JOUSTAVASTI TUETTU TASOPALKKIELEMENTTI

Jussi Jalkanen

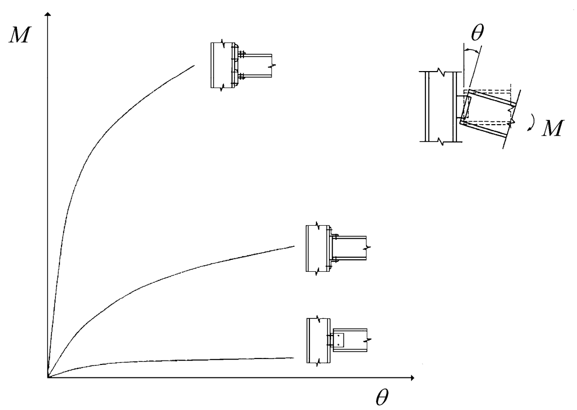
Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 37
No. 1, 2004, ss. 22-35

TIIVISTELMÄ

Tässä esityksessä tarkastellaan tasopalkkielementtiä, jolla voidaan mallintaa liitoksiltaan joustavia kehiä. Liitoksen jousto ajatellaan johtuvan liitoksessa vaikuttavasta taivutusmomentista, ja ilmiö on mallinnettu käyttämällä lineaarisia rotaatiojousia elementin päissä. Aluksi johdetaan käsitellyn elementin muotofunktiot ja sitten näiden avulla jäykkyysmatriisi, konsistentti massamatriisi ja geometrinen jäykkyysmatriisi. Matriiseille saadaan melko yksinkertaiset laskentakaavat. Lopussa käsiteltyä menetelmää on havainnollistettu laskuesimerkillä.

JOHDANTO

Kehärakenteita analysoitaessa oletetaan yleensä laskennan yksinkertaistamiseksi, että rakenteen liitokset ovat joko täysin jäykkiä tai toimivat kuten nivelet. Todellisuudessa liitosten käyttäytyminen on kuitenkin näiden kahden harvoin puhtaasti esiintyvän ääritapauksen välissä. Kuten periaatteellisesta kuvasta 1 nähdään, vaihtelee pilarin ja palkin liitoksen jäykkyys hyvin paljon riippuen käytetystä kiinnitystavasta. Lisäksi taivutusmomentin M ja sen aiheuttaman kulmanmuutoksen θ välinen yhteys on epälineaarinen.



Kuva 1. Pilarin ja palkin liitoksen jäykkyys.

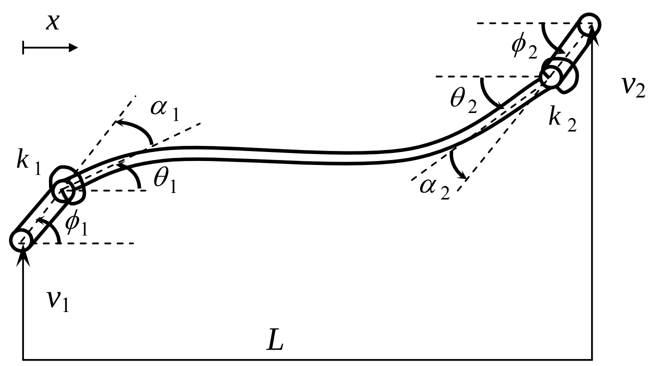
Tämän työn ideana on tarkastella tasopalkkielementtiä, joka huomioi palkin kiinnityksen joustamisen kiinnityksen kohdalla vaikuttavan taivutusmomentin johdosta. Palkin pään tuenta on mallinnettu lineaarisella rotaatiojousella, jonka jäykkyys k tunnetaan. Mikäli $k = 0$, käyttäytyy liitos kuten nivel, ja mikäli $k = \infty$, vastaa liitos täysin jäykkää kiinnitystä.

Joustava tuenta voitaisiin periaatteessa mallintaa helposti myös erillisillä jousielementeillä. Tällöin laskentamallin vapausasteiden määrä kuitenkin kasvaa ja siten tuntemattomien solmusiirtymien ratkaiseminen tulee työläämmäksi. Johtamalla jäykkyys- ja massamatriisi sekä geometrinen jäykkyysmatriisi elementille, joka huomioi tuennan joustamisen, säilyy laskentamallin vapausasteiden lukumäärä entisellään.

Joustavasti tuettuja palkkeja koskevia artikkeleita löytyy kirjallisuudesta lukuisia. Näistä voidaan mainita esimerkiksi [1], [2], [3] ja [4]. Aihe tuntuu olevan edelleen aktiivisen tutkimuksen kohteena.

MUOTOFUNKTIOT

Tarkastellaan kuvan 2 mukaista molemmista päistään rotaatiojousella tuettua neljän vapausasteen (v_1, ϕ_1, v_2 ja ϕ_2) tasopalkkielementtiä. Elementin päissä olevat jäykät palkin palat oletetaan äärettömän lyhyiksi ja niiden tarkoitus on vain helpottaa tilanteen hahmottamista. Mikäli kehän liitosten eksentrisyys halutaan huomioida, onnistuu tämä lähteessä [4] esitetyllä tavalla.



Kuva 2. Molemmista päistään rotaatiojousilla tuettu tasopalkki.

Lausutaan palkin taipuma $v(x)$ solmusiirtymien v_1, ϕ_1, v_2 ja ϕ_2 sekä vastaavien muotofunktioiden $\tilde{N}_1(x)$, $\tilde{N}_2(x)$, $\tilde{N}_3(x)$ ja $\tilde{N}_4(x)$ avulla.

$$v(x) = \tilde{N}_1(x)\, v_1 + \tilde{N}_2(x)\phi_1 + \tilde{N}_3(x)\, v_2 + \tilde{N}_4(x)\phi_2$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{N}_1(x) & \tilde{N}_2(x) & \tilde{N}_3(x) & \tilde{N}_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{q}} \tag{1}$$

Jos kulmat θ_1 ja θ_2 sekä siirtymät v_1 ja v_2 tunnetaan, on taipuman lauseke muotoa

$$v(x) = N_1(x)\, v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)\, v_2 + N_4(x)\theta_2$$

$$= \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Nq}, \tag{2}$$

missä $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$ ja $N_4(x)$ ovat tutut Hermiten polynomit

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \qquad & N_2(x) &= x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3(x) &= 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \qquad & N_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned}. \tag{3}$$

Kuvan 2 perusteella nähdään yhteydet

$$\phi_1 = \theta_1 + \alpha_1 \qquad \text{ja} \qquad \phi_2 = \theta_2 + \alpha_2 . \tag{4}$$

Kulmat α_1 ja α_2 ovat rotaatiojousista johtuvat kulmanmuutokset palkin päissä. Koska jouset oletettiin lineaarisiksi, voidaan kirjoittaa

$$\alpha_1 = \frac{M_1}{k_1} \qquad \text{ja} \qquad \alpha_2 = \frac{M_2}{k_2}, \tag{5}$$

missä M_1 ja M_2 ovat momentit palkin päissä ja k_1 sekä k_2 jousien jäykkyydet.

Huomioimalla (4) ja (5) saadaan taipuman lauseke (2) muotoon

$$v(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 - \frac{M_1}{k_1} \\ v_2 \\ \phi_2 - \frac{M_2}{k_2} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M_1}{k_1} \\ 0 \\ -\frac{M_2}{k_2} \end{bmatrix} \right) \tag{6}$$

$$= \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{p})$$

Taivutusmomentit M_1 ja M_2 kytkeytyvät taipuman $v(x)$ kanssa lausekkeilla

$$M_1 = -EI\,v''(0) \qquad \text{ja} \qquad M_2 = EI\,v''(L). \tag{7}$$

Derivoimalla (6) saadaan

$$v''(x) = \mathbf{N}''(x)(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{p}) \tag{8}$$

ja siten palkin päissä

$$\begin{aligned} v''(0) &= \frac{1}{L^2}[-6 \quad -4L \quad 6 \quad -2L]\,(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{p}) \\ v''(L) &= \frac{1}{L^2}[6 \quad 2L \quad -6 \quad 4L]\,(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{p}) \end{aligned} , \tag{9}$$

mistä edelleen momenteiksi M_1 ja M_2

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{EI}{L^2}[6 \quad 4L \quad -6 \quad 2L]\,(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{p}) \\ M_2 &= \frac{EI}{L^2}[6 \quad 2L \quad -6 \quad 4L]\,(\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{p}) \end{aligned} . \tag{10}$$

Sijoittamalla lausekkeesta (6) vektori $\mathbf{p} = \left[0 \quad -\frac{M_1}{k_1} \quad 0 \quad -\frac{M_2}{k_2}\right]^{\mathrm{T}}$ kaavaan (10) ja termejä siirtelemällä päästään muotoon

$$\begin{aligned} M_1 + \frac{EI}{L^2}\left(4\frac{M_1 L}{k_1} + 2\frac{M_2 L}{k_2}\right) &= \frac{EI}{L^2}[6 \quad 4L \quad -6 \quad 2L]\,\tilde{\mathbf{q}} \\ M_2 + \frac{EI}{L^2}\left(2\frac{M_1 L}{k_1} + 4\frac{M_2 L}{k_2}\right) &= \frac{EI}{L^2}[6 \quad 2L \quad -6 \quad 4L]\,\tilde{\mathbf{q}} \end{aligned} . \tag{11}$$

Otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät

$$\gamma_1 = \frac{EI}{Lk_1} \qquad \text{ja} \qquad \gamma_2 = \frac{EI}{Lk_2} \tag{12}$$

ja puetaan yhtälöt (11) matriisimuotoon, jolloin

$$\begin{bmatrix} 1+4\gamma_1 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_1 & 1+4\gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 4L & -6 & 2L \\ 6 & 2L & -6 & 4L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Yhtälöstä (13) ratkaisemalla saadaan

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^2\Delta} \begin{bmatrix} 6(1+2\gamma_2) & 4L(1+3\gamma_2) & -6(1+2\gamma_2) & 2L \\ 6(1+2\gamma_1) & 2L & -6(1+2\gamma_1) & 4L(1+3\gamma_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

missä lyhennysmerkintä Δ tarkoittaa lauseketta

$$\Delta = (1+4\gamma_1)(1+4\gamma_2) - 4\gamma_1\gamma_2 . \tag{15}$$

Huomioimalla momenttien M_1 ja M_2 lausekkeet saadaan $\mathbf{p}$ nyt muotoon

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6\gamma_1}{L}(1+2\gamma_2) & -4\gamma_1(1+3\gamma_2) & \frac{6\gamma_1}{L}(1+2\gamma_2) & -2\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6\gamma_2}{L}(1+2\gamma_1) & -2\gamma_2 & \frac{6\gamma_2}{L}(1+2\gamma_1) & -4\gamma_2(1+3\gamma_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}\,\tilde{\mathbf{q}}$$

Sijoittamalla (16) taipuman lausekkeeseen (6) päästään lopulta haettuun muotoon

$$v(x) = \mathbf{N}\left(\tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{q}}\right) = \mathbf{N}\left(\mathbf{I} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}\right)\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{q}} . \tag{17}$$

Joustavasti tuetun tasopalkin muotofunktio ovat siten

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1(x) &= N_1(x) + \frac{s_{21}}{\Delta}N_2(x) + \frac{s_{41}}{\Delta}N_4(x) \\ \tilde{N}_2(x) &= \left(1 + \frac{s_{22}}{\Delta}\right)N_2(x) + \frac{s_{42}}{\Delta}N_4(x) \\ \tilde{N}_3(x) &= \frac{s_{23}}{\Delta}N_2(x) + N_3(x) + \frac{s_{43}}{\Delta}N_4(x) \\ \tilde{N}_4(x) &= \frac{s_{24}}{\Delta}N_2(x) + \left(1 + \frac{s_{44}}{\Delta}\right)N_4(x) \end{aligned} , \tag{18}$$

missä s_{ij} viittaa matriisin **S** alkioon ja $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$ ja $N_4(x)$ ovat Hermiten polynomit.

Mikäli liitokset ovat jäykkiä eli $k_1 = k_2 = \infty$ pelkistyvät $\widetilde{N}_1(x)$, $\widetilde{N}_2(x)$, $\widetilde{N}_3(x)$ ja $\widetilde{N}_4(x)$ Hermiten polynomeiksi, sillä silloin $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ja siten $s_{ij} = 0$ ja $\Delta = 1$. Jos taas liitokset vastaavat niveliä eli $k_1 = k_2 = 0$, sievenevät muotofunktiot muotoon

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_1(x) &= 1 - \frac{x}{L} \qquad & \widetilde{N}_2(x) &= 0 \\ \widetilde{N}_3(x) &= \frac{x}{L} \qquad & \widetilde{N}_4(x) &= 0 \end{aligned} . \tag{19}$$

Poikittaisiirtymä muuttuu siten elementin alueella lineaarisesti, kuten sauvalla kuuluukin muuttua.

JÄYKKYYSMATRIISI

Yksinkertaisin tapa johtaa rotaatiojousilla tuetun tasopalkin jäykkyysmatriisi lienee staattinen tiivistys, missä tavallisen palkkielementin ja kahden jousielementin muodostamasta mallista tiivistetään kaksi sisäistä rotaatiovapausastetta pois. Tuloksena saadaan alkuperäiset elementit korvaava ns. superelementti. Jäljelle jäävien ulkoisten vapausasteiden siirtymien arvojen kannalta on sama, käytetäänkö alkuperäistä palkkia ja kahta jousta vai uutta superelementtiä. Staattisella tiivistyksellä tarkoitetaan statiikan ongelman osittaista etukäteen tapahtuvaa ratkaisemista, joka ei hävitä informaatiota.

Rakenteen ominaistaajuuksia ja lineaarisen stabiilisuuteorian mukaista alinta positiivista kuormituskerrointa laskettaessa päädytään ominaisarvotehtävän ratkaisemiseen. Alkuperäisellä rakenteella ja staattisen tiivistyksen jälkeisellä superelementeistä koostuvalla rakenteella on eri määrä vapausasteita ja siten myös eri määrä ominaispareja. Ominaisarvotehtävien ratkaisut eivät ole siis samat ennen ja jälkeen staattisen tiivistyksen. Tästä syystä joustavasti tuetun tasopalkin massamatriisin ja geometrisen jäykkyysmatriisin muodostamisessa käytetään muotofunktioita. Johdonmukaisuuden vuoksi on tässä esityksessä myös jäykkyysmatriisi johdettu käyttäen muotofunktioita.

Rotaatiojousilla tuetun tasopalkin kimmoenergia U koostuu itse palkkiin sitoutuneesta kimmoenergiasta U_1 ja jousiin sitoutuneesta kimmoenergiasta U_2

$$U = U_1 + U_2 . \tag{20}$$

Palkkiin varastoitunut kimmoenergia U_1 saadaan laskettua taipuman $v(x)$ avulla kaavasta

$$U_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^L EI\, v''(x)^2 \,\mathrm{d}x . \tag{21}$$

Lausekkeen (17) perusteella taipuman toiseksi derivaataksi tulee

$$v''(x) = \mathbf{N}''\left(\mathbf{I} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}\right)\tilde{\mathbf{q}}\,. \tag{22}$$

Sijoittamalla (22) U_1:n lausekkeeseen ja sieventämällä päädytään tulokseen

$$U_1 = \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\left\{\int_0^L EI\,\mathbf{N}''^{\mathrm{T}}\mathbf{N}''\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{EI}{\Delta}\mathbf{N}''^{\mathrm{T}}\mathbf{N}''\mathbf{S}\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{EI}{\Delta}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{N}''^{\mathrm{T}}\mathbf{N}''\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{EI}{\Delta^2}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{N}''^{\mathrm{T}}\mathbf{N}''\mathbf{S}\,\mathrm{d}x\right\}\tilde{\mathbf{q}} \tag{23}$$

Koska tavallisen jäykästi tuetun tasopalkin jäykkyysmatriisi $\mathbf{k}_0$ määritellään

$$\mathbf{k}_0 = \int_0^L EI\,\mathbf{N}''^{\mathrm{T}}\mathbf{N}''\,\mathrm{d}x\,, \tag{24}$$

menee U_1 edelleen muotoon

$$U_1 = \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{k}_0 + \frac{1}{\Delta}\mathbf{k}_0\mathbf{S} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_0 + \frac{1}{\Delta^2}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_0\mathbf{S}\right)\tilde{\mathbf{q}}\,. \tag{25}$$

Rotaatiojousiin varastoitunut kimmoenergia riippuu kulmista α_1 ja α_2 ollen muotoa

$$U_2 = \tfrac{1}{2}k_1\alpha_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}k_2\alpha_2^{\,2}\,. \tag{26}$$

Yhteyden $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{M_1}{k_1} & 0 & -\dfrac{M_2}{k_2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ja lausekkeen (16) perusteella nähdään, että

$$\begin{aligned} -\frac{M_1}{k_1} &= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \end{bmatrix}\tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{\Delta}\mathbf{s}_2\tilde{\mathbf{q}} \\ -\frac{M_2}{k_2} &= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix}\tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{\Delta}\mathbf{s}_4\tilde{\mathbf{q}} \end{aligned}, \tag{27}$$

missä $\mathbf{s}_2$ on matriisin $\mathbf{S}$ toinen rivi ja $\mathbf{s}_4$ vastaavasti neljäs rivi.

Huomioimalla (5) voidaan kirjoittaa edelleen

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\Delta}\mathbf{s}_2\tilde{\mathbf{q}} \qquad \text{ja} \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{\Delta}\mathbf{s}_4\tilde{\mathbf{q}}\,. \tag{28}$$

Sijoittamalla α_1 ja α_2 U_2:n lausekkeeseen sekä sieventämällä saadaan

$$U_2 = \tfrac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{k_1}{\Delta^2}\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_2 + \frac{k_2}{\Delta^2}\mathbf{s}_4^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_4\right)\tilde{\mathbf{q}}\,. \tag{29}$$

Kun yhdistetään U_1:n ja U_2:n lausekkeet (25) ja (29) nähdään rotaatiojousilla tuetun tasopalkin jäykkyysmatriisin olevan muotoa

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\,, \tag{30}$$

missä $\mathbf{k}_0$ on tavallisen tasopalkin jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{k}_0 = \frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \tag{31}$$

ja $\mathbf{k}_1$ sekä $\mathbf{k}_2$ lasketaan lausekkeista

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \frac{1}{\Delta}\mathbf{k}_0\mathbf{S} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_0 + \frac{1}{\Delta^2}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_0\mathbf{S} \\ \mathbf{k}_2 &= \frac{k_1}{\Delta^2}\mathbf{s}_2{}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_2 + \frac{k_2}{\Delta^2}\mathbf{s}_4{}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_4 \end{aligned} . \tag{32}$$

Jos halutaan huomioida myös palkin akselin suuntaiset vapausasteet, käy tämä helposti lisäämällä niitä vastaavat rivit ja sarakkeet. Tällöin uusi 6×6 jäykkyysmatriisi on

$$\overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & k_{12} & 0 & k_{13} & k_{14} \\ 0 & k_{21} & k_{22} & 0 & k_{23} & k_{24} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & k_{31} & k_{32} & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & k_{41} & k_{42} & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} . \tag{33}$$

MASSAMATRIISI

Palkin liike-energia T on siirtymän $v = v(x,t)$ avulla lausuttuna muotoa

$$T = \tfrac{1}{2}\int_0^L m\dot{v}^2 \,\mathrm{d}x . \tag{34}$$

Lauseketta (17) derivoimalla ajan suhteen saadaan

$$\dot{v} = \mathbf{N}\left(\mathbf{I} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}\right)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} . \tag{35}$$

Sijoittamalla (35) kaavaan (34) ja sieventämällä päädytään muotoon

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{\mathrm{T}}\left(\int_0^L m\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\ \mathrm{d}x + \int_0^L \frac{m}{\Delta}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\mathbf{S}\ \mathrm{d}x + \int_0^L \frac{m}{\Delta}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\ \mathrm{d}x + \int_0^L \frac{m}{\Delta^2}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\mathbf{S}\ \mathrm{d}x \right)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \tag{36}$$

Tavallisen jäykästi tuetun tasopalkin konsistentti massamatriisi on muotoa

$$\mathbf{m}_0 = \int_0^L m\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\ \mathrm{d}x\,, \tag{37}$$

joten liike-energiaksi saadaan

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{m}_0 + \frac{1}{\Delta}\mathbf{m}_0\mathbf{S} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_0 + \frac{1}{\Delta^2}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_0\mathbf{S} \right)\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\,. \tag{38}$$

Joustavasti tuetun tasopalkin konsistentti massamatriisi **m** on siten muotoa

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1\,, \tag{39}$$

missä $\mathbf{m}_0$ on tavallisen jäykästi tuetun palkin massamatriisi

$$m_0 = \frac{\rho A L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

ja $\mathbf{m}_1$ lasketaan kaavasta

$$\mathbf{m}_1 = \frac{1}{\Delta}\mathbf{m}_0\mathbf{S} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_0 + \frac{1}{\Delta^2}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_0\mathbf{S}\,. \tag{41}$$

Aksiaalisten vapausasteiden huomioiminen onnistuu lisäämällä niitä vastaavat rivit ja sarakkeet, jolloin uudeksi 6×6 massamatriisiksi saadaan

$$\overline{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{3}\rho A L & 0 & 0 & \tfrac{1}{6}\rho A L & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{12} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{21} & m_{22} & 0 & m_{23} & m_{24} \\ \tfrac{1}{6}\rho A L & 0 & 0 & \tfrac{1}{3}\rho A L & 0 & 0 \\ 0 & m_{31} & m_{32} & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{41} & m_{42} & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}. \tag{42}$$

GEOMETRINEN JÄYKKYYSMATRIISI

Mikäli muotofunktiot $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$, … tunnetaan, elementin geometrinen jäykkyysmatriisi saadaan niiden avulla lausekkeesta

$$\mathbf{k}_{\mathrm{g}} = P\int_0^L \mathbf{N}'^{\mathrm{T}}\mathbf{N}'\,\mathrm{d}x, \tag{43}$$

missä P on normaalivoima.

Lausekkeen (17) perusteella nähdään, että tällä kertaa muotofunktioiden derivaatta on muotoa

$$\widetilde{\mathbf{N}}' = \mathbf{N}'\left(\mathbf{I} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}\right). \tag{44}$$

Sijoittamalla (44) kaavaan (43)ja sieventämällä päädytään muotoon

$$\mathbf{k}_{\mathrm{g}} = \int_0^L P\,\mathbf{N}'^{\mathrm{T}}\mathbf{N}'\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{P}{\Delta}\mathbf{N}'^{\mathrm{T}}\mathbf{N}'\mathbf{S}\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{P}{\Delta}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}'^{\mathrm{T}}\mathbf{N}'\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{P}{\Delta^2}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}'^{\mathrm{T}}\mathbf{N}'\mathbf{S}\,\mathrm{d}x\,. \tag{45}$$

Koska jäykästi tuetun tasopalkin geometrinen jäykkyysmatriisi on muotoa

$$\mathbf{k}_{\mathrm{g0}} = P\int_0^L \mathbf{N}'^{\mathrm{T}}\mathbf{N}'\,\mathrm{d}x, \tag{46}$$

tulee joustavasti tuetun tasopalkkielementin geometriseksi jäykkyysmatriisiksi

$$\mathbf{k}_{\mathrm{g}} = \mathbf{k}_{\mathrm{g0}} + \mathbf{k}_{\mathrm{g1}}, \tag{47}$$

missä $\mathbf{k}_{\mathrm{g0}}$ on tavallisen palkkielementin geometrinen jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{k}_{\mathrm{g0}} = \frac{P}{30L}\begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{48}$$

ja $\mathbf{k}_{\mathrm{g1}}$ on puolestaan muotoa

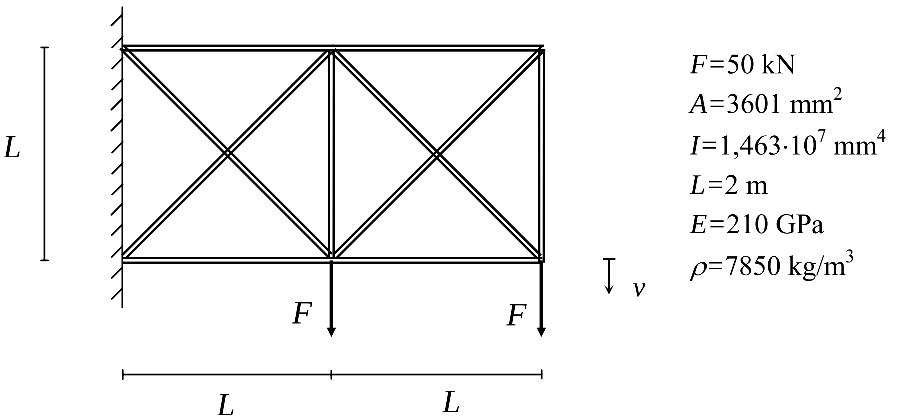
$$\mathbf{k}_{\mathrm{g1}} = \frac{1}{\Delta}\mathbf{k}_{\mathrm{g0}}\mathbf{S} + \frac{1}{\Delta}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_{\mathrm{g0}} + \frac{1}{\Delta^2}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_{\mathrm{g0}}\mathbf{S}\,. \tag{49}$$

Aksiaaliset vapausasteet huomioiden saadaan 6×6 geometriseksi jäykkyysmatriisiksi

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathrm{g}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\mathrm{g}11} & k_{\mathrm{g}12} & 0 & k_{\mathrm{g}13} & k_{\mathrm{g}14} \\ 0 & k_{\mathrm{g}21} & k_{\mathrm{g}22} & 0 & k_{\mathrm{g}23} & k_{\mathrm{g}24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{\mathrm{g}31} & k_{\mathrm{g}32} & 0 & k_{\mathrm{g}33} & k_{\mathrm{g}34} \\ 0 & k_{\mathrm{g}41} & k_{\mathrm{g}42} & 0 & k_{\mathrm{g}43} & k_{\mathrm{g}44} \end{bmatrix}. \tag{50}$$

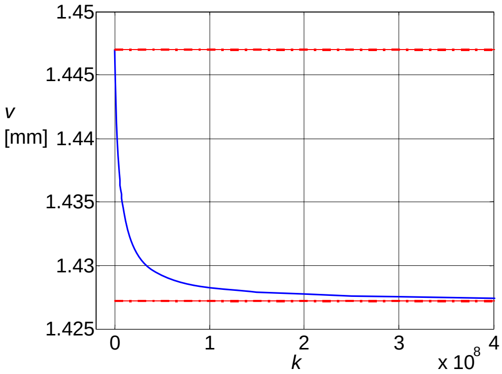
ESIMERKKITEHTÄVÄ

Tarkastellaan esimerkkitehtävässä kuvan 3 mukaista kymmenestä palkista koottua rakennetta. Kehän palkit ovat suorakaiteen muotoisia 180 mm korkeita, 100 mm leveitä ja seinämän paksuudeltaan 7,1 mm olevia putkipalkkeja. Risteäviä palkkeja ei ole liitetty yhteen.

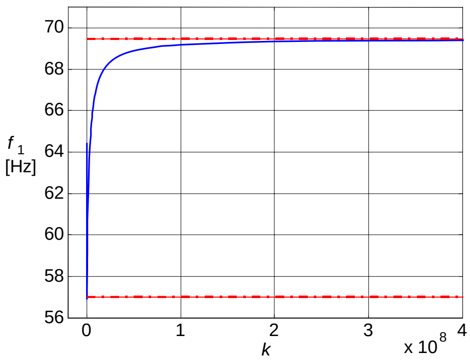


Kuva 3. Kymmenen palkin kehä.

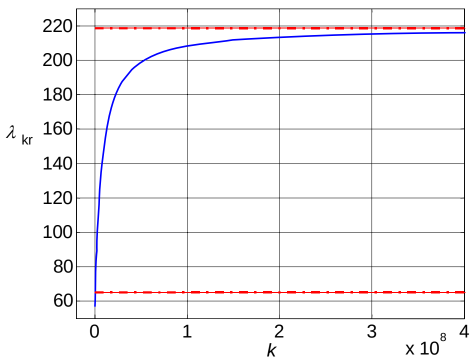
Rakenteen laskentamallissa on kaksi edellä kuvatun kaltaista kuuden vapausasteen elementtiä kutakin palkkia kohden, jolloin tuntemattomien vapausasteiden määräksi tulee 42. Ratkaistaan mallilla oikeanpuoleisen voiman vaikutuspisteen pystysiirtymä v, rakenteen alin ominaistaajuus f_1 ja pienin lineaarisen stabiilisuusteorian mukainen kuormituskerroin λ_{kr} palkkien liitosten jäykkyyden k funktiona. Tällöin on oletettu, että arvo $k=10^{15}$ vastaa saman palkin peräkkäisten elementtien välistä jäykkää liitosta. Saadut tulokset on esitetty oheisissa kuvissa 4, 5 ja 6. Kuvissa olevat vaakasuorat katkoviivat vastaavat Ansys-ohjelmalla 20 tasopalkkielementin mallilla saatuja tuloksia, kun kaikki liitokset ovat jäykkiä ($k=\infty$) tai palkkien liitoksista on taivutusjäykkyys poistettu ($k=0$). Kuvaajia 4, 5 ja 6 laskettaessa jäykkyyttä k ei voitu asettaa tasan nollaksi. Saatujen kokemusten perusteella k voi kuitenkin olla ilman suurempia numeerisia ongelmia melko lähellä nollaa tai vastaavasti lukuarvoltaan hyvin suuri.



Kuva 4. Pystysiirtymä v palkin päiden jäykkyyden k funktiona.



Kuva 5. Alin ominaistaajuus f_1 palkin päiden jäykkyyden k funktiona.



Kuva 6. Lineaarisen stabiilisuusteorian mukainen kuormituskerroin λ_{kr} palkin päiden jäykkyyden k funktiona.

Kuvien 4 - 6 perusteella voidaan tehdä seuraavat päätelmät:

- Liitosten jäykkyyden kasvaessa nollasta käyttäytyy rakenne nopeasti kuten kehä.
- Kun liitosten jäykkyys lisääntyy, pienenevät siirtymät, alin ominaistaajuus kasvaa ja stabiilisuus menetetään vasta suuremmalla kuormituksella.
- Pystysiirtymä v muuttuu vähän, mutta alin ominaistaajuus f_1 ja kriittinen kuormituskerroin λ_{kr} muuttuvat melko paljon, kun k kasvaa nollasta.
- Joustavasti tuetulla tasopalkkielementillä saadut tulokset sattuvat hyvin Ansys-ohjelmalla laskettujen vertailuratkaisujen väliin.

YHTEENVETO

Palkin päiden tuennan jousto voidaan mallintaa melko yksinkertaisella tavalla käyttäen palkin päissä lineaarisia rotaatiojousia. Esitetty menetelmä ei vastaa täysin todellista epälineaarista käyttäytymistä, mutta on kuitenkin parempi vaihtoehto kuin olettaa liitokset suoraan niveliksi tai täysin jäykiksi.

Esitetyllä tavalla FEM-mallin tuntemattomien vapausasteiden määrä ei kasva, vaikka tuennan jousto huomioidaan. Tavallisen jäykästi tuetun tasopalkin jäykkyys- ja massamatriisi sekä geometrinen jäykkyysmatriisi voidaan muuntaa vastaamaan joustavasti tuettua palkkia kertomalla niitä tuennan jäykkyydestä riippuvalla vakiomatriisilla **S**. Tällöin näiden matriisien laskenta ei muutu oleellisesti työläämmäksi.

Laskuesimerkin perusteella nähdään, että tuennan joustavuudella ei ole juuri vaikutusta ristikkomaisen rakenteen siirtymiin, mutta sillä on melko suuri vaikutus alimpaan ominaistaajuuteen f_1 ja lineaarisen stabiilisuusteorian mukaiseen kriittiseen kuormituskertoimeen λ_{kr}. f_1:n ja λ_{kr}:n herkkyys liitosten jäykkyydelle k liittynee rakenteen käytöksen muuttumiseen ristikosta kehäksi. Ominaisarvojen muuttuessa myös niitä vastaavat ominaismuodot muuttuvat, jolloin ei ole enää kyse samasta ilmiöstä.

Liitosten jäykkyyden ilmoittavat jousivakiot oletettiin tässä esityksessä etukäteen tunnetuiksi. Niiden suuruuden arviointi voi olla kuitenkin hankala tehtävä. Kehän liitoksen jäykkyyteen vaikuttaa valitun liitostyypin lisäksi liitettävien palkkien tyyppi, koko ja lukumäärä.

LÄHTEET

[1] Pui, P., Chui, T. & Chan, S. L. 1997. Vibration and deflection characteristics of semi-rigid jointed frames. *Engineering Structurers 19, 12*, s. 1001-1010.

[2] Sekulovic, M. & Salatic, R. 2001. Nonlinear analysis of frames with flexible connections. *Computers & Structures 79*, s. 1097-1107.

[3] Sekulovic, M., Salatic, R. & Nefovska, M. 2001. Dynamic analysis of steel frames with flexible connections. *Computers & Structures 80*, s. 935-955.

[4] Suarez, L. E., Singh, M. P. & Matheu, E. E. 1996. Seismic responcse of structural frameworks with flexible connections. *Computers & Structures 58, 1*, s. 27-41.

Jussi Jalkanen, tutkija

Tampereen teknillinen yliopisto,
Teknillisen mekaniikan ja optimoinnin laitos, PL 589, 33101 Tampere
jussi.jalkanen@tut.fi