OHUIDEN KUORIEN NUMEERISET MENETELMÄT

Ville Havu

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 39
No. 1, 2006, ss. 19-26.

TIIVISTELMÄ Ohuiden kuorien muodonmuutosten numeerinen approksimointi ei ole vielä tänä päivänäkään yksinkertainen tehtävä. Perusongelma syntyy kuorien luontaisesta omi- naisuudesta käyttäytyä asymptoottisesti hyvin eri tavalla riippuen kuormituksesta ja asetetuista reunaehdoista. Taipumatilassa syntyvä lukkiutumisilmiö näkyy liiallisena jäykkyytenä laskujen tuloksissa. Kalvo- ja taipumatilojen lisäksi kuoriongelmiin liittyy usein erilaisia reunahäiriöitä. Näiden reunahäiriötilojen approksimoimiseen tarvittavat menetelmät poikkeavat jonkin verran kalvo- ja taipumatiloihin liittyvistä tekniikoista. Tyypillisesti käytetty ja tavallisesti toimiva ratkaisu on elementtiverkon voimakas tihentäminen reunahäiriön vaikutusalueella, joka onneksi on sangen paikallinen.

JOHDANTO

Ohut kuori on kolmiulotteinen kaareva rakenne, jonka yksi dimensio on huomattavasti kahta muuta pienempi. Juuri kaarevuutensa ansiosta kuori kykenee kantamaan hyvin kuormaa ja sopii näin monien rakenteiden osaksi.

Rakennesuunnittelun kannalta olisi tärkeää pystyä luotettavasti ja tarkasti mallintamaan kuorirakenteita numeerisesti sekä näin optimoimaan niin materiaalin tarve kuin rakenteen paino ja kuormankantokyky. Valitettavasti ohuiden rakenteiden numeerisessa mallinnuksessa yleisesti käytetyt menetelmät saattavat johtaa suuriin virheisiin niin sanotun lukkiutumis- eli ylijäykkyysilmiön vuoksi. Tällöin numeerinen ratkaisu vaikuttaa aivan liian jäykältä todelliseen verrattuna ja virhe vain pahenee rakenteen ohentuessa. Ilmiö on hyvin tunnettu niin ohuiden laattojen kuin kuorienkin tapauksessa.

KUORIMALLI

Koska ohuen kuoren yksi dimensio on kahta muuta huomattavasti pienempi, on mahdollista johtaa sangen luotettavia kuorimalleja vastaamaan kolmiulotteisen elastisuusteorian yhtälöitä. Tässä esityksessä käytetään ns. Reissner-Naghdi-mallia, jolloin kuoren muodonmuutosenergia on

$$
\begin{aligned}
F(u,v,w,\theta,\psi) =& \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \int_\Omega \{\nu(\kappa_{11}+\kappa_{22})^2 + (1-\nu)\sum_{i,j=1}^{2} \kappa_{ij}^2\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+ \frac{Et}{2(1+\nu)} \int_\Omega (\rho_1^2+\rho_2^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&+ \frac{Et}{(1-\nu^2)} \int_\Omega \{\nu(\beta_{11}+\beta_{22})^2 + (1-\nu)\sum_{i,j=1}^{2} \beta_{ij}^2\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

missä E on materiaalin kimmomoduuli ja ν sen Poissonin luku. Integrointi suoritetaan kuoren keskipinnan Ω yli ja β_{ij}, ρ_i sekä κ_{ij} edustavat kalvo-, leikkaus- sekä taivutusvenymiä. Kuoren muodonmuutos kuvataan viiden keskipinnalla Ω määritellyn funktion avulla, joista kolme ensimmäistä eli u, v ja w edustavat kuoren siirtymiä tangentti- ja normaalitasoissa sekä kaksi jälkimmäistä eli θ ja ψ edustavat säikeiden rotaatioita. Matalan kuoren tapauksessa, kun lisäksi oletetaan kuoren materiaali homogeeniseksi ja isotrooppiseksi voidaan kuoren venymät liittää siirtymiin ja rotaatioihin seuraavasti (kts. [5], jossa on myös täydellisempi esitys eri kuorimalleista):

Matemaattista tarkastelua varten voidaan todeta, että tehtävän määrittelyalue on tarkalleen ottaen edellä mainittu yksidimensioinen sauvan akseli ja reuna-alue, jolla reunaehdot annetaan, koostuu vain akselin kahdesta päätepisteestä.

$$
\begin{aligned}
\beta_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + aw & \kappa_{11} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
\beta_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + bw & \kappa_{22} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
\beta_{12} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + cw = \beta_{21} & \kappa_{12} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}) = \kappa_{21}
\end{aligned}
$$

sekä

$$
\rho_1 = \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \rho_2 = \psi - \frac{\partial w}{\partial y}
$$

Kuoren geometrinen luonne riippuu parametreista a, b ja c. Mikäli $ab - c^2 > 0$, kuori on elliptinen. Jos taas $ab - c^2 = 0$, on kuori parabolinen, ja tapauksessa $ab - c^2 < 0$ kuori on hyperbolinen. Tämän artikkelin osalta oletetaan, että teoreettisten tulosten tapauksessa geometriaparametrit ovat vakioita. Tämä on oletus, joka on mahdollista myös tehdä matalien kuorien tapauksessa. Lisäksi on syytä olettaa, että $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, sillä tapauksessa $a = b = c = 0$ on tarkastelun kohteena kuori vailla kaarevuutta eli laatta.

OHUEN KUOREN KAKSI TILAA

Yksi kuoret laatoista erottava tekijä on näiden mahdollisuus lastista ja reunaehdoista riippuen saavuttaa ainakin kahdenlaisia asymptoottisia tiloja: kalvo- ja taipumatiloja. Näiden tilojen keskeinen ero on siinä, miten muodonmuutosenergia on jakautunut eri tekijöiden välille. Onkin käytännöllistä merkitä $\underline{u} = (u, v, w, \theta, \psi)$, skaalata (1) tekijällä $K = \frac{E}{6(1-\nu^2)}$ sekä määritellä erikseen taivutusenergiatermi

$$A_b(\underline{u},\underline{v}) = \int_\Omega \{\nu(\kappa_{11}+\kappa_{22})(\underline{u})(\kappa_{11}+\kappa_{22})(\underline{v}) + (1-\nu)\sum_{i,j=1}^{2}\kappa_{ij}(\underline{u})\kappa_{ij}(\underline{v})\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ja kalvoenergiatermi

$$\begin{aligned} A_m(\underline{u},\underline{v}) = 6(1-\nu)&\int_\Omega \{\rho_1(\underline{u})\rho_1(\underline{v}) + \rho_2(\underline{u})\rho_2(\underline{v})\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ +12&\int_\Omega \{\nu(\beta_{11}+\beta_{22})(\underline{u})(\beta_{11}+\beta_{22})(\underline{v}) \\ &\qquad + (1-\nu)\sum_{i,j=1}^{2}\beta_{ij}(\underline{u})\beta_{ij}(\underline{v})\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Riippuen siitä, kumpi termeistä on vallitseva kokonaisenergian lausekkeessa on syytä määritellä myös kaksi eri tavoin skaalattua kuoren kokonaisenergian lauseketta. Ensimmäinen näistä soveltuu kalvotiloille

$$F_M(\underline{u}) = \frac{1}{2}(t^2 A_b(\underline{u},\underline{u}) + A_m(\underline{u},\underline{u})) - Q(\underline{u})$$

ja toinen taipumatiloille

$$F_B(\underline{u}) = \frac{1}{2}(A_b(\underline{u},\underline{u}) + t^{-2} A_m(\underline{u},\underline{u})) - Q(\underline{u}).$$

Näissä lausekkeissa Q edustaa kuoreen kohdistuvaa kuormitusta. Näin saadaan myös kaksi eri tavoin skaalattua variaatiotehtävää:

(M) Etsi $\underline{u} \in U_M$ siten, että
$$A_M(\underline{u},\underline{v}) = t^2 A_b(\underline{u},\underline{v}) + A_m(\underline{u},\underline{v}) = Q(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in U_M. \qquad (2)$$

(B) Etsi $\underline{u} \in U_B$ siten, että
$$A_B(\underline{u},\underline{v}) = A_b(\underline{u},\underline{v}) + t^{-2} A_m(\underline{u},\underline{v}) = Q(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in U_B. \qquad (3)$$

Tässä $U_M \subset [H^1(\Omega)]^5$ ja $U_B \subset [H^1(\Omega)]^5$ ovat variaatioavaruuksia, joissa oleelliset reunaehdot on asetettu voimaan.

ELEMENTTIMENETELMÄ KUORITEHTÄVISSÄ

Johdannossa mainitut approksimaatiovaikeudet syntyvät, kun tarkastellaan taipumatilaa. Tällöin käytettäessä p-asteisia polynomeja siirtymien ja rotaatioiden approksimointiin, saadaan virhearvio

$$\frac{|||\underline{u} - \underline{u}_h|||_B}{|||\underline{u}|||_B} \leq C \min\{1, \frac{h^p}{t}\}, \tag{4}$$

missä $|||\cdot|||_B$ tarkoittaa taipumatilan energianormia. Estimaatti (4) on myös realistinen. Tästä seuraa, että käytettäessä esimerkiksi paloittain lineaarisia (tai bilineaarisia) elementtejä, jolloin siis $p = 1$, tulee hilavakion toteuttaa ehto $h < t$. Monissa käytännön tilanteissa tällainen vaatimus on kuitenkin mahdoton toteuttaa.

Mikäli polynomien astelukua p pystytään kasvattamaan, saadaan tilanteeseen hieman helpotusta. Tällöin hilavakion on toteutettava ainakin ehto $h < t^{1/p}$. Taulukko 1 osoittaa, että asteen p noustessa vaatimuksen saavuttaminen tulee mahdolliseksi.

t/p	1/100	1/1000
1	0.010	0.001
2	0.100	0.032
4	0.316	0.178
8	0.562	0.428
16	0.750	0.649

Taulukko 1. Lausekkeen $t^{1/p}$ arvoja.

KUORIELEMENTIT

Elementtiohjelmistoissa on tavallisesti juuri kuorten lukkiutumisilmiöiden vuoksi erilliset elementit kuoritehtäville. Erityisen tunnettuja ovat ns. MITC-tyypin elementit [1], jotka muistuttanevat pitkälti muitakin tarjolla olevia vaihtoehtoja ainakin alimman kertaluvun elementtien osalta. Nämä elementit perustuvat lukkiutumisesta kärsivien kalvo- ja leikkausvenymien redusointiin. Kuorielementtien yleinen matemaattinen analyysi on vaikeaa, mutta jos oletetaan, että käytettävä elementtiverkko on suorakulmainen, voidaan nelisolmuinen elementti tulkita termin A_m modifikaatioksi A_m^h

$$\begin{aligned}A_m^h(\underline{u},\underline{v}) = 6\gamma(1-\nu)&\int_\Omega \{\tilde{\rho}_1(\underline{u})\tilde{\rho}_1(\underline{v}) + \tilde{\rho}_2(\underline{u})\tilde{\rho}_2(\underline{v})\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ +12&\int_\Omega \{\nu(\tilde{\beta}_{11}+\tilde{\beta}_{22})(\underline{u})(\tilde{\beta}_{11}+\tilde{\beta}_{22})(\underline{v}) \\ &\qquad + (1-\nu)\sum_{i,j=1}^{2}\tilde{\beta}_{ij}(\underline{u})\tilde{\beta}_{ij}(\underline{v})\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

missä $\tilde{\beta}_{ij} = R^{ij}\beta_{ij}$, $\tilde{\rho}_i = R^i\rho_i$ ja R^{ij} sekä R^i ovat sopivia reduktio-operaattoreita. Näiksi valitaan

$$\tilde{\beta}_{11} = \Pi_h^x\beta_{11}, \quad \tilde{\beta}_{22} = \Pi_h^y\beta_{22}, \quad \tilde{\rho}_1 = \Pi_h^x\rho_1, \quad \tilde{\rho}_2 = \Pi_h^y\rho_2, \tag{5}$$

missä Π_h^x ja Π_h^y ovat ortogonaalisia L^2-projektioita elementeittäin vakioille avaruuksille x:n ja y:n suhteen. Termin β_{12} suhteen voidaan tarkastella kahta vaihtoehtoa

$$\begin{aligned}&\text{(E1)} \qquad \tilde{\beta}_{12} = \Pi_h^{xy}\beta_{12} \\ &\text{(E2)} \qquad \tilde{\beta}_{12} = \beta_{12} + S_{12},\end{aligned}$$

missä $\Pi_h^{xy} = \Pi_h^x\Pi_h^y$ on ortogonaalinen L^2-projektio elementeittäin vakioon avaruuteen ja

$$S_{12|K} = a\frac{\partial}{\partial y}(\Pi_h^x w)(x - h_x^k/2) + b\frac{\partial}{\partial x}(\Pi_h^y w)(y - h_y/2) + (\Pi_h^{xy}cw - cw)$$

kullakin elementillä K [3]. Kaikissa tapauksissa ratkaistava elementtitehtävä on

$$\begin{aligned}(M_h) \quad &\text{Etsi } \underline{u}_h \in U_{M,h} \text{ siten, että} \\ &A_M^h(\underline{u}_h,\underline{v}) = t^2A_b(\underline{u}_h,\underline{v}) + A_m^h(\underline{u}_h,\underline{v}) = Q(\underline{v}) \quad \forall\underline{v}\in U_{M,h}\end{aligned} \tag{6}$$

kalvotilassa ja

$$\begin{aligned}(B_h) \quad &\text{Etsi } \underline{u}_h \in U_{B,h} \text{ siten, että} \\ &A_B^h(\underline{u}_h,\underline{v}) = A_b(\underline{u}_h,\underline{v}) + t^{-2}A_m^h(\underline{u}_h,\underline{v}) = Q(\underline{v}) \quad \forall\underline{v}\in U_{B,h}\end{aligned} \tag{7}$$

taipumatilassa. Tässä $U_{B,h} \subset U_B$ ja $U_{M,h} \subset U_M$ ovat konformisia bilineaarisia elementtiavaruuksia.

VIRHEANALYYSI

Sekä taipuma- että kalvotilan kokonaisdiskretointivirheet $e_M = |||\underline{u} - \underline{u}_h|||_{M,h}$ ja $e_B = |||\underline{u} - \underline{u}_h|||_{B,h}$ on analyysin kannalta hyödyllistä jakaa approksimaatiovirheisiin

$$e_{a,M}(\underline{u}) = \min_{\underline{v} \in U_{M,h}} |||\underline{u} - \underline{v}|||_{M,h}$$
$$e_{a,B}(\underline{u}) = \min_{\underline{v} \in U_{B,h}} |||\underline{u} - \underline{v}|||_{B,h}$$

ja konsistenssivirheisiin

$$e_{c,M}(\underline{u}) = \sup_{\underline{v} \in U_{M,h}} (A_M - A_M^h)(\underline{u}, \underline{v})|||\underline{v}|||_{M,h} \tag{8}$$
$$e_{c,B}(\underline{u}) = \sup_{\underline{v} \in U_{B,h}} (A_B - A_B^h)(\underline{u}, \underline{v})|||\underline{v}|||_{B,h}, \tag{9}$$

missä $||| \cdot |||_{M,h} = \sqrt{A_M^h(\cdot, \cdot)}$ ja $||| \cdot |||_{B,h} = \sqrt{A_B^h(\cdot, \cdot)}$ [4]. Tämä jako nimittäin toteuttaa

$$e_M^2 = e_{a,M}^2 + e_{c,M}^2$$
$$e_B^2 = e_{a,B}^2 + e_{c,B}^2.$$

Kukin näistä neljästä komponentista on nyt mahdollista rajoittaa erikseen. Ensinnäkin klassinen elementtianalyysi antaa suoraan tuloksen $e_{a,M} \leq Ch||\underline{u}||_2$, sillä kalvotilassa oleva kuori ei lukkiudu.

Toisaalta kuorielementin reduktion tarkoituksena on palauttaa konvergenssi myös kalvotilassa. Tämä tapahtuukin usein. Seuraava lause pätee pyörähdyssymmetrisen kuoren tapauksessa [2].

Lause 1 *Olkoon* $U_{0,h} = \{\underline{u} \in U_h \mid A_m^h(\underline{u}, \underline{u}) = 0\}$ *ja* $U_0 = \{\underline{u} \in U \mid A_m(\underline{u}, \underline{u}) = 0\}$. *Tällöin kullakin* $\underline{u}_0 \in U_0$ *pätee*

$$\tilde{e}_a(\underline{u}_0) = \min_{\underline{v} \in U_{0,h}} |||\underline{u}_0 - \underline{v}|||_{B,h} = \min_{\underline{v} \in U_{0,h}} \sqrt{A_b(\underline{u}_0 - \underline{v}, \underline{u}_0 - \underline{v})}$$
$$\leq C_1 h|\underline{u}|_2 + C_2 h^{\frac{2}{3}(s-1)}|\underline{u}|_s, \quad 2 \leq s \leq 3,$$

missä $C_2 = 0$ *elliptisen kuoren tapauksessa.*

Koska kalvotilat voidaan usein kirjoittaa muodossa

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + t\underline{u}_1,$$

missä $\underline{u}_0 \in U_h$, seuraa lauseesta 1 lukkitumisilmiön lähes täydellinen poistuminen tällaisissa tapauksissa.

Konsistenssivirhe saattaa puolestaan olla ongelmallinen kalvotilan tapauksessa. Jälleen pyörähdyssymmetrisen kuoren tapauksessa voidaan osoittaa seuraavaa.

Lause 2 *Olkoon $b \neq 0$ ja $m = 1$ elliptisen kuoren tapauksessa sekä $m = 0$ parabolisen ja hyperbolisen kuoren tapauksessa. Tällöin konsistenssivirheelle $e_{c,M}$ pätee*

$$e_{c,M} \leq C_1(\underline{u})h + C_2(t,\underline{u})h^2 + C_3(t,s,\underline{u})h^{1+s} + C_4(t,\underline{u})h^2, \quad s \geq 0,$$

missä

$$\begin{aligned}
C_1(\underline{u}) =& C \sum_{ij} |\beta_{ij}(\underline{u})|_{2-m} \\
C_2(\underline{u}, t) =& \begin{cases} 0 & \text{tapauksessa (E1)} \\ Ct^{-1}|w|_1 & \text{tapauksessa (E2)} \end{cases} \\
C_3(t,s,\underline{u}) =& Ct^{-1} \sum_i |\beta_{ii}(\underline{u})|_{1+s} + \begin{cases} Ct^{-1}|\beta_{12}(\underline{u})|_{1+s} & \text{tapauksessa (E1)} \\ Ct^{-1}(|\beta_{12}(\underline{u})|_s + |w|_{1+s}) & \text{tapauksessa (E2)} \end{cases} \\
C_4(t,\underline{u}) =& Ct^{-1}(\sum_i |\rho_i(\underline{u})|_1)
\end{aligned}$$

Konsistenssivirheelle $e_{c,B}$ pätee

$$e_{c,B} \leq C_1(t,\underline{u})h + C_2(t,\underline{u})h^2,$$

kun

$$\begin{aligned}
C_1(t,\underline{u}) =& Ct^{-2} \sum_{ij} |\beta_{ij}(\underline{u})|_1 \\
C_2(t,\underline{u}) =& Ct^{-2} \sum_i |\rho_i(\underline{u})|_1.
\end{aligned}$$

Lausetta (2) tulkittaessa on syytä huomata, että sileän muodonmuutoksen tapauksessa kalvotilan leikkausjännitykset ρ_i ovat tyypillisesti hyvin pieniä, joten näihin liittyvä virhekomponentin vahvistuminen on useissa tapauksissa vain näennäistä. Sama on totta kalvo- ja leikkausjännityksille taipumatilassa, itse asiassa $|\beta_{ij}(\underline{u})|_1 \sim |\rho_i(\underline{u})|_1 \sim t^2$, kun $\underline{u}$ on riittävän sileä ja $t \to 0$.

YHTEENVETO

Ohuiden kuorien muodonmuutosten numeerinen approksimointi ei ole vielä tänä päivänäkään yksinkertainen tehtävä. Perusongelma syntyy kuorien luontaisesta omi- naisuudesta käyttäytyä asymptoottisesti hyvin eri tavalla riippuen kuormituksesta ja asetetuista reunaehdoista. Taipumatilassa syntyvä lukkiutumisilmiö näkyy liiallisena jäykkyytenä laskujen tuloksissa. Lukkiutumisen poistamiseksi on olemassa ainakin kaksi mahdollisuutta

(a) Korkea-asteisten ($p \geq 8$) elementtien käyttö.

(b) Erityisten kuorielementtien käyttö.

Näistä ensimmäinen vaihtoehto toimii myös kalvotilassa ja jälkimmäinenkin antaa tavallisesti tyydyttäviä tuloksia. Voidaan kuitenkin osoittaa, että kuorielementit eivät välttämättä ole luotettavia kaikkien kalvotilojen ratkaisemisessa [6].

Kalvo- ja taipumatilojen lisäksi kuoriongelmiin liittyy usein erilaisia reunahäiriöitä, joiden komponentit käyttäytyvät reunan lähellä kuten $\exp(\frac{x}{\sqrt[n]{t}})$, missä $n = 1, 2, 3$ tai $n = 4$ [5]. Näiden reunahäiriötilojen approksimoimiseen tarvittavat menetelmät poikkeavat jonkin verran kalvo- ja taipumatiloihin liittyvistä tekniikoista. Tyypillisesti käytetty ja tavallisesti toimiva ratkaisu on elementtiverkon voimakas tihentäminen reunahäiriön vaikutusalueella, joka onneksi on sangen paikallinen.

VIITTEET

[1] K.J. Bathe, E.N. Dvorkin, *A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components*, Int. J. Numer. Methods Engrg. **22** (1986) 697-722.

[2] V. Havu, J. Pitkäranta, *Analysis of a bilinear finite element for shallow shells I: Approximation of inextensional deformations*, Math. Comp. **71** (2002) 923–943

[3] M. Malinen *On the classical shell model underlying bilinear degenerated shell finite elements: general shell geometry.* Internat. J. Numer. Methods Engrg. **55** (2002) 629–652

[4] J. Pitkäranta, *The first locking-free plane-elastic finite element: historia mathematica*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **190** (2000) 1323–1366.

[5] J. Pitkäranta, A.-M. Matache, C. Schwab, *Fourier mode analysis of layers in shallow shell deformations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **190** (2001) 2943–2975.

[6] J. Pitkäranta, H. Hakula, V. Havu, M. Malinen, *Convergence of the MITC4 Shell Element* Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V), July 7-12, 2002, Vienna, Austria, Editors: Mang, H.A.; Rammerstorfer, F.G.; Eberhardsteiner, J., Publisher: Vienna University of Technology, Austria, ISBN 3-9501554-0-6, http://wccm.tuwien.ac.at

Ville Havu, TkT, tutkija, Teknillinen korkeakoulu
(ville.havu@tkk.fi)