

## **AVARUUSKEHÄN DISKREETTI OPTIMOINTI**

Jussi Jalkanen

Rakenteiden Mekaniikka, vol 37  
No. 2, 2004, s. 14-26

### **TIIVISTELMÄ**

Artikkelissa tarkastellaan standardivalikoimasta otetuista putkipalkeista valmistettujen avaruuskehien diskreettiä optimointia. Tehtävänä on kehän massan minimointi siirtymä-, jännitys-, stabiilisuus- ja taajuusrajoitusehdoilla. Ratkaisualgoritmeina käytetään simuloitua jäähdytystä (simulated annealing, SA), tabuhakua (tabu search, TS) ja geneettistä algoritmia (genetic algorithm, GA).

### **JOHDANTO**

Putkipalkit ovat tyypillisiä teollisesti valmistettuja rakenneosia, joita on saatavissa vain tietyn kokoisina. Putkipalkkikehää suunniteltaessa insinöörin täytyy valita tästä annetusta valikoimasta rakenteeseen tulevat palkit. Jo melko suppealla valikoimalla kehän erilaisten kombinaatioiden määrä kasvaa hyvin suureksi. Tällöin on hankala hakea pelkän kokemuksen ja intuition avulla parasta rakennetta, ja tarvitaan optimoinnin apua.

Tässä esityksessä käsitellään avaruuskehän palkkien valitsemista parhaalla mahdollisella tavalla annetusta suorakaiteen muotoisten RHS-putkien joukosta. Optimoinnissa mahdollisten profiilien kokojakauma ja lukumäärä voi olla mielivaltainen. Tehtävänä on hakea kevein mahdollinen rakenne niin, etteivät kehän siirtymät kasva liian suuriksi, vakiovääristymisenergiähypoteesin (VVEH, von Mises) mukainen vertailujännitys ei ylitä suurinta sallittua arvoa, kehän yksittäiset palkit tai koko rakenne eivät menetä stabiilisuuttaan ja ominaistajuudet eivät satu kielletyille väleille. Kyseessä on kantavien rakenteiden diskreetin optimoinnin mitoitustehtävä, jolloin kehän topologia ja muoto eivät muutu optimoinnin kuluessa.

Rakenteen analysointi tapahtuu elementtimenetelmällä olettaen, että siirtymät ovat pieniä ja materiaali lineaarisesti kimmoista. Kehän kaikki liitokset oletetaan jäykiksi ja poikkipintapainuma pääsee tapahtumaan väännön yhteydessä vapaasti. Kuormitukset ovat ajasta riippumattomia.

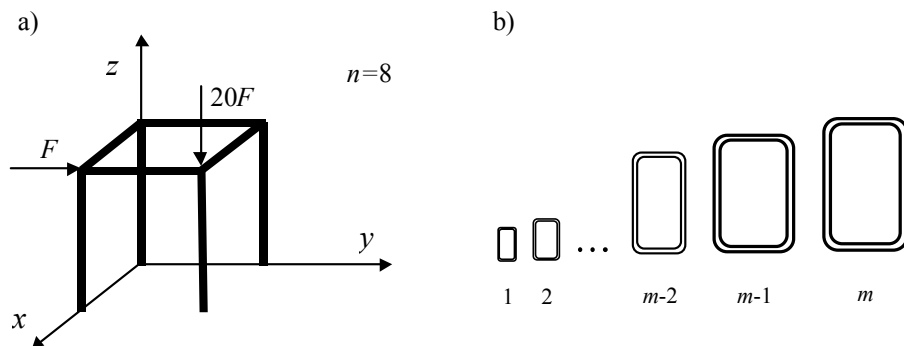
Putkipalkkikehän massan minimointiongelma on hyvin vaativa epälineaarinen, rajoitettu ja suunnittelumuuttujiltaan diskreetti optimointiongelma. Sen ratkaisemiseksi yleis-

sessä tapauksessa kohtuullisella laskentatyöllä ei ole olemassa luotettavaa algoritmia. Siten kaikkein keveimmän rakenteen eli globaalin optimin löytäminen on usein mahdotonta. Heuristiset optimointimenetelmät ovat yksinkertaisia keinoja, joilla voidaan ratkaista, ainakin likimäärin, vaikeita putkipalkkikehän massan minimointiongelman kaltaisia kombinatorisia optimointitehtäviä. Lukuisista eri heuristisista optimointimenetelmistä työhön on valittu simuloitu jäähdytys, tabuhaku ja geneettinen algoritmi.

Lähteet [2], [4] ja [12] ovat katsaustyyppisiä yleisesti diskreettiä kantavien rakenteiden optimointia käsitteleviä artikkeleita. Kirjoissa [1] ja [11] käsitellään puolestaan simuloitun jäähdytyksen, tabuhaun ja geneettisen algoritmin peruseriaatteita ja toimintaa. Aikaisemmin simuloitua jäähdytystä ja tabuhakua on sovellettu ristikko- ja kehärakenteiden optimointiin artikkeleissa [3] ja [5]. Lähteessä [9] on varsin laaja yhteenveto tutkimuksista, joissa geneettistä algoritmia on käytetty teräsrakenteiden optimoinnissa. Lopuksi kannattaa mainita vielä [6], [7] ja [8], joissa on vertailtu algoritmien keskinäistä tehokkuutta muutamassa testiongelmassa.

### SUUNNITTELUUUTTUUJAT, KOHDEFUNKTIO JA RAJOITUSEHDOT

Tarkastellaan tapausta, jossa kaikki  $n$  kpl kehän palkkeja valitaan samasta  $m$  kpl profiileita sisältävästä joukosta (kuva 1). Profiilit ovat keskenään samaa tyyppiä (RHS-putkia), mutta niiden lukumäärä ja kokojakauma on mielivaltainen.



Kuva 1. a) Kahdeksan palkin avaruuskehä. b) Suorakaiteen muotoisten putkipalkkien sarja.

Optimointiongelman suunnittelumuuttujiksi  $x_i$  valitaan palkkien profiilien järjestysluvut niiden muodostamassa sarjassa. Tällöin suunnittelumuuttujien vektori  $\mathbf{x}$ , jossa  $x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ja  $i = 1, 2, \dots, n$ , ilmoittaa kehän kunkin palkin poikkileikkauksen "suuruuden", kun profiilit on järjestetty jossakin mielessä suuruusjärjestykseen. Kehän analysoinnissa tarvittavat poikkipintasuureet saadaan poimittua suoraan putkipalkkien valmistajan toimittamasta taulukosta tai laskettua poikkileikkauksen mitoista, kun tiedetään, monesko profiili kullakin palkilla on.

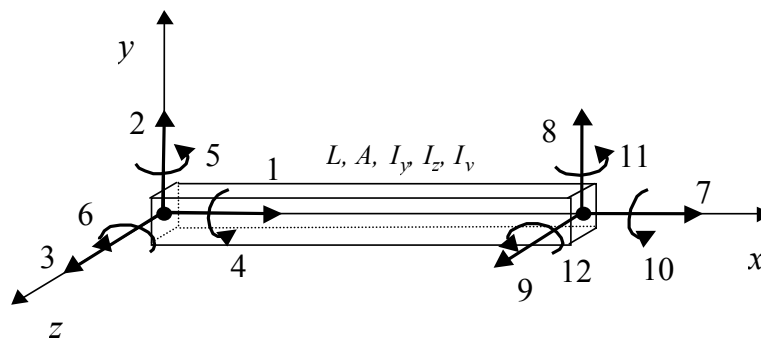
Perimmäiseksi tavoitteeksi avaruuskehän optimoinnissa on luonnollista ottaa kustannusten minimoiminen. Kehän kokonaiskustannuksiin vaikuttavat materiaalin kulutuksen

lisäksi myös esimerkiksi valmistuskustannukset. Valmistuksen aiheuttamien kustannusten suuruus riippuu puolestaan palkkien koon ohella työmenetelmistä ja on täten erilainen eri konepajoissa. Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan valmistuskustannukset olettaa vakiosuuruisiksi ja jättää pois ja keskittyä optimoinnissa vain materiaalin kulutuksen minimointiin. Tällöin optimointiongelman kohdefunktioksi valitaan kehän massa.

Rajoitusehtojen tehtävä on huolehtia siitä, että optimoinnin tuloksena saatava rakenne on käyttökelpoinen. Siirtymä-, jännitys-, stabiilisuus- ja ominaistajuusrajoitusten lisäksi voi joskus olla tarpeen ottaa huomioon myös muita, kuten esimerkiksi väsymiseen tai valmistettavuuteen liittyviä rajoitusehtoja. Lisäksi käytännön suunnittelutehtävässä ei ole useinkaan mahdollista, että kaikki kehän palkit voivat olla keskenään erilaisia. Tavoitteena on tavallisesti konstruktio, jossa tietyt palkit ovat keskenään kooltaan aina samoja. Tämä voidaan hoitaa pakottamalla yhtälörajoitusehdoilla suunnittelumuuttujien arvoja samoiksi. Yksinkertaisuuden vuoksi tässä esityksessä tarkastellaan kuitenkin tapausta, jossa kaikki kehän palkit voivat olla erilaisia.

Avaruuskehän massan minimointiongelmassa rajoitusehtoja ei ole valittu niin, että ne olisivat jonkin normin mukaisia. Tarkoituksena on toimia yleisemmällä tasolla, eikä rajoittua tiettyyn sovelluskohteeseen ja siihen liittyviin normeihin. Todellisessa suunnittelutehtävässä tulee luonnollisesti erilaiset viranomaisten asettamat vaatimukset muotoilla rajoitusehdoiksi.

Jotta rajoitusehtojen arvot voitaisiin laskea, tulee kehä analysoida esimerkiksi elementtimenetelmällä. Siirtymien, jännitysten, kuormituskertoimen ja ominaistajuuksien laskemisen vaatima työmäärä riippuu tällöin oleellisesti analysointiin käytetyn laskentamallin tarkkuudesta. Jos FEM-malli huomioi esimerkiksi suuret siirtymät ja epälineaarisen materiaalmallin, tulee siitä laskennallisesti raskas, ja laskenta-aika kasvaa luonteeltaan iteratiivisilla optimointialgoritmeilla helposti liian suureksi. Tässä työssä käytetään kunkin palkin mallintamiseen ainoastaan yhtä yksinkertaista lineaarisen kimmoteorian mukaista 12 vapausasteen avaruuspalkkielementtiä (kuva 2).



Kuva 2. 12 vapausasteen avaruuspalkkielementti.

Todellisuutta yksinkertaistavan lineaarisen FEM-mallin käyttö analysoinnissa on perusteltua juuri siksi, että rakenneanalyysien määrä kasvaa optimoinnissa väistämättä hyvin suureksi.

## OPTIMOINTIONGELMA STANDARDIMUODOSSA

Standardimuodossa esitettyä avaruuskehän massan minimointiongelma on

$$\begin{aligned}
 & \min W(\mathbf{x}) \\
 & g_i^u(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_u \\
 & g_i^\sigma(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \\
 & g_i^{\text{bl}}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad , \\
 & g^{\text{bg}}(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 & g^f(\mathbf{x}) \leq 0 \\
 & \mathbf{x} \in \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{\bar{n}} \}
 \end{aligned} \tag{1}$$

missä  $W(\mathbf{x})$  on kehän massa,  $g_i^u(\mathbf{x}) \leq 0$  ovat siirtymärajoitusehdot,  $g_i^\sigma(\mathbf{x}) \leq 0$  ovat jännitysrajoitusehdot,  $g_i^{\text{bl}}(\mathbf{x}) \leq 0$  ovat yksittäisten palkkien nurjahdusrajoitusehdot,  $g^{\text{bg}}(\mathbf{x}) \leq 0$  on koko kehän nurjahdusrajoitusehto ja  $g^f(\mathbf{x}) \leq 0$  on ominaistajuusrajoitus.  $n_u$  on siirtymärajoitusehtojen lukumäärä sekä  $\bar{n} = m^n$  ongelman kaikkien epäkäypien tai käypien ratkaisujen lukumäärä eli suunnitteluavaruuden koko.

Siirtymärajoitusehdot  $g_i^u(\mathbf{x}) \leq 0$  rajoittavat FEM-mallin haluttujen vapausasteiden  $j$  siirtymät  $u_j(\mathbf{x})$  alarajojen  $u_j^{\min}$  ja ylärajojen  $u_j^{\max}$  välille eli

$$u_j^{\min} \leq u_j(\mathbf{x}) \leq u_j^{\max} . \tag{2}$$

Kaksoisepäyhtälö voidaan jakaa edelleen kahdeksi standardimuodon tavalliseksi epäyhtälöksi ja skaalata sopivalla vakiolla  $\bar{u}$ .

Jännitysrajoitusehdot  $g_i^\sigma(\mathbf{x}) \leq 0$  rajoittavat VVEH:n mukaisen vertailujännityksen alle suurimman sallitun arvon  $\sigma^{\max}$  kaikkialla kehässä. Vertailujännityksen arvo saadaan laskettua kaavalla

$$\sigma^{\text{red}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \sqrt{\sigma_x(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})^2 + 3\tau(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})^2} , \tag{3}$$

missä  $\tilde{\mathbf{x}}$  on tarkastelukohta palkilla,  $\sigma_x(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  normaalivoimasta ja taivutusmomenteista johtuva normaalijännitys ja  $\tau(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  leikkauksvoimista ja vääntömomentista johtuva leikkausjännitys. Normaalijännityksen  $\sigma_x(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  laskenta tapahtuu teknistä taivutusteoriaa käyttäen. Vääntömomentin aiheuttama poikkileikkauksessa kaikkialla vakio leikkausjännitys  $\tau_v(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  lasketaan puolestaan ns. *Bredtin* kaavalla. Kun tähän lisätään leikkausvoimien  $Q_y(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  ja  $Q_z(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  aiheuttamat leikkausjännitysjaakaumat  $\tau_{Q_y}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  ja  $\tau_{Q_z}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$  saadaan  $\tau(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}})$ .

$$\tau(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \tau_v(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) + \tau_{Q_y}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) + \tau_{Q_z}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) \tag{4}$$

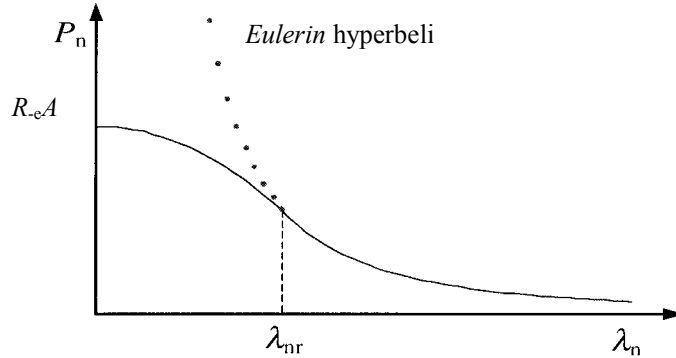
Palkkiin  $i$  liittyvässä jännitysrajoitusehdossa vaaditaan, että palkin suurin vertailujännityksen arvo  $\sigma_i^{\text{red}}(\mathbf{x})$  ei ylitä sallittua arvoa  $\sigma^{\text{max}}$ . Tällöin siis halutaan standardimuodossa skaalattuna, että

$$\frac{\sigma_i^{\text{red}}(\mathbf{x})}{\sigma^{\text{max}}} - 1 \leq 0 . \quad (5)$$

Nurjahdusrajoitusehdot  $g_i^{\text{bl}}(\mathbf{x}) \leq 0$  estävät kehän yksittäisiä palkkeja nurjahtamasta. Palkin  $i$  nurjahdusvoima  $P_{n_i}(\mathbf{x})$  lasketaan *Eulerin* kaavalla, jos redusoitu hoikkuusluku  $\lambda_{n_i}(\mathbf{x})$  on suurempi kuin materiaaliarvoista riippuva rajahoikkuusluku  $\lambda_{nr_i}$ . Jos taas  $\lambda_{n_i}(\mathbf{x}) \leq \lambda_{nr_i}$ , saadaan  $P_{n_i}$  laskettua *Timoshenkon* ja *Geren* [13] esittämällä kaavalla. Kehän liitosten osalta oletettiin, että palkit on kiinnitetty täysin jäykästi toisiinsa.

Nurjahdusrajoitusehdoissa vaaditaan, että kunkin palkin  $i$  normaalivoiman vastaluku on pienempi kuin nurjahdusvoima jaettuna lokaalin nurjahduksen varmuusluvulla  $N_{bl_i}$ , jolloin skaalattuna standardimuodossa saadaan

$$-\frac{N_{bl_i} N_i(\mathbf{x})}{P_{n_i}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0 . \quad (6)$$



Kuva 3. Nurjahdusvoima  $P_n$  on redusoidun hoikkuusluvun  $\lambda_n$  funktio.

Globaali nurjahdusrajoitusehto  $g^{\text{bg}}(\mathbf{x}) \leq 0$  huolehtii siitä, että useampi palkki tai koko kehä ei pääse yhtäaikaaisesti nurjahtamaan. Tätä varten lasketaan lineaarisen stabiiliususteorian mukaisen kahden matriisin ominaisarvotehtävän alin positiivinen ominaisarvo  $\lambda_{kr}$  yhtälöstä

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = -\lambda \mathbf{K}_g \mathbf{u} , \quad (7)$$

missä  $\mathbf{K}$  on rakenteen jäykkyysmatriisi ja  $\mathbf{K}_g$  rakenteen geometrinen jäykkyysmatriisi. Tämä ns. kriittinen kuormituskerroin  $\lambda_{kr} = \lambda_{kr}(\mathbf{x})$  on samalla suoraan varmuus kehän nurjahtamisen suhteen. Globaalissa nurjahdusrajoitusehdossa vaaditaan, että

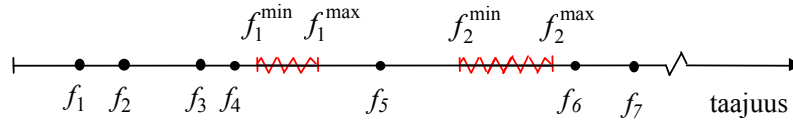
$$1 - \frac{\lambda_{kr}(\mathbf{x})}{N_{bg}} \leq 0, \quad (8)$$

missä  $N_{bg}$  on globaalin nurjahduksen suhteen haluttu varmuusluku.

Ominaistaajuusrajoitusehdossa  $g^f(\mathbf{x}) \leq 0$  on ideana estää rakenteen ominaistaajuuksia  $f_i(\mathbf{x})$  joutumasta kielletyille väleille  $[f_j^{\min}, f_j^{\max}]$ , joita on  $n_f$  kpl (kuva 4). Kehän ominaiskulmataajuudet  $\omega_i(\mathbf{x})$  ja niistä edelleen ominaistaajuudet  $f_i(\mathbf{x})$  saadaan ratkais-tua ominaisarvotehtävästä

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}, \quad (9)$$

missä  $\mathbf{K}$  on rakenteen jäykkyysmatriisi ja rakenteen  $\mathbf{M}$  (konsistentti) massamatriisi.



Kuva 4. Rakenteen ominaistaajuudet  $f_i$  eivät saa osua kielletyille väleille.

Ominaistaajuusrajoitusehdoissa vaaditaan tällöin kutakin kiellettyä väliä  $j = 1, 2, \dots, n_f$  kohden

$$f_i(\mathbf{x}) < f_j^{\min} \quad \vee \quad f_i(\mathbf{x}) > f_j^{\max} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n_{df} \quad (10)$$

Parametri  $n_{df}$  on FEM-mallin vapausasteiden lukumäärä, joka on samalla kehän mallin mukainen ominaistaajuuksien lukumäärä. Rajoitukset (10) voidaan yhdistää yhdeksi rajoitusehdoksi, jossa vaaditaan

$$\max_{j=1,2,\dots,n_f} \left\{ \max_{i=1,2,\dots,n_{df}} \left\{ \bar{f} \cdot \left( \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_j^{\min}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_j^{\max}} \right) \right\} \right\} \leq 0. \quad (11)$$

Vakion  $\bar{f}$  idea on toimia skaalauskerroimena. Vaikka kiellettyjä taajuusvälejä olisi useampiakin kuin vain yksi, on optimointiongelmassa ainoastaan yksi taajuusrajoitusehto.

## HEURISTISET OPTIMOINTIMENETELMÄT

Heuristinen tarkoittaa päättelyä, joka ei täytä ankaria loogisia vaatimuksia, mutta johtaa usein oikeaan tulokseen. On siis tavallaan kyse älykkäiden arvausten menetelmästä. Optimoinnissa tämä tarkoittaa determinististä tai stokastista algoritmia, joka yleensä tuottaa hyvän tuloksen, muttei kuitenkaan välttämättä ongelman optimiratkaisua. Heuristisia optimointimenetelmiä on lukuisia erilaisia, ja lisäksi on olemassa eri menetelmien yhdistelmiä. Niistä laajimmalle käyttöön levinneissä matkitaan usein jotakin luonnosta otettua ilmiötä. Heuristisen optimointimenetelmän idean takana voi olla myös jokin ratkaistavan ongelman erityispiirteeseen perustuva ajatus.

Taulukko 1. Heurististen optimointimenetelmien, kuten simuloitu jäähdytys, tabuhaku ja geneettinen algoritmi, tyypillisiä etuja ja puutteita.

Edut:	Puutteet:
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Yksinkertaisia.</li> <li>- Joustavia.</li> <li>- Sopivat vaikeille ongelmille.</li> <li>- Ei tarvita herkkyysoanalyysia.</li> <li>- Ei ajauduta lähimpään lokaaliin optimiin.</li> <li>- Rinnakkaistettavissa.</li> <li>- Parantavat nopeasti alkuarvausta.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tarvitaan paljon analyyseja.</li> <li>- Lopputuloksen laatu jää avoimeksi.</li> <li>- Paljon eri versioita ja parametreja.</li> <li>- Herkkyysoinformaatio puuttuu.</li> <li>- Rajoitusehtojen huomioiminen.</li> <li>- Stokastisilla algoritmeilla tarvitaan useampia optimointikertoja.</li> <li>- Helpot ja vaikeat tehtävät yhtä työläitä.</li> </ul>

Artikkelin esimerkkitehtävän ratkaisemiseen on käytetty heuristisista algoritmeista simuloitua jäähdytystä, tabuhakua ja geneettistä algoritmia. Simuloitu jäähdytys ja tabuhaku kuuluvat lokaaleihin hakualgoritmeihin ja geneettinen algoritmi on eräs lukuisista evoluutioalgoritmeista. Simuloidussa jäähdytyksessä pyritään matkimaan sulan metallin hidasta jäähtymistä. Tabuhaussa valitaan puolestaan nykyisen ratkaisun läheltä seuraavaksi iteraatiopisteeksi aina paras ns. tabulistaan kuulumaton ratkaisu. Geneettisen algoritmin idea on matkia luonnon evoluutiota ratkaisuiden muodostamassa populaatiossa.

Heuristisilla menetelmillä on paljon ominaisuuksia, jotka tekevät niistä houkuttelevia algoritmeja juuri avaruuskehän massan minimointiongelman kaltaisissa tehtävissä. Näistä ehkä tärkeimpänä voidaan mainita menetelmien perusideoiden yksinkertaisuus. Algoritmit ovat sovellettavissa hyvin monen erilaisen optimointitehtävän ratkaisemiseen varsin pienellä työväkällä. Kynnys siirtyä käyttämään näitä menetelmiä on melko matala, koska soveltaminen ei vaadi kovinkaan pitkälle menevää matematiikan tai tietotekniikan osaamista.

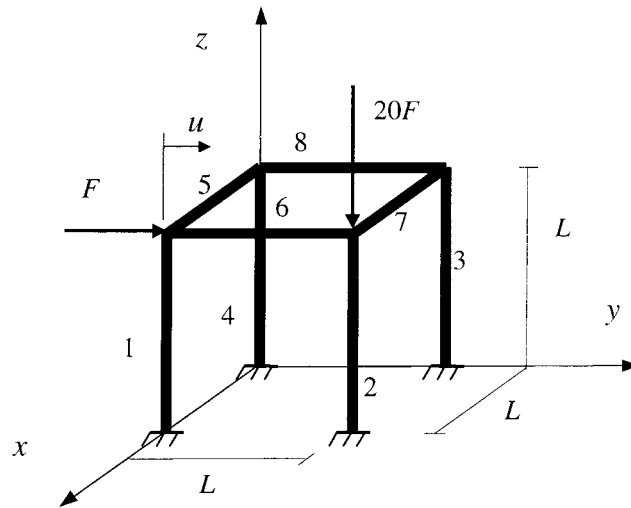
Vaikka heuristisilla menetelmillä on paljon hyviä puolia, on niillä myös selviä heikkouksia. Näistä rajoittavimmaksi muodostuu varsinkin kantavien rakenteiden optimoinnissa kohdefunktion ja rajoitusehtojen arvojen laskeminen monta kertaa. Optimoinnin aikana täytyy kohdefunktio ja rajoitusehdot laskea tyypillisesti tuhansissa eri suunnitteluavaruuden pisteissä, mikä tarkoittaa yleensä yhtä montaa FEM-analyysia. Tällöin on selvää, ettei yhteen laskentakertaan voi kulua kovin paljon aikaa, tai muuten optimointi kestää aivan liian kauan.

### ESIMERKKIONGELMA

Esimerkkiongelmassa tarkastellaan oheisen kuvan 5 mukaista kahdeksan palkin avaruuskehää kuormituksineen. Minimoitavana kohdefunktiona on kehän massa ja rajoitusehdot pakottavat voiman  $F$  suuntaisen siirtymän  $u$  pienemmäksi kuin suurin sallittu

arvo  $u^{\text{sall}} = 70$  mm, palkkien VVEH:n mukaisen vertailujännityksen kaikkialla kehässä pienemmäksi kuin maksimiarvo  $\sigma^{\text{max}} = 237$  MPa ja huolehtivat siitä, että kukin palkki erikseen ei nurjahda. Kehän FEM-mallissa kaikki palkit on mallinnettu yhdellä elementillä, ja rakenteen omaa painoa ei oteta huomioon. Palkkien 1, 2, 3 ja 4 alapään tuenta on jäykkä.

Kehän palkit täytyy valita kuvan 6 mukaisista RHS-putkista, [10]. Käytössä olevien 84 profiilin korkeudet  $h$ , leveydet  $b$ , seinämän paksuudet  $t$  ja nurkan säteet  $r$  on esitetty taulukossa 3. Materiaaliarvoina käytetään taulukon 2 arvoja. Palkit on sijoitettu niin päin, että pystysuorissa palkeissa (1, 2, 3, ja 4) kuvan 6 mukainen  $y$ -akseli on globaalin  $y$ -akselin suuntainen ja vaakasuorissa palkeissa (5, 6, 7 ja 8) kuvan 6  $y$ -akseli on globaalin  $z$ -akselin suuntainen.

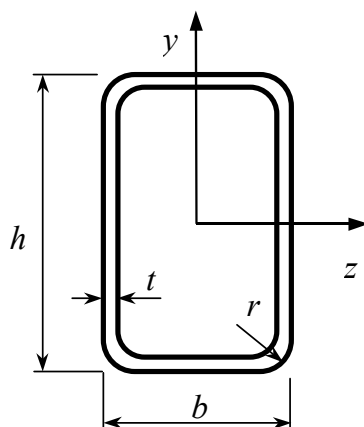


$$F=30 \text{ kN}$$

$$L=6 \text{ m}$$

Kuva 5. Kahdeksan palkin kehä esimerkkipongelmassa.





Kuva 6. Poikkileikkaukseltaan suorakaide RHS-putki.

Taulukko 2. Esimerkkitehtävän materiaaliarvot.

Kimmoduli $E$	Poissonin luku $\nu$	Tiheys $\rho$	Myötöraja $R_e$
210 GPa	0,3	7850 kg/m <sup>3</sup>	355 MPa

Taulukko 3. Rautaruukin RHS-putkien suositussarja, [10].

	$h$ [mm]	$b$ [mm]	$t$ [mm]	$r$ [mm]		$h$ [mm]	$b$ [mm]	$t$ [mm]	$r$ [mm]
1.	50	30	2	4	43.	150	100	8	20
2.	60	40	2	4	44.	160	80	4	8
3.	60	40	2,5	5	45.	160	80	5	10
4.	70	50	2	4	46.	160	80	6	12
5.	70	50	2,5	5	47.	160	90	7,1	17,75
6.	70	50	3	6	48.	180	100	5	10
7.	80	40	2,5	5	49.	180	100	6	12
8.	80	60	2	4	50.	180	100	7,1	17,75
9.	80	60	2,5	5	51.	180	100	8	20
10.	80	60	3	6	52.	200	80	6	12
11.	80	60	4	8	53.	200	100	5	10
12.	90	50	2,5	5	54.	200	100	6	12
13.	90	50	3	6	55.	200	100	8	20
14.	100	40	2,5	5	56.	200	120	5	10
15.	100	50	2,5	5	57.	200	120	6	12
16.	100	50	3	6	58.	200	120	8	20
17.	100	60	2	4	59.	200	120	10	25
18.	100	60	2,5	5	60.	220	120	6	12
19.	100	60	3	6	61.	220	120	8	20
20.	100	60	4	8	62.	220	120	10	25
21.	100	80	3	6	63.	250	150	5	10
22.	100	80	4	8	64.	250	150	6	12

23.	100	80	5	10	65.	250	150	8	20
24.	100	80	6	12	66.	250	150	10	25
25.	120	60	3	6	67.	250	150	12,5	37,5
26.	120	60	4	8	68.	260	140	6	12
27.	120	80	3	6	69.	260	140	8	20
28.	120	80	4	8	70.	260	140	10	25
29.	120	80	5	10	71.	260	180	6	12
30.	120	80	6	12	72.	260	180	8	20
31.	140	70	4	8	73.	260	180	10	25
32.	140	70	5	10	74.	300	100	5	10
33.	140	80	3	6	75.	300	100	6	12
34.	140	80	4	8	76.	300	100	8	20
35.	140	80	5	10	77.	300	200	6	12
36.	140	80	6	12	78.	300	200	8	20
37.	140	80	6,3	15,75	79.	300	200	10	25
38.	150	100	3	6	80.	300	200	12,5	37,5
39.	150	100	4	8	81.	400	200	6	12
40.	150	100	5	10	82.	400	200	8	20
41.	150	100	6	12	83.	400	200	10	25
42.	150	100	6,3	15,75	84.	400	200	12,5	37,5

Standardimuodossa esitettyä esimerkkitietä on muotoa

$$\begin{aligned}
& \min W(\mathbf{x}) \\
& \frac{u(\mathbf{x}) - u^{\text{sall}}}{\bar{u}} \leq 0 \\
& \frac{\sigma_i^{\text{red}}(\mathbf{x})}{\sigma^{\text{max}}} - 1 \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (12) \\
& -\frac{N_i(\mathbf{x})}{P_{n_i}(\mathbf{x})} - 1 \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 8 \\
& \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{bmatrix} \in \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{\bar{n}}\}
\end{aligned}$$

Siirtymärajoitusehdossa skaalausvakioksi on kokeiluiden perusteella valittu  $\bar{u} = 0,1$ . Jännitysrajoitusehdoissa pakotetaan kunkin palkin vertailujännitysten maksimi alku- ja loppupoikkileikkauksen ulkoreunalla kahdeksassa eri pisteessä enintään  $\sigma^{\text{max}}$ :n suuruiseksi. Simuloidussa jäähdytyksessä ja tabuhaussa tarvittavana alkuarvauksena käytetään ratkaisua, jossa palkkien 1, 2 ja 6 profiileiksi on valittu taulukon 3 numero 65 ja loppujen profiileiksi numero 25. Geneettisen algoritmin alkupopulaatio arvotaan.

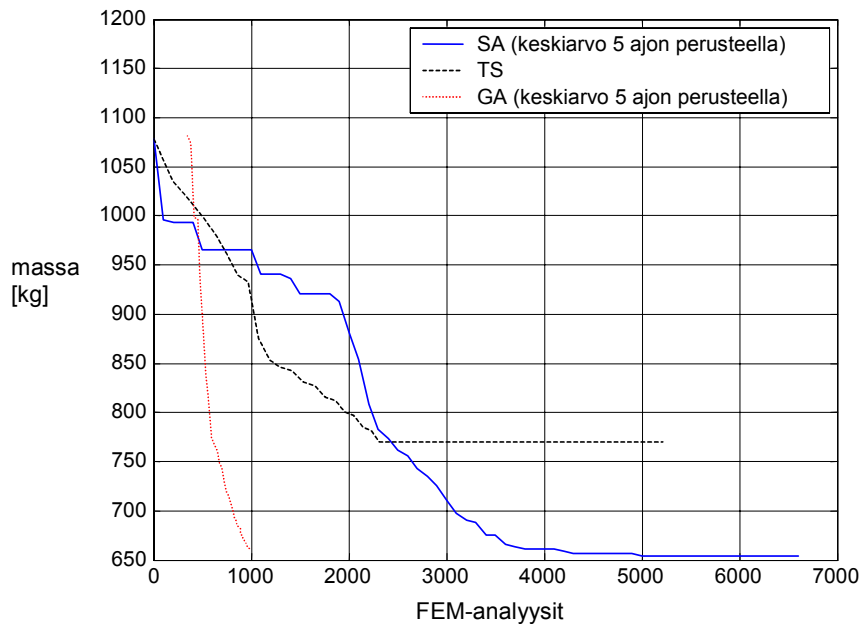
Ongelman käypien ja epäkäypien ratkaisuiden lukumäärä on  $\bar{n} = 84^8$ . Jos käytössä on tietokone, joka pystyy laskemaan kohdefunktion ja rajoitusehtojen arvot tuhannessa eri

pisteessä yhden sekunnin aikana, kestää kaikkien suunnitteluavaruuden pisteiden läpikäyminen yli 78600 vuotta. On selvää, että vielä näinkin pienessä ongelmassa vähänkään suuremmalla profiilien määrällä ei ole enää mahdollista tarkistaa kaikkia kandidaattiratkaisuja ja valita niistä parasta käypää.

Kuvassa 7 sekä taulukossa 4 on esitetty esimerkiongelmassa saadut tulokset. Koska simuloitu jäähtytys ja geneettinen algoritmi ovat stokastisia algoritmeja, tarvitaan useampia optimointikertoja luotettavien tulosten saamiseksi. Kuvan 7 tulokset ovat simuloitun jäähtytysten ja geneettisen algoritmin osalta keskimääräisiä tuloksia viidestä ajosta.

Taulukko 4. Esimerkkiongelmassa simuloitulla jäähtytysellä (SA), tabuhallalla (TS) ja geneettisellä algoritmilla (GA) löydettyt parhaat rakenteet.

Palkki	1	2	3	4	5	6	7	8	Massa [kg]
SA	81	58	2	1	1	2	4	2	648,55
TS	77	77	1	1	1	54	1	1	770,48
GA	33	82	1	1	1	38	1	1	626,17



Kuva 7. Esimerkkiongelmassa simuloitulla jäähtytysellä (SA), tabuhallalla (TS) ja geneettisellä algoritmilla (GA) saadut tulokset.

Kuvan 7 perusteella nähdään, että lopussa keskimäärin paras tulos saavutetaan simuloitulla jäähtytysellä (653 kg), hieman huonompi keskimääräinen tulos geneettisellä algoritmilla (661 kg) ja heikoin tabuhallalla (770 kg). Taulukon 4 perusteella geneettisen

algoritmin eräällä ajolla löydetään kuitenkin kaikkein kevein rakenne (626 kg). Geneettisellä algoritmilla aloituspopulaation arpominen kestää keskimäärin 348 FEM-analyysia, minkä jälkeen kohdefunktion kehitys on huomattavan nopeata. Näin ollen geneettinen algoritmi näyttäisi olevan kolmikön tehokkain tässä esimerkissä. Palkin 2 jännitysrajoitusehto on rajoitteista aina lähimpänä aktiivista.

## YHTEENVETO

Kantavien rakenteiden optimointi tarjoaa systemaattisen tavan hakea optimaalista ratkaisua avaruuskehän mitoitusongelmaan. Suunnittelussa ei kannata tyytyä vain muuttaman intuition tai kokemuksen perusteella valitun rakennevaihtoehdon keskinäiseen vertailuun vaan pyrkiä löytämään paras mahdollinen. Optimirakenne on monasti vaikeasti etukäteen arvattavissa ja jää löytymättä ilman optimoinnin hyödyntämistä.

Lasketun testiongelman perusteella simuloitu jäähdytys, tabuhaku ja geneettinen algoritmi tuntuisivat kohtuullisesti parantavan kohdefunktion arvoa alkuarvaukseen tai aloituspopulaation parhaaseen ratkaisuun nähden. Kohdefunktion kehitys on heuristisille menetelmille tyypilliseen tapaan voimakkainta optimoinnin alussa, minkä jälkeen kohdefunktion arvo tasaantuu jollekin tasolle. FEM-analyyysien määrä nousee väistämättä melko suureksi kaikilla kolmella menetelmällä.

## LÄHTEET

- [1] Aarts E., Lenstra J. K. (Ed.) 1997. *Local Search in Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons.
- [2] Arora J. S. 2002. Methods for discrete variable structural optimization. In: Burns S. A. (Ed.) *Recent Advances in Optimal Structural Design*. ASCE.
- [3] Balling R. J. 1991. Optimal steel frame design by simulated annealing. *Journal of Structural Engineering* 117, 1780-1795.
- [4] Bauer J., Gutkowski W. 1995. Discrete structural optimization: A review. In: Olhoff N., Rozvany G. I. N. (Ed.) *Proceedings of the First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*. Pergamon.
- [5] Bland J. A. 1995. Discrete-variable optimal structural design using tabu search. *Structural Optimization* 10, 87-93.
- [6] Botello S., Marroquin J. L., Onate E., van Horebeek J. 1999. Solving structural optimization problems with genetic algorithms and simulated annealing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45, 1069-1084.
- [7] Huang M. W., Arora J. S. 1996. Optimal design with discrete variables: Some numerical experiments. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40, 165-188.
- [8] Manoharan S., Shanmuganathan S. 1999. A comparison of search mechanics for structural optimization. *Computers&Structures* 73, 363-372.
- [9] Pezeshk S., Camp C. V. 2002. State of the art on the use of genetic algorithms in design of steel structures. In: Burns S. A. (Ed.) *Recent Advances in Optimal*

*Structural Design*. ASCE.

- [10] Rautaruukki Metform 1997. *Rautaruukin putkipalkkikäsikirja*. Hämeenlinna.
- [11] Reeves C. R. (Ed.) 1995. *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*. London. McGraw-Hill book company.
- [12] Thaneder P. B., Vanderplaats G. N. 1995. Survey of discrete variable optimization for structural design. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 121, No 2, 301-306.
- [13] Timoshenko S. P., Gere J. M. 1987. *Mechanics of Materials*. Boston. PWS Publishing Company.

Jussi Jalkanen, tutkija

Tampereen teknillinen yliopisto  
Teknillisen mekaniikan ja optimoinnin  
laitos  
PL 589  
33101 Tampere  
[jussi.jalkanen@tut.fi](mailto:jussi.jalkanen@tut.fi)