RISTIKOT JA KANAVISTOT; ANALOGIOITA?

Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 39,
No. 2, 2006, ss. 37-50

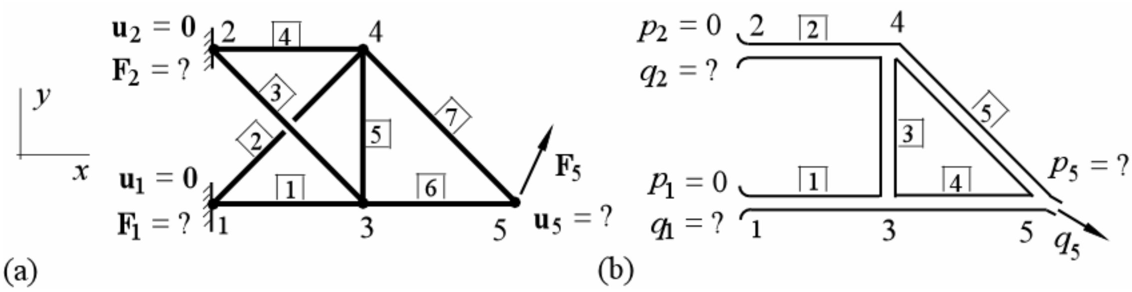
TIIVISTELMÄ

Artikkelissa tarkastellaan ristikkorakenteiden ja kanavistovirtausten analyysiin liittyviä analogioita ja niiden puuttumisia. Analogisia suureita ristikolla ja kanavistolla ovat vastaavasti sauvojen sauvavoimat ja kanavaosuuksien tilavuusvirrat sekä nurkkien siirtymät ja paineet haarautumissa. Kanavistojen analyysiin voidaan käyttää ainakin kolmea eri formulaatiota: P-menetelmä, Q-menetelmä ja ΔQ-menetelmä. Ristikoilla ensimmäisen analoginen vastine on siirtymämenetelmä, mutta kahden muun vastineita ei ole selkeästi esitettävissä. Kanavistovirtauksiin liittyvää fysiikkaa ja terminologiaa selostetaan lyhyesti. Yleisiä kaavoja havainnollistetaan yksinkertaisen esimerkkiristikon ja esimerkkikanaviston avulla.

JOHDANTO

Opetuksessa ja oppimisessa koetetaan joskus helpottaa uuden aihepiirin omaksumista käyttäen apuna sitä, että oleelliset yhteydet uudella alueella voivat olla matemaattiselta kannalta samankaltaisia kuin jollakin jo tutulla omaksutulla alueella. Puhutaan analogioista ja analogisista suureista. Tämä usein hyödyllinen lähestymistapa edustaa tietynlaista ajatuksen ekonomiaa. Lämmön- ja sähkönjohtumisen välinen analogia on tavallisimpia esimerkkejä. Tässä artikkelissa tarkastellaan ristikkorakenteiden ja kanavistovirtausten analyysissä esiintyviä analogioita ja jossain määrin myös niiden puuttumisia. Kanavistovirtauksiin liittyvää fysiikkaa ja terminologiaa selostetaan lyhyesti. Erityisen tarkastelun kohteena on syntyvien yhtälösysteemien keskinäinen vertailu. Ristikoiden ja kanavistojen analyysitavat ovat kehittyneet historiallisesti ilmeisesti ilman mainittavia yhteyksiä, joten on oma mielenkiintonsa yrittää kytkeä aiheita toisiinsa.

Tarkastellaan esimerkkitapauksina kuvassa 1 (a) esitettyä tasoristikkoa ja kuvassa 1 (b) esitettyä kanavistoa. Ristikkoon liittyvät merkinnät ovat ilmeiset. Numeroidaan ristikon sauvat ja nurkat tavanomaiseen tapaan kuten esimerkiksi kuvassa 1 (a). Olkoon ristikon yleisellä sauvalla e yleiset päätepisteet eli nurkkapisteet i ja j. Sauvan e sauvavoimaa merkitään tunnuksella S_e. Se olkoon positiivinen (negatiivinen), kun sauvassa on vetoa (puristusta). Ristikon nurkan i siirtymää merkitään siirtymävektorilla $\mathbf{u}_i = u_i\mathbf{i} + v_i\mathbf{j}$. Tässä u_i ja v_i ovat siirtymäkomponentit x- ja y- akselien suunnissa sekä $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ vastaavat yksikkövektorit. Nurkkaan i vaikuttavaa ulkoista voimaa merkitään voimavektorilla $\mathbf{F}_i = U_i\,\mathbf{i} + V_i\,\mathbf{j}$.



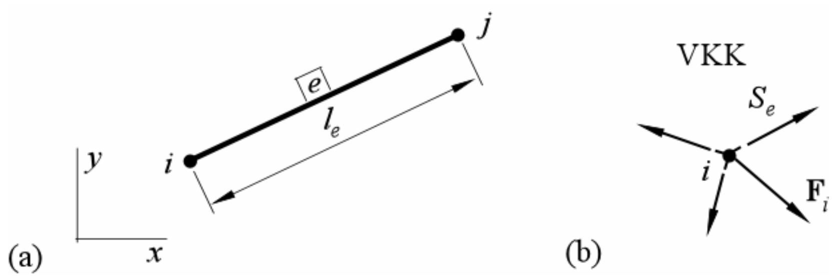
Kuva 1 (a) Ristikko. **(b)** Kanavisto.

Ristikon sauvoja ja nurkkia vastaavat kanaviston *kanavaosuudet* (engl. section, chord, pipe) ja *haarautumat* (engl. junction, node). Ne numeroidaan tässä samaan tapaan kuin ristikoilla; esimerkiksi kuten kuvassa 1 (b). Seuraavassa tarkastellaan lähinnä ilmanvaihtokanavistoja pitäen niissä virtaavan ilman tiheyttä ρ tavanomaiseen tapaan vakiona. Olkoon kanaviston yleisellä kanavaosuudella e yleiset päätepisteet i ja j. Kanavaosuudessa e kulkevaa *tilavuusvirtaa* eli *virtaamaa* (engl. volume flow rate, discharge) merkitään tunnuksella Q_e, $[Q] = \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. Systemaattisia laskelmia varten tilavuusvirralle on tarpeen valita merkkisääntö esimerkiksi seuraavasti. Olkoon kanavaosuuden e positiivinen suunta suunnattu pienemmästä haarautumaluvuista i tai j suurempaan haarautumaluvuista i tai j. Q_e on positiivinen (negatiivinen), jos virtaus tapahtuu positiiviseen (negatiiviseen) suuntaan. Haarautumassa i vallitsevaa *painetta* (engl. pressure) merkitään tunnuksella P_i, $[P] = \mathrm{N/m}^2$. Haarautumassa i tapahtuvaa ympäristön ja kanaviston välistä tilavuusvirtaa merkitään tunnuksella q_i. Merkkisääntö olkoon siten, että tilavuusvirta on positiivinen (negatiivinen), jos kyseessä on kanaviston kannalta ulosvirtaus (sisäänvirtaus). Kuvan 1 (b) merkinnöin q_5 on positiivinen.

Kuvan 1 ristikkoa ja kanavistoa käytetään jatkossa useasti havainnollistamaan tiettyjä kaavoja ja tällöin niihin tullaan viittaamaan käyttämällä nimityksiä esimerkkiristikko ja esimerkkikanavisto.

RISTIKKO

Yhtälöt



Kuva 2 (a) Tyypillinen sauva. **(b)** Tyypillisen nurkan vapaakappalekuvio.

Rajoitutaan staattiseen käsittelyyn. Tasapainoyhtälöiden muodostamisessa tarvitaan tietoja sauvojen suunnista. Kuvan 2 (a) merkintöjen perusteella sauvan *e* suuntakulman (*x*-akselin suhteen vastapäivään positiivisena mitattuna suunnassa $i \to j$) kosini ja sini ovat vastaavasti

$$c_i^e = \frac{x_j - x_i}{l_e}, \quad s_i^e = \frac{y_j - y_i}{l_e}. \tag{1}$$

Tyypillisen nurkan *i* vapaakappalekuviosta (kuva 2 (b)) saadaan *tasapainoyhtälöt*

$$\begin{aligned} &\sum_e S_e c_i^e + U_i = 0, \\ &\sum_e S_e s_i^e + V_i = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Summeeraus *e*:n yli viittaa luonnollisesti kulloinkin vain niihin sauvoihin, joiden toinen pää on nurkassa *i*. Tasapainoyhtälöitä saadaan siis kaksi per ristikon nurkka. Jos nurkkaan liittyy tuenta, U_i tai V_i (tai niiden tietty kombinaatio) tai ne molemmat voivat olla myös tuntemattomia (vertaa esimerkkiristikon nurkat 1 ja 2).

Kinematiikan avulla saadaan tulos, jonka mukaan tyypillisen sauvan *e* kokonaisvenymä Δl_e on pienten siirtymien tapauksessa

$$\Delta l_e = c_i^e \left(-u_i + u_j\right) + s_i^e \left(-v_i + v_j\right). \tag{3}$$

Kimmoisella sauvalla *e*, jonka keskimääräinen vetojäykkyys on $(EA)_e$, pätee venymän (tai siirtymäkomponenttien) ja sauvavoiman välillä yhteys

$$c_i^e \left(-u_i + u_j\right) + s_i^e \left(-v_i + v_j\right) = \frac{l_e}{(EA)_e} S_e \tag{4}$$

eli lyhyemmin

$$c_i^e \left(-u_i + u_j\right) + s_i^e \left(-v_i + v_j\right) = B_e\, S_e, \tag{5}$$

jossa (jousto)kerroin

$$B_e = \frac{l_e}{(EA)_e} \tag{6}$$

on vakio. Käänteisesti saadaan

$$S_e = \frac{1}{B_e}\left[c_i^e \left(-u_i + u_j\right) + s_i^e \left(-v_i + v_j\right)\right]. \tag{7}$$

Lineaarisen yhteyden (5) tai (7) johdossa on siis käytetty hyväksi kinematiikkaa ja kimmoista materiaalimallia.

Yhtälösysteemit

Ristikkoprobleemassa tuntemattomia suureita ovat *sauvavoimat ja nurkkien siirtymät* (tarkemmin siirtymäkomponentit). Osa siirtymäkomponenteista on annettu tukien johdosta, mutta vastaavat tukivoimat esiintyvät silloin lisätuntemattomina.

Tuntemattomat voidaan ratkaista periaatteessa suoraan yhtälöiden (2) ja (5) tai (7) muodostamasta yhtälösysteemistä. Näin ei tunnetusti kuitenkaan yleensä tehdä, vaan kerralla ratkaistavien tuntemattomien eli ns. *perustuntemattomien* lukumäärää pyritään vähentämään eliminointien avulla. Nykyään ylivoimaisesti tavallisin ratkaisutapa on *siirtymämenetelmä*, jossa sauvavoimat eliminoidaan sijoittamalla lausekkeet (7) tasapainoyhtälöihin (2), jolloin perustuntemattomiksi jäävät vain nurkkien siirtymäkomponentit. Käsittely on systemaattista ja yleistys dynaamisiin tapauksiin käy suoraviivaisesti, koska niissä tulee joka tapauksessa operoida kiihtyvyystermien saamiseksi siirtymien avulla.

Esimerkkiristikossa tuntemattomiksi jäävät aluksi nurkkien 3, 4 ja 5 siirtymäkomponentit, siis kuusi suuretta. Sauvavoimat saadaan jälkikäsittelyllä kaavoista (7). Lopuksi nurkkien 1 ja 2 tasapainoyhtälöistä saadaan vielä tuntemattomat neljä tukivoimakomponenttia.

Ennen tietokoneaikaa suurten yhtälöryhmien ratkaiseminen oli työlästä. Tällöin oli tavallista soveltaa *voimamenetelmää*, jossa siis perustuntemattomat ovat ristikolla staattisesti määräämättömiä sauvavoimia (mahdollisesti myös tukivoimia) ja tuntemattomien lukumäärä jäi usein verrattain pieneksi. Voimamenetelmässähän toimitaan tavallisesti siten, että osa ristikon sauvoista kuvitellaan katkaistuksi (mahdollisesti osa tuista poistetuksi), niin että rakenteesta tulee staattisesti määrätty; saadaan staattisesti määrätty perusmuoto, [1, s. 419]. Staattisesti määrätyn ristikon sauvavoimat ja tukireaktiot annetun kuormituksen johdosta voidaan määrittää pelkästään tasapainoyhtälöiden avulla. Tämän jälkeen voidaan kimmoisen rakenteen tapauksessa lisäksi määrittää systeemin siirtymät ja erityisesti katkaisukohtiin syntyvät kuvitellut raot. Kussakin katkaisukohdassa määritetään edelleen tuntemattomien staattisesti määräämättömien yksikkövoimien synnyttämät raot. Rakojen pitää lopuksi hävitä. Superpositioperiaattetta soveltaen saadaan näin yhtä monta lineaarista yhtälöä kuin on tuntemattomia voimasuureita. Käsittely ei ole yhtä helposti systematisoitavissa kuin siirtymämenetelmä mm. koska staattisesti määrätyn systeemin valinta vaatii harkintaa ja koska laajennus epälineaarisiin tapauksiin tulee hankalaksi.

Esimerkkiristikko on vain kerran staattisesti määräämätön ja staattisesti määrätty perusmuoto saadaan kuvittelemalla esimerkiksi joko sauva 1 tai 2 tai 3 tai 4 katkaistuksi, jolloin vastaava sauvavoima tulee perustuntemattomaksi. Jäljelle jää siis vain yhden tuntemattoman suureen määrittäminen, mutta tarvittavien siirtymien laskeminen on melko raskasta.

KANAVISTO

Yhtälöt

Kuva 3 (a) Tyypillinen kanavaosuus. **(b)** Tyypillisen haarautuman kontrollialue.

Kuva 3 on kuvan 2 tietynlainen vastine. Ei ole kuitenkaan merkitystä sillä, onko kanavisto tasossa vai ei (ristikollahan siirtyminen kolmeen dimensioon kasvattaa tuntemattomien siirtymäkomponenttien lukumäärää yhdellä). Kanavaosuuksien ei tarvitse myöskään olla suoria (ristikollakaan sauvojen ei tietenkään tarvitse olla suoria, mutta se on rakenteellisesti edullista).

Tarkastelemalla kanaviston tyypillisestä haarautumasta i erotettua kontrollialuetta (kuva 3 (b)) saadaan massan säilymisen periaatteen avulla johdettua virtauksen haarautumaan liittyvä ns. *jatkuvuusyhtälö* (engl. continuity equation)

$$\sum_e Q_e \operatorname{sgn}(j-i) + q_i = 0. \tag{8}$$

Summeeraus e:n suhteen viittaa luonnollisesti kulloinkin vain niihin kanavaosuuksiin, joiden toinen pää on haarautumassa i. Jatkuvuusyhtälöitä saadaa siis yksi per haarautuma. Signumfunktio sgn ottaa huomioon kanavaosuuden e päiden indeksien i ja j erotuksen arvon perusteella tilavuusvirran etumerkin vaikutuksen. Kaava (8) on kirjoitettu muodossa: *nettotilavuusvirta haarautumasta ulos on nolla*. Ympäristön ja kanaviston välinen tilavuusvirta q_i voi olla riippuen virtauksen reunaehdoista annettu tai tuntematon.

Esimerkkikanaviston tapauksessa tilanne voisi olla analoginen esimerkkiristikon kanssa siten, että q_5 olisi annettu (haarautuman 5 yhteydessä on vaikka puhallin, jonka kierroslukua säätämällä tilavuusvirran arvo voidaan asettaa halutuksi). Haarautumat 1 ja 2 voisivat olla vaikka sisäänvirtausaukkoja (kanaviston kannalta), joiden läpi kulkevat tilavuusvirrat q_1 ja q_2 ovat tuntemattomia (vertaa ristikon aluksi tuntemattomat tukivoimat).

Soveltamalla kaavaa (8) vaikka esimerkkikanaviston haarautumalle 5 saadaan jatkuvuusyhtälö

$$Q_4 \operatorname{sgn}(3-5) + Q_5 \operatorname{sgn}(4-5) + q_5 = 0 \tag{9}$$

eli

$$-Q_4 - Q_5 + q_5 = 0 \tag{10}$$

eli muistaen vielä tilavuusvirtojen merkkisäännöt ehkä havainnollisimmin: $Q_4 + Q_5 = q_5$.

Tasapainoyhtälöitä (2) ja jatkuvuusyhtälöitä (8) vertaamalla on ilmeistä, että sauvavoimille analogisia suureita ovat tilavuusvirrat ja ulkoisille nurkkavoimille analogisia suureita ovat ulos- tai sisäänvirtaamat. Suureiden S ja Q yhteyttä lisää myös se, että ne ovat vakioita vastaavasti sauvoissa ja kanavaosuuksissa.

Jatkossa rajoitutaan pysyvään eli stationaariseen virtaukseen. Virtauksen liikemääräyhtälöitä manipuloimalla ja tiettyjä otaksumia tehden voidaan johtaa lopuksi ns. *yleistetty Bernoullin yhtälö* (engl. engineering Bernoulli equation [2, s. 128, 3, s. 216]), joka on muotoa

$$P_i + \frac{1}{2}\rho V_i^2 + \rho g z_i = P_j + \frac{1}{2}\rho V_j^2 + \rho g z_j + h_{ij}. \tag{11}$$

Indeksit i ja j viittaavat kahteen kanavaosuuden poikkileikkaukseen. P on poikkileikkauksessa vallitseva keskimääräinen paine (lyhyesti paine), V keskimääräinen nopeus (lyhyesti nopeus), g putoamiskiihtyvyys ja z kanavan keskiviivan korkeusasema jostain sovitusta vertailutasosta positiivisena ylöspäin mitattuna. Suure h_{ij} on välillä *i-j* syntyvä ns. *häviötermi*, joka ottaa huomioon mekaanisen energian muuttumisen dissipaation kautta sisäenergiaksi. Yhtälön (11) oikealla puolella sijaitseva häviötermi h_{ij} on positiivinen (negatiivinen), jos virtaus tapahtuu suunnassa $i \to j$ ($j \to i$) (tai ehkä fysikaalisemmin tulkittuna häviötermi voidaan siirtää jälkimmäisessä tapauksessa positiivisena kaavan vasemmalle puolelle). Bernoullin yhtälöön on liitetty edellä lisämääre “yleistetty” korostamaan sitä, että pelkkä termi “Bernoullin yhtälö” tarkoittaa tavanomaisimmassa muodossaan kirjallisuudessa yleensä eri asiaa kuin yhtälö (11).

Jatkossa tarkastellaan kanavaosuuden e poikkileikkauksia juuri haarautumiin i ja j saavuttaessa. Kanavaosuudella tarkoitetaan täsmällisemmin kanaviston osaa, jolla tilavuusvirta on vakio (ei oleellisia vuotoja). Tilavuusvirran Q ja nopeuden V välillä on yhteys

$$Q = VA, \tag{12}$$

jossa A on kanavaosuuden kyseisen poikkileikkauksen pinta-ala. (Ristikolla ilmeinen analoginen yhteys on

$$S = \sigma A, \tag{13}$$

jossa σ on sauvan normaalijännitys ja A sauvan poikkileikkauksen pinta-ala.) Yhtälö (11) muuttuu yhteyden (12) perusteella ensin muotoon (Q_e on vakio ja merkitään vielä $h_{ij} = h_e$)

$$P_i + \frac{1}{2}\rho\frac{Q_e^2}{A_i^2} + \rho g z_i = P_j + \frac{1}{2}\rho\frac{Q_e^2}{A_j^2} + \rho g z_j + h_e. \tag{14}$$

Häviötermin katsotaan muodostuvan ns. *kitkavastuksesta* (seinämäkitka) ja ns. *kertavastuksista* (mutkat, venttiilit, supistumat, laajentumat yms.). Näiden arviointiin käytetään lähinnä kokeellisesti saatuja taulukoituja yhteyksiä. Lopputuloksena on, että häviötermi voidaan esittää muodossa

$$h_e = c_e Q_e^2 , \tag{15}$$

jossa c_e kyseiseen kanavaosuuteen liittyvä positiivinen vakio. Edellinen ei pidä täsmälleen paikkaansa, sillä kerroin c_e riippuu jonkin verran tilavuusvirrasta ja tarkemmissa laskelmissa kerrointa päivitetään iteratiivisesti. Tämän artikkelin kvalitatiivisten tarkastelujen kannalta yhteys (15) on kuitenkin riittävä.

Käytännössä operoidaan tavallisesti ns. *mittapaineen p* (engl. gage pressure) (jatkossa edelleen lyhyesti paine) avulla. Se on absoluuttisen paineen eli tyhjön suhteen mitatun paineen P ja kyseisellä korkeudella vallitsevan ilmanpaineen P_a erotus:

$$p = P - P_\mathrm{a} . \tag{16}$$

Jos kanavistossa virtaa ilmaa, jolla on sama tiheys kuin kanaviston ulkopuolella olevalla ilmalla, voidaan näyttää, [4, s. 32.1], että yhtälö (14) yksinkertaistuu mittapainetta käyttäen muotoon

$$p_i + \frac{1}{2}\rho\frac{Q_e^2}{A_i^2} = p_j + \frac{1}{2}\rho\frac{Q_e^2}{A_j^2} + h_e . \tag{17}$$

Siirrytään yleisempään esitykseen ja kirjoitetaan häviötermi (15) seuraavasti:

$$h_e = c_e \operatorname{sgn}(j-i)\,|Q_e|\,Q_e . \tag{18}$$

Pieni tarkastelu osoittaa, että näin määritelty häviötermi toimii fysikaalisesti oikein yhtälössä (17) tapahtuipa virtaus suuntaan $i \to j$ tai suuntaan $j \to i$ (kertoimen c_e arvo voi kylläkin riippua virtaussuunnasta).

Yhtälöstä (17) saadaan lauseke (18) huomioonottaen kanavaosuuden päiden väliseksi paine-eroksi

$$p_i - p_j = \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{A_j^2} - \frac{1}{A_i^2}\right) + c_e \operatorname{sgn}(j-i)\operatorname{sgn} Q_e\right] Q_e^2 \tag{19}$$

eli lyhyemmin

$$p_i - p_j = C_e Q_e^2 , \tag{20}$$

jossa kerroin

$$C_e = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{A_j^2} - \frac{1}{A_i^2}\right) + c_e \operatorname{sgn}(j-i) \operatorname{sgn} Q_e \tag{21}$$

on vakio. Nimitetään yhtälöä (20) tässä *paine-eroyhtälöksi*.

Yhtälöitä (5) ja (20) vertaamalla voitaneen jossain mielessä sanoa, että paine on siirtymän kanssa analoginen suure. Oleellinen ero yhtälöiden välillä on tietenkin ensinnäkin, että siirtymä on vektori ja paine skalaari sekä toiseksi, että paine-eroyhtälö on epälineaarinen, joka seikka tekee kanavistovirtausten laskelmat aina epälineaarisiksi ja käytännössä siis iteratiivisiksi.

Saadut analogiat $S \mathrel{\hat{=}} Q$ ja $\mathbf{u} \mathrel{\hat{=}} p$ auttavat myös ymmärtämään reunaehtojen välisiä samankaltaisuuksia. Ristikko on vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa nurkkiin mahdollisesti vaikuttavien annettujen ulkoisten voimien ja nurkkien annettujen siirtymien kautta. Esimerkkiristikolla vuorovaikutus on mukana nurkissa 1, 2 ja 5. Kanavisto on vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa mahdollisten haarautumissa olevien aukkojen välityksellä annetun tilavuusvirran tai ympäristössä vallitsevan annetun paineen kautta. Esimerkkikanavistolla vuorovaikutus on mukana haarautumissa 1, 2 ja 5. Lisäksi reunaehdot on asetettu tässä tarkoituksella analogisesti ristikon suhteen siten, että haarautumissa 1 ja 2 (mitta)paineen arvot p_1 ja p_2 on annettu, jolloin vastaavat tilavuusvirrat q_1 ja q_2 ovat tuntemattomia. Haarautumassa 5 tilavuusvirta q_5 on annettu, jolloin vastaavasti paineen p_5 arvo on tuntematon.

Kaavojen analogioita voidaan edelleen lisätä keinotekoisesti kirjaamalla yhtälö (20) näennäisesti lineaariseksi:

$$p_i - p_j = C_e \operatorname{sgn}(Q_e) |Q_e| Q_e \tag{22}$$

eli

$$p_i - p_j = \bar{C}_e Q_e , \tag{23}$$

jossa kerroin

$$\begin{aligned} \bar{C}_e &= C_e \operatorname{sgn}(Q_e) |Q_e| \\ &= \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{A_j^2} - \frac{1}{A_i^2}\right) \operatorname{sgn} Q_e + c_e \operatorname{sgn}(j-i)\right] |Q_e|. \end{aligned} \tag{24}$$

Itse asiassa eräs kirjallisuudessa esitetty syntyvien yhtälöiden ratkaisumenetelmä, ns. *lineaarisen teorian menetelmä* (engl. linear theory method, [5, s. 71]) perustuu kaavan (23) tapaiseen esitykseen. Laskelmat etenevät päivittämällä iteratiivisesti kertoimien $\bar{C}_e$ arvoja ratkoen koko ajan lineaarisia yhtälöitä.

Yhteyden (23) käänteinen, näennäisesti lineaarinen muoto on

$$Q_e = \frac{1}{\bar{C}_e}\left(p_i - p_j\right). \tag{25}$$

Jatkossa tullaan syntyvien lausekkeiden lyhentämiseksi käyttämään pikakirjoitushengessä lineaarisia yhteyksiä (23) ja (25), mutta ymmärrettävästi lopullisten yhtälösysteemien ratkaisemisessa tulee ottaa syvemmällä tasolla huomioon todelliset epälineaarisuudet.

Yhtälösysteemit

Verrataan seuraavaksi kanavistovirtausten yhtälösysteemeitä ristikoiden yhtälösysteemeihin. Lopulliset kanavistovirtauksen yhtälöt ovat siis paine-eroyhtälöiden osalta epälineaarisia ja tässä ei puututa yhtälöiden yksityiskohtaiseen ratkaisemiseen — useimmiten käytetään Newton-Raphsonin menetelmää tai edellä mainittua lineaarisen teorian menetelmää — vaan tarkastellaan lähinnä eri versioiden perustuntemattomien valintaa. Kanavistovirtauksessa tuntemattomia suureita ovat *tilavuusvirrat kanavaosuuksissa ja paineen arvot haarautumissa*. Tuntemattomat voidaan ratkaista periaatteessa suoraan yhtälöiden (8) ja (23) tai (25) muodostamasta yhtälösysteemistä. Näin ei kuitenkaan yleensä tehdä, vaan aivan kuten ristikoiden tapauksessa kerralla ratkaistavien tuntemattomien lukumäärää pyritään vähentämään eliminointien kautta.

Kirjallisuudessa on esitetty ainakin seuraavat kolme formulaatioversiota: *P-menetelmä*, *Q-menetelmä*, ΔQ*-menetelmä*, [5, s. 59]. (Itse asiassa kyseisessä lähteessä käytetään sanan “menetelmä” sijasta sanaa “yhtälöt”. Lisäksi ensimmäisestä versiosta käytetään nimitystä “H-equations”. Lähteessä [5] tarkastellaan vesijohtoverkostoja ja kuten tämän artikkelin lopussa on todettu, nestevirtausten yhteydessä on tavallista muuntaa yleistetty Bernoullin yhtälö muotoon, jossa sen termeillä on pituuden dimensio ja näistä termeistä käytetään silloin nimitystä “head”, josta seuraa nimitys “H-equations”. Lähteessä [5] kuvatut menetelmät soveltuvat kuitenkin periaatteessa samanlaisina myös ilmavirtausten käsittelyyn.)

P-menetelmän perustuntemattomina ovat *paineen arvot* haarautumissa. Vastaava yhtälösysteemi saadaan sijoittamalla haarautumien jatkuvuusyhtälöihin (8) tilavuusvirtojen lausekkeet (25). Kyseessä on selvästi siirtymämenetelmän analoginen vastine. Yhtälöt syntyvät systemaattisella tavalla. Epäkohtana voidaan pitää, että yhteyksien (25) (todellisesta) epälineaarisuudesta johtuen kaikki syntyvät yhtälöt ovat epälineaarisia. Sauvarakenteiden ja putkistovirtausten analogiaa yllä selostetussa muodossa selostetaan usein mm. elementtimenetelmän kirjallisuudessa (esimerkiksi [6, s. 13]) johtuen varmaankin lähinnä siitä, että rakennesovelluksissa tavanomainen elementtimenetelmä on juuri siirtymämenetelmän sovellus.

Esimerkkikanavistossa P-menetelmässä on kolme perustuntematonta: p_3, p_4 ja p_5. P-yhtälö voidaan muodostaa haarautumissa 3, 4 ja 5 eli saadaan tarvittavat kolme yhtälöä, joista tuntemattomat voidaan ratkaista. Paineet p_1 ja p_2 tunnetaan reunaehtojen perusteella. Tilavuusvirrat Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ja Q_5 saadaan jälkikäsittelynä yhtälöiden

(25) avulla. Lopuksi haarautumien 1 ja 2 (triviaalien) jatkuvuusyhtälöiden $Q_1 + q_1 = 0$ ja $Q_2 + q_2 = 0$ avulla saadaan tuntemattomat tilavuusvirrat q_1 ja q_2.

Kirjataan esimerkkinä haarautuman 5 P-yhtälö. Tarvittavat tilavuusvirrat ovat kaavan (25) mukaan

$$Q_4 = \frac{1}{\bar{C}_4}(p_5 - p_3), \quad Q_5 = \frac{1}{\bar{C}_5}(p_5 - p_4) \tag{26}$$

ja jatkuvuusyhtälö (10) saa siis P-menetelmässä muodon

$$\frac{1}{\bar{C}_4}(p_5 - p_3) + \frac{1}{\bar{C}_5}(p_5 - p_4) = q_5 . \tag{27}$$

Q-menetelmässä perustuntemattomina ovat *tilavuusvirrat kanavaosuuksissa*. Vallitsevat yhtälöt saadaan ensinnäkin jatkuvuusyhtälöistä (8) haarautumissa. Nämä ovat lineaarisia yhtälöitä. Tarvittavat lisäyhtälöt saadaan valitsemalla kanavistosta sopivia *silmukoita* (engl. loop). Ne ovat sulkeutuvia laskentapolkuja peräkkäisiä kanavaosuuksia pitkin haarautumasta haarautumaan kunnes palataan takaisin aloitushaarautumaan. Kun silmukan kultakin kanavaosuudelta saadut yhtälöt (23) lasketaan puolittain yhteen, painetermien nähdään peräjälkeen kumoavan toisensa eli lopullisen yhtälön vasen puoli ja siis myös oikea puoli häviää. Usein yhtälön (23) oikeaa puolta nimitetään *painehäviöksi* (engl. pressure loss; ei täysin osuva termi, koska jos pinta-alat A_i ja A_j ovat eri suuria, paine-ero syntyy kaavan (19) perusteella siis muustakin kuin dissipaatiosta). Silmukkayhtälöt synnytetään tätä terminologiaa käyttäen seuraavasti: *painehäviöiden summa kunkin silmukan ympäri on nolla*. Silmukkayhtälöt ovat epälineaarisia. Silmukoiden valinta vaatii soveltajalta tiettyä harkintaa ja menettely ei siis ole täysin suoraviivaista. Analogiaa ristikoiden tavanomaisen voimamenetelmän suhteen ei oikein synny, koska ensinnäkin tuntemattomina esiintyvät tässä kaikki tilavuusvirrat. Lisäksi yhtälöiden (23) yhteenlasku merkitsisi ristikoilla yhtälöiden (5) yhteenlaskua ja tuloksena tulisi olla siirtymäerojen summien kumoutuminen. Näinhän ei käy johtuen mm. siitä, että siirtymällä on kaksi komponenttia. Todettakoon vielä, että suljettujen silmukoiden lisäksi tai sijasta etenkin ilmanvaihtokanavistoissa käytetään usein laskentapolkuja mm. jostain sisäänvirtausaukosta johonkin ulosvirtausaukkoon. Aukkojen läheisyydessä ympäristössä mittapaine on yleensä sama (= nolla) ja täten laskentapolku voidaan niin haluttaessa tulkita myös silmukaksi, joka on saatu ottamalla mukaan ympäristön kautta kulkeva kuviteltu kanavaosuus, johon ei liity häviöitä.

Q-menetelmällä voidaan kuitenkin ehkä ajatella olevan tiettyä analogiaa kontinuumin käsittelyyn voimamenetelmällä. Siinä kontinuumiin kehitetään ensin jännitysjakauma, joka toteuttaa tasapainoyhtälöt. (Tätä vastaa kanavistolla jatkuvuusyhtälöiden toteutuminen.) Kimmoisella materiaalilla kontinuumin jännitysjakaumasta saadaan muodonmuutokset, joiden tulee toteuttaa kompatibiliteettiehdot, [1, s. 51]. Näiden toteutumista voidaan tutkia vaihtoehtoisesti myös tiettyjen viivaintegraalien avulla, esimerkiksi [7, s. 122]. Viivaintegraalien avulla voidaan laskea muodonmuutoksista mielivaltaista laskentapolkua pitkin kulkien siirtymäkomponenttien muutokset tiettyyn pisteeseen saavuttaessa. Jos polusta tehdään suljettu, kyseisten viivaintegraalien tulee hävitä, koska siirtymäkomponenttien muutokset ovat tietenkin nollia palattaessa alkupisteeseen. (Silmukkayhtälöiden voidaan ajatella vastaavan kyseisiä viivaintegraaliyhtälöitä.) Ristikolla siirtymäkomponenttien laskeminen kulkemalla pitkin jotain "sauvapolkua" vaatisi kuitenkin tietoa paitsi sauvojen venymistä myös niiden rotaatioista. Jälkimmäinen informaatio ei ole suoraan käytettävissä ja tämän-tyyppistä lähestymistapaa ei ole tiettävästi ollut käytössä ristikoilla.

Esimerkkikanavistossa Q-menetelmässä on viisi perustuntematonta: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ja Q_5. Haarautumista 3, 4 ja 5 saadaan kolme jatkuvuusyhtälöä. Tarvittavat kaksi silmukkaa voisivat olla vaikka laskentapolut 3-5-4-3 ja 1-3-4-2-1. (Jälkimmäisen silmukan ympäristön kautta kulkevaan kuviteltuun osuuteen 2-1 ei liity häviöitä.) Näistä saadaan kaksi lisäyhtälöä tuntemattomien määrittämiseksi. Paineet haarautumissa saadaan jälkikäsittelyllä kaavojen (23) avulla lähtien haarautumista 1 ja (tai) 2, joissa paineet tunnetaan.

Esimerkiksi polku 3-5-4-3 muodostuu kanavaosuuksista 4, 5, ja 3 ja silmukkayhtälöksi saadaan kaavan (23) avulla

$$\overline{C}_4 Q_4 + \overline{C}_5 Q_5 + \overline{C}_3 Q_3 = 0. \tag{28}$$

ΔQ-menetelmä on jo Q-menetelmää läheisemmin analoginen ristikoiden voimamenetelmän kanssa. ΔQ-menetelmässä perustuntemattomina ovat vain tietyissä silmukoissa kiertävät vakioarvoiset ns. *korjaustilavuusvirrat* (engl. corrective flow rate) ΔQ.

Kanavistoon synnytetään ensin mielivaltainen haarautumien jatkuvuusyhtälöt ja reunaehdot toteuttava tilavuusvirtojen jakauma. Ainakaan lähteessä [5] tämän valinnasta ei ole selvää ohjetta; todetaan vain, että tällaisen jakauman löytäminen ei ole vaikeaa. Periaatteessahan tämä voi tapahtua esimerkiksi siten, että tiettyjen kanavaosuuksien tilavuusvirrat vaikka arvataan — mielellään toivoen korjaus-tilavuusvirtojen arvojen jäävän lopuksi mahdollisimman pieniksi — kokemukseen perustuen niin, että jäljelle on enää sama määrä tuntemattomia tilavuusvirtoja kuin on riippumattomia jatkuvuusyhtälöitä. Loput tilavuusvirtojen arvoista määritetään sitten jatkuvuusyhtälöistä. Kanavistoille ei ole tiettävästi käytössä termiä "staattisesti määrätty rakenne tai tehtävä" vastaavaa käsitettä. Vastinehan olisi periaatteessa "hydraulisesti määrätty kanavisto" eli kanavisto, jonka tilavuusvirrat määräytyisivät jo pelkästään haarautumien jatkuvuusyhtälöiden ja reunaehtojen avulla. Tällainen tilanne saadaan aikaan edellä esitetyn arvaamismenettelyn erikoistapauksena yksinkertaisesti asettamalla tiettyjen kanavaosuuksien tilavuusvirrat nolliksi, niin että lopuksi riippumattomia yhtälöitä on yhtä paljon kuin tuntemattomia tilavuusvirtoja ja tuntemattomat tilavuusvirrat voidaan määrittää. Täten staattisesti määrätyn perusmuodon synnyttämisessä käytetyn sauvan kuvitellun katkaisun analoginen vastine kanavistossa on kuvitellun säätöpellin (tilapäinen) kääntö kiinni, niin että tilavuusvirta häviää! Saatua jatkuvuusyhtälöt toteuttavaa tilavuusvirtojen jakaumaa vastaava painejakauma (laskettuna kaavojen (23) avulla) ei luonnollisestikaan johda kuin sattumalta yksikäsitteisiin painearvoihin haarautumissa. Asetelman korjaamiseksi kanavistosta valitaan laskentapoluiksi samaan tapaan kuin Q-menetelmässä suljettuja silmukoita, joissa kussakin kiertää sovittuun suuntaan alkuperäisen jakauman lisäksi ympäri arvoltaan vielä tuntematon tilavuusvirta ΔQ_k. Jatkuvuusyhtälöiden nähdään toteutuvan edelleen automaattisesti. Tarvittavat yhtälöt saadaan samoin kuin Q-menetelmässä: painehäviöiden summa silmukan ympäri on nolla. Yhtälöt ovat epälineaarisia. Menetelmän etuna on, että tuntemattomien lukumäärä on yleensä pieni. Suureet ΔQ_k ovat analogisia ristikon voimamenetelmän staattisesti määräämättömien sauvavoimien kanssa. Silmukkayhtälöiden suhteen ei edelleenkään synny ilmeisiä analogioita.

Kuten Q-menetelmän yhteydessä on jo todettu, esimerkkikanaviston tapauksessa käytettävissä on yhteensä kolme jatkuvuusyhtälöä, mutta tuntemattomia tilavuusvirtoja on viisi. Suljetaan esimerkiksi kanavaosuudet 2 ja 5 eli asetetaan $Q_2^0 = 0$ ja $Q_5^0 = 0$. Jatkuvuusyhtälöiden avulla saadaan tässä helposti miltei ilman laskelmia näin eräs luvallinen alkutilan ratkaisu

$$Q_1^0 = q_5\,, \quad Q_2^0 = 0\,, \quad Q_3^0 = 0\,, \quad Q_4^0 = q_5\,, \quad Q_5^0 = 0\,, \tag{29}$$

joka toteuttaa haarautumien kolme jatkuvuusyhtälöä. Yläindeksi 0 viittaa alkutilaan. Virtaus tapahtuu siis suoraan kanavaosuuksia 1 ja 4 pitkin. Koska alkuperäisiä tuntemattomia on viisi, tarvitaan vielä kaksi yhtälöä. Käytetään jälleen silmukoita 3-5-4-3 ja 1-3-4-2-1. Olkoon niihin vastaavasti liittyvät korjaustilavuusvirrat ΔQ_1 ja ΔQ_2 positiivisia, jos virtaussuunta on vastapäivään. Nyt siis jälleen kuvitellaan virtausta tapahtuvan ilman häviöitä myös haarautumien 2 ja 1 välillä ympäristön kautta. Tarkastellaan esimerkkinä erityisesti silmukkaa 3-5-4-3, johon liittyvät kanavaosuudet 4, 5 ja 3. Vastaavat tilavuusvirrat ovat yhteenlaskemalla

$$Q_4 = Q_4^0 + \Delta Q_1\,, \quad Q_5 = Q_5^0 - \Delta Q_1\,, \quad Q_3 = Q_3^0 - \Delta Q_1 + \Delta Q_2\,. \tag{30}$$

Tässä on siis otettu huomioon tilavuusvirroille valitut merkkisäännöt, sekä että kanavaosuuteen 3 tulee mukaan kaksi korjaustilavuusvirtaa. Silmukkayhtälö kyseiselle silmukalle on edelleen yhtälön (28) mukainen, nyt siihen vain sijoitetaan lausekkeet (30).

Kahdesta saadusta silmukkayhtälöstä määritetään tuntemattomat ΔQ_1 ja ΔQ_2. Jatko etenee kuten Q-menetelmässä.

LOPPUHUOMAUTUKSIA

Edellä käsittelyä on yksinkertaistettu otaksumalla, että haarautumiin voidaan assosioida vain yksi paineen arvo. Näin tehdään normaalisti putkistovirtauksissa, mutta varsinaisissa kanavistovirtauksissa täytyy yleensä ottaa riittävän tarkkuuden saavuttamiseksi huomioon myös itse haarautumissa syntyvät häviöt. Täten, jos haarautumaan liittyy esimerkiksi kolme kanavaosuutta, joka on tavallista ilmanvaihtokanavistoissa, haarautumassa esiintyy tarkemmassa käsittelyssä samoin myös kolme erillistä paineen arvoa. Kokeelliset saadut taulukoidut tiedot antavat tarvittavat lisäyhtälöt kyseisten paineiden välisten paine-erojen esittämiseen. Haarautumien häviöiden mukaanotto mutkistaa P-menetelmän soveltamista. Aihetta ei käsitellä tässä tarkemmin. Analogia ristikoiden kanssa on nytkin ilmeinen: Ristikoiden nurkilla on todellisuudessa tietty koko ja tarkemmat laskelmat vaatisivat ottamaan huomioon esimerkiksi siirtymien erot nurkkaan liittyvien sauvojen laskennallisisissa päissä.

Yhtälö (17) esitetään ilmavirtausten käsittelyssä itse asiassa tavallisimmin muodossa

$$\left(p+\frac{1}{2}\rho V^2\right)_i=\left(p+\frac{1}{2}\rho V^2\right)_j+h_e \tag{31}$$

eli

$$\left(p+\frac{1}{2}\rho V^2\right)_i-\left(p+\frac{1}{2}\rho V^2\right)_j=h_e\,. \tag{32}$$

Yleensäkin kanavisto- ja putkistolaskelmissa pelkkää painetta nimitetään yleisesti *staattiseksi paineeksi* (engl. static pressure) ja termiä $1/2\cdot\rho V^2$ *dynaamiseksi paineeksi* tai *nopeuspaineeksi* (engl. velocity pressure) ja niiden summaa *kokonaispaineeksi* (engl. total pressure). Yhtälön (32) mukaan kokonaispaine-ero kanavaosuudessa on yhtä suuri kuin häviötermi, jota voidaan nyt paremmin kuin edellä nimittää painehäviöksi tai vielä osuvammin *kokonaispainehäviöksi* (engl. total pressure loss, [4, s. 32.11]). Myös haarautumissa on yleisesti tapana esittää taulukoituina nimenomaan kokonaispainehäviö siirryttäessä kanavaosuudesta toiseen. Tämä merkitsee, että Q- ja ΔQ-menetelmissä voidaankin operoida silmukkayhtälöissä staattisen paineen muutosten sijasta itse asiassa paljon suoraviivaisemmin kokonaispaineen muutosten avulla.

Kun tarkastellaan nesteiden kuten veden putkistovirtauksia, yleistetty Bernoullin yhtälö (11) voidaan kehittää ensin muotoon

$$p_i+\frac{1}{2}\rho V_i^2+(\rho-\rho_\mathrm{a})g\,z_i=p_j+\frac{1}{2}\rho V_j^2+(\rho-\rho_\mathrm{a})g\,z_j+h_{ij}\,. \tag{33}$$

Tässä ρ on nyt veden tiheys, ρ_a ympäristön (ilman) tiheys ja p edelleen mittapaine. Kun ρ_a jätetään pienenä ρ:n rinnalla pois ja jaetaan yhtälö puolittain termillä ρg, saadaan lopullinen tavanomainen käyttöyhtälö

$$\frac{p_i}{\rho g}+\frac{1}{2}\frac{V_i^2}{g}+z_i=\frac{p_j}{\rho g}+\frac{1}{2}\frac{V_j^2}{g}+z_j+\frac{h_{ij}}{\rho g}. \tag{34}$$

Yhtälön termeillä nähdään olevan pituuden dimensio. Kirjallisuudessa käytetään seuraavia nimityksiä. Suure $p/(\rho g)$ on ns. *painekorkeus* (engl. presssure head), suure

$1/2 \cdot V^2/g$ ns. *nopeuskorkeus* (engl. velocity head) ja suure z ns. *asemakorkeus* (engl. elevation head). Kyseisten suureiden summa on ns. *kokonaiskorkeus* (engl. total head).

Putkistolaskelmissa suure $p/(\rho g)+z$ eli ns. *pietsometrinen korkeus* (engl. piezometric head) saa vastaavan roolin kuin staattinen paine kanavistolaskelmissa.

Tässä artikkelissa on jätetty tarkastelun ulkopuolelle mm. kanavistojen (putkistojen) sisällä käytännössä miltei aina toimivien puhaltimien (pumppujen) antamat osuudet yleistetyssä Bernoullin yhtälössä sekä niihin mahdollisesti liittyvät analogiat.

KIITOS

Kiitän TkT Rauno Holopaista artikkeliin liittyvistä keskusteluista ja kommenteista sekä hyödyllisestä lähdeviitteestä [4].

LÄHTEET

1 Ylinen, A (1969). *Kimmo-ja lujuusoppi I*, toinen painos, Werner Söderström.

2 Bird, R B (1957). The equations of change and macroscopic mass, momentum, and energy balances, *Chemical Engineering Science*, **6**, 123-131.

3 Bird R B, Stewart W E, Lightfoot E N (1960). *Transport Phenomena*, Wiley.

4 *ASHRAE Handbook (1997) Fundamentals,* Chapter 32, Duct Design.

5 Jeppson R W (1979). *Analysis of Flow in Pipe Networks*, Ann Arbor Science Publishers.

6 Zienkiewicz O C and Taylor, R L (1989). *The Finite Element Method*, Volume I, 4th ed. Mc-Graw-Hill.

7 Bisplinghoff R L, Mar J W and Pian T H H (1990). *Statics of Deformable Bodies*, Dover.

Eero-Matti Salonen, emeritusprofessori

Teknillinen korkeakoulu
Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto
Rakenteiden Mekaniikka
PL 2100
02015 TKK

eero-matti.salonen@hut.fi