ERÄS VIRTAUSMEKANIIKAN REUNAEHTO

Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 36
Nro 1, 2003, s. 15-21

TIIVISTELMÄ

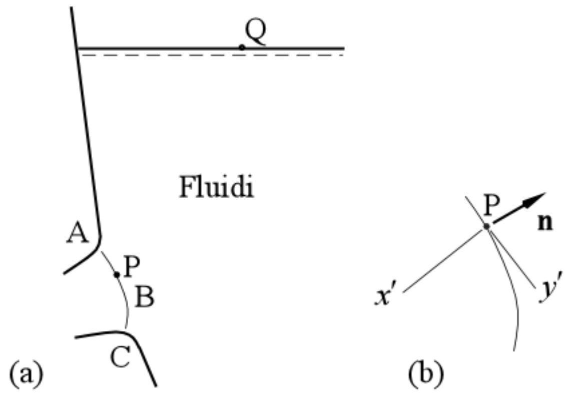
Artikkelissa tarkastellaan tiettyä virtausmekaniikan reunaehtoa, joka muodostuu annetusta virtaussuunnasta ja annetusta kokonaispaineesta. Ehdon fysikaalista taustaa selostetaan. Lisäksi kuvataan ehdon linearisoidun muodon analogista vastinetta kiinteän aineen mekaniikassa. Ajatuskokeiden käytön hyödyllisyyttä reunaehtojen yhteydessä korostetaan.

JOHDANTO

Realististen reunaehtojen asettaminen käytännön mekaniikan tehtävissä on tunnetusti usein vaikea ja ratkaisun luotettavuuteen luonnollisesti oleellisesti vaikuttava osuus. Tarkasteltavan systeemin rajat on otettava monasti melko mielivaltaisesti. Systeemin koon kasvattaminen voi helpottaa järkevien ehtojen asettamista, mutta käytännössä on kuitenkin tehtävä jonkinlainen kompromissi valitsemalla tutkittava systeemi analyysikustannusten rajoittamiseksi kohtuulliseksi. Ongelma on yleensä vielä vaikeampi fluidimekaniikassa (eli virtausmekaniikassa) kuin solidimekaniikassa (eli kiinteän aineen mekaniikassa). Fluidimekaniikassa ratkaisualueeseen liittyy tavallisesti ns. sisäänvirtausreuna (engl. inlet or inflow boundary) ja ulosvirtausreuna (engl. outlet or outflow boundary). Ne ovat soveltajan enemmän tai vähemmän mielivaltaisesti fluidiin asettamia käyriä (kahdessa dimensiossa) tai pintoja (kolmessa dimensiossa).

Kaikkien mahdollisten teoreettisesti oikeellisten reunaehtojen joukko ei myöskään näytä olevan alan kirjallisuudessa kovin kiteytynyt asia, koska sitä kosketellaan oppikirjoissa aiheen tärkeyden huomioonottaen usein melko varovaisesti. Esimerkiksi elementtimenetelmään liittyvässä kirjallisuudessa esitetyt tavanomaisimmat ehdot ovat solidimekaniikassa ns. siirtymä- ja traktioreunaehdot: joko siirtymä- tai traktiokomponentti (jännitysvektorin komponentti) on annettu reunalle asetetun paikallisen suorakulmaisen koordinaatiston kunkin akselin suunnassa. Fluidimekaniikassa tavanomaisimmat ehdot ovat vastaavasti ns. nopeus- ja traktioreunaehdot: joko nopeus- tai traktiokomponentti on annettu reunalle asetetun paikallisen koordinaatiston kunkin akselin suunnassa. Nämä yksinkertaiset ehdot ovat suoraviivaisesti sisällytettävissä vallitseviin peruslausekkeisiin, mutta ehtojen vaatimien järkevien arvojen asettaminen voi olla käytännössä vaikeaa. Toisaalta esimerkiksi laajassa käytössä olevan kaupallisen fluidimekaniikan kontrollitilavuusmenetelmään pohjautuvan Fluent-ohjelmiston [1] reunaehtovalikoima antaa muunkinlaisia mahdollisuuksia. Seuraavassa käsitellään erityisesti erästä sisäänvirtausreunoilla tietyissä tapauksissa sopivaa käytännöllistä ehtoa sekä sen solidimekaniikassa esiintyvää analogista vastinetta.

REUNAEHTO



Kuva 1(a) Virtaus aukkoon. **(b)** Paikallinen koordinaatisto.

Tarkastellaan kuvan 1(a) esittämää asetelmaa. Kokoonpuristumattomaksi otaksuttu fluidi virtaa painovoiman alaisena laajahkosta vapaan pinnan omaavasta alueesta aukon AC kautta aluksi kanavaan ja sitten mahdollisesti mutkikkaampiin geometrioihin, joissa tapahtuvaa virtausta soveltaja pyrkii selvittämään. Soveltaja on valinnut ratkaisualueensa sisäänvirtausreunaksi käyrän ABC. (Esitysteknisistä syistä tässä rajoitutaan kaksidimensioiseen tapaukseen.) Virtauksen suunta on aukon kohdalla oletettavasti jollakin tarkkuudella aukon seinämien ohjauksen johdosta aukon seinämien suuntainen. Soveltaja käyttää reunaehtojen esittämiseen apuna tyypillisessä reunan pisteessä P (kuva 1(b)) paikallista suorakulmaista karteesista $x'y'$- koordinaatistoa. On luontevaa valita esimerkiksi x'- akseli yhtymään otaksuttuun virtausvektorin suuntaan. Täten nopeuskomponentti $v_{y'}$ y'- akselin suunnassa katoaa ja saadaan ensimmäinen reunaehto: nopeusreunaehto

$$v_{y'} = 0. \qquad (1)$$

(Kolmidimensioisessa tapauksessa saataisiin lisäksi ehto $v_{z'} = 0$.) x'- akselin suunnassa ei nyt kuitenkaan yleensä tiedetä erikseen nopeuskomponentin eikä traktiokomponentin arvoa. Eräs mahdollisuus edetä on seuraava. Jos virtaus on “lievää” kuvan 1(a) esittämässä ratkaisualuetta edeltävässä fluidialueessa, voitaneen otaksua kirjallisuuden mukaan tavanomaiseen tapaan, että kyseessä on likimain pyörteetön kitkaton stationaarinen virtaus. Tällöin voidaan soveltaa Bernollin yhtälöä muodossa (esimerkiksi [2, s. 387]):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(v_1\right)^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\left(v_2\right)^2 + \rho g h_2. \tag{2}$$

Tässä indeksit 1 ja 2 viittaavat kyseisten suureiden arvoihin virtausalueen kahdessa mielivaltaisessa pisteessä. Suure p on paine, ρ fluidin tiheys, v virtausnopeusvektorin itseisarvo eli virtausvauhti, g putoamiskiihtyvyys ja h korkeusasema sovitun vaakatason suhteen. Sovelletaan yhtälöä (2) siten, että piste 1 on kuvan 1(a) piste P ja piste 2 fluidin vapaalla pinnalla oleva piste Q. Vapaan pinnan korkeusasema h_Q ja pinnalla vaikuttavan paineen (ilmanpaine) arvo p_Q tunnetaan. Lisäksi otaksutaan, että virtaus pinnalla on vähäistä ja asetetaan $v_\mathrm{Q} = 0$. Pisteen P korkeusasema h_P on myös tunnettu. Näiden tietojen perusteella pisteessä P (jätetään alatunnus P syntyvän yhtälön vasemmalta puolelta pois) on voimassa ehto: kokonaispaine on annettu eli

$$p + \frac{1}{2}\rho\left(v_{x'}\right)^2 = p_\mathrm{Q} + \rho g\left(h_\mathrm{Q} - h_\mathrm{P}\right) \equiv \overline{p}_\mathrm{tot}\,. \tag{3}$$

Yhtälön (3) oikean puolen arvo on siis tunnettu suure ja sille on käytetty lisäksi viimeisenä oikealla näkyvää lyhennysmerkintää; ks. huomautukset 1 ja 2. Siirryttäessä yhtälöstä (2) yhtälöön (3) on siis otettu huomioon, että virtausnopeusvektori on x'- akselin suuntainen, jolloin vastaavan skalaarinopeuskomponentin neliö on samalla virtausvauhdin neliö.

Huomautus 1. Virtausmekaniikan kirjallisuudessa esiintyy ilmeisesti osittain historiallisista syistä paineeseen liittyviä nimityksiä, jotka eivät ole välttämättä aina kovin osuvia. Esimerkiksi lähteessä [1, s. 6-20] määritellään kokoonpuristumattomassa virtauksessa (hieman eri merkinnöin) termi

$$p_\mathrm{tot} = p + \frac{1}{2}\rho v^2. \tag{4}$$

Suureelle p_tot käytetään nimitystä kokonaispaine (engl. total pressure) ja suureelle p taas nimitystä staattinen paine (engl. static pressure). Tässä staattista painetta tullaan nimittämään jatkossa pelkäksi paineeksi. Se on juuri yksinkertaisesti paine p, joka esiintyy yleensä fluidimekaniikan yhtälöissä kuten Bernoullin yhtälössä (2), eikä suinkaan — kuten nimen perusteella voisi ehkä otaksua — jotenkin nestestatiikkaan liittyvä arvo. Lisäsekaannusta voi aiheuttaa edelleen, että absoluuttisen paineen p_a sijasta toimitaankin ehkä ns. mittapaineen (engl. gauge pressure) avulla, joka määritellään arvona $p_\mathrm{a} - p_\mathrm{op}$, jossa p_op on sopiva referenssipaine (engl. operating pressure). Myös saattaa olla, että stationaarisessa tilanteessa painovoiman johdosta syntyvä hydrostaattinen painejakauma on tietyllä tavalla eliminoitu formulaatiosta. Nämä mahdolliset detaljit eivät kuitenkaan muuta ehdon (3) matemaattista luonnetta. □

Huomautus 2. Bernoullin yhtälöllä on eri otaksumien alaisina yleisempiä muotoja kuin (2), joita on selostettu mm. lähteessä [2]. Niissä esiintyy tavallisesti mukana kokonaispaine ja täten voidaan edelleen päätyä tietyin edellytyksin matemaattisesti tyyppiä (3) olevaan ehtoon. □

Tässä artikkelissa tarkasteltava erityisesti joskus sisäänvirtausreunalle soveltuva reunaehtosysteemi koostuu siis yhtälöistä (1) ja (3) eli nopeuden suunta ja kokonaíspaine ovat annettuja suureita. Nämä ehdot esiintyvät mm. lähteessä [1, s. 6-17]. Ulosvirtausreunalla kokonaispaineen arvoa ei yleensä pystytä arvioimaan ja on tavallisempaa antaa pelkkä paineen arvo. Eräs voimakkaasti yksinkertaistettu selitys sisään- ja ulosvirtausreunojen yhteydessä usein vallitsevalle virtauksien kvalitatiiviselle erolle saadaan ajattelemalla virtausta pienen, isossa fluidialueessa olevan putken päästä putkeen sisään tai putkesta ulos. Sisäänvirtauksessa virtaviivat asettuvat lähes tasaisesti jakautuneina säteettäisesti putken aukkoa kohti. Voisi ajatella, että ulosvirtauksessa tilanne on yksinkertaisesti käänteinen siten, että virtausnopeusvektorit vain muuttavat suuntansa vastakkaisiksi. Fluidimekaniikan vallitsevat yhtälöt ovat kuitenkin epälineaarisia ja havaintojen mukaan ulosvirtaus on lähinnä suihkumaista. Lähteessä [2, s. 88] todetaan tähän liittyen havainnollisesti: “A match can be extinguished by blowing, but not by sucking!”

Tässä ei käsitellä ehtojen (1) ja (3) sisällyttämistä tiettyjä perusmuuttujia soveltavaan yleiseen (käytännössä diskreettiin) formulaatioon. Kuitenkin jatkon kannalta on mielenkiintoista linearisoida nopeuskomponentin suhteen epälineaarinen ehto (3). (Fluidimekaniikan yhtälöthän ovat pääsääntöisesti epälineaarisia ja linearisointi ja iterointi on normaali ratkaisumenettely.) Olkoon reunalla laskennassa tietyssä vaiheessa esiintyvä päivitetty nopeuskomponentin $v_{x'}$ arvo $\tilde{v}_{x'}$. Etsitään uutta parannettua arvoa

$$v_{x'} = \tilde{v}_{x'} + \Delta v_{x'}, \tag{5}$$

jossa $\Delta v_{x'}$ on korjaus eli muutos vanhaan arvoon nähden. Nyt yhtälössä (3)

$$\left(v_{x'}\right)^2 = \left(\tilde{v}_{x'} + \Delta v_{x'}\right)^2 = \left(\tilde{v}_{x'}\right)^2 + 2\tilde{v}_{x'}\Delta v_{x'} + \left(\Delta v_{x'}\right)^2 \approx \left(\tilde{v}_{x'}\right)^2 + 2\tilde{v}_{x'}\Delta v_{x'}. \tag{6}$$

On suoritettu tavanomainen linearisointi jättämällä etsityn muutoksen $\Delta v_{x'}$ neliöllinen osuus pois. Lausekkeen (6) sijoitus yhtälöön (3) tuottaa linearisoidun ehdon

$$p+\rho\tilde{v}_{x'}\Delta v_{x'}=\overline{p}_{\text{tot}}-\frac{1}{2}\rho\left(\tilde{v}_{x'}\right)^2. \tag{7}$$

On siis huomattava, että päivityksen johdosta suuretta $\tilde{v}_{x'}$ pidetään nyt annettuna, joten ehdon (7) oikea puoli on seuraavan laskentavaiheen kannalta annettu suure. Kehitetään ehtoa (7) jatkon tarpeita varten vielä hieman eteenpäin. Jos hyväksytään kitkattomuusotaksuma eli että viskoosit jännitykset häviävät, jännitystilan ilmaisee pelkkä paine ja traktiovektori **t** alueen reunalla on muotoa $\mathbf{t}=-p\,\mathbf{n}$, jossa **n** on reunan ulkoinen yksikkönormaalivektori (kuva 1(b)). Traktiokomponentti $t_{x'}$ x'-akselin suunnassa saadaan silloin kaavasta

$$t_{x'}=-\cos\left(n,x'\right)p\equiv -c\,p, \tag{8}$$

jossa käytettyjen merkintojen sisältö on ilmeinen. Kertomalla yhtälö (7) puolittain termillä $-c$ saadaan reunaehtomuoto

$$t_{x'}-c\rho\tilde{v}_{x'}\Delta v_{x'}=-c\,\overline{p}_{\text{tot}}+\frac{1}{2}c\rho\left(\tilde{v}_{x'}\right)^2. \tag{9}$$

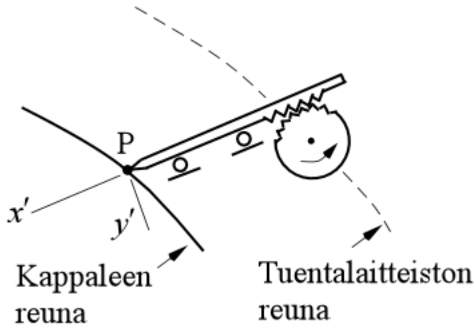
Jos x'-akseli on täsmälleen vastakkaissuuntainen reunan normaalin suhteen, kerroin $c=-1$. Jos operoidaan muutosten avulla, ehto (1) voidaan ilmaista myös vaihtoehtoisessa muodossa (on otaksuttu, että $\tilde{v}_{y'}=0$)

$$\Delta v_{y'}=0. \tag{10}$$

REUNAEHDON VASTINE SOLIDIMEKANIIKASSA

Fluidimekaniikassa ja solidimekaniikassa käytetään ilmiöiden kuvaamiseen tavallisesti vastaavasti Eulerin ja Lagrangen esitystapoja. Täten nopeus **v** ja siirtymä **u** ovat niissä ilmeisiä analogisia suureita. Samoin fluidimekaniikan nopeus- ja traktioreunaehtoja sekä solidimekaniikan siirtymä- ja traktioreunaehtoja voitaneen pitää analogisina. Mutta onko edellä esitetyllä fluidimekaniikan kokonaispaine-ehdolla (3) tai (9) analogista vastinetta solidimekaniikassa?

Tarkastellaan alustavasti kuvan 2 esittämää asetelmaa. Reunaehtojen mielekkyyttä voidaan joskus pohdiskella ilman syvällistä matematiikkaa sopivien ajatuskokeiden avulla: Muodostetaan kuviteltu laboratoriojärjestely, jolla yritetään toteuttaa tietyt reunaehdot. Jos tämä onnistuu fysikaalisesti ajatuskokeena, on reunaehtosysteemi todennäköisesti myös matemaattisesti järkevä.



Kuva 2 Ajatuskoe ja siihen liittyvä järjestely.

Olkoon reunaehto aluksi seuraava: siirtymä kappaleen reunan pisteessä P on paikallisen x'- akselin suuntainen ja sen arvo on $\bar{u}_{x'}$. Saadaan siis puhtaat siirtymäreunaehdot (otetaan jälleen mukavuussyistä kaksidimensioinen tapaus)

$$u_{y'} = 0, \tag{11}$$

$$u_{x'} = \bar{u}_{x'}. \tag{12}$$

Kuvitellussa laboratoriossa järjestely voisi olla seuraava. Pisteeseen P on kiinnitetty sauva, jonka toista päätä “pieni reunaehto-orja” siirtää kuvan hammaspyörää kiertämällä “reunaehtoisännän” antaman ohjeen mukaisesti matkan $\bar{u}_{x'}$. Orjia on reunalla “hyvin tiheässä”. Järjestely tuntuu teoriassa mahdolliselta. Olkoon sauvalla nyt kuitenkin joustavuutta — kuten todellisuudessa aina — ja itse kappaleen reuna ei siis saa tarkalleen siirtymää $\bar{u}_{x'}$ vaan tuntemattoman siirtymän $u_{x'}$. Olkoon sauva lineaarisesti kimmoinen ja olkoon sen jousivakion arvo *k*. Tällöin kappaleeseen vaikuttaa siihen sauvan päästä kohdistuva x'- akselin suuntainen voima

$$F_{x'} = k\left(\bar{u}_{x'} - u_{x'}\right), \tag{13}$$

jossa siis sauvan puristuma sen lepopituuden suhteen on $\bar{u}_{x'} - u_{x'}$. Kun kunkin sauvan päähän assosioidaan keskimääräinen pieni vaikutuspinta-ala *A*, kappaleeseen kohdistuu pisteessä P traktiokomponentti

$$t_{x'} = \frac{F_{x'}}{A} = \frac{k}{A}\left(\bar{u}_{x'} - u_{x'}\right) \equiv d\left(\bar{u}_{x'} - u_{x'}\right). \tag{14}$$

Ehto (12) korvautuu siis ehdolla

$$t_{x'} + d\,u_{x'} = d\,\bar{u}_{x'}. \tag{15}$$

Tässä oikea puoli on annettu suure, mutta vasemman puolen traktiokomponentin ja siirtymäkomponentin lineaarikombinaatiossa traktio ja siirtymä ovat kumpikin erikseen tuntemattomia.

Fluidimekaniikan linearisoitujen kaavojen (9) ja (10) vertailu solidimekaniikan kaavojen (11) ja (15) kanssa osoittaa analogian muodossa (ks. huomautus 3)

$$\Delta v_{x'} \mathrel{\hat{=}} u_{x'} \,, \tag{16}$$

$$\Delta v_{y'} \mathrel{\hat{=}} u_{y'} \,, \tag{17}$$

$$-c\rho\tilde{v}_{x'} \mathrel{\hat{=}} d \,, \tag{18}$$

$$-c\,\overline{p}_{\text{tot}} + \frac{1}{2}c\rho\left(\tilde{v}_{x'}\right)^2 \mathrel{\hat{=}} d\,\overline{u}_{x'} \,. \tag{19}$$

Huomautus 3. Jos otaksutaan epälineaarinen jousimalli siten, että kaavan (13) sijasta sovelletaan neliöllistä riippuvuutta

$$F_{x'} = k'\left(\overline{u}_{x'} - u_{x'}\right)^2 \,, \tag{20}$$

saadaan tätä linearisoimalla hieman edellisestä poikkeavia analogioita. □

Kokonaispaine-ehdon vastine solidimekaniikassa on siis tietynlainen kimmoisan tuennan tapaus, jossa tuentaan kuitenkin liittyy annettu siirtymä. Analogian löytyminen voi helpottaa solidimekaniikan harjoittajaa hyväksymään kokonaispaine-ehdon mielekkyys fluidimekaniikassa.

LÄHTEET

1 *FLUENT 5 User's Guide*, *Volume 1*, July 1998, Fluent Incorporated, Centerra Resource Park, 10 Cavendish Court, Lebanon, NH 03766.

2 G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

Eero-Matti Salonen
Rakenteiden mekaniikka
Rakennus- ja ympäristötekniikan osasto
Teknillinen korkeakoulu
PL 2100 02015 TKK
eero-matti.salonen@hut.fi