OPTIMAALINEN KILPAJUOKSU

Matti A Ranta

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 36
Nro 1, 2003, s. 22-37

Tiivistelmä: Artikkelissa esitetään yksinkertainen energian tuoton malli ja sovelletaan sitä neliöllisen vastuslain kanssa juoksuun. Malli ottaa huomioon myös kaarteen vaikutuksen. Mallin neljä parametriä määritetään maailmanennätystilaston (katso [10]) perusteella. Integraalit ratkeavat yhtä lukuunottamatta analyyttisesti.

LIIKEYHTÄLÖ JA ENERGIANTUOTON MATEMAATTINEN MALLI

Kineettisessä probleemassa lähdetään liikkeelle käytettävissä olevasta lihasvoimasta. Integroidaan Newtonin II lain

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \mathbf{D} \tag{1}$$

avulla muodostetut liikeyhtälöt, missä m on massa, $\mathbf{v}$ nopeus sekä $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{D}$ voima ja vastusvoima. Halutut liikesuureet saadaan kaavan (1) alkuehtoihin sovitetun ratkaisun jälkeen joko analyyttisessä tai suoraan numeerisessa muodossa. Useissa varsinkin yksinkertaistetuissa tapauksissa on edullisempaa käyttää jotain liikeyhtälöiden (1) väli-integraalia. Näistä tavallisimpia ovat: energian, liikemäärän ja kulmaliikemäärän säilymisen periaatteet.

Ihmisen energian tuotto voidaan tunnetusti pelkistää seuraavasti:

- Ihmisellä on ennen urheilusuoritusta elimistössään latenttina tietty energiamäärä E_0, jota ei voida ylittää.
- Urheilusuorituksen aikana hän ponnistellessaan voimalla $\mathbf{F} \leq \mathbf{F}_{\max}$ kuluttaa energiavarastoaan teholla $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$.
- Urheilusuorituksen aikana aerobinen prosessi täydentää energiavarastoa korkeintaan maksimaalisella vakioteholla Σ.

Energiatasapaino antaa tehoyhtälön

$$\frac{dE}{dt} = \Sigma - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{2}$$

Energian $E(t)$ on toteutettava alkuehto

$$E(0) = E_0 \quad .$$

Integroimalla tehoyhtälö (2) voidaan energian rajoitusehto kirjoittaa muotoon

$$E_0 \geq E(t) \equiv E_0 + \Sigma\, t - \int_0^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\, dt \geq 0 \quad .$$

KILPAJUOKSU

Prof. Keller on julkaisuissaan ([1] ja [2]) käsitellyt kilpajuoksua ja ratkaissut periaatteessa optimaalisen vauhdinjaon eripituisilla juoksumatkoilla. Hän on käyttänyt liikeyhtälössä (1) lineaarista vastusmallia. Analyysissään Keller totesi, että jos juostava matka on ns. kriittistä matkaa pidempi, on optimaalinen juoksustrategia seuraava:

- Juostavan matkan pituudesta riippuen heti lähdön jälkeen n. 1-2 s kiihdytysvaiheen aikana vauhti kiihdytetään maksimivoimalla matkanopeuteen.
- Se valitaan niin, että energiavarasto on vakionopeusvaiheen jälkeen tyhjä eli $e = 0$ juostavan matkan pituudesta riippuen 1-5 s ennen maaliintuloa.
- Viimeiset metrit eli hidastusvaihe juostaan vakioteholla $f\, v = \sigma$ siten, että $e \equiv 0$. Tällöin vauhti hidastuu melkoisesti kohden metabolista nopeutta.

Eräissä muissa tutkimuksissa on käytetty neliöllistä vastusmallia. Vastusmalli ei vaikuta nopeimpaan loppuaikaan tähtäävään juoksustrategiaan eli vauhdinjaon optimointiin, ainoastaan numeeriset yksityiskohdat hieman muuttuvat. Lähtöyhtälöiksi voidaan ottaa liikeyhtälö (1) ja tehoyhtälö (2) massalla jaettuna. Merkitään

$$f(t) = F(t)/m \le f_{\max} \quad , \quad e_0 \ge e(t) = E(t)/m \ge 0 \quad , \quad \sigma = \Sigma/m$$

ja oletetaan vastuksen olevan muotoa

$$\frac{D}{m} = k_R v^2 + k_D (v - v_t)^2 \quad ,$$

missä k_R on jalkojen edestakaisesta liikuttamisesta (rotaatiosta) tuleva vastusosuus ja k_D on ilmanvastuksen osuus. Myötätuuli on positiivinen eli $v_t > 0$. Lähteessä [6] esitetään kertoimille arviot $k_R = 0.0464\, m^{-1}$ ja $k_D = 0.0033\, m^{-1}$, joten jalkojen rotaatiovastus on tyynellä säällä ilmanvastukseen nähden yli kymmenkertainen.

Liikeyhtälö (1) kuuluu nyt

$$\frac{dv}{dt} = f - k_R v^2 - k_D (v - v_t)^2 \quad , \quad v(0) = 0 \tag{3}$$

ja energiayhtälö (2)

$$\frac{de}{dt} = \sigma - f\, v \quad , \quad e(0) \equiv e_0 \ge e(t) \ge 0 \ . \tag{4}$$

Liikeyhtälön (3) integrointi (vertaa [7]) onnistuu analyyttisesti vain jos f on vakio, joten yleensä on parasta turvautua numeeriseen integrointiin. Tyynellä säällä on $v_t \equiv 0$, jolloin liikeyhtälö yksinkertaistuu muotoon ($k = k_R + k_D$)

$$\frac{dv}{dt} + kv^2 = f \quad . \tag{5}$$

Liikeyhtälö (5) voidaan integroida analyyttisesti, kun $f = f_{\max}$ on vakio, jolloin saadaan

$$t = \frac{1}{kV}\, ar\tanh\left(\frac{v}{V}\right) \quad , \tag{6}$$

$$x = -\frac{1}{2k}\ln\left[1-\left(\frac{v}{V}\right)^2\right] \equiv \frac{1}{k}\ln\cosh(kVt) \cong Vt - \frac{1}{k}\ln 2 \quad , \tag{7}$$

missä V on määritelty yhtälössä (9). Eliminoimalla voima f yhtälöistä (4) ja (5) seuraa tehoyhtälö

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}v^2 + e\right) = \sigma - kv^3 \quad . \tag{8}$$

Suurin mahdollinen nopeus

$$V = \left(f_{\max}/k\right)^{1/2} \tag{9}$$

suoralla radalla saavutetaan raja-arvona yhtälöstä (5), kun $f = f_{\max}$. Suurin mahdollinen jatkuva nopeus eli metabolinen nopeus

$$U = (\sigma/k)^{1/3} \tag{10}$$

saadaan raja-arvona yhtälöstä (8). Edellä kuvattu juoksumalli sisältää neljä parametria:

k yhdistetty vastus
V tai $f_{\max}$ äärimmäinen lyhytaikainen suorituskyky
U tai σ äärimmäinen jatkuva suorituskyky
e_0 perusenergiavarasto.

PISIN PIKAJUOKSUMATKA ELI KRIITTINEN MATKA

Tarkastellaan seuraavaa kysymystä: Kuinka pitkän ajan T_c eli miten pitkän matkan D_c juoksija kykenee juoksemaan maksimaalisella voimalla ennenkuin energiavarasto on tyhjä? Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että juoksu tapahtuu suoralla radalla. Integroidaan energiayhtälö (4), jolloin kaavojen (7)-(10) avulla voidaan johtaa likimääräinen mutta hyvin tarkka energiayhtälö probleeman ratkaisemiseksi:

$$e(T_c) = e_0 + \sigma T_c - f_{\max}\frac{1}{k}\ln\cosh(kVT_c) \approx e_0 + V^2\ln 2 - k\left(V^3 - U^3\right)T_c = 0 \quad .$$

Tästä seuraa kriittinen aika

$$T_c = \frac{e_0 + V^2 \ln 2}{k\left(V^3 - U^3\right)} \tag{11}$$

ja vastaava kriittinen matka

$$D_c = \frac{e_0 V + U^3 \ln 2}{k\left(V^3 - U^3\right)} \quad . \tag{12}$$

Laskut osoittavat, että 25 s < T_c < 30 s ja 250 m < D_c < 300 m.

JUOKSU NORMAALILLA 400 m RADALLA

Vain sadan metrin juoksussa koko matka juostaan suoraan. Muita matkoja pituudeltaan D juostaan niin, että maali on aina viimeisen 100 m suoran päässä. Tällöin matkan pituudesta riippuen lähdetään joko kaarteeseen tai suoralle. Koska radan pituus on 400 m ja kaarteita on kaksi, on kaikilla 200 m:llä jaollisilla matkoilla lähtö kaarteeseen. Toisin sanoen, jos $D/100\,\mathrm{m}$ on parillinen kokonaisluku, tapahtuu lähtö kaarteesta. Jos taas $D/100\,\mathrm{m}$ on pariton kokonaisluku, tapahtuu lähtö suoralta. Tavallisimmista kilpailumatkoista vain 300 m ja 1500 m lähtevät suoralle. Mailimatkoja ei tässä tarkastella.

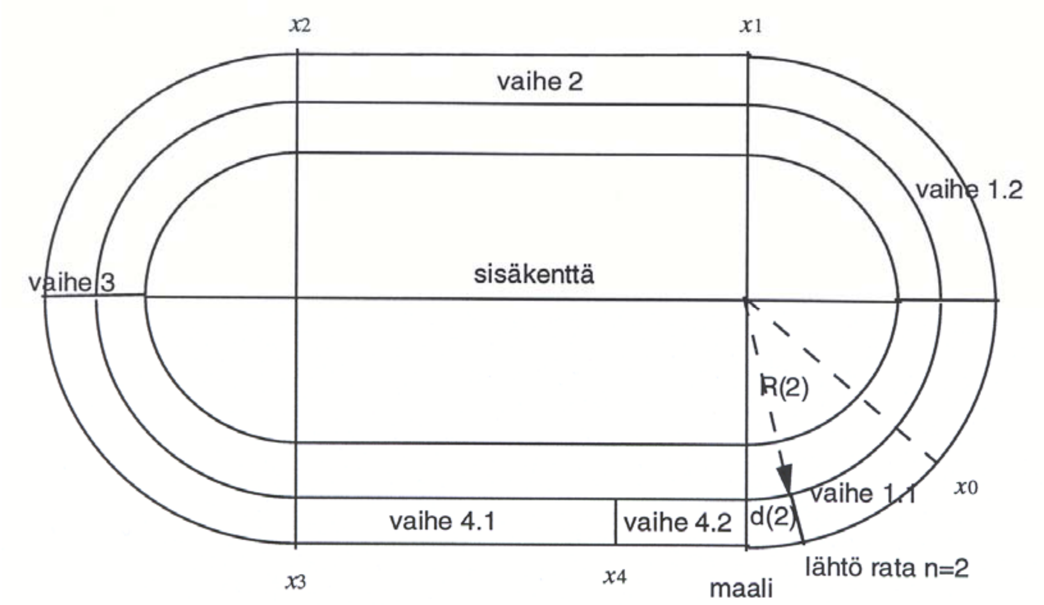
Lähteen [4] mukaan kaarrejuoksussa tulee liikeyhtälössä (5) voima f korvata voimalla

$$f_t = \sqrt{f^2 - \left(v^2/R\right)^2} \,,$$

joka ottaa huomioon kaarrejuoksussa syntyvän keskipakoisvoiman kompensoimisen lihasvoimalla.

Tarkastellaan 400m juoksua normaalilla radalla (katso Kuva 1). Koska radat numeroidaan sisäradalta alkaen, on normaalikokoisen urheilukentän radan n kaarevuussäde metreinä $R = R(n) = 100/\pi + 1.22(n-1)$. Lähtö tapahtuu maalilinjasta kaarteeseen päin mitattuna matkan $d(n) = 1.22(n-1)2\pi$ metreinä radan sisäreunaa pitkin. Matkat x_0, x_1, x_2, x_3 ja x_4 lasketaan lähdöstä asianomaiseen pisteeseen.

Matka voidaan jakaa kuuteen eri vaiheeseen. Nopeuden v, matkan x ja energian e määrittävät yhtälöt eli tilayhtälöt ovat optimivauhdinjaon mukaan seuraavat:



Kuva 1. Periaatteellinen kuva 400m juoksun eri vaiheista toisella radalla, jossa n=2

1.1 Kiihdytysvaihe ensimmäisessä kaarteessa ($0 \le t \le t_0$)

$$\frac{dv}{dt} + kv^2 = \sqrt{f_{\max}^2 - \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}, \qquad v(0) = 0 \tag{13a}$$

tai

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx} + kv^2 = \sqrt{f_{\max}^2 - \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}, \qquad v(0) = 0 \tag{13b}$$

$$\frac{dx}{dt} = v, \qquad x(0) = 0 \tag{14}$$

$$e(t) = e_o + \sigma t - f_{\max}\, x(t) \quad , \qquad e(0) = e_0 \quad . \tag{15}$$

Liikeyhtälöä (13a) ei voida analyyttisest integroida, vaan täytyy tyytyä numeeriseen ratkaisuun. Liikeyhtälön (13b) alkuehtoihin $v(0) = 0$ ja $x(0) = 0$ sovitettu ratkaisu – matka nopeuden funktiona – saadaan muotoon

$$x = \frac{1}{2k\left[1 + (1/kR)^2\right]}\left\{\frac{1}{kR}\arcsin\left(\frac{(v/V)^2}{kR}\right) - \ln\left[\sqrt{1 - \left(\frac{(v/V)^2}{kR}\right)^2} - \left(\frac{v}{V}\right)^2\right]\right\} \quad . \tag{16}$$

Kiihdytysmatkan pituus x_0 saadaan matkanopeusehdosta (johdetaan myöhemmin 4.1)

$$v = u = V\sqrt{s} \quad , \tag{17}$$

mikä antaa

$$x_0(s) = \frac{1}{2k\left[1 + (1/kR)^2\right]}\left\{\frac{1}{kR}\arcsin\left(\frac{s}{kR}\right) - \ln\left[\sqrt{1 - \left(\frac{s}{kR}\right)^2} - s\right]\right\} \quad . \tag{18}$$

Tässä s on parametri, joka kuvaa voiman käyttöä suoralla. Myöhemmin esiintyvä r on vastaava parametri kaarteessa.

1.2 Vakionopeusvaihe $u = v(t_0)$ ensimmäisessä kaarteessa $(t_0 \le t \le t_1)$

Tällöin on voimassa $dv/dt = 0$, $u = v(t_0)$, $r = f_{kaarre}/f_{\max}$ = vakio, jolloin

$$ku^2 = \sqrt{r^2 f_{\max}^2 - \left(\frac{u^2}{R}\right)^2} \tag{19}$$

$$x(t) = x(t_0) + (t - t_0)u \tag{20}$$

$$e(t) = e(t_0) + (t - t_0)\sigma - \left[x(t) - x(t_0)\right] r\, f_{\max} \quad . \tag{21}$$

2. Vakionopeus u ensimmäisellä suoralla $(t_1 \le t \le t_2)$

Tällöin on voimassa $dv/dt = 0$, $s = f_{suora}/f_{\max}$ = vakio, jolloin

$$ku^2 = s\, f_{\max} \tag{22}$$

$$x(t) = x(t_1) + (t - t_1)u \tag{23}$$

$$e(t) = e(t_1) + (t - t_1)\sigma - \left[x(t) - x(t_1)\right] s\, f_{\max} \quad . \tag{24}$$

3. Vakionopeus u toisessa kaarteessa $(t_2 \le t \le t_3)$

Nyt on $dv/dt = 0$, $r = f_{kaarre}/f_{\max}$ = vakio, jolloin

$$ku^2 = \sqrt{r^2 f_{\max}^2 - \left(\frac{u^2}{R}\right)^2} \tag{25}$$

$$x(t) = x(t_2) + (t - t_2)u \tag{26}$$

$$e(t) = e(t_2) + (t - t_2)\sigma - \left[x(t) - x(t_2)\right] r\, f_{\max} \quad . \tag{27}$$

4.1 Vakionopeus u toisella suoralla $(t_3 \le t \le t_4)$

Tällöin on taas $dv/dt = 0$, $s = f_{suora}/f_{\max}$ = vakio, jolloin

$$ku^2 = s\, f_{\max} \tag{28}$$

$$x(t) = x(t_3) + (t - t_3)u \tag{29}$$

$$e(t) = e(t_3) + (t - t_3)\sigma - \left[x(t) - x(t_3)\right] s\, f_{\max} \quad . \tag{30}$$

Yhtälöistä (22) tai (28) saadaan yhtälön (9) avulla matkanopeus

$$u = V\sqrt{s} \quad . \tag{31}$$

Voima $r\, f_{\max}$ kaarteessa verrattuna voimaan $s\, f_{\max}$ suoralla eli suhde r/s, jotta nopeus pysyisi vakiona, saadaan yhtälöistä (19) tai (25) yhtälön (31) avulla. Sen suuruus vaihtelee radan säteen mukaan

$$\underset{n=1}{1.120} \geq r/s = \sqrt{1 + \left(1/kR\right)^2} \geq \underset{n=8}{1.076} \tag{32}$$

Tätä (tai sen neliöjuurta) voidaan pitää kaarteen haitta- tai rasituskertoimena suoraan rataan verrattuna.

AIKA JA MATKA ENNEN HIDASTUSVAIHDETTA

Juoksuradan $D = 400$ m geometriasta (Kuva 1) voidaan päätellä matkat

$$x_1 \quad = x(t_1) \qquad = \tfrac{1}{2} D - R(n)\pi \tag{33}$$

$$x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) = \tfrac{1}{4} D \tag{34}$$

$$x_3 - x_2 = x(t_3) - x(t_2) = R(n)\pi \tag{35}$$

$$x_3 \quad = x(t_3) \qquad = \tfrac{3}{4} D \quad . \tag{36}$$

Laskemalla yhteen energiayhtälöt (15), (21), (24), (27) ja (30) hidastumisvaiheen alussa, kun $t = t_4$, saadaan energia

$$e(t_4) = e_o + \sigma t_4 - f_{\max}\left[(1 - r)x_0 + s x_4 + (r - s)\tfrac{1}{2} D\right] = 0 \quad . \tag{37}$$

Samalla tavalla laskemalla yhteen matkayhtälöt (20), (23), (26) ja (29) saadaan matka

$$x_4 = x(t_4) = x_0 + (t_4 - t_0)V\sqrt{s} \quad . \tag{38}$$

Koska ehto hidastusvaiheen alkamiselle on $e(t_4) = 0$, seuraa yhtälöistä (37) ja (38) aika

$$t_4(s) = \frac{e_o + kV^2\left[Vs^{3/2}t_0 - (1-r+s)x_0 - (r-s)\tfrac{1}{2}D\right]}{k\left[\left(V\sqrt{s}\right)^3 - U^3\right]} \quad . \tag{39}$$

Vaikka teoria on johdettu 400 m juoksulle, pätee yhtälö (39) sisärataa pitkin kaikille pidemmille matkoille, jotka ovat 200 m:lla jaollisia. Lähtö on kaarteeseen ja x_0 saadaan yhtälöstä (18), mutta t_0 täytyy ratkaista yhtälöstä (13a) numeerisesti.
Jos suure $D/100\ \mathrm{m}$ on pariton kokonaisluku, tulee yhtälö (39) korvata yhtälöllä

$$t_4(s) = \frac{e_o + kV^2\left[Vs^{3/2}t_0 - x_0 - (r-s)\tfrac{1}{2}(D - 100\ \mathrm{m})\right]}{k\left[\left(V\sqrt{s}\right)^3 - U^3\right]} \tag{40}$$

ja lähtö tapahtuu suoralle, jolloin t_0 ja x_0 saadaan yhtälöistä (6) ja (7)

$$t_0(s) = \frac{1}{kV} ar\tanh\sqrt{s} \tag{41}$$

$$x_0(s) = -\frac{1}{2k}\ln(1-s) \quad . \tag{42}$$

Kaikissa tapauksissa yhtälö (38) antaa hidastusvaiheen alkuun juostun matkan $x_4(s)$.

4.2 Hidastusvaihe loppusuoralla ($t_4 \le t \le T$)

Koska $e(t) \equiv 0$ hidastusvaiheessa, tehoyhtälöstä (8) seuraa kaksi samanarvoista liike-yhtälöä

$$\frac{1}{3}\frac{dv^3}{dx} + kv^3 = \sigma \tag{43a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} + kv^3 = \sigma \tag{43b}$$

Liikeyhtälöstä (43a) voidaan alkuehtoon $v(x_4) = u = V\sqrt{s}$ sovittaen integroida nopeus matkan funktiona.

Nopeus-matka riippuvuus kuuluu

$$v(x,s) = U\left\{1 + \left[\left(\frac{V}{U}\right)^3 s^{3/2} - 1\right] e^{-3k[x - x_4(s)]}\right\}^{1/3} \quad . \tag{44}$$

Liikeyhtälön (43b) integraalifunktio, aika nopeuden funktiona, on

$$t(v) = \frac{1}{kU}\left\{\frac{1}{6}\ln\frac{v^2 + vU + U^2}{(v-U)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2v+U}{U\sqrt{3}}\right\} \quad . \tag{45}$$

Matkan $x - x_4(s)$ juoksemiseen käytetty aika on nopeuksien avulla lausuttuna

$$t - t_4(s) = t[v(x,s)] - t\left[V\sqrt{s}\right] \quad . \tag{46}$$

VOIMAPARAMETRIN s MÄÄRITTÄMINEN JA NOPEIN LOPPUAIKA T

Kun juoksija ajan T kuluttua on maalissa ja juossut matkan D, tulee olla

$$D = x(T) \quad ,$$

jolloin vastaava loppuaika voimaparametrin s funktiona seuraa kaavasta (46)

$$T(s) = t_4(s) + t[v(D,s)] - t\left[V\sqrt{s}\right] \quad . \tag{47}$$

Loppuaika tulee sitten minimoida suureen s suhteen. Hyvänä alkuarvauksena voima-parametrille voidaan pitää (katso (38)) yhtälön

$$x_4(S) = x_0(S) + \left[t_4(S) - t_0(S)\right]V\sqrt{S} = D \tag{48}$$

juurta S eli että energiavarasto olisi tyhjä juuri maaliviivalla. Optimaalisen juoksun loppuaika T sekä vastaava arvo s optimaaliselle voimankäytölle $s\,f_{\max}$ matkajuoksun suoralla osalla saadaan ehdosta

$$T = \min_{s>S} T(s) \quad . \tag{49}$$

Kaarteissa saman vauhdin ylläpitämiseksi tarvitaan kaavan (32) mukaan hieman suurempaa voimankäyttöä $r\,f_{\max}$. Mitä suorempi rata on, sitä vähemmän lisävoimaa tarvitaan kaarteissa. Ulkorata olisi siis nopein, mutta sieltä ei ole helppoa seurata muiden juoksijoiden matkantekoa.

MAAILMANENNÄTYSTILASTOON SOVITTAMINEN

Sovitettaessa mallia maailmanennätystilastoon [10] oletetaan, että kriittistä matkaa lyhyemmät matkat juostaan täydellä voimalla ja sitä pidemmät optimivauhdinjaolla. Parametrit k ja V määräävät ajan kriittistä matkaa lyhyemmillä matkoilla. Jos maailmanennätystilasto välillä 50yd (45.72 m) ja 220 yd (201.168 m) puhdistetaan tuulen ja kaarteen vaikutuksesta ja käytetään pienimmän neliösumman menetelmää, saadaan parametreille arvot:

TAULUKKO 1. Pikajuoksuparametrit

$$k = 0.0679755\ \mathrm{m}^{-1}$$
$$V = 11.1537\ \mathrm{m/s}\ \text{ tai}$$
$$f_{max} = 8.45644\ \mathrm{N/kg} \quad .$$

Matkojen 400 - 10000 m maailmanennätyksistä on samoin pienimmän neliösumman menetelmällä saatu:

TAULUKKO 2. Kestävyysjuoksuparametrit

$$e_0 = 1794.0\ \mathrm{J/kg}$$
$$U = 6.427\ \mathrm{m/s}\ \text{ tai}$$

$$\sigma = 18.0459 \text{ W/kg} \quad .$$

Kaavoista (11) ja (12) seuraa kriittiselle matkalle

$$T_c = 24.65 \,\text{s}$$

$$D_c = 264.75 \,\text{m} \quad .$$

Kellerin laskema kriittinen aika oli 27.36 s ja matka 291 m. Vaikka eroa on jonkin verran, se ei häiritse tilastoon sovittamista.

Taulukot 3 ja 4 on laskettu edellä esitetyn kvadraattiseen vastuslakiin perustuvan teorian perusteella. 100 m juoksussa on otaksuttu 2 m/s myötätuulta, 200 m matkalla on käytetty 3. rataa, jota yleisesti pidetään mieluisimpana ja 400 m matkalla on käytetty 1. rataa, joka on hitain. Jos juostava matka on pidempi kuin 400 m, ajatellaan koko matka juostavan sisärataa eli 1. rataa.

Juoksuradan kaarteen vaikutus on huomattava, sillä sisärataan n=1 verrattuna on ulkorata n=8 laskennallisesti selvästi nopeampi: 200m:llä 0.15*s* ja 400m:llä 0.32*s*.

TAULUKKO 3. Maailmanennätysajat eri matkoilla verrattuna teorian mukaan laskettuihin optimaalisiin aikoihin

Matka D (m)	T-ennätys (min:sek)	T-teoria (min:sek)	s-arvo (%)	ε_i-virhe (%)
100	9.78	9.80	100.0	-0.193
200	19.32	19.20	100.0	+0.610
400	43.18	42.89	72.555	+0.674
800	1:41.11	1:41.21	50.866	-0.095
1000	2:11.96	2:11.61	46.841	+0.269
1500	3:26.00	3:28.66	41.764	-1.274
2000	4:44.79	4:47.01	39.176	-0.775
3000	7:20.67	7:24.18	36.750	-0.790
5000	12:39.36	12:39.70	34.862	-0.044
10000	26:22.75	25:49.96	33.478	+2.115

Tilastoon sovituksessa neliösummana on käytetty virhealkioiden

$$\varepsilon_i = \left(\frac{T_{ennätys} - T_{teoria}}{T_{teoria}} \right)_i \cdot 100\%$$

summaa

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 \quad \text{, kun } N = 10 .$$

Virhejakauman keskiarvo on +0.050% ja hajonta 0.929% sekä neliöllinen keskiarvo 0.827% ja vastaava hajonta 1.312%.

TAULUKKO 4. Juoksun eri vaiheiden kesto, pituus ja nopeus lopussa

Matka	Kiihdytysvaihe		Matkavaihe			Hidastumisvaihe		
D (m)	s	m	s	m	m/s	s	m	m/s

400	1.749	10.231	40.270	382.591	9.50	0.872	7.178	7.38
800	1.193	5.328	98.815	786.055	7.95	1.198	8.618	6.74
1000	1.115	4.718	129.175	986.072	7.63	1.316	9.210	6.64
1500	1.014	3.977	206.104	1485.600	7.21	1.541	10.422	6.53
2000	0.975	3.690	284.341	1985.020	6.98	1.698	11.289	6.49
3000	0.932	3.395	441.308	2983.910	6.76	1.938	12.692	6.45
5000	0.898	3.174	756.380	4981.180	6.59	2.417	15.650	6.43
10000	0.874	3.017	1545.590	9974.460	6.45	3.501	22.525	6.43

Nopeimpaan aikaan tähtäävä juoksustrategia edellyttää suurimmalla osalla matkaa tasaista vauhtia u, jonka ylläpitämiseen vaadittava voima on suoralla s ja kaarteessa $r = 1.12\,s$ maksimaalisesta voimasta (Taulukko 3). Tämä tiedetään jo ennestään kokemuksesta.

Yllättävämpää sen sijaan voi olla, että lopussa ei otetakaan nopeaa kiriä, kuten useimmiten nähdään , vaan tapahtuu maitohapoille meno eli kangistuminen tai jopa "sammuminen". Jos se pääsee pienenkin virhearvioinnin takia alkamaan liian aikaisin, voi koko juoksu epäonnistua. Kilpailussa loppukiri merkitsee siis, että matkalla ei ole haluttu tai tarvinnut käyttää koko kapasiteettiä. Taulukosta 4 nähdään, että hidastumisvaihe on lyhyt koko matkaan verrattuna.

Laskennallisesti voidaan tutkia, millaiseksi loppuaika muodostuu, jos energiavarasto tyhjenee vasta maaliviivalla: 400 m:llä on aika 0.11 s huonompi, 5000 m:llä 0.01*s* huonompi ja 10000 m:llä ei eroa enää huomaa.

YHTEENVETO

Taulukosta 4 voidaan todeta, että kaikilla kriittistä matkaa pidemmillä matkoilla laskettu loppuhidastuminen kertoo negatiivisestä kiristä ja että matkavaiheen pituus on 95.6%…99.7% juostavasta matkasta. Toisin sanoen tasainen matkavauhti on valttia.

Tarkastelemalla ε_i -virhettä taulukossa 3 havaitaan, että 10000m:llä juostu aika on yli kaksi prosenttia huonompi kuin teorian ennustama. Tästä voidaan päätellä, että joko malli ei enää päde näin pitkällä matkalla tai ennätys on muuten vaan huono ja tullee selvästi parantumaan tulevina vuosina. Samoin matkojen 200m ja 400m ennätykset ovat urheiluasijantuntijoidenkin mielestä matkoihin 100m ja 800m verrattuna huonot. Sen sijaan 1500m:llä ennätys on noin 1.3% parempi kuin teorian ennustama. Tämä johtunee siitä, että matka on suosittu ja paljon kilpailtu jolloin sattumalta kaikki on onnistunut (sääolosuhteet ovat olleet edulliset sekä ”jänikset” ovat antaneet sopivaa vetoapua ja ns. imua toisin sanoen ei ole ”juostu yksinään teorian puitteissa”).

Virheen neliöllinen keskiarvo 0.827% ja sen hajonta 1.312% osoittavat, että esitetty malli neljällä parametrillä kuvaa todella hyvin optimaalista kilpajuoksua, vaikka sellaista juoksijaa ei ole, jolla olisi kaikki taulukoiden 1 ja 2 mukaiset parametrien arvot.

Lähteessä [9] on katsaus kaikkiin TKK:ssa tutkittuihin juoksun matemaattisiin malleihin.

LÄHTEITÄ

1. Keller, J.B., *A Theory of Competitive Running*. Physics to Day 26 (1973) 9, s. 42-47.
2. Keller, J.B., *Optimal Velocity in Race*. American Mathematical Monthly 51 (1974) 5, s. 474-480.
3. Angelo, A., Jr., *The Physics of Sports*. American Institute of Physics, New York, second printing, 1993.
4. Alexandrov, I. and Luchtin, P., (1984) *Physics of sprinting*, s. 254-257 lähteessä [3].
5. Ranta, M., A., *Biomecanics and Sport, especially Running*, Vierailuluento Tallinnan teknillisessä korkeakoulussa, 18. joulukuuta 1995.
6. Holmlund, U., von Hertzen, R. ja Ranta, M.A., *Eräs pikajuoksun matemaattinen malli*. Arkhimedes 3/96, s. 8-13.
7. Holmlund, U., von Hertzen, R., *Models of Sprinting based on Newton's second Law of Motion and their Comparison*, Journal of Structural Mechanics, Vol. 30, 1997, Nro 2. s. 7-16.

8. Ranta, M.,A., *Biomekaniikka ja urheilu*, VI Suomen Mekaniikkapäivät, Oulu, 1997.
9. von Hertzen, R., Holmlund, U., Rahikainen, A. and Ranta, M., A., *On the mathematical theory of competitive running*, Transworld Research Network. Biomechanics, 1(2003), Kerala, India.
10. International Association of Athletics Federation, www.iaaf.org/statistics

Matti A Ranta , TkT, Mekaniikan emeritus professori
TKK, Matematiikan laitos, PL 1100
puh: (09)-4513077
email: matti.ranta@hut.fi