartikainen  
Paavo Hassinen  
Reijo Kouhia  
Timo Manninen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 40  
No. 2, 2007 s. 48–60

**Tiivistelmä:** Artikkelissa tarkastellaan ristikkopalkkien kuormankantokykyä stabiiliuden menetyksen suhteen. Tavallisesti huomiota kiinnitetään vain puristetun yläpaarteeseen ja yksittäisen puristetun diagonaalin/vertikaalin nurjahdukseen. Riippuen ristikon päämitoista erilaiset nurjahdusmuodot ovat mahdollisia. Erityistä huomiota kiinnitetään alapaarteestaan sivusuunnassa tukemattomien ristikoiden analysointiin. Yksi mahdollinen stabiiliuden menetyksimuoto on alapaarteeseen siirtyminen sivulle puristetun diagonaalisauvan nurjahtaessa jäykkänä kappaleena. Ilmiötä tarkastellaan yksinkertaisen sauva-jousimallin avulla johtamalla kriittisen kuorman lauseke ja tutkimalla jälkikriittisen tilan stabiiliutta. Lisäksi esitettyjen yksinkertaisten mallien tarkkuutta tutkitaan elementtimenetelmällä tehtyjen vertailulaskelmien avulla.

## JOHDANTO

Ristikot ovat yleisiä rakenne-elementtejä niiden suuren kuormankantokyvyn ja keveyden vuoksi. Ristikoilla päästään pitkiin jännemittoihin, jolloin rakenteesta ja rakenneosista tulee hoikkia. Tämän seurauksena yksittäisten sauvojen ja koko rakenteen stabiiliustarkastelu on välttämätön. Poikkileikkaukseltaan hoikkien massiivi- ja I-palkkien kiepahdus voidaan tulkita puristuslaipan nurjahduksena. Olennainen kiepahdusmuoto on rakenteen siirtyminen heikompaan, kuormitustasoa vastaan kohtisuoraan suuntaan ja kiertyminen pituusakselin ympäri.

Tasomaisten ristikoiden tapauksessa kiepahdusta ei voida tulkita yksistään puristetun yläpaarteeseen nurjahduksena. Yläpaarteeseen lisäksi osa diagonaalisauvoista on puristettuja. Mikäli paarteiden antama sivuttaistuki on heikko, voi rakenteen stabiiliuden menetys tapahtua puristetun diagonaali- tai vertikaalisauvan jäykän kappaleen nurjahduksena. Tukemalla yläpaarre sivusuunnassa riittävästi ei jäykän kappaleen nurjahdusta tapahdu. Mikäli vain yläpaarre on sivusuunnassa tuettu ja alapaarteeseen antama sivuttaistuki on heikko, ohjaa alapaarteeseen siirtyminen sivulle puristavan voiman vaikutussuoraa siten, että se kulkee puristussauvan päätepisteiden kautta.

## PURISTUSSAUVAN NURJAHDUS

### Nurjahdus jäykkänä kappaleena

Ajatellaan ristikon puristettu diagonaali- tai vertikaalisauva irroitetuksi rakenteesta ja kuvataan paarteiden antamaa jäykkyyttä lineaarisilla kierre- ja translaatiojousilla, kuva 1a. Otaksutaan, että sauva on aksiaalisesti täysin jäykkä ja että sauvan taivutusnurjahduskuorma ei ole määräävä.

Kuvan 1a systeemin kokonaispotentiaalienergian lauseke on

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[ k_1(w_c - \frac{1}{2}H \sin \phi)^2 + k_2(w_c + \frac{1}{2}H \sin \phi)^2 + (c_1 + c_2)\phi^2 \right] - NH(1 - \cos \phi), \quad (1)$$

missä  $w_c$  on vertikaalin keskipisteen siirtymä  $z$ -koordinaation suuntaan ja  $\phi$  on kiertymä  $x$ -akselin ympäri. Ottamalla käyttöön merkinnät  $k_1 = \alpha_1 k_{\text{ref}}$ ,  $k_2 = \alpha_2 k_{\text{ref}}$ ,  $c_1 = \beta_1 k_{\text{ref}} H^2$  ja  $c_2 = \beta_2 k_{\text{ref}} H^2$ , missä  $\alpha_i$  ja  $\beta_i$  ovat dimensiottomia jäykkyyssparametreja, sekä määrittelemällä dimensioton siirtymä  $\delta = w_c/H$  ja kuormaparametri  $\lambda = N/(k_{\text{ref}}H)$  saadaan kokonaispotentiaalienergian lauseke ilmaistua dimensiottomin suurein seuraavasti

$$\frac{\Pi}{k_{\text{ref}}H^2} = \frac{1}{2} \left[ \alpha_1(\delta - \frac{1}{2} \sin \phi)^2 + \alpha_2(\delta + \frac{1}{2} \sin \phi)^2 + (\beta_1 + \beta_2)\phi^2 \right] - \lambda(1 - \cos \phi). \quad (2)$$

Potentiaalienergian stationaarisyysehdestä saadaan tasapainoyhtälöt

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\delta - \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \phi = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\delta \cos \phi + \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \phi \cos \phi + (\beta_1 + \beta_2)\phi - \lambda \sin \phi = 0. \quad (4)$$

Ratkaisemalla ylemmästä yhtälöstä (3) siirtymä  $\delta$  ja sijoittamalla se tasapainoyhtälöön (4) saadaan

$$\lambda = \alpha \cos \phi + \beta \frac{\phi}{\sin \phi}, \quad (5)$$

missä on käytetty lyhennysmerkintöjä

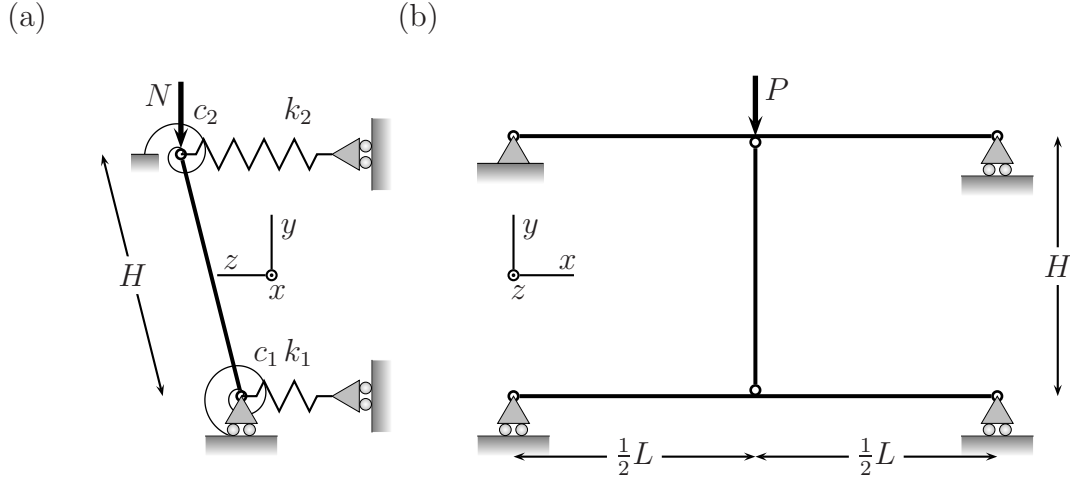
$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2. \quad (6)$$

Tasapainoyhtälöiden (3) ja (4) ratkaisu on triviaali primaaripolku ( $\delta = \phi = 0$ ) sekä yhtälön (5) ( $\phi\lambda$ -tasossa) määrittelemä sekundaaripolku. Primaaripolku on stabiili origosta bifurkaatio- eli haarautumispisteeseen  $(0, \lambda_{\text{bif}})$ ,  $\lambda_{\text{bif}} = \alpha + \beta$  saakka.

Häiriöherkkyyden arviointi on oleellinen osa stabiiliusherkkien rakenteiden analyysointia. Tämän vuoksi tutkitaan sekundaaripolun stabiiliutta haarautumispisteen läheisyydessä. Tutkittavan rakennemallin haarautuminen on symmetrinen, ja voidaan osoittaa, että haarautumispiste on stabiili, mikäli epäyhtälö

$$\beta > 3\alpha \quad (7)$$

toteutuu. Fysikaalisesti tulkittuna haarautumispiste on stabiili, mikäli paarsauvojen vääntöjäykkyys on riittävän suuri suhteessa taivutusjäykkyyteen. Mikäli rakennemallissa esiintyy symmetrinen epästabiili haarautuminen, muuttuu mallin bifurkaatiopiste



Kuva 1: Ristikon puristetun vertikaalisauvan stabiiliusmalli (a) sekä yksinkertainen ristikkopalkki (b). Vertikaalisauva liittyy paarteisiin sarananivelten välityksellä.

rajapisteeksi rakenteen alkuvinouksien ja muiden epätäydellisyyksien vuoksi. Rajapisteesä rakenteella on kuormankantokyvyn maksimi, kuva 2. Symmetrisen epästabiilin haarautumispisteen tapauksessa häirityn rakenteen rajapisteen riippuvuus muotovirheparametrasta, esim. alkuvinoudesta  $\phi_0$ , noudattaa universaalia 2/3-potenssilakia [1]

$$\lambda_{\max} = \lambda_{\text{bif}}(1 - a\phi_0^{2/3}), \quad (8)$$

missä  $\lambda_{\text{bif}} = \alpha + \beta$  on alkuvirheettömän rakenteen kriittinen bifurkaatiokuorma ja  $a$  on rakennemallista riippuva vakio.

Tarkastellaan ehdon (7) vaatimusta kuvan 1b ristikon tapauksessa. Oletetaan ylä- ja alapaarre identtisiksi ( $EI_y^{\text{yp}} = EI_y^{\text{ap}} = EI_y$ ,  $GI_t^{\text{yp}} = GI_t^{\text{ap}} = GI_t$ ). Mallin jousivakioiksi saadaan

$$k_1 = k_2 = \frac{48EI_y}{L^3}, \quad c_1 = c_2 = \frac{4GI_t}{L}, \quad (9)$$

missä käytetyt merkinnät ovat ilmeiset. Mikäli jäykkyyden viitearvoksi valitaan

$$k_{\text{ref}} = 48\frac{EI_y}{L^3}, \quad (10)$$

saadaan dimensiottomien jäykkyydevakioiden arvoiksi

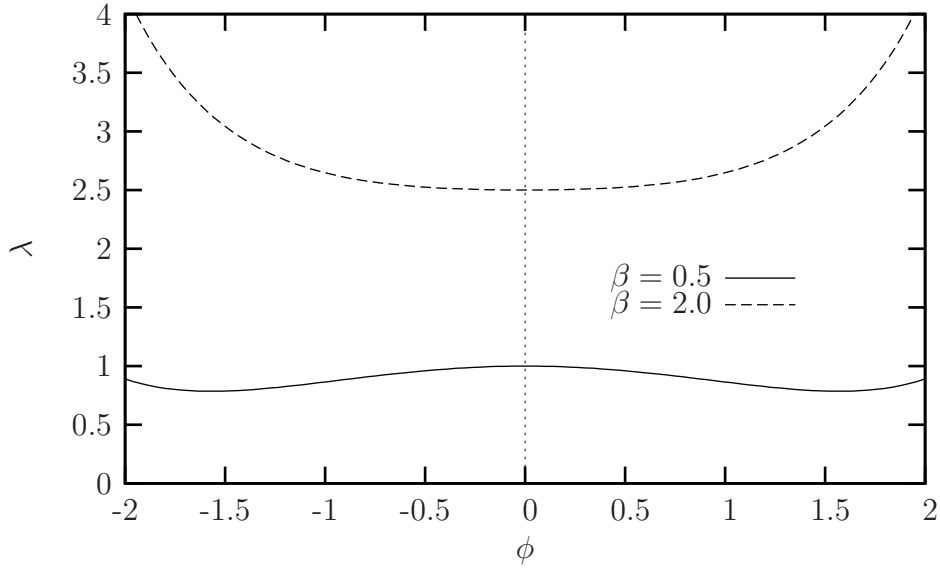
$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \beta = \frac{1}{6} \frac{GI_t}{EI_y} \left( \frac{L}{H} \right)^2. \quad (11)$$

Täten ehto (7) lausuttuna paarteiden taivutus- ja vääntöjäykkyyksien sekä ristikon korkeuden ja pituuden avulla on

$$\frac{1}{9} \frac{GI_t}{EI_y} \left( \frac{L}{H} \right)^2 > 1. \quad (12)$$

Homogeenisesta isotrooppisesta aineesta valmistetuille paarteille ehto voidaan edelleen kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{18(1+\nu)} \frac{I_t}{I_y} \left( \frac{L}{H} \right)^2 > 1, \quad (13)$$



Kuva 2: Kuvan 1a mallin jälkikriittisiä tasapainopolkuja ( $\alpha = 0.5$ ).

missä  $\nu$  on materiaalin Poissonin vakio. Havaitaan, että jälkikriittinen tila on stabiili pitkäjänteisillä hoikilla ristikkopalkkeilla. Tämä on fysikaalisesti mielekäs tulos, sillä pitkällä jänneväleillä alapaarteen sivuttaistuki on merkityksetön ja puristettujen vertikaali/diagonaalisauvojen tuki muodostuu pääasiassa ylapaarteen vääntöjäykkyydestä. Kuitenkin esimerkiksi puuristikoiden on suurempi todennäköisyys epästabiiliin jälkikriittiseen käyttäytymiseen puun alhaisen vääntöjäykkyyden vuoksi.

## YKSINKERTAINEN RISTIKKOPALKKI

### Palkkiteorian mukainen kiepahdustarkastelu

Tarkastellaan kuvan 1b mukaista yksinkertaista ristikkopalkkia. Otaksutaan ristikon toimivan kuten poikkileikkaukseltaan hoikka palkki. Sovelletaan sivusuunnassa tukemattoman palkin kiepahduskuorman määrittämiseen lähteen [2] kaavaa (6-37)

$$P_{kr,k} = 16.94 \frac{\sqrt{B_y C}}{L^2} \left( 1 - 0.87 \frac{H}{L} \sqrt{\frac{B_y}{C}} \right), \quad (14)$$

missä  $B_y = EI_y^{yp} + EI_y^{ap}$  on ristikon poikittainen taivutusjäykkyys ja  $C$  vääntöjäykkyys. Jättämällä paarteiden omat vääntöjäykkyydet huomioimatta voidaan ristikon vääntöjäykkyydelle johtaa lauseke

$$C = 96 \frac{EI_y^{yp} EI_y^{ap}}{EI_y^{yp} + EI_y^{ap}} \left( \frac{H}{L} \right)^2. \quad (15)$$

Mikäli paarteet ovat identtiset, saadaan kiepahduskuorman lausekkeeksi

$$P_{kr,k} = 136,5 \frac{H EI_y}{L^2}. \quad (16)$$

## Vertikaalin taivutusnurjahdus

Vertikaalisauvan kriittiselle kuormalle taivutusnurjahduksen suhteen voidaan kirjoittaa

$$N_{\text{kr,tn}} = \eta\pi^2 \frac{EI_V}{H^2}, \quad (17)$$

missä  $EI_V$  on puristussauvan taivutusjäykkyys määräävään suuntaan ja  $\eta$  on sauvan päiden kiinnitysasteesta riippuva dimensioton vakio.

## Vertikaalin nurjahdus jäykkänä kappaleena

Edellisen luvun analyysin perusteella on jäykän kappaleen siirtymää vastaava nurjahduskuorma

$$N_{\text{kr,jkn}} = (\alpha + \beta)k_{\text{ref}}H. \quad (18)$$

Ottamalla huomioon valinta (10) on vertikaalin nurjahdus jäykkänä kappaleena määräävä, kun

$$N_{\text{kr,jkn}} < N_{\text{kr,tn}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{EI_y}{EI_V} < \frac{\eta\pi^2}{48(\alpha + \beta)} \left(\frac{L}{H}\right)^3 \quad (19)$$

Mikäli paarteiden aiheuttamaa sivuttaistukea ei ole, (esim. alapaarre ei anna sivuttaistukea) on jäykkyysvakiolla  $\alpha$  arvo  $\alpha = 0$ . Ottamalla huomioon yhtälö (11<sub>2</sub>) ja yleistäen<sup>1</sup>

$$\beta = \beta^* \frac{GI_t}{EI_y} \left(\frac{L}{H}\right)^2, \quad (20)$$

saadaan sivuttaistukemattomalle tapaukselle ehtoyhtälön (19) vastine

$$\frac{GI_t}{EI_V} < \frac{\eta\pi^2}{48\beta^*} \left(\frac{L}{H}\right). \quad (21)$$

Jotta vertikaalin taivutusnurjahdus olisi kriittinen, on paarteilla oltava riittävän suuri vääntö- ja/tai poikittainen taivutusjäykkyys.

Mikäli kuvan 1b ristikon paarteet otaksutaan identtisiksi ja vertikaalisauva aksiaalisesti venymättömäksi, on vertikaalin sauvavoima  $N = P/2$ . Täten vertikaalin nurjahdukseen liittyvien kriittisten kuormien arvoiksi saadaan

$$P_{\text{kr,tn}} = 2\eta\pi^2 \frac{EI_V}{H^2}, \quad (22)$$

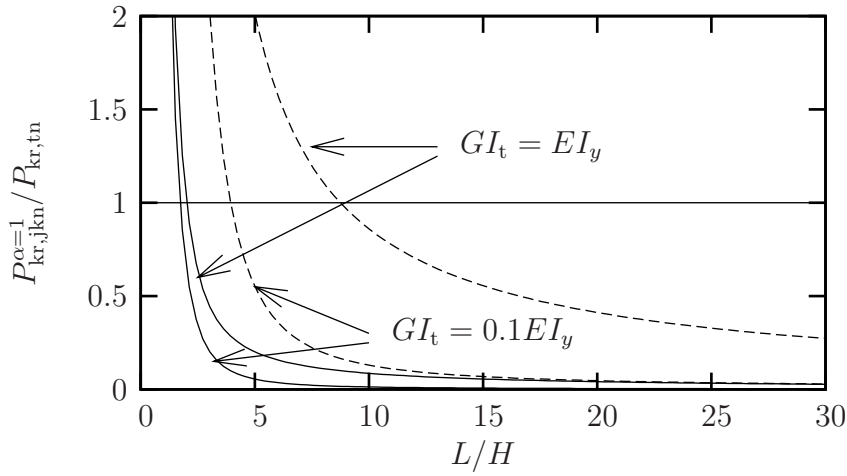
$$P_{\text{kr,jkn}} = 48 \frac{H}{L} \frac{EI_y}{L^2} + 16 \frac{GI_t}{HL} = 48 \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{GI_t}{EI_y} \left(\frac{L}{H}\right)^2 \right] \frac{H}{L} \frac{EI_y}{L^2}. \quad (23)$$

Käytännössä yläpaarre tuetaan aina sivuttaissuunnassa. Tällöin  $\alpha_2 = \infty$ , joten  $\alpha = 1$  ja kiertojousvakio  $\beta$  on sama kuin yhtälössä (11<sub>2</sub>) olettaen, että paarteet ovat identtiset. Täten kriittinen kuorma  $P_{\text{kr,jkn}}$  voidaan laskea kaavasta

$$P_{\text{kr,jkn}}^{\alpha=1} = 96 \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{GI_t}{EI_y} \left(\frac{L}{H}\right)^2 \right] \frac{H}{L} \frac{EI_y}{L^2}. \quad (24)$$

---

<sup>1</sup> $\beta^*$  on dimensioton kerroin.



Kuva 3: Yläpaarteestaan sivusuunnassa tuetun kuvan 1b mukaisen ristikon kriittinen kuorma  $P_{kr,jkn}^{\alpha=1}$  suhteessa vertikaalin taivutusnurjahdukseen  $P_{kr,tn}$ . Suhde  $\gamma = EI_y/EI_v = 1$  (ehyt viiva),  $\gamma = 10$  (katkoviiva). Paarteiden vääntö- ja taivutusjäykkyyksille otaksutaan:  $GI_t = EI_y$  (ylempi käyrä),  $GI_t = 0.1EI_y$  (alempi käyrä). Kiinnitysasteelle  $\eta$  on otaksuttu arvo 1.

Kirjoitetaan vielä kaava (24) taivutusnurjahduksen (22<sub>1</sub>) suhteen vertailukelpoiseen muotoon

$$P_{kr,jkn}^{\alpha=1} = 96\gamma \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{GI_t}{EI_y} \left( \frac{L}{H} \right)^2 \right] \left( \frac{H}{L} \right)^3 \frac{EI_v}{H^2}, \quad (25)$$

missä  $\gamma = EI_y/EI_v$ . Kaavojen (25) ja (22) antamien arvioiden suhde on piirretty kuvaan 3 jäykkyyssuhteen  $\gamma$  arvoilla  $\gamma = 1$  ja  $\gamma = 10$ .

## Numeerinen analyysi

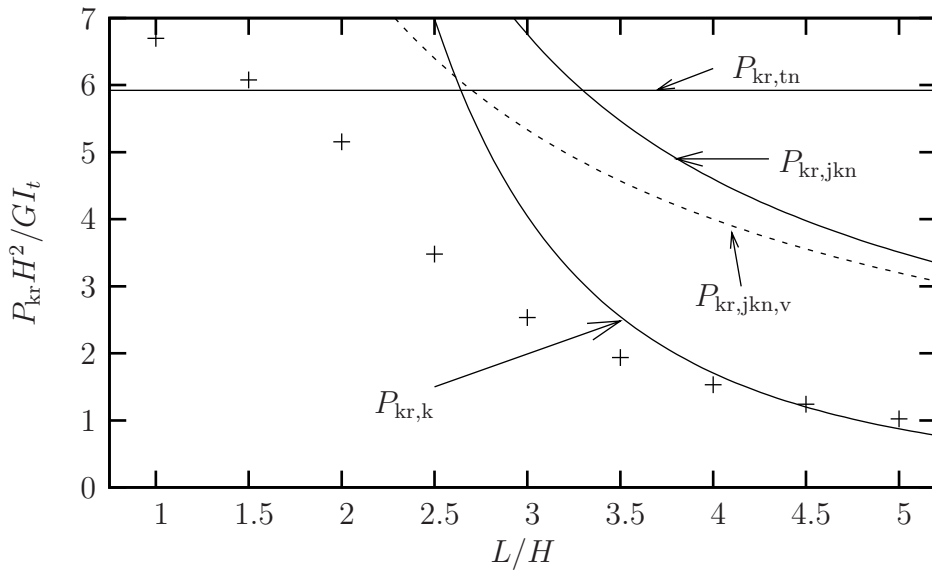
Edellä johdettujen kaavojen tarkkuutta on tutkittu laskemalla alkumuodon suhteen linearisoitu stabiiliusominaisarvottehtävä numeerisesti elementtimenetelmällä. Rakenne on jaettu 50 palkkielementtiin (paarteet 20+20 ja vertikaali 10 elementtiä), ja ominaisuuksille on käytetty seuraavia arvoja:  $E = 200$  GPa,  $G = E/2$ ,  $H = 1$  m; paarteet:  $A = 2 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>,  $I_z = 7 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>,  $I_y = 4 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>,  $I_t = 10^{-5}$  m<sup>4</sup>; vertikaali:  $A = 10^{-3}$  m<sup>2</sup>,  $I_v = I_y = I_z = 1,5 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>,  $I_t = 2 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>. Ristikkopalkin pituutta vaihdeltiin välillä  $L = 1 \dots 8$  m.

Kuvassa 4 on esitetty sivusuunnassa tukemattoman ristikkopalkin numeerisesti laskettu kriittinen kuorma sekä yhtälöiden (16), (22) ja (23) antamat arviot. Kuvassa on esitetty lisäksi yhtälöstä (23) yksinkertaistettu muoto

$$P_{kr,jkn,v} = 16 \frac{GI_t}{HL}, \quad (26)$$

jossa alapaarteiden taivutuksesta aiheutuva termi on jätetty pois.

Kuten kuvasta 4 voidaan havaita, on vertikaalin taivutusnurjahdus määräävä lyhyillä



Kuva 4: Yläpaarteestaan sivusuunnassa tukemattoman kuvan 1b mukaisen ristikon kriittinen kuorma  $P_{kr}$ . Elementtimenetelmätulokset on merkitty symbolilla +.

jännemitoilla ( $L/H \lesssim 2$ ).<sup>2</sup> Vertikaalin kiepahdus jäykkänä kappaleena ei ole tässä yksinkertaisessa esimerkkitapauksessa määräävä. Kiepahduskaavan (16) antama tulos on sopusoinnussa numeeristen tulosten kanssa pitkillä jännemitoilla, mutta välialueella ( $2 \lesssim L/H \lesssim 4$ ) yksinkertaisten käsinlaskukaavojen tulokset ovat reilusti “epävarmalla” puolella. Tämä todennäköisesti johtuu siitä, että vertikaalisauva ei nurjahda täysin jäykkänä vaan paarteiden äärellisestä vääntöjäykkyydestä aiheutuu vertikaaliin taivutusta.

Parempi vastaavuus käsinlaskukaavojen ja numeeristen tulosten kesken saadaan mikäli yläpaarre tuetaan sivusuunnassa. Numeerisista tuloksista havaittiin, että pitkillä jännemitoilla alapaarteen kiepahdus on kriittinen. Vertikaali antaa kuitenkin riittävän sivusuuntaisen ja kiertymätuennan, jolloin kriittinen kuorma voidaan määrittää pistekuorman kuormittaman yksiaukkoisen palkin toisena kriittisenä kiepahduskuormana. Tämä kriittinen kuorma voidaan määrittää ehdosta (vertaa lähteen [2] tapaukseen luvussa 6.5)

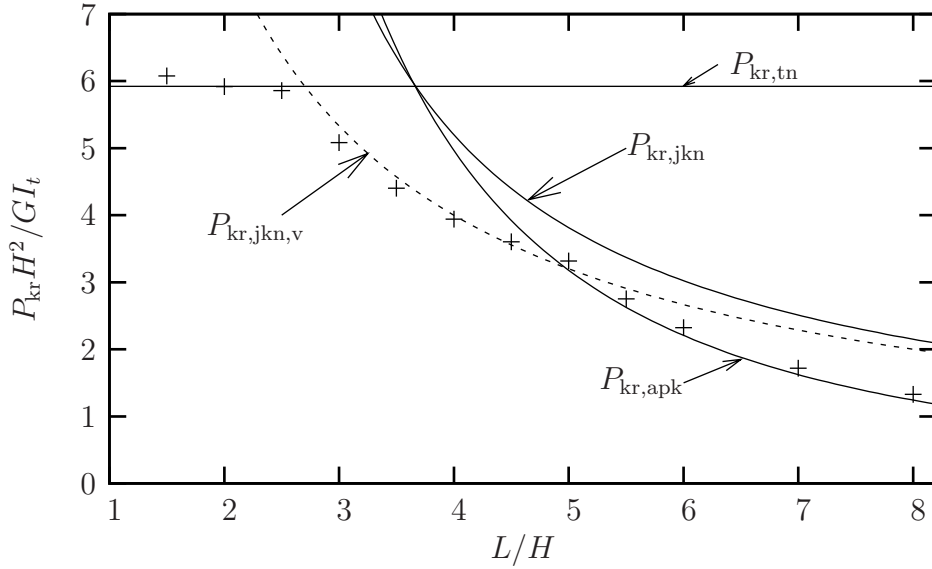
$$J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8}\beta_2 L^2\right) = 0, \quad \text{missä} \quad \beta_2 = \frac{N}{2\sqrt{EI_y GI_t}}$$

ja  $J_{\frac{1}{4}}$  on kertalukua 1/4 oleva Besselin funktio. Nollakohta löytyy arvolla  $\frac{1}{8}\beta_2 L^2 = 2,776$ , ja kriittiseksi kuormaksi saadaan

$$P_{kr,apk} = 88,83 \frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{L^2}. \quad (27)$$

Yläpaarteestaan sivusuunnassa tuetulla ristikkopalkilla on siten kolme kriittistä muotoa: vertikaalin taivutusnurjahdus lyhyillä jännemitoilla ( $L/H \lesssim 3$ ), alapaarteen kiepah-

<sup>2</sup>Lyhyillä palkeilla ero elementtimenetelmän ja kaavan (22) antaman tuloksen välillä johtuu siitä, että kaavassa (22) otaksuttiin vertikaalin puristavaksi voimaksi  $P/2$ . Tarkempi lauseke olisi tietenkin  $P/(1 + EI_{y,ap}/EI_{y,yp} + EI_{y,yp}H/(EA_v L^3))$ .



Kuva 5: Yläpaarteestaan sivusuunnassa tuetun kuvan 1b mukaisen ristikon kriittinen kuorma  $P_{kr}$ . Elementtimenetelmätulokset on merkitty symbolilla +.

dus pitkällä jännemitoilla ( $L/H \gtrsim 5$ ) ja vertikaalin kiepahdus liki jäykkänä kappaleena välialueella ( $3 \lesssim L/H \lesssim 5$ ).

## ANSAS

### Kahden vapausasteen malli

Tarkastellaan seuraavassa kuvassa 6 esitetyn yksinkertaisen ansaksen kriittisen kuorman määrittystä. Yksinkertaistetussa kahden vapausasteen  $(\phi, \psi)$  mallissa vertikaalisauva otaksutaan täysin jäykäksi ja vetotangot venymättömiksi.

Systeemin kokonaispotentiaalienergian lauseke on

$$\Pi = \frac{1}{2} [c\psi^2 + kH^2(\sin \psi - \sin \phi)^2] - P [H(\cos \phi - \cos \psi) + h(1 - \cos \psi)], \quad (28)$$

missä translaatio- ja kiertojousen jousivakiot ovat  $k = 48EI_y/L^3$  ja  $c = 4GI_t/L$  kuvaten palkin antamaa sivuttais- ja kiertojäykkyyttä. Tasapainoyhtälöiksi saadaan

$$c\psi + kH^2(\sin \psi - \sin \phi) \cos \psi - P(H + h) \sin \psi = 0, \quad (29)$$

$$kH^2(\sin \phi - \sin \psi) \cos \phi + PH \sin \phi = 0. \quad (30)$$

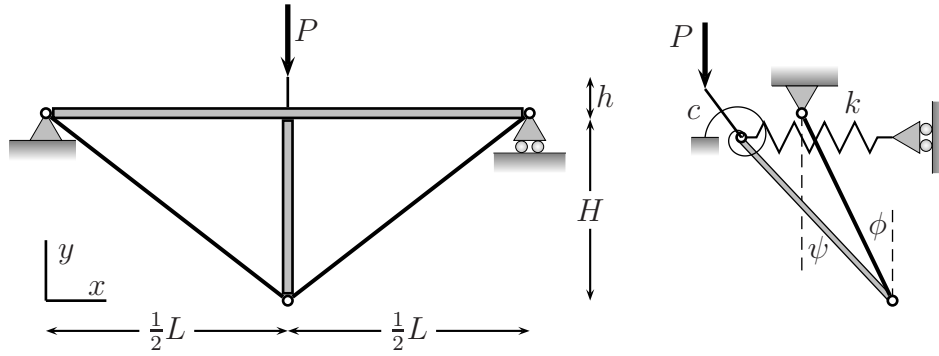
Primaaripolulla  $\phi = \psi = 0$  saadaan rakenteen jäykkyyismatriisiksi

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \partial^2 \Pi / \partial \psi^2 & \partial^2 \Pi / \partial \phi \partial \psi \\ \partial^2 \Pi / \partial \psi \partial \phi & \partial^2 \Pi / \partial \phi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c + kH^2 - P(H + h) & -kH^2 \\ -kH^2 & kH^2 + PH \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Merkitsemällä  $P = \lambda kH$ ,  $\alpha = c/kH^2$  ja  $\beta = h/H$  saadaan kriittiselle kuormalle arvo

$$P_{kr} = \lambda_{kr} kH^2, \quad \text{missä} \quad \lambda_{kr} = \frac{\alpha - \beta}{2(1 + \beta)} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\alpha(1 + \beta)}{(\alpha - \beta)^2}} \right). \quad (32)$$





Kuva 6: Ansas ja sen kahden vapausasteen malli.

Mikäli palkin kiertojäykkyys on pieni suhteessa poikittaiseen taivutusjäykkyyteen ( $\alpha \ll 1$ ), saadaan kriittisen kuormaparametrin arvoksi likimäärin

$$\lambda_{\text{kr}} \approx \pm \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \beta}}. \quad (33)$$

Mikäli kuorma sijaitsee palkin neutraaliakselilla ( $\beta = 0$ ) kriittisen kuorman arvoksi saadaan

$$P_{\text{kr}} \approx 8 \frac{\sqrt{3EI_y GI_t}}{L^2} \approx 13,86 \frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{L^2}. \quad (34)$$

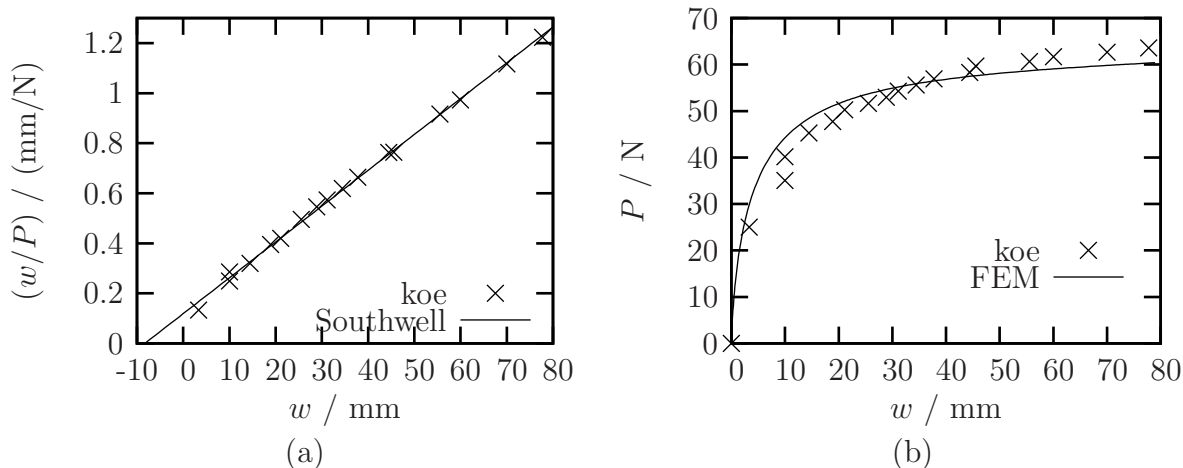
### Vertailu numeeriseen ratkaisuun

Edellisessä luvussa esitetyn yksinkertaisen kahden vapausasteen mallin antamia tuloksia on vertailtu elementtimenetelmällä saatuihin tuloksiin. Rakenne jaettiin tasavälisesti 62:een elementtiin (palkki 40, vertikaali 20 ja vetosauvat 2 elementtiä). Mittoina käytettiin rakenteiden mekaniikan laboratoriossa valmistetun koivupuisen ansaksen arvoja:  $L = 930$  mm,  $H = 360$  mm. Palkki on poikkileikkaukseltaan T:n muotoinen:  $A = 88$  mm<sup>2</sup>,  $I_y = 3653$  mm<sup>4</sup>,  $I_z = 1089$  mm<sup>4</sup>,  $I_t = 254$  mm<sup>4</sup>. Vertikaalin poikkileikkaus on suorakaide, jonka leveys on palkin kannen leveys 30 mm ja korkeus 19 mm. Vääntökokeen tuloksena leikkausmoduulille saatiin arvo  $G = 1,2$  GPa ja kimmokertoimelle käytettiin arvoa  $E = 16,8$  GPa. Teräksisen vetolangan ( $E = 210$  GPa) poikkileikkausala on 0,2 mm<sup>2</sup>. Vertikaalin ja palkin välinen liitos otaksuttiin täysin monoliittiseksi.

Mikäli kuorma vaikuttaa palkin neutraaliakselilla ( $h = 0$ ), on elementtimenetelmällä määritetty alkumuodon suhteen linearisoitu kriittinen kuorma 69,0 N. Kaavan (32) antama tulos on 71,1 N ja likilausekkeen (34) antama arvio on 69,2 N otaksamalla vertikaalin sauvavoimaksi  $N = -P$ . Ottamalla huomioon vetotankojen venyminen, on vertikaalin sauvavoima  $-0,98P$ , jolloin kaavan (32) antamaksi tulokseksi saadaan 69,7 N ja kaavan (34) antamaksi likiarvoksi 67,8 N.

### Vertailu koetuloksiin

Edellä esitetyn yksinkertaisen mallin soveltuvuutta testattiin myös kokeellisesti. Koeansaksessa kuorman vaikutuspiste oli 10 mm palkin laipan yläpuolella. Koetulokset ja niihin pienimmän neliösumman keinolla sovitettu Southwellin suora on esitetty kuvassa



Kuva 7: Puinen ansas: (a) Southwellin kuvaaja ja koetulokset (b) kuorma-siirtymä riippuvuus.

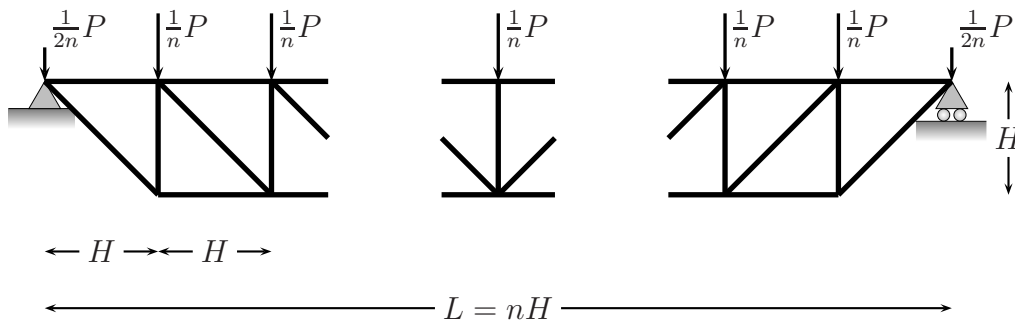
7a. Kriittinen kuorma saadaan Southwellin suoran kulmakertoimen käänteisarvona. Rakenteen muotovirhe kriittisen ominaisuuden suhteen saadaan suoran ja siirtymäakselin leikkauspisteen koordinaatista. Kokeellisesti määritetyksi kriittiseksi kuormaksi saatiin arvo 69,8 N, kun kaksivapausasteinen malli antaa tulokseksi 61,4 N. Elementtimenetelmällä saadaan pienin arvo 60,6 N. Kuvassa 7b on esitetty kokeissa mitattu ja elementtimenetelmällä laskettu kuorma-siirtymä riippuvuus. Elementtimenetelmäänalyysissä on muotovirheeksi annettu alkumuodon suhteen linearisoidusta ominaisarvottehtävästä saatu ominaisuusmuoto, jonka amplitudi on määritetty Southwellin suoran avulla.

## RISTIKKOPALKKI

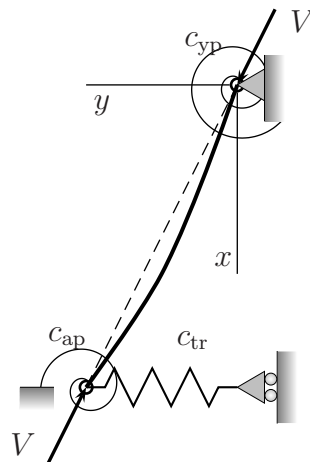
Tarkastellaan kuvan 8 mukaista ristikkopalkkia. Kuvan mukaisessa symmetrisessä kuormitustapauksessa yläpaarre ja vertikaalit ovat puristussauvoja ja alapaarre sekä kaikki diagonaalit ovat vetosauvoja. Moduulimittana on käytetty palkin korkeutta  $H = 2$  m. Yläpaarre on tuettu sivusuunnassa kuormien vaikutuspisteissä. Materiaalin ominaisuuksina ja poikkileikkausmittoina on käytetty seuraavia arvoja:  $E = 200$  GPa,  $G = E/2$ ; paarteet:  $A = 2 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>,  $I_y = I_z = 7 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>,  $I_t = 8 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>; vertikaalit ja diagonaalit:  $A = 10^{-3}$  m<sup>2</sup>,  $I_y = I_z = 1,5 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>,  $I_t = 2 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>.

Alkumuodon suhteen linearisoitu stabiiliusanalyysi suoritettiin elementtimenetelmällä lohkojailla  $n = 4, 6, 8$  ja  $10$  ( $L = nH$ ). Jokainen sauvanosa jaettiin kymmeneen palkkielementtiin. Pisimmän ristikon kriittinen nurjahdusmuoto on yläpaarteiden nurjahdus ristikon tasoa vastaan kohtisuoraan suuntaan. Muissa tapauksissa reunimmainen vertikaalisauva nurjahtaa ja alapaarre siirtyy sivulle.

Vertikaalin nurjahdusta voidaan analysoida yksinkertaisella kuvassa 9 esitetyllä mallilla. Vertikaalin puristava voiman otaksutaan vaikuttavan aina palkin tukien kautta kulkevan suoran suunnassa. Laskettaessa rakenne ristikkona, on reunimmaisissa vertikaaleissa



Kuva 8: Ristikkopalkki.



Kuva 9: Vertikaalin nurjahdusmalli.

vaikuttava puristava voima suuruudeltaan<sup>3</sup>

$$V = \frac{n-1}{2n}P. \quad (35)$$

Kuvan 9 mallin reunaehdot ovat

$$v(0) = 0 \quad M(0) + c_{yp}v'(0) = 0 \quad (36)$$

$$M(H) - c_{ap}v'(H) = 0 \quad Q(H) - V(v'(H) - v(H)/H) + c_{tr}v(H) = 0, \quad (37)$$

missä paarteiden vääntö- ja taivutusjäykkyyttä kuvaavat jousivakiot ovat

$$c_{ap} = \gamma_{ap} \frac{GI_t^{ap}}{L}, \quad \gamma_{ap} = \frac{1}{(H/L)(1 - (H/L))} \quad (38)$$

$$c_{yp} = \gamma_{yp} \frac{GI_t^{yp}}{L}, \quad \gamma_{yp} = \gamma_{ap} \quad (39)$$

$$c_{tr} = \delta_{ap} \frac{EI_y^{ap}}{L^3}, \quad \delta_{ap} = \frac{3}{(H/L)^2(1 - (H/L))^2} \quad (40)$$

Puristetun ja taivutetun sauvan teorian mukainen ratkaisu on muotoa

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3(x/H) + C_4, \quad (41)$$

missä  $k^2 = V/EI_v$ . Merkitsemällä  $V = \lambda^2 EI_v/H^2$  voidaan kuormaparametrin  $\lambda$  kriittinen arvo määrittää yhtälöryhmän

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

kerroinmatriisin singulaarisuusehdosta. Matriisialkiot ovat

$$A_{11} = (\lambda^2 - \beta_{ap}\beta_{yp}) \sin \lambda - (\beta_{ap} + \beta_{yp})\lambda \cos \lambda, \quad (43)$$

$$A_{12} = -\beta_{yp} \cos \lambda - \beta_{ap}\beta_{yp} \frac{\sin \lambda}{\lambda} - \beta_{ap}, \quad (44)$$

$$A_{21} = (\lambda^2 + \alpha_{tr}) \sin \lambda - \beta_{yp} \frac{\lambda^2 + \alpha_{tr}}{\lambda} (\cos \lambda - 1), \quad (45)$$

$$A_{22} = -\beta_{yp} \frac{\lambda^2 + \alpha_{tr}}{\lambda^2} (\cos \lambda - 1) + \alpha_{tr}, \quad (46)$$

missä dimensiottomat jäykkyysvakiot ovat

$$\beta_{ap} = \gamma_{ap} \frac{GI_t^{ap}}{EI_v} \frac{H}{L}, \quad \beta_{yp} = \gamma_{yp} \frac{GI_t^{yp}}{EI_v} \frac{H}{L}, \quad \alpha_{tr} = \delta_{ap} \frac{EI_y^{ap}}{EI_v} \left(\frac{H}{L}\right)^3. \quad (47)$$

Ratkaisu on esitetty taulukossa 1, missä ovat myös elementtimenetelmällä määritetyt kriittisen kuorman arvot. Mikäli vertikaalin nurjatus on määräävä, antaa yksinkertainen nurjatusmalli kriittiselle kuormalle noin 9 - 14 % pienempiä arvoja kuin elementtimenetelmä.

<sup>3</sup>Elementtimenetelmällä laskettaessa rakenne on mallinnettu kehänä jolloin reunimmaisten vertikaalien puristavalle voimalle saadaan noin 3 % pienempi arvo.

$n$	$P_{kr}/MN$		muoto (FEM)
	malli	FEM	
4	3,66	4,01	vertikaalin nurjahdus
6	3,48	3,93	vertikaalin nurjahdus
8	3,26	3,77	vertikaalin nurjahdus
10	3,14	3,28*	yläpaarteen nurjahdus

\* vertikaalin nurjahdusta vastaava kuorma 3,64 MN.

Taulukko 1: Ristikön nurjaduskuormat ja muoto.

## JOHTOPÄÄTELMÄT

Artikkelissa on tarkasteltu tasomaisten ristikkopalkkien kriittisen kuorman määrittästä stabiiliuden menetyksen suhteen. Ristikön geometriasta ja tukemistavasta riippuen ovat erilaiset nurjahdusmuodot mahdollisia. Yksi mahdollinen stabiiliuden menetysmuoto on alapaarteen siirtyminen sivulle puristetun diagonaalisauvan nurjahtaessa jäykkänä kappaleena. Tätä ilmiötä tarkasteltiin johtamalla yksinkertaisten sauva-jousimallien avulla kriittisen kuorman lauseke muutamalle yksinkertaiselle ristikkopalkille. Käytännössä puristetun vertikaali- ja/tai diagonaalisauvan nurjahdus jäykkänä kappaleena voidaan estää tukemalla yläpaarteen ja puristussauvan liitoskohta ristikon päätaivutustasoa vastaan poikittaisessa suunnassa. Tällöin ristikon kriittistä kuormaa voidaan arvioida puristetun vertikaalin nurjahduksena, jossa puristavan voiman vaikutussuora kulkee puristussauvan päätepisteiden kautta. Tutkituissa ristikoissa näin johdettu kriittisen kuorman arvio oli noin 10 % pienempi kuin elementtimenetelmällä saatu kriittinen kuorma.

## KIITOKSET

Timo Jamalaiselle koelaitteiston valmistamisesta ja avusta kokeiden suorittamisessa.

## VIITTEET

- [1] J.M.T. Thompson, G.W. Hunt, *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & sons, 1973.
- [2] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 2. painos, 1963.

Juha Hartikainen, TKK/Rakenteiden mekaniikka, s-posti: juha.hartikainen@tkk.fi  
 Paavo Hassinen, Insinööri-toimisto Pontek Oy, s-posti: paavo.hassinen@pontek.fi  
 Reijo Kouhia, TKK/Rakenteiden mekaniikka, s-posti: reijo.kouhia@tkk.fi  
 Timo Manninen, TKK/Rakenteiden mekaniikka, s-posti: timo.manninen@tkk.fi