

AVARUUSRISTIKOIDEN PALOTEKNINEN MITOITUS

Otso Cronvall

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 35
Nro 1, 2001, s. 3-18

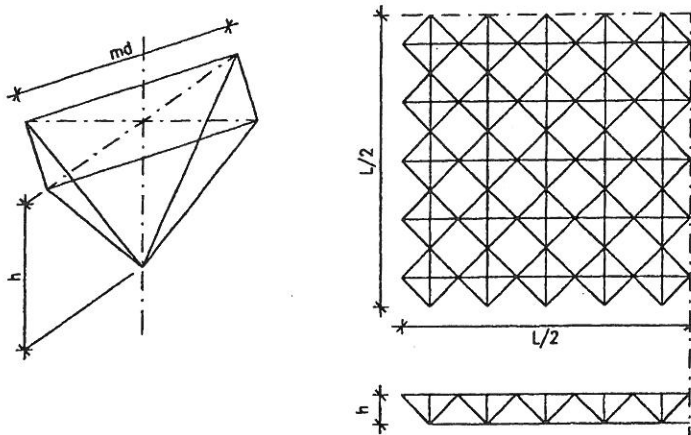
Tiivistelmä

Sadoista sauvoista yleensä koostuvien ja useaan kertaan staattisesti määräämättömien avaruusristikoiden palotekninen mitoitus on monipuolinen ja haastava tehtävä. Nykyiset kehittyneet laskentamenetelmät sekä tehokkaat ja edulliset mikrotietokoneet mahdollistavat tämän mitoitustehtävän suorittamisen käytännön rakennesuunnittelun puitteissa. Artikkelissa esitetään joitain keskeisiä avaruusristikoihin ja niiden palomitoitukseen liittyviä tekijöitä. Lisäksi artikkelissa kerrotaan lähteessä /1/ avaruusristikoille tehtyjen FEM-analyyysien toteuttamisesta ja laskentatuloksista.

Avaruusristikoiden ominaisuuksista

Avaruusristikot ovat saavuttaneet maailmalla paljon suosiota tehokkuutensa, suuren kapasiteettinsa, joustavuutensa, miellyttävän ulkonäkönsä sekä turvallisuutensa ansiosta. Tyypillisesti avaruusristikot toimivat kantavina kattorakenteina kohteissa, joissa edellytetään pitkiä jännevälejä, aina 100 m pituisiin jänteisiin saakka. Katettavan tilan pohjaratkaisun geometria voi olla lähes mielivaltaisen. Avaruusristikon ei tarvitse olla vaakasuuntainen, vaan myös kaltevat ristikkorakenteet ovat mahdollisia. Avaruusristikot koostuvat tyypillisesti suuresta määrästä yksinkertaisia, standardikokoisia, esivalmistettuja elementtejä, jotka yhdistettyinä muodostavat kevyen, mutta hyvin jäykän kolmiulotteisen rakenteen.

Yleensä avaruusristikot ovat teräsrakenteisia. Ristikkosauvojen poikkileikkaukset voivat olla avoimia tai suljettuja. Erilaisia mahdollisia liitosratkaisuja on useita. Liitokset ovat keskeinen ongelma-alue avaruusristikoissa, ja liitosratkaisun valinta on suuresti riippuvainen rasiitetuimmille sauvoille valituista poikkileikkauksista. Teräksiset ristikkosauvat voidaan pinnoittaa eri tavoin. Ruosteenestoa varten ne voidaan sinkittää ja palotilanteen varalta ne voidaan suojata palosuojamaalilla /2/. Pinnoittaminen palosuojamaalilla on ainoa kyseeseen tuleva palosuojauskeino silloin, kun avaruusristikko halutaan jättää näkyviin.



Kuva 1 Kaksipaaretasoisen avaruusristikon tasokuva, pystyleikkaus ja rakennemoduli, md on moduli, h on rakennekorkeus ja L on sivun pituus /1/.

Avaruusristikot tuetaan yleensä teräs- tai betonipilareihin, kantaviin seiniin tai jatkuviin reunapalkkeihin. Usein rakenteen toiminnalliset vaatimukset määräävät tukien sijainnin /3/. Tukien määrä voidaan valita vapaasti, kunhan mekanismin syntyminen estetään. Avaruusristikko voidaan tukea ylä- tai alapaaretason solmuista. Usein tukisolmuina ovat reunasolmut.

Avaruusristikon rakennekorkeus ja perusmoduli määräytyvät molemmat ristikon jännemitoista siten, että valitun geometrian toteuttava elementtijako voidaan sovittaa rakenteen kokonaismittoihin. Myös katemateriaalin ja tukien sijainnin asettamat rajoitukset vaikuttavat usein modulin mitoittamiseen /2/. Rajoitusten puitteissa kannattaa valita mahdollisimman suuri rakennemoduli, sillä modulin kasvaessa avaruusristikon solmujen määrä pienenee, mikä puolestaan vähentää merkittävästi avaruusristikon valmistuskustannuksia.

Yksi tärkeimmistä avaruusristikoiden sovelluksista ovat kaksipaaretasoiset avaruusristikot. Nämä rakenteet koostuvat kahdesta vaakasuuntaisesta taso-ristikosta, ja näitä yhdistävistä vino- tai vino- ja pystysuuntaisista sauvoista, katso kuva 1. Vaakaristikoiden kutsutaan ylä- ja alapaarteeksi, ja niitä yhdistäviä sauvoja diagonaaleiksi /3/. Suomessa toteutettuja kohteita, joissa kantavana kattorakenteena on kaksipaaretasoinen avaruusristikko, ovat muun muassa Helsinki-Vantaan lentokentän kotimaan terminaali ja uusi keskiterminaali.

Palot ilmiönä ja mallintamisen näkökulmasta

Palossa tapahtuvassa lämmön siirtymisessä voidaan erottaa kolme siirtymismuotoa: johtuminen, säteily ja kuljettuminen (eli konvektio). Vaikka jokaisessa palossa lämpöä siirtyy kaikilla kolmella tavalla, on usein havaittu siirtymismuodoista jonkin olevan kulloisessakin palon vaiheessa hallitseva suhteessa muihin siirtymismuotoihin /4/.

Johtuminen on vallitseva lämmön siirtymismuoto kiinteiden aineiden ja nesteiden läpi, sekä niiden sisällä. Ilmassa tapahtuvan lämmön johtumisen vaikutus palotilan lämpötilan nousuun on häviävän pieni. Vaikka monet yleisimmistä lämmön johtumista käsittelevistä probleemoista ovat olennaisesti vakio-olosuhteissa tapahtuvia, niin paloihin, joissa vallitsee muuttuvat olosuhteet, liittyvistä probleemoista useimmat edellyttävät ajasta riippuvien osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemista. Koska nämä yhtälöt ovat hyvin harvoja ja yksinkertaisia tapauksia lukuunottamatta epäanalyttisiä, sovelletaan niiden ratkaisemisessa yleensä jotain numeerista menetelmää.

Säteily, toisin kuin muut lämmönsiirtymistavat, ei tarvitse väliainetta lämmönlähteen ja lämmön vastaanottajan välillä. Säteily on sähkömagneettista aaltoliikettä, joka näkyvän valon tavoin voi emittoitua tai heijastua tarkasteltavasta pinnasta, tai absorboitua siihen. Lämpösäteilyn muodostama kaista elektromagneettisen säteilyn kokonaisspektristä on melko kapea, sen aallonpituus λ vaihtelee välillä 0.4 – 100 μm . /4/. Suurin osa kyseisestä kaistasta sijoittuu näkyvän valon alueelle. Jos palossa esiintyy korkeita lämpötiloja ja/tai kuuma kaasukerros, on säteilyn asema usein hallitseva verrattuna muihin lämmönsiirtymistapoihin. Säteilyn osuus lämmönsiirtymisessä voi myös helposti hallita laskentatyön määrää missä tahansa palomallissa. Tämä johtuu siitä, että lämpösäteily on globaali ilmiö, jolloin jokainen kohta palotilassa on lämpösäteilyn kautta vuorovaikutuksessa kaikkien niiden kohtien kanssa jotka se “näkee” (eli jotka eivät ole siihen nähden katveessa) /5/.

Kuljettuminen eli konvektio ilmenee lämmön siirtymisenä liikkeessä olevan kaasun tai nesteen, ja kiinteän aineen välillä (kuten kuumen pinnan viileneminen kylmän ilmavirran vaikutuksesta). Palossa vapautuva suuri määrä energiaa siirtyy kuljettumalla ympäristöön kuumien kaasujen muodossa. Kyseinen kaasujen liike voi aiheutua luonnollisella tavalla palosta itsestään, eli kuumien kaasujen ja ympäröivän viileämmän ilman välisen tiheyseron aiheuttaman nosteen johdosta, tai paloon nähden ulkopuolisen tekijän, kuten tuulen, vaikutuksesta. Edellistä ilmiötä kutsutaan luonnolliseksi konvektioksi, ja jälkimmäistä pakotetuksi konvektioksi /6/. Kaasujen (nesteiden) virtaus jaotellaan usein myös liikkumisen luonteen perusteella joko turbulenteiksi, eli pyörteiseiksi, tai laminaariseksi, eli kerrostuneeksi (levymäiseksi). Palojen yhteydessä keskeisiä ovat etupäässä turbulenteiset virtaukset, kuten turbulenteiset diffuusioliikit.

Palojen tarkastelun yhteydessä käytetään usein seuraavaa osavaiheisiin jaottelua:

1. Syttyminen
2. Kasvuvaihe
3. Lieskahdus
4. Täyden palon vaihe
5. Hiipuminen

Vaikka palon kulku ei aina noudata yllä esitettyä idealisointia, muodostaa kyseinen jaottelu kuitenkin käyttökelpoisen kehyksen palon tarkastelulle.

Pienehkön huonetilan, kuten asuinhuoneiston olohuone, palossa lieskahdus on yleinen ilmiö. Suuren tilan palossa, jossa palokuormien väliset etäisyydet ovat yleensä suurempia, lieskahdus on huomattavasti harvinaisempi tapahtuma. Palotilan koko on monesta syystä ratkaiseva ominaisuus. Palopatsaan kuumat kaasut leviävät katon alapuolella säteittäisesti palopatsaan ympäri, ja suurissa tiloissa kaasut hajoavat ja viilenevät helposti. Tilan vapaan korkeuden ollessa suuri, on etäisyys palamisprosessista kuumaan kaasukerrokseen myös suuri. Tämä aiheuttaa palopatsaan kaasujen viilenemisen niiden noustessa kohden kattoa. Lattiaan kohdistuvan säteilyn määrä kuumasta kaasukerroksesta on myös vähäisempi, johtuen kaasukerroksen suuremmasta etäisyydestä palokuormiin. Suurissa tiloissa palon eteneminen on selvästi hitaampaa kuin pienissä. Tästä johtuen palon sammutus (automaattiset sprinklerit, palokunta, yms.) ehtii yleensä alkaa ennen mahdollista lieskahduksen ja täyden palon vaiheen saavuttamista /7/.

Alkupalon syttymisvaihe voi kestää sekunnin osista jopa useisiin vuorokausiin. Kasvuvaiheen pituus on sen sijaan huomattavasti rajallisempi. Sen pituus on yleensä muutamasta minuutista puoleen tuntiin. Lieskahduksen aloittaman täyden palon vaiheen pituus riippuu merkittäväällä tavalla palokuorman määrästä ja palamiseen tarvittavan ilman riittävydestä. Täyden palon vaiheessa palotilan lämpötila voi nousta korkeammaksi kuin 1000 °C. Rakennuksen sisällä täyden palon vaihe kestää yleensä tunnista muutamaa tuntiin, ellei palo leviä muihin palo-osastoihin eikä paloa sammuteta aikaisemmin /8/.

Laskennalliset arviot palon käyttäytymisestä eivät yleisesti ottaen ole mahdollisia, ellei tiedetä palavan materiaalin ominaisuuksia ja palamisnopeutta. Vaikka "palamisnopeus" ei ole yksiselitteinen ilmaisu, on se käsitteenä käyttökelpoinen. Kvantitatiivisesti se ilmaistaan joko massan palamisnopeutena \dot{m} (kg/s) tai palotehona \dot{Q} (kW) /9/.

Kun tiedetään massan palamisnopeus, on mahdollista laskea paloteho. Paloteho on tärkein palon kehittymistä kuvaava suure. Kun paloteho tunnetaan, voidaan sen avulla laskea muita tärkeitä palomitoituksessa tarvittavia tietoja, kuten palotilan ilman lämpötilajakauma. Paloteho voidaan laskea seuraavasti /4/:

$$\dot{Q} = X\dot{m}\Delta H \quad (1)$$

missä X on palamisen hyötysuhde (-)
 ΔH on palamislämpö (kJ/kg)

Palokuorma vaikuttaa aina palon ajalliseen kestoon ja suurimpaan palossa saavutettavaan ilman lämpötilaan /4/. Tietoja nestemäisten ja kiinteiden materiaalien palamisnopeuksista tarvitaan myös liekkien todennäköisen koon ja käyttäytymisen arvioimiseksi sekä palotehon ennustamiseksi käytännön palotilanteissa /9/. Materiaalin olomuotoa ja palamisnopeutta voidaan käyttää palavien materiaalien jaotteluperusteina. Kiinteiden aineiden paloissa massan palamisnopeuteen vaikuttaa palokuorman määrän, laadun ja sijainnin lisäksi se, missä muodossa palamiskykyinen materiaali on. Esimerkiksi kiinteä,

kuution kokoinen ja muotoinen puukappale, joka kuivana painaa noin 800 kg, palaa hitaammin kuin 800 kg kuivia puulastuja /7/.

Yleensä avaruusristikot sijaitsevat suurissa tiloissa. Tavallisimmat suurien tilojen palotyypit ovat pistemäinen palo ja yleinen palo. Suurien tilojen paloissa lieskahdus on epätodennäköinen ilmiö. Palokuorma on suuressa tilassa usein epätasaisesti jakaantunut. Standardipalokäyrän ja huonepalomallin soveltaminen suuressa tilassa tapahtuvan palon mallintamiseen johtaa lähes aina rakenteen ja palosuojauksen ylimitoitukseen. Suurien tilojen palojen mallinnuksessa on syytä käyttää todelliseen palonkehitykseen perustuvaa palomallia. Tällöin palon mallinnus voidaan suorittaa vyöhykemallilla, kenttämallilla tai tulipalon dynaamisilla laskentakaavoilla. Vyöhykemallit eivät sovellu sen kokoluokan tiloissa tapahtuvien palojen mallintamiseen, joissa avaruusristikot yleensä sijaitsevat. Virtausmekaniikkaan ja numeerisiin menetelmiin perustuvat kenttämallit ovat palomallien kehittynein, monimutkaisin ja suuritoisin haara. Eräät korrelaatioon perustuvat dynaamiset laskentakaavat soveltuvat tietyin rajoituksin suuressa tilassa tapahtuvan palon mallintamiseen.

Kenttämalleissa palotilan lämpötila, kaasujen virtausnopeudet ja pitoisuudet lasketaan kenttäsuureina. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla kyseisillä suureilla on jokaisessa palotilan pisteessä määrätty arvo jokaisella ajanhetkellä. Kenttäsuureille muodostetaan kenttäyhtälöiksi kutsuttu joukko yhtälöitä, joille etsitään ratkaisua ajan funktiona. Näitä virtausmekaniikan kolmidimensioisia, ajasta riippuvia, epälineaarisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä kutsutaan Navier-Stokesin yhtälöiksi. Ne ilmaisevat systeemin massan, liikemäärän ja energian säilymisen /10/. Koska kenttäyhtälöt ovat harvoja ja hyvin yksinkertaisia tapauksia lukuunottamatta epäanalyttisiä, käytetään ratkaisemisessa yleensä numeerisiin menetelmiin perustuvia laskentaohjelmia.

Toistaiseksi ei ole olemassa yleisesti hyväksyttyä palomallinnusmenetelmää geometrialtaan mielivaltaisessa tilassa tapahtuvalle palolle.

Teräksen materiaalikäyttäytymisen mallintaminen

Yleensä teräksen katsotaan mallinnettaessa olevan luonteeltaan homogeeninen ja isotrooppinen materiaali. Kun vallitsevat jännitykset jäävät myötöehdon määrittelemän myötörajan alapuolelle, käyttäytyy teräs kimmoisesti Hooken lain mukaan. Myötörajan ylittymisen jälkeen teräksen konstitutiivista yhteyttä ei voi enää ilmaista käyttämällä vakioita, vaan kyseinen suure on muuttunut riippuvaiseksi muun muassa siirtymistä. Verrattaessa materiaalin kimmoiseen käyttäytymiseen, jolloin siis jännitykset voidaan laskea suoraan venymistä, on teräksen kaltaista plastisoituvaa materiaalia analysoitaessa otettava huomioon materiaalin riippuvuus jännitys- ja venymähistoriasta. Plastisoituvien materiaalien jännitys-venymäpolku on materiaalia kuormitettaessa erilainen kuin kuormitusta poistettaessa, mikä havaitaan erityisesti silloin, kun materiaalin jännitykset ovat kuormitettaessa ylittäneet kimmoisen alueen. Yhtenä tunnusominaisuutena plastisoitumiselle voidaankin pitää tällaisia kuormituksen poistamisen jälkeisiä pysyviä

plastisia venymiä. Teräksen konstitutiivinen yhteys on riippuvainen myös lämpötilasta /11, 12/.

Eräs metallien käyttäytymiseen vaikuttava seikka on kuormitusnopeus. Metalleilla riippuvuus kuormitusnopeudesta muuttuu merkittäväksi erityisesti silloin, kun materiaalin lämpötila on korkea. Tällöin se yleinen alkuoletus, että teräksen käyttäytyminen on kuormitusnopeudesta riippumaton, ei välttämättä johda hyvään laskennalliseen approksimaatioon /13/.

Tavallisissa laskennallisissa tarkasteluissa tarvitaan kimmoplastisen materiaalin käyttäytymisen kuvaamiseksi kimmoisten jännitys-venymäyhteyksien lisäksi kolme muuta käsitettä, jotka ovat myötöehto, myötösääntö ja myötölujenemislaki /11/.

Hydrostaattisella paineella on havaittu olevan häviävän pieni vaikutus metallien myötäämiseen. Tällöin metallien myötöön alkaminen riippuu pääasiassa leikkausmuodonmuutoksista, ja sitä kautta leikkausjännityksistä. Tämän seurauksena rakenneteräksen kaltaisen isotrooppisen materiaalin myötöehto riippuu lämpötilan T ja sisäisten muuttujien ξ_i (kun $i=1, 2, \dots, n$) lisäksi vain jännitysdeviaattorin invarianteista. Sisäisillä muuttujilla pyritään huomioimaan muun muassa jännitys- ja venymähistorian vaikutus materiaalin käyttäytymiseen. Nyt materiaalin myötöehto voidaan ilmaista seuraavasti:

$$f(II'_\sigma, III'_\sigma, T, \xi_i) = 0 \quad (2)$$

missä
$$II'_\sigma = -(\sigma'_x \cdot \sigma'_y + \sigma'_y \cdot \sigma'_z + \sigma'_z \cdot \sigma'_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad (3)$$

$$III'_\sigma = \det \begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_z \end{vmatrix} \quad (4)$$

ja

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x - p \\ \sigma'_y &= \sigma_y - p \\ \sigma'_z &= \sigma_z - p \\ p &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}. \end{aligned}$$

Suure p tarkoittaa hydrostaattista painetta ja $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ sekä τ_{zy} ovat jännitysmatriisin tai -tensorin alkiot /13, 14/.

Teräksen myötäämisen mallintamisessa sovelletaan usein von Misesin myötöehtoa, joka voidaan ilmaista muodossa:

$$f = \sigma_e - \sigma_m = 0 \quad (5)$$

missä σ_e on tehollinen jännitys:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (6)$$

ja σ_m on materiaalin yksidimensioinen myötöraja. Kolmessa dimensiossa von Misesin myötöehdon kuvaama myötöpinta pääjännityskoordinaatistossa on sylinteripinta, jonka akseli on $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ja säde on $\sqrt{2/3} \cdot \sigma_m$.

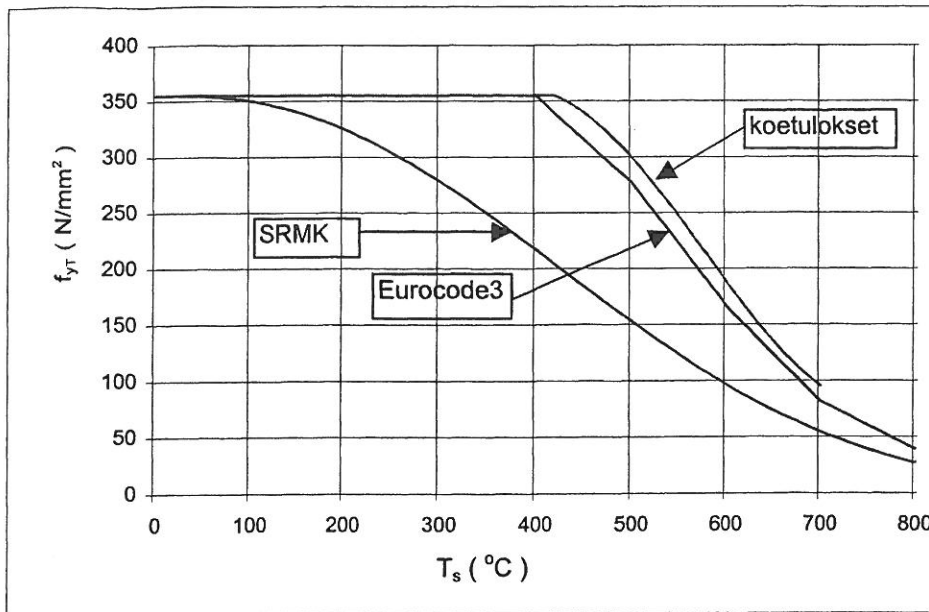
Venymä voidaan jakaa siis kimmoiseen ja plastiseen osaan. Jos plastinen venymä voidaan ilmaista myötöfunktion avulla, sanotaan myötösäännön liittyvän myötöehtoon (associated flow rule). Jos myötösääntö voidaan määrittellä myötöfunktiosta poikkeavan plastisen potentiaalin kautta, ei myötösääntö enää liity myötöehtoon (nonassociated flow rule) /13/.

Myötöfunktion kuvaama myötöpinta jännitysavaruudessa ei yleensä ole vakio, vaan se voi muuttua muotoaan, laajentua, pienentyä tai siirtyä. Myötöpinnan laajenemista kutsutaan isotrooppiseksi ja myötöpinnan siirtymistä kinemaattiseksi myötölujenemiseksi.

Eräs tietty kuormitusnopeusriippuvuuteen liittyvä ominaisuus on se, että materiaalin deformaatio yleisesti ottaen kasvaa ajan funktiona, jännityksen pysyessä vakiona. Kiinteiden aineiden tapauksessa kyseistä ilmiötä kutsutaan virumiseksi. Säännönmukaisesti materiaalin riippuvuus kuormitusnopeudesta kasvaa lämpötilan funktiona siten, että lineaarisesti tietyllä lämpötila- ja kuormitusnopeusalueella käyttäytyvät materiaalit voivat käyttäytyä hyvinkin epälineaarisesti korkeammissa lämpötiloissa. Tästä johtuen viruma on tärkeä suunnittelussa huomioitava tekijä korkeammissa lämpötiloissa sijaitsevien metallirakenteiden tapauksessa. Käyttöolosuhteiden lämpötiloissa virumaa ei tarvitse huomioida /13/.

Kantavien teräsrakenteiden palonkestävyys riippuu ratkaisevasti teräksen mekaanisista ja termisistä ominaisuuksista palotilannetta vastaavissa lämpötiloissa. Teräksen myötölujuus ja kimmokerroin ovat käyttöolosuhteiden lämpötiloissa (-40...+80 °C) lähes ajasta ja lämpötilasta riippumattomia /15/. Lämpötilan noustessa myötölujuus ja kimmokerroin pienenevät huomattavasti. Lähes kaikki teräksen ominaisuudet ovat lämpötilariippuvia.

Suomessa teräsrakenteita voi mitoittaa joko suomalaisten (SRMK) tai eurooppalaisten (Eurocode) normien mukaan. Eurooppalaisen normin määritelmät rakenneteräksen lämpötilasta riippuville materiaaliominaisuuksille vastaavat paremmin rakenneteräksen todellisia materiaaliominaisuuksia kuin suomalaisen normin määritelmät. Lämpötilan kohotessa rakenneteräksen myötölujuus heikkenee eurooppalaisen normin mukaan



Kuva 2 SRMK:n osan B7, Eurocode 3 osan 1-2 ja transienttikokeiden tulosten mukaisten materiaalimallien myötölujuuksien vertailu rakenneteräkselle S355 /1/.

hitaammin kuin suomalaisen normin mukaan, katso kuva 2. Myötölujuuden lisäksi rakenneteräksen kimmokerroin, liukukerroin, lämmönjohtavuus, ominaislämpö ja lämpöpiteneminen ovat normien mukaan lämpötilasta riippuvia materiaaliominaisuuksia.

Avaruusristikoiden analysointi elementtimenetelmällä

Elementtimenetelmässä (FEM) avaruusristikko korvataan laskentamallilla, joka koostuu äärellisestä määrästä äärellisen kokoisia elementtejä, jotka liittyvät toisiinsa solmupisteissä. Tasapaino- ja yhteensopivuusehtojen huomioonottaminen tuottaa äärellisen määrän algebrallisia yhtälöitä. Näin konstruoidulla mallilla on äärellinen määrä vapausasteita (sallittuja siirtymätiloja). Kyseiset algebralliset yhtälöt voidaan muodostaa käyttäen esimerkiksi siirtymämenetelmää (stiffness method) tai voimamenetelmää (flexibility method) /15, 16/. Siirtymämenetelmän mukainen yhtälöryhmä voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \quad (7)$$

missä \mathbf{K} on jäykkyyismatriisi, \mathbf{u} on solmuisiirtymien vektori, ja \mathbf{f} on vektori, joka sisältää elementtien solmuihin kohdistuvat ulkoiset voimat.

Avaruusristikon epälineaarisessa FEM-analyysissä on otettava huomioon sekä geometrinen että materiaalin epälineaarisuus. On myös otettava huomioon epälineaarisuus sekä ristikkosauvoissa että niiden välisissä liitoksissa. Geometriset

epälineaarisuudet, kuten suuret venymät, siirtymät ja kiertymät, voivat merkittävässä määrin muuttaa avaruusristikon tasapainotilaa, jolloin lopputuloksena voi olla rakenteen toimintakyvyn menetys ja mahdollinen sortuminen. Geometrisilla virheellisyyksillä, kuten ristikkosauvojen alkukäyryydellä ja kuormituksen epäkeskisyydellä, on taipumus vahvistaa epälineaarista käyttäytymistä. Materiaalinen epälineaarisuus aiheutuu epälineaarista materiaaliominaisuuksista (kuten epälineaarinen jännitys-venymäyhteys) ja ajasta riippuvista ilmiöistä, kuten virumasta ja relaksaatiosta /15/.

Avaruusristikon palotekninen FEM-analyysi on syytä suorittaa jollain askelittain etenevällä vaiheittaisella ratkaisumenetelmällä. Kyseisten menetelmien peruslähestymistapana on olettaa ratkaisu tunnetuksi ajanhetkellä t , jolloin tehtävänä on etsiä ratkaisu ajanhetkelle $t+\Delta t$, missä Δt on sopivasti valittu aikainkrementti. Tällöin ajanhetkellä $t+\Delta t$ /11/:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{f} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = 0 \quad (8)$$

missä \mathbf{F} on vektori, joka koostuu elementtien solmuissa sijaitsevista, elementtien jännitystilasta aiheutuvista voimista ja yläindeksi ilmaisee tarkasteltavan ajankohdan.

Solmuisiirtymien vektoria \mathbf{u} ajanhetkellä $t+\Delta t$ voidaan approksimoida seuraavasti:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \approx {}^t \mathbf{u} + ({}^t \mathbf{K}_t)^{-1} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{f} - {}^t \mathbf{F}) \quad (9)$$

missä $\Delta \mathbf{u}$ on solmuisiirtymien inkrementteistä koostuva vektori ja ${}^t \mathbf{K}_t$ on tangentialinen jäykkyyssmatriisi. Siirtymien approksimaatioon ajanhetkellä $t+\Delta t$ perustuen voidaan laskea samalla ajanhetkellä approksimaatiot jännityksille ja solmuissa vaikuttaville voimille. Tämän jälkeen voidaan edetä seuraavan aikainkrementin laskelmiin. Riittävän tarkkuuden saavuttamiseksi ratkaisua on yleensä syytä iteroida aikainkrementin sisällä /11/.

Jos analyysissä seurataan rakennesysteemin liiketilaa alkuasemasta lopputilaan, on kysymyksessä Lagrangen formulaation mukainen esitys. Kyseinen formulaatio sopii kiinteiden aineiden analysoimiseen, ja se huomioi myös ratkaisualueen tilavuuden muutoksen. Yleisimmät Lagrangen formulaation mukaiset menetelmät ovat totaalinen ja päivitetty Lagrangen menetelmä. Totaalisessa Lagrangen menetelmässä kaikkia staattisia ja kinemaattisia muuttujia verrataan rakennesysteemin alkutilaan, kun taas päivitettyssä Lagrangen menetelmässä kyseisiä muuttujia verrataan rakennesysteemin edelliseen tasapainotilaan /11/. Epälineaaristen FEM-yhtälöiden ratkaisun iteroimisessa käytetään useimmiten jonkin muotoista Newton-Raphson iterointia.

Epätasaisen lämpökuorman rakenteeseen aiheuttamien lämpögradienttien selvittäminen edellyttää kyseisen rakenteen lämmönsiirtymisanalyysin suorittamista. FEM-ratkaisun lähtökohdana lämmönsiirtymisanalyysissä on Fourierin lämmönjohtumislaki ja siihen liittyvät reunaehdot.

FE-menetelmän antaman likiratkaisun konvergoiminen, eli suppeneminen, kohti ratkaistavana olevan matemaattisen mallin tarkkaa ratkaisua riippuu pääasiassa elementtiverkon tiheydestä ja käytettyjen interpolaatiopolynomien asteluvusta. Ratkaisun tarkkuuden paranemista mitataan yleensä tutkimalla jonkin tietyn suureen arvon muuttumista, kun elementtiverkkoa tihennetään ja/tai interpolaatiopolynomien astetta kasvatetaan. Yleensä ratkaisun suppenemista tarkastellaan sopivien normien avulla. Tällaisia ovat esimerkiksi systeemin energian, jäännösvoimien tai siirtymien muutokseen perustuvat normit /11/.

Newton-Raphson iteraatiossa kuorman kasvu määritellään kuormitusaskeleen alussa, ja se pidetään vakiona tasapainon suhteen tehtävien iteroitien ajan. Tämä voi johtaa hankaluuksiin rakennesysteemin jäykkyyden muuttuessa nopeasti. Tämän ongelman ratkaisemiseksi on kehitetty useita menetelmiä, joita ovat esimerkiksi viiva-haku tekniikka (line-search technique) ja kaaren-pituus menetelmä (arc-length method). Kyseisten menetelmien käyttö voi parantaa huomattavasti epälineaarisen FEM-analyysin konvergenssia.

Kaksipaarretasoisissa avaruusristikoissa on yleensä sauvoja, useimmiten ylä- tai alapaarteessa, joihin kohdistuu jakaantunut kuormitus. Tällöin FEM-analyysissä täytyy käyttää elementtejä, jotka kykenevät välittämään myös taivutusta. Yleensä käytetään palkkielementtejä, joista osa soveltuu myös sellaisiin epälineaarisiin FEM-analyysihin, joissa on otettava huomioon sekä materiaallinen että geometrinen epälineaarisuus. Palkkielementtien solmujen vapausasteisiin sisältyvät siirtymien lisäksi kiertymät. Kolmedimensioisessa tarkastelussa on solmua kohden kuusi toisistaan riippumatonta vapausastetta, kolme siirtymävapausastetta ja kolme kiertymävapausastetta.

Mikäli avaruusristikon liitostyyppin jäykkyyttä (momentin ja kiertymän välistä yhteyttä) ei tunneta riittävän hyvin, oletetaan liitosten käyttäytyvän nivelen tavoin. Useimmiten liitokset mallinnetaan nivelöityinä. Aksiaalisten voimasuureiden jakaantumiseen liitosten jäykkyys ei vaikuta paljoa, täysin jäykkinä tai nivelöityinä mallinnetuista liitoksista konstruoitujen, muutoin samanlaisten ristikkomallien aksiaalisten voimasuureiden jakaumien ero on alle 1 % /17/. FEM-ohjelmat eivät yleensä osaa toteuttaa solmujen (liitosten) nivelöintiä itsenäisesti, jolloin kyseinen toimi jää suunnittelijan tehtäväksi. Tällöin on tiedettävä riittävä nivelöitävien sauvojen määrä. Jos niveliä on asetettu liikaa, tulee jäykkyydsmatriisista singulaarinen. Ristikkomallin käyttäytymisen kannalta tämä tarkoittaisi esimerkiksi sitä, että joku (tai jotkin) mallin elementeistä olisi molemmista päistään nivelöity siten, että se voisi pyöriä epämääräisellä tavalla symmetria-akselinsa ympäri (paikallinen mekanismi). Todellisuudessa liitokset eivät koskaan ole täysin jäykkiä tai nivelöityjä, vaan äärellisen jäykkiä.

Rakenteen sortumistila saavutetaan, kun pienellä kuorman lisäyksellä siirtymät kasvavat suhteellisesti suuriksi, mikä tarkoittaa rakenteen kokonaisjäykkyyden muuttumista oleellisesti pienemmäksi. Numeerisessa laskennassa tämä tarkoittaa sitä, että kolmesta osasta koostuvaa matriisihajotelmaa muodostettaessa jotkut jäykkyydsmatriisin diagonaalialkioista muuttuvat hyvin pieniksi, kunnes lopulta joku niistä saa arvon nolla,

jolloin jäykkymatriisista tulee singulaarinen. Jos vaiheittaisessa laskenta-analyysissä iterointi suoritetaan tasapainotilan suhteen, voi sortumiskuormaa lähestyttäessä ilmetä vaikeuksia konvergoinnin saavuttamisessa.

Hyvä käytäntö insinööriprobleeman analysoinnissa on tehdä aina ennen epälineaarista analyysia lineaarinen analyysi, jolloin epälineaarista analyysia voidaan pitää tarkastelun jatkeena lineaarisen analyysin oletusten ulkopuolelle. Lineaarisen analyysin tuloksiin perustuen on mahdollista ennustaa ensiksikin, mitkä epälineaariset ominaisuudet tulevat olemaan vaikutukseltaan merkittäviä, ja toiseksikin, miten niiden esiintyminen voidaan kartoittaa tarkoituksenmukaisimmin. Nimittäin lineaarisen analyysin tulokset osoittavat ne alueet, missä geometrinen epälineaarisuus voi olla merkittävää, ja ne alueet, missä materiaali voi plastisoitua. Linearisessa analyysissä pitäisi myös kokeilla valitun elementtiverkon sopivuus suoritettavan tarkastelun tarpeisiin. Koska epälineaarinen analyysi on työläämpi ja kalliimpi suorittaa kuin lineaarinen, on tärkeää että epälineaarista analyysia varten konstruoitu elementtiverkko on suunniteltu taloudelliseksi /11/.

Lähteessä /1/ tarkasteltavien avaruusristikoiden analyysit suoritettiin elementtimenetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla nimeltään NISA. Rakennemallit koottiin yleisistä kolmiulotteisista palkkielementeistä, joilla on sekä veto- että taivutusjäykkyyttä.

Kaikkien tutkittujen kaksipaarretasoisten avaruusristikoiden tyyppi on Sirius. Pohjaratkaisun mitat ovat 40x40 m² ja rakennekorkeus on 2.0 tai 2.5 m. Matalamman rakennekorkeuden omaavilla ristikoilla modulijako on 10x10 modulia, ja suuremman rakennekorkeuden omaavilla ristikoilla 8x8 modulia. Tutkittujen ristikoiden geometriatyyppi on esitetty kuvassa 1. Ristikoiden materiaaliksi valittiin rakenneteräs S355. Ristikkoprofiilit ovat neliöpoikkileikkauksisia putkipalkkeja. Kaikki ristikot on tuettu yläpaarten reunasolmuista. Kuormituksen lisäksi ristikon ja kattorakenteen omapaino sekä lumikuorma. Kattorakenteen omapaino ja lumikuorma jakaantuvat tasaisesti yläpaarten sauvoille. Sovellettu myötöehto on von Misesin myötöehto, ja myötösäännön oletetaan liittyvän myötöehtoon. Myötölujeneminen oletetaan isotrooppiseksi. Ne rakenteelliset ominaisuudet tai muut tekijät, joiden vaikutusta avaruusristikoiden käyttäytymiseen palorasitustilanteen analyysissä tutkitaan, ovat ristikon rakennekorkeus, materiaalmalli, sauvaprofiilien poikkileikkausgeometria, liitosten jäykkyys, lämpölaajenemisen rajoittaminen ja palosuojauksen määrä.

Tutkituilla avaruusristikoilla oli kolme erilaista sauvaprofiilivalikkoa. Nämä kaikki määritettiin käyttötilan olosuhteiden mitoituksen kautta. Profiilivalikoista ensimmäinen saatiin Space Deck Ltd:n valmistaman NODUS-avaruusristikkosysteemin suunnittelua varten kehittämän alustavan mitoitusmenetelmän avulla. Menetelmä perustuu yksikkövoimakaaavioiden käyttöön. Toinen profiilivalikko saatiin optimoimalla alustavasta mitoituksesta saadut profiilit rakennepainon suhteen. Tarvittujen iteraatiokierrosten määrä vaihteli tällöin kolmen ja viiden välillä. Kolmas profiilivalikko on muuten samanlainen kuin toinen, paitsi sen yläpaarrefiilit ovat kohtuullisesti ylimitoitettut. Taulukoissa 1 ja 2 on esitetty tutkittujen ristikoiden profiilivalikot.

Taulukko 1 Rakennekorkeuden 2.0 m omaavien avaruusristikoiden profiilivalikot.

	yläpaarre) $B \times H \times t$ (mm ³)	alapaarre) $B \times H \times t$ (mm ³)	diagonaalit) $B \times H \times t$ (mm ³)
Alustava mitoitus	140 x 140 x 5.0	160 x 160 x 6.3	90 x 90 x 4.0
Optimointi rakennepainon mukaan	140 x 140 x 5.0	150 x 150 x 6.3	90 x 90 x 5.0
	120 x 120 x 5.0	100 x 100 x 5.0	80 x 80 x 4.0
	90 x 90 x 5.0	70 x 70 x 4.0	70 x 70 x 3.0
Ylimoitettu yläpaarre	140 x 140 x 10.0	150 x 150 x 6.3	90 x 90 x 5.0
		100 x 100 x 5.0	80 x 80 x 4.0
		70 x 70 x 4.0	70 x 70 x 3.0

*) B on profiilin leveys (mm), H on profiilin korkeus (mm) ja t on profiilin seinämäpaksuus (mm)

Taulukko 2 Rakennekorkeuden 2.5 m omaavien avaruusristikoiden profiilivalikot.

	yläpaarre) $B \times H \times t$ (mm ³)	alapaarre) $B \times H \times t$ (mm ³)	diagonaalit) $B \times H \times t$ (mm ³)
Alustava mitoitus	140 x 140 x 5.0	160 x 160 x 6.3	100 x 100 x 4.0
Optimointi rakennepainon mukaan	140 x 140 x 6.3	150 x 150 x 6.3	120 x 120 x 4.0
	120 x 120 x 6.3	120 x 120 x 5.0	90 x 90 x 5.0
	120 x 120 x 4.0	80 x 80 x 4.0	80 x 80 x 3.0
Ylimoitettu yläpaarre	140 x 140 x 10.0	150 x 150 x 6.3	120 x 120 x 4.0
		120 x 120 x 5.0	90 x 90 x 5.0
		80 x 80 x 4.0	80 x 80 x 3.0

*) B on profiilin leveys (mm), H on profiilin korkeus (mm) ja t on profiilin seinämäpaksuus (mm)

Lähteessä /1/ tutkitut palotapaukset ovat tasaisen lämpötilajakauman aiheuttava lammikkopalo lentokonehangaarissa ja epätasaisen lämpötilajakauman aiheuttava henkilöauton palo avoimessa pysäköintilaitoksessa. Palotilan ilman lämpötilajakaumat ja liekin korkeus laskettiin Heskestadin ja Alpertin korrelaatioon perustuvilla kaavoilla. Palosuojamateriaaliksi valittiin palosuojamaali.

Palorasitustilanteen tarkasteluissa /1/ laskentamalleille tehtiin epälineaarinen staattinen FEM-analyysi, jolloin sovellettiin askelittain etenevän Lagrangen ratkaisumenetelmän ja Newton-Raphson iteroinnin yhdistelmää. Laskennan konvergenssia parannettiin viiva-haku tekniikalla. Epätasaisen lämpökuorman aiheuttama avaruusristikon epätasainen lämpötilan kehittyminen selvitettiin epälineaarisen lämmön siirtymisen FEM-analyysin avulla. Tasaisen lämpökuorman tapauksessa avaruusristikon lämpötilajakaumien selvittäminen erillisellä lämmönsiirtymisanalyysillä ei ollut tarpeellista. Mitoituskriteerinä oli sortumisrajatila eli avaruusristikon kantokyvyn menetys.

Tasaisen lämpökuorman tapauksessa kriittisen lämpötilan, jossa avaruusristikon kantokyvyn menetys tapahtuu, selvittämiseksi kullekin ristikkomallille tehtiin muutamia laskenta-analyysieja siten, että se lämpötila-askel, jossa laskenta divergoi jaettiin pienempiin osiin seuraavaa laskenta-analyysia varten. Näin jatkettiin kunnes kriittisen lämpötilan sijaintialue oli saatu selvitettyä 1 °C tarkkuudella. Epätasaisen lämpökuorman tapauksessa näin ei tarvinnut menetellä, sillä valitun palokuorman aiheuttama palo oli siinä

määrin vaatimaton, ettei yksikään tutkituista ristikoista menettänyt sille altistettuna kantokykyään.

Laskenta-analyysien tuloksista

Eurooppalaisissa normeissa määritellyn ja transienttikokeiden tulosten perusteella määritellyn materiaalimallin omaavien avaruusristikoiden kriittinen lämpötila oli korkeampi kuin suomalaisissa normeissa määritellyn materiaalimallin omaavien avaruusristikoiden. Alustavasta mitoituksesta saaduilla profiileilla ja ylimitoitettun yläpaarteen profiileilla varustettujen avaruusristikoiden kriittinen lämpötila oli korkeampi kuin rakennepainon mukaan optimoiduilla profiileilla varustettujen. Tutkituissa puitteissa rakennekorkeudella ei ollut merkittävää vaikutusta avaruusristikoiden palonkestävyyteen. Jäykällä liitoksilla varustettujen avaruusristikoiden kriittinen lämpötila oli huomattavasti korkeampi kuin nivelöidyillä liitoksilla varustettujen.

Kun lämpölaajeneminen oli estetty, vaihteli avaruusristikon kriittinen lämpötila välillä 70-160 °C. Eräs tekijä, josta johtuen kriittiset lämpötilat olivat tässä tapauksessa näin alhaisia on se, että laskentamallissa tukien vaakasiirtymät voidaan estää täysin, mikä taas ei luonnossa ole mahdollista. Toisaalta kun usea sauva saavuttaa varsin varhain rajatilan lähes samanaikaisesti, heikkenee myös laskenta-analyysin konvergoiminen huomattavasti. Tällöin voi seurauksena olla käytetyn laskentamenetelmän ja -ohjelman rajoituksista johtuva laskenta-analyysin liian aikainen divergointi, eli laskenta voi päättyä vaikka rajatilan saavuttaneita sauvoja ei ole niin monta, että ristikko voisi menettää kantokykynsä. Alhaisin sellaisen avaruusristikon kriittinen lämpötila, jonka lämpölaajeneminen ei ollut estetty, oli noin 400 °C. Korkeimmat kriittiset lämpötilat, jotka olivat suurempia kuin 600 °C, oli eräillä täysin jäykällä liitoksilla varustetuilla ristikoilla. Kyseiset ristikot edustavat palonkestävyyden teoreettista ylärajaa, jota ei voida luonnossa saavuttaa.

Ristikkosauvojen rajatilat olivat nurjahdus, vetomyötö tai puristetun ja taivutetun sauvan rajatila, liitosten kestävyyttä ei tutkittu. Laskentamallien tyypillinen sortumismekanismi oli ketjureaktion kaltainen yläpaarteen sauvojen rajatilaan joutuminen. Hieman ennen kantokyvyn menetystä ristikon taipuma kasvoi pienen kuormituksen lisäyksen vaikutuksesta aina huomattavasti.

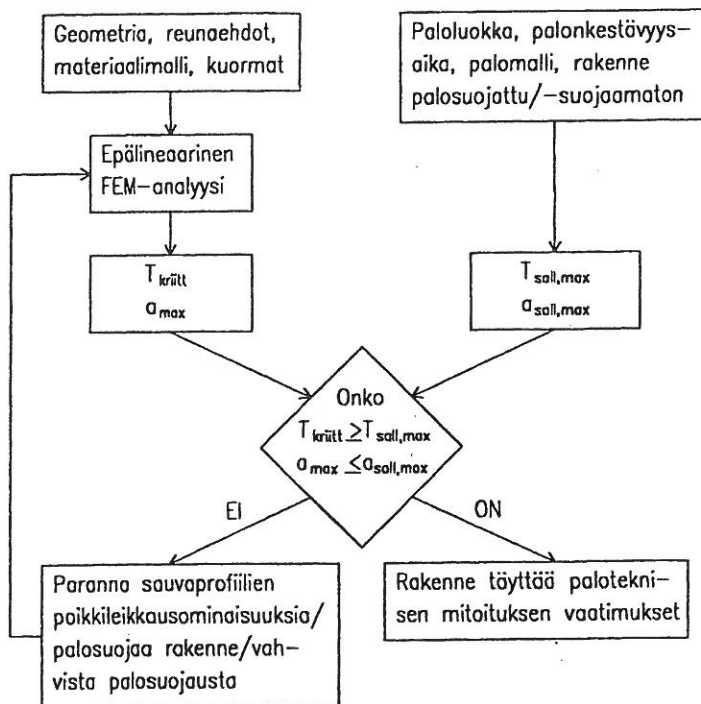
Palomitoitusvaatimusten täyttämässä sauvaprofiilien ylimitoittaminen ja rakenteen pinnoittaminen palosuojamaalilla osoittautuivat joissain tapauksissa vaihtoehtoisiksi ratkaisuiksi.

Laskenta-analyysien ajallinen kesto vaihteli noin puolesta tunnista kahteen tuntiin. Laskenta-askelen katsottiin konvergoineen, kun energia-, voima- ja siirtymäkriteerit täyttyivät yhtäaikaaisesti. Laskenta-analyysien tulokset vaikuttavat harvoja poikkeuksia lukuunottamatta realistisilta.

Palomitoitusmenetelmä avaruusristikkoille

Hyvin suunniteltu avaruusristikko säilyttää yleensä kantokykynsä vaikka yksi tai muutama sauva saavuttaisi rajatilan. Avaruusristikolle kohdistettavat palotekniset vaatimukset ja samalla palosuojauksen tarve määräytyvät tapauskohtaisesti, muun muassa palo-osaston geometrian, käyttötarkoituksen ja mahdollisen sammutuslaitoksen perusteella.

Avaruusristikkoa kuvaavalle rakennemallille tehdään joukko epälineaarisia FEM-analyyssejä, joiden tuloksista saadaan kriittiset lämpötilat sekä ristikkosauvojen stabiiliuden menetyks- ja taipumahistoriat eri kuormitustapauksissa. Jos rakennemallin kriittinen lämpötila ja/tai suurin taipuma ei täytä voimassa olevien normien mukaisia vaatimuksia, rakennetta on vahvistettava, jonka jälkeen laskentaprosessi suoritetaan uudestaan. Kuvassa 3 on kaaviomuotoinen esitys avaruusristikon paloteknisestä mitoituksista, ja mitoituksen keskeisistä osavaiheista.



Kuva 3 Avaruusristikon paloteknistä mitoituksista ja keskeisiä vaiheita kuvaava kaavio. T_{kriitt} on kriittinen lämpötila, a_{max} on suurin taipuma, $T_{sall,max}$ on suurin sallittu lämpötila ja $a_{sall,max}$ on suurin sallittu taipuma /l/.

Yhteenveto

Lähtö- ja tulostietojen sekä yksittäisten laskutoimitusten suuren määrän takia avaruusristikoiden laskenta-analyysien suorittaminen johonkin numeeriseen menetelmään perustuvalla laskentaohjelmalla on välttämätöntä. Yleensä käytetään FE-menetelmään

perustuvia laskentaohjelmia. Tapauskohtaisuudesta ja avaruusristikoiden sijaintitilojen yleensä suuresta koosta johtuen on lämpökuormituksen selvittämiseksi syytä käyttää todelliseen palonkehitykseen perustuvaa palomallia.

Monia avaruusristikoiden palonaikaiseen käyttäytymiseen liittyviä ominaisuuksia on selvittämättä, jolloin tarpeellista tutkimustyötä on tehtävä vielä paljon. Jatkossa olisi tarpeellista tutkia erilaisilla palosuojamateriaaleilla osittain tai kokonaan suojattujen avaruusristikoiden käyttäytymistä palossa. Liitosten mallintaminen äärellisen jäykkänä on eräs seikka, jonka vaikutusta avaruusristikon käyttäytymiseen palossa kannattaisi tutkia. Olisi myös syytä tutkia erilaisten numeeristen laskentamenetelmien soveltuvuutta avaruusristikoiden palonaikaisen käyttäytymisen analysoimiseen.

Mikrotietokonetta ja sopivaa kaupallista FEM-ohjelmaa käyttäen epälineaariseen laskenta-analyysiin perustuva avaruusristikon palotekninen mitoitus voidaan tehdä suhteellisen vähin kustannuksin ja kohtuullisessa ajassa. Avaruusristikon tarkka palotekninen mitoitus maksaa itsensä moninkertaisesti takaisin, jos mitoitustuloksen perusteella rakenteen kallis palosuojaaminen osoittautuu osittain tai kokonaan tarpeettomaksi.

Lähdeluettelo

- 1 Cronvall, O. Kaksipaarretasoisten teräksisten avaruusristikoiden palotekninen mitoitus. Diplomityö. Teknillinen korkeakoulu, Rakennus- ja maanmittaustekniikan osasto, Espoo 2000. 195+34 s.
- 2 Walker, H., B. The Design and Construction of Double-Layer Space Frame Grids. In: Makowski, Z., S. Analysis, Design and Construction of Double-Layer Grids. London 1981, Applied Science Publishers. s. 289-302.
- 3 Makowski, Z., S. Preface. In: Makowski, Z., S. Analysis, Design and Construction of Double-Layer Grids. London 1981, Applied Science Publishers.
- 4 Drysdale, D. An Introduction to FIRE DYNAMICS. 1985, John Wiley&Sons Ltd. 378 s.
- 5 Forney, G., P. Computing Radiative Heat Transfer Occurring in a Zone Fire Model. Fire Science&Technology 14(1994)1&2.
- 6 Atreya, A. Convection Heat Transfer. In: SFPE Handbook of Fire Protection Engineering. U.S.A 1995, National Fire Protection Association. s. 1-39 – 1-64.
- 7 Alpert, R., L.&Ward, E., J. Evaluation of Unsprinklered Fire Hazards. Fire Safety Journal 7(1984). s. 127-143.

- 8 Inha, T.&Kallioniemi, P. Teräsrakenteiden palosuunnittelu. Helsinki 1991, Teräsrakeneyhdistys r.y. 221 s.
- 9 Babrauskas, V. Burning rates. In: SFPE Handbook of Fire Protection Engineering. U.S.A 1995, National Fire Protection Association. s. 3-1 – 3-15.
- 10 Beyler, C.&DiNenno, P., J. Introduction to Fire Modeling. In: NFPA Fire Protection Handbook. U.S.A 1997, National Fire Protection Association. s. 11-39 – 11-51.
- 11 Bathe, K. Finite element procedures in engineering analysis. 1982, Prentice-Hall, Inc. 725 s.
- 12 Zienkiewicz, O., C. The Finite Element Method. 1983, McGraw-Hill Book Company (UK) Ltd. 757+30 s.
- 13 Lubliner, J. Plasticity Theory. New York 1990, Macmillan Publishing Company. 495 s.
- 14 Malvern, L. E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. New Jersey 1969, Prentice-Hall, Inc. 713 s.
- 15 Malla, R., B.&Serrette, R., L. Double-Layer Grids: Review of Static and Thermal Analysis Methods. Journal of Structural Engineering 122(1996)8, s. 873-881.
- 16 Kouhia, R.&Tuomala, M. Rakenteiden Mekaniikan Numeeriset Menetelmät. Luentomoniste, 1997. 229+31 s.
- 17 Butterworth, J., W. Analysis of Double-Layer Grids. In: Makowski, Z., S. Analysis, Design and Construction of Double-Layer Grids. London 1981, Applied Science Publishers. s. 57-92.

Otso Cronvall, DI
 VTT Tuotteet ja tuotanto
 email: otso.cronvall@vtt.fi