

POLYNOMISET JA RATIONAALISET PARAMETRISET KÄYRÄT MUODONOPTIMOINNISSA

Juha Mäkipelto

Rakenteiden mekaniikka, Vol. 37
No. 2, 2004, ss. 27–33

TIIVISTELMÄ

Muodonoiminnissa suunnittelumuuttujana on periaatteessa rakenteen muoto, mutta käytännössä muoto sellaisenaan ei sovellu suunnittelumuuttujaksi. Siksi muodon esitys parametrisoidaan ja saatavia parametreja käytetään suunnittelumuuttujina. Usein rakenteen geometria kuvataan polynomisilla parametrisilla käyrillä. Niiden ohjauspisteiden koordinaatteja voidaan käyttää suunnittelumuuttujina ja rakenteen muodon riittävään hallitsemiseen päästään kohtuullisella suunnittelumuuttujien määrällä. Rationaalisilla parametrisilla käyrillä jokaiseen ohjauspisteeseen liittyy painokerroin, jota voidaan käyttää koordinaattien lisäksi suunnittelumuuttujana. Vaikka näin rakenteen muodon hallintaan saadaan lisää joustavuutta, rationaalisia parametrisia käyriä on käytetty vain harvoin muodonoiminnissa. Tässä artikkelissa vertaillaan polynomisia ja rationaalisia parametrisia käyriä muodonoiminnissa. Lisäksi eri asteisia käyriä vertaillaan keskenään.

JOHDANTO

Tämän artikkelin lähtökohdat ovat muodonoiminnissa, jossa rakenteelle etsitään rajoitusehdot toteuttavaa ja tietyn kohdefunktion mukaan parasta mahdollista muotoa. Yleensä koko rakenteen muotoa ei sallita muutettavan, vaan vain tietyn reunan osan annetaan vaihdella optimoinnin edetessä. Jotta muotoa voitaisiin käsitellä matemaattisen optimointiteorian keinoin, on se parametrisoitava jotenkin. Useimmiten rakenteen reunan kuvataan parametrisilla käyrillä tai pinnoilla, joiden ohjauspisteiden koordinaatit sitten soveltuvat suunnittelumuuttujiksi. Esimerkiksi polynomimuotoiset B-splinit tai Bézier-käyrät ovat usein käytettyjä.

Jos käyrät ovat rationaalisia, suunnittelumuuttujina voivat ohjauspisteiden koordinaattien lisäksi olla niiden painokertoimet. Tietokoneavusteisen suunnittelun ohjelmistoissa kappaleiden geometria mallinetaan usein rationaalisilla käyrillä ja pinnoilla, joten kytkentä muodonoiminnin, suunnittelun ja tuotannon välille on ainakin teoriassa helposti luotavissa. Rationaalisilla parametrisilla käyrillä on monia hyödyllisiä ominaisuuksia, niiden teoria ja algoritmit ovat pitkälle kehitettyjä, ja aiheesta on julkaistu kattavia teoksiakin (esim. Piegl ja Tiller, 1997), mutta muodonoiminnissa niitä on käytetty suhteellisen vähän (Schramm ja Pilkey, 1993; Eschenauer *et al.*, 1994; Wieghardt *et al.*, 1997; Wang *et al.*, 1999; Lépine *et al.*, 2001).

Artikkelin aluksi esitellään polynomimuotoisten ja rationaalisten B-splinien teoriaa. Seuraavan luvun optimointiesimerkeissä tietty ongelma ratkaistaan käyttäen erilaisia parametrisia käyriä rakenteen muodon kuvaamiseen. Saadut tulokset valaisevat erilaisten käyrien hyötyjä ja haittoja muodonoptimoinnissa.

POLYNOMIMUOTOISET JA RATIONAALISET B-SPLINIT

Esitellään seuraavassa tämän artikkelin kannalta tärkeät asiat tavallisista ja rationaalisista B-splineistä. Kirjoittajalla ei ole täyttä varmuutta kaikkien asioiden suomenkielisistä nimityksistä, joten joissakin kohdissa on esitetty englanninkielinen nimitys teoksesta (Piegl ja Tiller, 1997), johon seuraava esitys muutenkin perustuu.

Käytetään astetta p olevista B-splinin kantafunktioista i :nnelle merkintää $\mathcal{B}_{i,p}(u)$. Kantafunktioiden laskemiseksi tarvitaan, asteen p lisäksi, kasvava reaalityyppinen lukujono $U = \{u_0, \dots, u_m\}$, jossa siis $u_i \leq u_{i+1}$, $i = 0, \dots, m-1$. Reaalityyppisiä lukuja u_i kutsutaan solmuiksi (knots), jonoa U solmuvektoriksi (knot vector) ja puoliavointa väliä $[u_i, u_{i+1})$ i :nneksi solmuväliksi (knot span). Rajoitutaan jatkossa käyttämään jaksottomia (nonperiodic) solmuvektoreita

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}, \quad (1)$$

joissa siis $p+1$ ensimmäistä ja $p+1$ viimeistä solmua ovat yhtä suuria. Koska nol-lasta eroavat solmuvälit (järjestysnumeroltaan $p, \dots, m-p-1$) voivat olla keskenään erisuuria, solmuvektori on myös epätasavälinen (nonuniform).

Kantafunktiot saadaan seuraavilla kaavoilla

$$\mathcal{B}_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{jos } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathcal{B}_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} \mathcal{B}_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \mathcal{B}_{i+1,p-1}(u).$$

Kaavoista (2) mahdollisesti tuleva epämääräinen 0/0-muoto määritellään tässä nol-laksi. Kantafunktiot $\mathcal{B}_{i,p}(u)$ ovat paloittain jatkuvia polynomeja, jotka on määritelty koko reaalityyppisessä alueessa, mutta yleensä ollaan kiinnostuneita vain välistä $[u_0, u_m]$. Kantafunktiot ovat aina ei-negatiivisia ja toteuttavat lisäksi ykkösen jaon kaikilla solmuväleillä

$$\sum_{j=i-p}^i \mathcal{B}_{j,p}(u) = 1 \quad u \in [u_i, u_{i+1}). \quad (3)$$

B-splinin määrittelemiseksi tarvitaan ohjauspisteet $\mathbf{P}^i = (P_x^i, P_y^i)$, joiden lukumäärä olkoon $n+1$ kappaletta ($i = 0, \dots, n$). Ohjauspisteiden muodostamaa monikulmiota kutsutaan ohjausmonikulmioksi. Ohjauspisteiden lukumäärä määräytyy B-splinin asteen p ja solmuvektorin mukaan siten, että

$$n+1 = m-p. \quad (4)$$

Astetta p oleva B-splini saadaan yhtälön (1) mukaisella solmuvektorilla määriteltyjen kantafunktioiden ja ohjauspisteiden summana

$$\mathbf{B}(u) = \sum_{i=0}^n \mathcal{B}_{i,p}(u) \mathbf{P}^i \quad u \in [a, b]. \quad (5)$$

Rationaalisen B-splinin ohjauspisteillä on painokertoimet w_i , jotka periaatteessa voivat olla myös ei-positiivisia, mutta usein oletetaan että $w_i > 0$. Painokertoimien ja polynomimuotoisen B-splinin kantafunktioiden $\mathcal{B}_{i,p}(u)$ avulla määritellään rationaalisen B-splinin kantafunktiot

$$\mathcal{R}_{i,p}(u) = \frac{\mathcal{B}_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n \mathcal{B}_{j,p}(u)w_j} \quad i = 0, \dots, n \quad u \in [a, b], \quad (6)$$

joiden avulla edelleen saadaan rationaalinen B-splini

$$\mathbf{R}(u) = \sum_{i=0}^n \mathcal{R}_{i,p}(u) \mathbf{P}^i \quad u \in [a, b]. \quad (7)$$

Koska solmuvektori voi olla epätasavälinen, rationaalisesta B-spliniä käytetään joskus myös akronyymiä NURBS (NonUniform Rational B-Spline). Yhtälöistä (3) ja (6) nähdään, että

$$w_i = w \neq 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_{i,p}(u) = \mathcal{B}_{i,p}(u) \quad \forall i. \quad (8)$$

Jos siis kaikki painokertoimet ovat yhtä suuria, kaavasta (7) saadaan rationaalisen B-splinin erikoistapaus eli tavallinen polynomimuotoinen B-splini. Jos taas solmuvektori on muotoa

$$U = \underbrace{\{a, \dots, a\}}_{p+1}, \underbrace{\{b, \dots, b\}}_{p+1}, \quad (9)$$

kaavoista (5) ja (7) saadaan B-spliniin erikoistapaukset polynomimuotoinen ja rationaalinen Bézier-käyrä. Kaavan (7) mukaiset rationaaliset B-splinit sisältävät siis erikoistapauksinaan polynomimuotoiset B-splinit sekä polynomimuotoiset ja rationaaliset Bézier-käyrät.

ERILAISET PARAMETRISET KÄYRÄT MUODONOPTIMOINNISSA

Tässä luvussa vertaillaan erilaisten parametrusten käyrien soveltuvuutta rakenteen muodon kuvaamiseen muodonoptimoinnissa. Käyrän ohjauspisteiden lukumäärä on merkittävin asia jota vaihdellaan. Jos ohjauspisteiden lukumäärä on $n + 1$, voi jaksottomalla solmuvektorilla (1) määritellyn käyrän aste olla yhtälön (4) mukaisesti $p = 1, \dots, n$. Tiettyä ohjauspistemäärää vastaa siis useampi eri asteinen käyrä, ja siksi myös käyrän astetta vaihdellaan. Edellisten lisäksi vaihdellaan myös sitä, onko käyrä polynomimuotoinen vai rationaalinen. Sama muodonoptimointiongelma ratkaistaan käyttämällä rakenteen reunan muuteltavan osan kuvaamiseen erilaisia parametrisia käyriä ja saatuja optimointituloksia vertaillaan keskenään. Optimointiongelmat ratkaistaan MMA-menetelmällä (Svanberg, 1987). Rakenneanalyysit suoritetaan elementtimenetelmän p -versiolla, jossa elementtien asteluku on 10. Kolmioelementtiverkko luodaan Triangle-koodilla (Shewchuk,

1996) uudestaan jokaisella optimointiaskeleella ja vapausasteiden lukumäärä on tyypillisesti 5000 . . . 10000.

Esimerkki 1. Tarkastellaan ensimmäiseksi klassista muodonoptimointitehtävää, jossa kaksiakselisen jännitystilän alaisessa äärettömässä levyssä on reikä. Tehtävänä on optimoida reiän muoto siten, että suurin rakenteessa esiintyvä vertailujännitys on mahdollisimman pieni. Tehtävän analyyttinen ratkaisu on ellipsi, jonka akseleiden suhde riippuu jännitystilän pääjännitysten suhteista. Optimointiongelma on periaatteessa muotoa

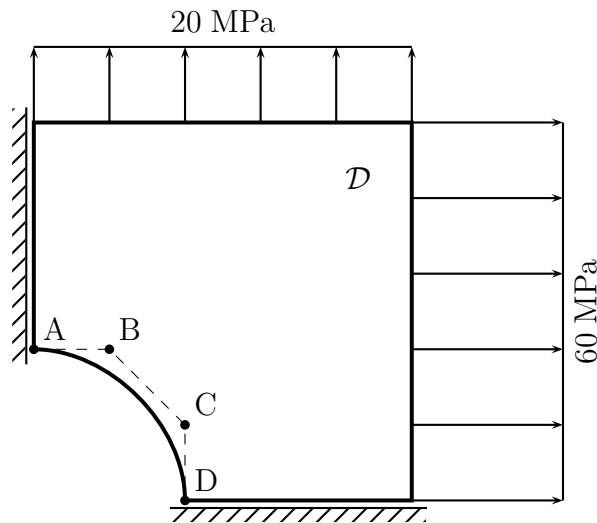
$$\min_{\Gamma_d} \left(\max_{\mathbf{r} \in \mathcal{D}} \sigma_{\text{vert}}(\mathbf{r}) \right), \quad (10)$$

jossa Γ_d on reiän reunalle sallittujen muotojen joukko ja \mathcal{D} on rakenteen alue. Näin asetettu optimointiongelma käyttäytyy yleensä huonosti kohdefunktiossa olevan max-funktion vuoksi, koska suurimman vertailujännityksen paikka vaihtelee optimoinnin edetessä. Ongelmaa (10) vastaava ja paremmin käyttäytyvä optimointiongelma on

$$\begin{aligned} & \min_{\Gamma_d} \alpha \\ \text{s.e. } & \sigma_{\text{vert}}(\mathbf{r}) \leq \alpha \quad \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (11)$$

jossa α on apuparametri. Vertailujännityksenä käytetään von Mises-vertailujännitystä ja rajoitusehdon arvo lasketaan sadassa pisteessä reiän reunalla.

Analyysit suoritetaan levyn neljännesmallilla, jonka periaate on esitetty kuvassa 1. Kuvan mittasuhteet eivät pidä paikkaansa, sillä neljänneslevyn koko on $400 \times 400 \text{ mm}^2$ ja reiän korkeuden puolikas on rajoitettu 10 mm:iin. Levyn paksuus $t = 5 \text{ mm}$ sekä materiaalivakiot $E = 200 \text{ GPa}$ ja $\nu = 0,3$. Reikä mallinnetaan parametrisella käyrällä käyttäen joko kolmea, neljää tai viittä ohjauspistettä, kuvassa 1 on esitetty esimerkkinä neljän ohjauspisteen malli. Reiän korkeuden ei sallita muuttuvan, joten pisteen A paikka on kiinteä. Jotta neljän käyrän muodostama kokonainen reikä olisi sileä, vaaditaan että



Kuva 1. Esimerkissä 1 käytetty neljännesrakenne, sen tuenta ja kuormitukset.

Ohjauspisteitä	Käyrän aste	Käyrän tyyppi	Suunnittelumuuttujia	$\max \sigma_{\text{vert}}/\text{MPa}$	Iteraatioita
3	2	Bézier	1	92,166	7
3	2	rat. Bézier	2	80,135	5
4	2	B-splini	3	81,456	5
4	3	Bézier	3	80,246	6
4	2	rat. B-splini	5	80,135	8
4	3	rat. Bézier	5	80,135	9
5	2	B-splini	5	80,548	6
5	3	B-splini	5	80,163	10
5	4	Bézier	5	80,144	6
5	2	rat. B-splini	8	80,135	15
5	3	rat. B-splini	8	80,142	11
5	4	rat. Bézier	8	80,135	9

Taulukko 1. Reikä äärettömässä levyssä, jännitysten minimoinnin tulokset.

käyrä kohtaa symmetria-akselit kohtisuoraan. Siksi pisteiden A ja B y -koordinaatit ovat samat, samoin pisteiden C ja D x -koordinaatit. Suunnittelumuuttujina käytetään kaikkia vapaaksi jääneitä ohjauspisteiden koordinaatteja. Kuvan 1 esimerkkitapauksessa suunnittelumuuttujina ovat siis pisteen B x -koordinaatti, pisteen C y -koordinaatti sekä pisteiden C ja D yhteinen x -koordinaatti. Jos käyrä on rationaalinen, suunnittelumuuttujina käytetään lisäksi suurinta mahdollista määrää toisistaan riippumattomia ohjauspisteiden painokertoimia. Neljän ohjauspisteen tapauksessa tämä määrä on kaksi.

Taulukossa 1 on esitetty suurin vertailujännitys ja vaadittu optimointi-iteraatioiden määrä, kun muodon kuvaamiseen käytettyä käyrää on vaihdeltu. Käyrät, joilla on yhtä monta ohjauspistettä, on ryhmitelty yhteen. Jokaisen ryhmän sisällä ensimmäisenä ovat polynomiset ja seuraavana rationaaliset käyrät. Taulukosta 1 nähdään, että melkein kaikki rationaaliset käyrät antavat saman optimituloksen. Vain viiden ohjauspisteen, kolmannen asteen rationaalisen B-splinin optimitulo on hieman eroava, luultavasti numeerisista syistä johtuen. Kuitenkin kaikki rationaaliset käyrät antavat paremman tuloksen kuin paraskaan polynomisista käyristä. Tämä ei ole yllätys, sillä ongelman teoreettinen optimimuoto, ellipsi, voidaan kuvata tarkasti rationaalisisilla käyrillä, mutta ei polynomisilla. Verrattaessa polynomisia käyriä, joilla on sama määrä ohjauspisteitä mutta eri asteluku, nähdään että korkeampiasteiset käyrät antavat tässä tehtävässä parempia tuloksia.

Esimerkki 2. Tämän esimerkin optimointiongelma on edellisessä esimerkissä käsitellyn muunnelma. Tehtävänä on optimoida kaksiakselisen jännitystilän alaisessa levyssä olevan reiän muoto siten, että levyn materiaalitylavuus on mahdollisimman pieni ja jännitys on sallituissa rajoissa. Optimointiongelma on

$$\begin{aligned} & \min_{\Gamma_d} V \\ \text{s.e. } & \sigma_{\text{vM}}(\mathbf{r}) \leq 200 \text{ MPa} \quad \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (12)$$

missä Γ_d reiälle sallittujen muotojen joukko, V on levyn materiaalitylavuus, σ_{vM} von Mises vertailujännitys ja \mathcal{D} levyn alue. Rajoitusehdon toteutuminen tarkistetaan sadassa

Ohjauspisteitä	Käyrän aste	Käyrän tyyppi	Suunnittelumuuttujia	V/mm^3	Iteraatioita
3	2	Bézier	2	2265.7	4
3	2	rat. Bézier	3	2262.6	6
4	2	B-spline	4	2243.5	8
4	3	Bézier	4	2252.2	7
4	2	rat. B-spline	6	2240.5	17
4	3	rat. Bézier	6	2241.3	24
5	2	B-spline	6	2244.3	13
5	3	B-spline	6	2242.2	12
5	4	Bézier	6	2235.8	18
5	2	rat. B-spline	9	2237.2	21
5	3	rat. B-spline	9	2235.8	22
5	4	rat. Bézier	9	2235.7	25

Taulukko 2. Reikä äärellisessä levyssä, tilavuuden minimoinnin tulokset.

reiän reunan pisteessä.

Jälleen kuva 1 esittää levyn analysointiin käytettävää neljännesmallia. Tällä kertaa kuvan mittasuhteet pitävät paikkansa, koska levyn neljänneksen koko on $25 \times 25 \text{ mm}^2$. Reiän kokoa ei rajoiteta keinotekoisesti, joten kaikilla käyrillä on yksi suunnittelumuuttuja enemmän kuin esimerkissä 1. Kuvan 1 esimerkikikäyrällä suunnittelumuuttujina ovat pisteiden A ja B yhteinen y -koordinaatti, pisteen B x -koordinaatti, pisteen C y -koordinaatti sekä pisteiden C ja D yhteinen x -koordinaatti. Kaikki muu on samoin kuin esimerkissä 1.

Taulukossa 2 on esitetty optimitilavuus ja vaadittu optimointi-iteraatioiden määrä, kun muodon kuvaamiseen käytettyä käyrää on vaihdeltu. Käyrät, joilla on yhtä monta ohjauspistettä, on ryhmitelty yhteen. Jokaisen ryhmän sisällä ensimmäisenä ovat polynomiset ja seuraavana rationaaliset käyrät. Tässä esimerkissä ei ole selvää mitkä käyrät ovat parhaita, kun vertaillaan suunnittelumuuttujien määrää, optimitilavuutta ja vaadittua optimointiaskelten määrää. Yleisesti ottaen, rationaalisilla käyrillä optimointi konvergoi hitaammin, mutta saatu optimitulos on yleensä parempi. Verrattaessa eri asteisia neljän ohjauspisteen käyriä matala-asteiset antavat parempia tuloksia, mutta eri asteisilla viiden ohjauspisteen käyrillä johtopäätös on päinvastainen.

YHTEENVETO

Tässä artikkelissa on vertailtu polynomisia ja rationaalisia parametrisia käyriä muodonoptimoinnissa. Kaksi optimointitehtävää ratkaistaan käyttäen erilaisia käyriä suunnittelureunan kuvaamiseen. Esimerkkien tulosten valossa on hankala sanoa mitkä käyrät ovat parhaita. Rationaaliset käyrät antavat parempia optimituloksia, mutta toisaalta optimoinnin kustannukset ovat myös korkeammat. Siksi lisävertailut ovat tarpeen ennen kuin pidemmälle meneviä johtopäätöksiä voidaan tehdä. Myös parempia vertailumenetelmiä olisi syytä kehittää.

KIITOKSET

Kirjoittaja haluaa kiittää dosentti Svanbergia MMA-koodista ja professori Shewchukia Triangle-koodista.

VIITTEET

H. A. Eschenauer, V. V. Kobelev ja A. Schumacher. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, **8**, no. 1, 42–51, 1994.

Jérôme Lépine, François Guibault, Jean-Yves Trépanier ja François Pépin. Optimized nonuniform rational B-spline geometrical representation for aerodynamic design of wings. *AIAA Journal*, **39**, no. 11, 2033–2041, 2001.

Les A. Piegl ja Wayne Tiller. *The NURBS Book*. Monographs in Visual Communication Series. Springer-Verlag, Berlin, toinen painos, 1997.

Uwe Schramm ja Walter D. Pilkey. The coupling of geometric descriptions and finite elements using NURBs — A study in shape optimization. *Finite Elements in Analysis and Design*, **15**, no. 1, 11–34, 1993.

Jonathan Richard Shewchuk. Triangle: Engineering a 2D quality mesh generator and Delaunay triangulator. Teoksessa Ming C. Lin ja Dinesh Manocha, toimittajat, *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*, osa 1148 sarjasta *Lecture Notes in Computer Science*, sivut 203–222. Springer-Verlag, 1996.

Krister Svanberg. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, no. 2, 359–373, 1987.

Xuelin Wang, Ji Zhou ja Yujin Hu. A physics-based parameterization method for shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **175**, no. 1–2, 41–51, 1999.

K. Wieghardt, D. Hartmann ja K. R. Leimbach. Interactive shape optimization of continuum structures. *Engineering Structures*, **19**, no. 4, 325–331, 1997.

Juha Mäkipelto, vs. yliassistentti

Tampereen teknillinen yliopisto
Teknillinen mekaniikka ja optimointi
PL 589
33101 TAMPERE