

## KIMMOPLASTISTEN RAKENTEIDEN NUMEERISESTA LASKENNASTA

Sami Pajunen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 34  
Nro 2, 2000, s. 25-38

### TIIVISTELMÄ

Artikkelissa on esitetty lyhyt katsaus kimmoplastisten rakenteiden analysoinnissa käytettäviin numeerisiin menetelmiin. Tarkastelu on rajattu koskemaan elementtimenetelmällä mallinnettuja rakenteita sekä ajasta riippumattomia materiaalimalleja. Laskentamenetelmien esittelyn lisäksi artikkelin lopussa on havainnollistettu joidenkin menetelmien toimintaa yksinkertaisen laskentaesimerkin avulla.

### JOHDANTO

Kimmo- ja kimmoplastisten rakenteiden analysointi on tyypillisesti epälineaarinen tehtävä, jossa plastiset muodonmuutokset ovat vähintään yhtäsuuria tai jopa kertaluokkia suurempia kuin kimmoiset. Riippumatta tarkasteltavan rakenteen geometrisesta lineaarisuudesta tai epälineaarisuudesta, tällaiset tehtävät ratkaistaan lähes poikkeuksetta inkrementaalisesti, eli kasvattamalla jonkin kontrolliparametrin arvoa askeleittain, ja iteroimalla rakenne tasapainoon jokaisen askeleen aikana. Kontrolliparametrinä käytetään sellaista muuttujaa, jonka tiedetään kasvavan monotonisesti analyysin edetessä. Tyypillisiä kontrolliparametrejä ovat mm. kuormakerroin  $\lambda$  tai kaarenpituusparametri  $s$  [1, s.762-764].

Epälineaarisen tehtävän ratkaisustrategia eroaa kimmoisen ja kimmoplastisen materiaalimallin tapauksissa vain muutamissa kohdissa. Tämän havainnollistamiseksi on

alla esitetty siirtymäperusteisen elementtimenetelmän kuormaohjatut inkrementaaliset tasapainoyhtälöt sekä niihin liittyvät päivitysstrategiat.

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda \quad (1)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \lambda_{n+1}\mathbf{p}_{\text{ref}} - \mathbf{r}(\mathbf{u}) \quad (2)$$

Kohdassa (1) annetaan kontrolliparametrille  $\lambda$  ennalta määrätty lisäys  $\Delta\lambda$ , ja kohdassa (2) lasketaan siirtymävektorin inkrementtiä  $\Delta\mathbf{u}$  iteratiivisesti, kunnes ratkaisu suppenee ja saavutetaan uusi tasapainotila  $(\mathbf{u}_{n+1}, \lambda_{n+1})$ , jossa  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}$  ja  $\Delta\mathbf{u} = \Sigma d\mathbf{u}$ . Yhtälöissä (1) ja (2) alaindeksit  $n$  ja  $n+1$  viittaavat askeleisiin, ja yksinkertaisuuden vuoksi muuttujista on jätetty pois iteraatiokierrokseen viittaavat yläindeksit. Yhtälössä (2)  $\mathbf{p}_{\text{ref}}$  on käyttäjän antama referenssikuormitusvektori, ja  $\mathbf{r}$  on rakenteen sisäisten voimien vektori. Tangenttijäykkyyssmatriisi  $\mathbf{K}_T$  voidaan kirjoittaa auki muodossa

$$\mathbf{K}_T d\mathbf{u} = \int_V \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \mathbf{B} dV d\mathbf{u} + \int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV \quad (3)$$

jossa ensimmäinen integraali määrittelee materiaalisesti tangentiaalisen jäykkyyssmatriisin ja toinen integraali geometrisen jäykkyyssmatriisin. Yhtälöstä (3) voidaan selvästi erottaa kaksi termiä, joiden laskenta kimmoisen materiaalin tapauksessa on triviaalia, mutta kimmoplastisen materiaalin tapauksessa ansaitsee erityishuomion. Ensinnäkin, kimmoiselle materiaalille *jännitysvektori*  $\boldsymbol{\sigma}$  on helppo laskea inkrementteittäin kaavalla  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma}$ , jossa inkrementti  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  saadaan suoraan Hooken laista, kun taas kimmoplastisen materiaalin konstitutiiviset yhtälöt saattavat olla huomattavasti monimutkaisempia. Toiseksi, Hooken lain ollessa voimassa *materiaalin tangenttijäykkyyssmatriisi* eli materiaalimatriisi  $d\boldsymbol{\sigma}/d\boldsymbol{\varepsilon}$  on vakiokimmomatriisi  $\mathbf{D}$ , mutta plastisuuden alkaessa materiaalin jossakin pisteessä tämäkään tulos ei ole enää voimassa.

Edellä mainitut kaksi tehtävää voidaan ratkaista karkeasti jaotellen kolmella eri lähestymistavalla [3]. Laskennallisesti näiden tehtävien ratkaisualgoritmit eroavat oleellisesti toisistaan mikäli halutaan käyttää

- A.** pieniä inkrementtejä ja likimääräistä materiaalimatriisia  $d\boldsymbol{\sigma}/d\boldsymbol{\varepsilon}$ ,
- B.** suuria inkrementtejä ja likimääräistä materiaalimatriisia  $d\boldsymbol{\sigma}/d\boldsymbol{\varepsilon}$  tai
- C.** suuria inkrementtejä ja algoritmisesti konsistenttia materiaalimatriisia  $d\boldsymbol{\sigma}/d\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Tässä inkrementteillä tarkoitetaan kontrolliparametrin ennaltamäärätystä inkrementistä aiheutuvia siirtymävektorin, jännitysvektorin ja muodonmuutosvektorin inkrementtejä.

Pyrittäessä tarkkaan, nopeaan ja luotettavaan tehtävänratkaisuun, on edellämainituissa laskentastrategioissa **A**, **B** ja **C** huomioitava muutamia seikkoja. Ensimmäisessä strategiassa **A** pyritään pitämään yhteen inkrementtiin tarvittava iteraatiokierrosten määrä pienenä, mutta tähän pääsemiseksi on vastaavasti inkrementtien määrää lisättävä. Joissakin tapauksissa, esim. jos rakenteen rotaatiot kasvavat nopeasti kontrolliparametrin funktiona, saattaa pienen inkrementin käyttö olla perusteltua. Toisessa strategiassa **B** pyritään saavuttamaan tehokkuutta suurilla inkrementteillä ja laskennallisesti halvalla likimääräisellä materiaalmatriisilla  $d\sigma/de$ , jolloin tarvittavien iteraatioiden määrä luonnollisestikin kasvaa. Tämä saattaa olla laskennallisesti tehokasta, mikäli tangenttijäykkyysmatriisi muodostetaan vain kerran inkrementin aikana (modifioitu Newton-Raphson-iterointi). Kolmannessa strategiassa **C** muodostetaan käytetyn jännitysinkrementin laskenta-algoritmin kanssa yhteensopiva (konsistentti) materiaalmatriisi  $d\sigma/de$ , ja saadaan näin globaalin tasapainoiteroinnin asympotoottisesti neliöllinen suppenevuus säilytettyä [4]. Tämä mahdollistaa sen, että siirryttäessä kimmoiselta alueelta kimmoplastiselle, inkrementtien kokoa ei tarvitse pienentää eikä tarvittavien iteraatiokierrosten lukumäärä silti kasva merkittävästi. Tämä on laskennallisesti tehokasta ellei jännitysinkrementin  $\Delta\sigma$  laskenta tai yhteensopivan materiaalmatriisin  $d\sigma/de$  muodostaminen kuluta kohtuuttomasti laskenta-aikaa.

Seuraavaksi tarkastellaan joitakin jännitysinkrementin laskentaan käytettäviä vakiintuneita menetelmiä, sekä johdetaan strategiaan **C** liittyen nk. yleiseen lähimmän pisteen projektion menetelmään (general closest point projection algorithm) liittyvä yhteensopiva materiaalmatriisi. Lopuksi menetelmien toimivuutta havainnollistetaan sylinterikuoren analysoinnissa.

## JÄNNITYSINKREMENTIN $\Delta\sigma$ LASKENTA

Jatkoa varten kirjoitetaan kimmoplastisen jatkuvan aineen konstitutiiviset yhtälöt [6]:

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \mathbf{r}(\sigma, \mathbf{q}) \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -\gamma \mathbf{h}(\sigma, \mathbf{q}) \quad (6)$$

joissa  $\varepsilon$  on kokonaismuodonmuutosvektori ja  $\varepsilon^p$  on sen plastinen osuus,  $\mathbf{q}$  sisältää plastiset (sisäiset) muuttujat,  $\mathbf{r}$  osoittaa plastisen myödon suunnan,  $\mathbf{h}$  määrittelee myötölujittumisen tyyppin ja  $\gamma$  on konsistenssiparametri. Pisteellä tarkoitetaan derivointia ajan suhteen. Käytettävän materiaalimallin mukaisen myötöfunktion  $f$  sekä konsistenssiparametrin  $\gamma$  on lisäksi toteutettava samanaikaisesti seuraavat Kuhn-Tucker -ehdot:

$$f \leq 0 \quad (7)$$

$$\gamma \geq 0 \quad (8)$$

$$\gamma f = 0 \quad (9)$$

Yllä esitetyistä yhtälöistä (4-9) saadaan johdettua yhtälö kimmoplastisesta muodonmuutosinkrementistä  $\Delta\varepsilon$  aiheutuvan jännitysinkrementin  $\Delta\sigma$  laskemiseksi [12, s.232]:

$$\Delta\sigma = \mathbf{D}^{ep} \Delta\varepsilon \quad (10)$$

jossa

$$\mathbf{D}^{ep} := \mathbf{D} - \mathbf{D}^p := \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{r}^T (\partial_\sigma f) \mathbf{D}}{(\partial_\sigma f) \mathbf{D} \mathbf{r}^T + (\partial_q f) \mathbf{h}^T} \quad (11)$$

Mikäli materiaali noudattaa assosiatiivista myötösääntöä eli  $\mathbf{r} = \partial_\sigma f$ , säilyy kimmoplastisen materiaalimatriisi  $\mathbf{D}^{ep}$  symmetrisenä.

Jatkon kannalta on syytä painottaa, että tässä esitetty materiaalimatriisi (11) on johdettu jatkuvan aineen yhtälöistä (4-9) eikä sillä ole mitään kytkeä menetelmään, jolla yhtälö (10) ratkaistaan.

### Avoimet menetelmät (explicit methods)

Yhtälö (10) voidaan ratkaista nk. avoimilla menetelmillä karkeasti jaotellen kahdella eri strategialla. Yhtälö voidaan ratkaista suoralla iteroinnilla (direct iteration) jakamalla muodonmuutosinkrementti  $\Delta\epsilon$  osiin [12, s.241], ja laskemalla jännitysinkrementti  $\Delta\sigma$  kaavasta

$$\Delta\sigma = \sum \frac{\mathbf{D}^{ep} \Delta\epsilon}{k} \quad (12)$$

jossa  $k$  on käyttäjän arvion mukainen luku, tyypillisesti  $1 \leq k \leq 10$ . Yhtälö (12) saadaan laskennallisesti tehokkaampaan muotoon jakamalla muodonmuutosinkrementti  $\Delta\epsilon$  kimmoiseen osaan  $\Delta\epsilon^e = r\Delta\epsilon$  ja plastiseen osaan  $\Delta\epsilon^p = (1-r)\Delta\epsilon$ , jossa suhdeluku  $r$  saadaan määritettyä ehdosta

$$f(\sigma_n + r\mathbf{D}\Delta\epsilon) = 0 \quad (13)$$

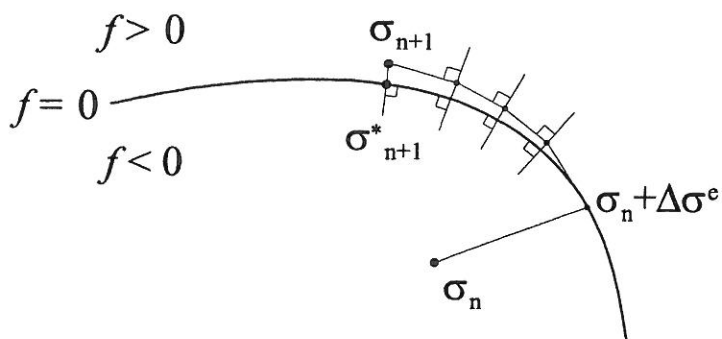
Toisen asteen myötöpinnoille (mm. *von Mises*)  $r$  saadaan ratkaistua yhtälöstä (13) suljetussa muodossa, mutta korkeampiasteisille pinnoille  $r$  on määritettävä iteroimalla. Jännitysinkrementti  $\Delta\sigma$  voidaan nyt laskea kimmoisen muodonmuutoksen osalta Hooken lailla, ja jakamalla vain plastinen muodonmuutosinkrementti  $\Delta\epsilon^p$  osiin [5]:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma^e + \Delta\sigma^p = \mathbf{D}\Delta\epsilon^e + \sum \frac{\mathbf{D}^p \Delta\epsilon^p}{k} \quad (14)$$

Kuvassa 1 on havainnollistettu tällaisen nk. ali-inkrementoinnin toimintaa ideaaliplastisen materiaalimallin tapauksessa. Kuten nähdään, laskennan kuluessa jännitysvektori irtoaa hiukan myötöpinnalta, jolloin syntyy kuvitteellista myötölujittumista, jonka suuruus riippuu käytetystä jaosta  $k$ . Tämän estämiseksi yhtälön (14) avulla laskettu jännitysvektori  $\sigma_{n+1}$  voidaan palauttaa myötöpinnalle kuvan 1 mukaisesti myötöpinnan normaalin suunnassa kohtaan  $\sigma_{n+1}^*$  [5]. Palautuksen  $\sigma_{n+1}^* - \sigma_{n+1}$  ja myötöpinnan  $f = 0$  kohtisuoruus on luonnollisestikin vain oletus, jonka paikkansapitävyys riippuu plastisen muodonmuutosinkrementin  $\Delta\epsilon^p$  suuruudesta. Tarkkuuden lisäämiseksi palautus myötöpinnalle voidaan tehdä jokaisen iteraation jälkeen, ja lähteessä [5] on todettu tämän kasvattavan laskenta-aikaa vain vähän.

Edellistä tarkempi menetelmä saadaan, jos yhtälö (10) ratkaistaan jollakin eksplisiittisellä Runge-Kutta -menetelmällä. Tällaisella lähestymistavalla on tarkkuuden

lisäksi se etu, että myös menetelmävirheelle saadaan arvio, jonka avulla on helppo muuttaa käytettävän inkrementin suuruutta laskennan aikana [12, s.241].



**Kuva 1.** Jännitysinkrementin  $\Delta\sigma$  laskenta suoralla menetelmällä ideaaliplastisen materiaalimallin tapauksessa.

Avoimet menetelmät soveltuvat käytettäväksi johdannossa mainittujen laskentastrategioiden **A** ja **B** kanssa. Tällöin likimääräisenä materiaalmatriisina  $d\sigma/d\varepsilon$  on 'paras mahdollinen tunnettu', eli jatkuvan aineen materiaalmatriisi  $\mathbf{D}^{ep}$ .

### Suljetut menetelmät (implicit methods)

Suljetuissa menetelmissä jatkuvan aineen konstitutiiviset yhtälöt muunnetaan diskreeteiksi jollakin implisiittisellä aikaintegrointimenetelmällä. Sovellettaessa Eulerin implisiittistä menetelmää, ja olettamalla materiaalin noudattavan assosiatiivista myötösääntöä, yhtälöitä (4-9) vastaavat diskreetit yhtälöt ovat [8, s.116]

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \quad (16)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \Delta\gamma \partial_{\mathbf{q}} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \quad (17)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \leq 0 \quad (18)$$

$$\Delta\gamma \geq 0 \quad (19)$$

$$\Delta\gamma f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = 0 \quad (20)$$

Yhtälössä (15) esiintyvä muodonmuutosvektori  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  on tunnettu, sillä siirtymäohjatussa tehtävässä  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  saadaan laskettua solmuisiirtymistä kinemaattisten yhtälöiden avulla.

Yhtälöryhmä (15-20) sisältää epäyhtälöitä, joten sen ratkaiseminen ei ole aivan suoraviivaista. Tarkastellaan seuraavaksi tarkoitukseen soveltuvaa ratkaisumenetelmää, ja yksinkertaisuuden vuoksi rajataan tarkastelu vain ideaaliplastiseen tapaukseen. Epäyhtälöt selvitetään kätevästi tarkastelemalla ryhmää (15-20) kahdessa osassa [8, s.143-145]: Ensin lasketaan jännitykselle arvo  $\sigma_{n+1}$  olettamalla muodonmuutosinkrementti täysin kimmoiseksi. Mikäli  $f(\sigma_{n+1}) < 0$ , ei myötöpintaa ole rikottu, ja askel on kimmainen. Toisaalta, jos  $f(\sigma_{n+1}) > 0$ , tiedetään muodonmuutosinkrementin olevan kimmoplastinen ja edelleen tiedetään, että  $\Delta\gamma > 0$ . Tällöin määritellään yhtälön (16) avulla myötöresiduaalivektori

$$\mathbf{R}_{n+1} = -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \partial_{\sigma} f_{n+1} \quad (21)$$

jossa ideaaliplastisen materiaalin tapauksessa

$$f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}) \quad (22)$$

Yhtälöt (21) ja (22) saadaan kätevästi ratkaistua Newtonin iteraatiolla. Tätä varten yhtälöt linearisoidaan, jolloin päädytään iteratiiviseen yhtälöryhmään

$$\mathbf{R}_{n+1}^k + [\boldsymbol{\Xi}_{n+1}^k]^{-1} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k + \Delta^2\gamma_{n+1}^k \partial_{\sigma} f_{n+1}^k = \mathbf{0} \quad (23)$$

$$f_{n+1}^k + (\partial_{\sigma} f_{n+1}^k)^T \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k = 0 \quad (24)$$

jossa yläindeksi k viittaa iteraatiokierrokseen,  $\boldsymbol{\Xi} = [\mathbf{D}^{-1} + \Delta\gamma \partial_{\sigma\sigma} f]^{-1}$  ja yhtälöstä (15) seuraten  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k = -\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ . Yhtälöistä (23) ja (24) ratkaistaan konsistenssiparametrin  $\gamma$  sekä muodonmuutosvektorin plastisen osan  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$  iteratiiviset lisäykset

$$\Delta^2\gamma_{n+1}^k = \frac{f_{n+1}^k - (\mathbf{R}_{n+1}^k)^T \boldsymbol{\Xi}_{n+1}^k \partial_{\sigma} f_{n+1}^k}{(\partial_{\sigma} f_{n+1}^k)^T \boldsymbol{\Xi}_{n+1}^k \partial_{\sigma} f_{n+1}^k} \quad (25)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\Xi}_{n+1}^k [\mathbf{R}_{n+1}^k + \Delta^2\gamma_{n+1}^k \partial_{\sigma} f_{n+1}^k] \quad (26)$$

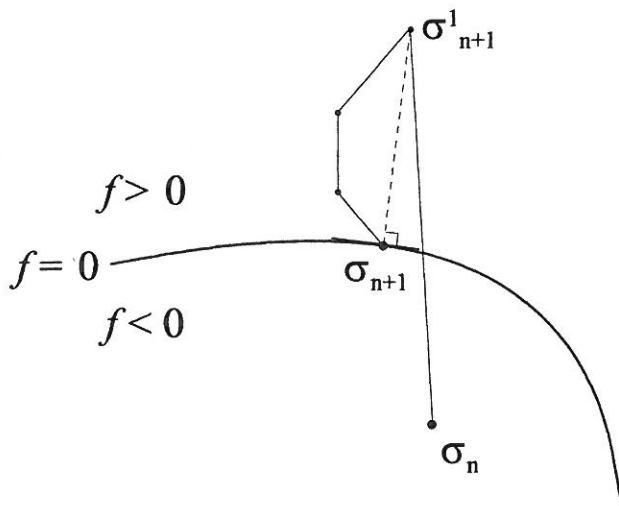
Päivittämällä plastista muodonmuutosvektoria

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p^{k+1}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p^k} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p^k} \quad (27)$$

saadaan laskettua jännitysvektorin arvo uudessa pisteessä kaavalla (15). Mikäli laskenta ei ole supennut, päivitetään konsistenssiparametrin arvoa kaavalla  $\Delta\gamma_{n+1}^{k+1} = \Delta\gamma_{n+1}^k + \Delta^2\gamma_{n+1}^k$ , ja jatketaan iterointia kohdasta (23). Suppenemista mitataan yhtälöiden (16) ja (20) toteutumisella. Laskennallisesti suppenemiskriteerit kirjoitetaan muodossa

$$f_{n+1}^k < TOL_1 \quad \text{ja} \quad \|\mathbf{R}_{n+1}^k\| < TOL_2 \quad (28)$$

jossa  $TOL_1$  ja  $TOL_2$  ovat annettuja pieniä lukuja. Kuten huomataan, supenneessa tilassa päästään haluttuun ratkaisuun, jossa kaikki yhtälöt (15-20) toteutuvat. Yllä esitetty lähimmän pisteen menetelmä palautuu klassiseksi *radial return* -menetelmäksi [11] mikäli materiaali on ideaaliplastista ja noudattaa *von Misesin* myötöfunktioita. Kuvassa 2 on esitetty kaavamaisesti jännitysinkrementin laskenta em. lähimmän pisteen menetelmällä ideaaliplastisen materiaalimallin tapauksessa.



**Kuva 2.** Jännitysinkrementin laskenta lähimmän pisteen menetelmällä ideaaliplastisen materiaalimallin tapauksessa.

Käytettäessä edellä esitettyä algoritmia, on myötöfunktion oltava konvekksi ja tasainen (tarvittavat derivaatat oltava jatkuvia), mutta muita ehtoja myötöfunktioille ei aseteta [8]. Algoritmista on esitetty myös laajennettu versio [9], jossa myötöfunktio saa olla paloittain määritelty ja ei-tasainen.



## MATRIISI $d\sigma/d\epsilon$ SEKÄ TASAPAINOITEROINNIN SUPPENEMINEN

Kuten edellä on jo todettu, avoimissa menetelmissä suure  $d\sigma/d\epsilon$  vastaa aina jatkuvan aineen yhtälöistä johdettua materiaalmatriisia  $D^p$ . Johtuen avoimien menetelmien likimääräisestä luonteesta, globaali tasapainoiterointi suppenee asympotoottisesti neliöllisesti vain riittävän pienillä inkrementteillä.

Suljetuissa menetelmissä saavutetaan suuri etu tähän nähden: Koska jännitysinkrementin laskennassa ei jouduta menetelmän stabiilisuuden takia rajoittamaan inkrementtien suuruutta, niin globaali tasapainoiterointi suppenee neliöllisesti myös suurilla inkrementteillä, kunhan termi  $d\sigma/d\epsilon$  on yhteensopiva jännitysinkrementin laskenta-algoritmin kanssa. On kuitenkin huomattava, että mikäli muodonmuutosinkrementti on liian suuri, saattaa jännitysinkrementin laskennassa käytetty Newtonin iteraatio joko hajaantua tai ainakin supeta huonosti hidastaen samalla koko laskentaprosessia oleellisesti.

Osoittautuu, että yllä esitetyn lähimmän pisteen laskenta-algoritmin tapauksessa termi  $d\sigma/d\epsilon$  saadaan muodostettua suljetussa muodossa [8, s.145]. Differentioimalla diskretoidut yhtälöt (15) ja (16) päädytään lausekkeisiin

$$d\sigma_{n+1} = D(d\epsilon_{n+1} - d\epsilon_{n+1}^p) \quad (29)$$

$$d\epsilon_{n+1}^p = \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\sigma\sigma}^2 f_{n+1} d\sigma_{n+1} + d\Delta\gamma_{n+1} \partial_{\sigma} f_{n+1} \quad (30)$$

joista saadaan muokattua yhteys

$$d\sigma_{n+1} = \Xi_{n+1} [d\epsilon_{n+1} - d\Delta\gamma_{n+1} \partial_{\sigma} f_{n+1}] \quad (31)$$

Yhtälö (31) sisältää tuntemattomana vielä  $\Delta\gamma$ :n differentiaalin, jonka ratkaisemiseksi differentioidaan yhtälö (18), jolloin päädytään yhtälöön

$$\partial_{\sigma} f^T(\sigma_{n+1}) d\sigma_{n+1} = 0 \quad (32)$$

Sijoittamalla (31) syntyneeseen yhtälöön (32) päädytään differentiaalin  $d\Delta\gamma$  lausekkeeseen

$$d\Delta\gamma_{n+1} = \frac{\partial_{\sigma} f_{n+1}^T \Xi_{n+1} d\epsilon_{n+1}}{\partial_{\sigma} f_{n+1}^T \Xi_{n+1} \partial_{\sigma} f_{n+1}} \quad (33)$$

Edelleen, sijoittamalla (33) yhtälöön (31) päädytään lopulliseen tulokseen:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{n+1} = \Xi_{n+1} \left[ \mathbf{I} - \frac{\partial_{\sigma} f_{n+1}^T \Xi_{n+1} \partial_{\sigma} f_{n+1}}{\partial_{\sigma} f_{n+1}^T \Xi_{n+1} \partial_{\sigma} f_{n+1}} \right] \quad (34)$$

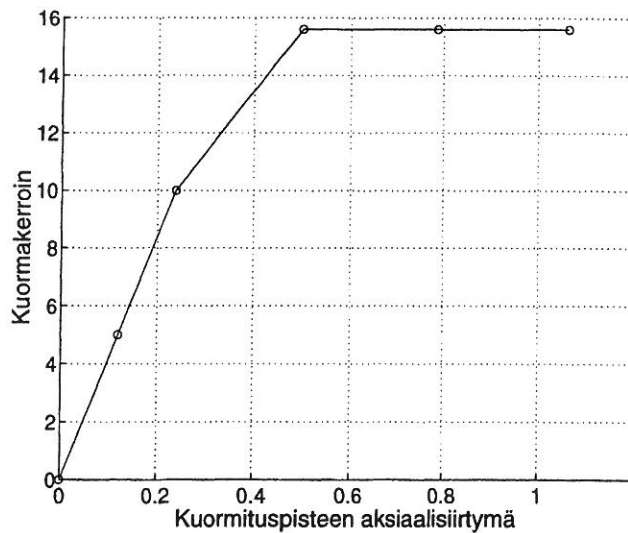
jossa  $\mathbf{I}$  on identiteettimatriisi.

Lähimmän pisteen menetelmä soveltuu edellä esitetyn yhteensopivan materiaali-matriisiin kanssa käytettynä johdannossa mainittuun laskentastrategiaan  $\mathbf{C}$  hyvin. Menetelmän tehokkuudesta huolimatta se ei silti ole niin ylivoimainen esim. avoimiin menetelmiin verrattuna, että se kykenisi syrjäyttämään ne yleisestä käytöstä. Suurin haitta tässä menetelmässä on myötöfunktion gradienttien laskenta, joka saattaa varsinkin monimutkaisten materiaalimallien tapauksessa muodostua työlääksi. Tästä varjopuolesta päästään eroon modifioimalla lähimmän pisteen menetelmä nk. leikkaustasomenetelmäksi (cutting-plane algorithm) [10]. Kuitenkin, samalla kun päästään eroon gradienttien laskennasta, hävitetään menetelmästä sen hienostunein piirre, eli mahdollisuus termin  $d\sigma/d\epsilon$  laskemiseen suljetussa muodossa. Näin ollen leikkaustasomenetelmää käytettäessä globaalien tasapainoiteroinnin suppenevuus huononee.

## LASKENTAESIMERKKI

Esimerkissä tarkastellaan ensin globaalien tasapainoiteroinnin suppenemista aksiaalisesti vedetyn sylinterikuoren tapauksessa, kun jännitysvektorin päivityksessä käytetään lähimmän pisteen menetelmää ja tasapainopolun seurannassa käytetään suuria kaarenpituusinkrementtejä. Kimmoista - ideaaliplastista sylinteriä vedetään tasaisilla päätykuormilla  $p = 1000$ , sylinterin mitat ja materiaaliarvot ovat:  $E = 210000$ ,  $\nu = 0,3$ , myötöraja  $\sigma_0 = 360$ , kuoren paksuus  $h = 1$ , säde  $R = 50$  ja pituus  $L = 500$ . Rakenne on mallinnettu kymmenellä kolmisolmuisella Reissnerin teorian mukaisella isoparametrisellä pyörähdyssymmetrisellä kuorielementillä. Reissnerin teoriassa elementin tasapainoyhtälöt johdetaan tarkastelemalla jännityskomponenttien sijaan jännitysresultantteja [7], ja näin ollen myös myötöfunktio  $f$  on lausuttava jännitysresultanttien avulla. Tässä yhteydessä pyörähdyssymmetrisen kuoren paloittain määriteltyä myötöpintaa [2] on approksimoitu  $(N_{\varphi}, N_{\theta}, M_{\varphi})$ -avaruuden ellipsoidilla, jossa  $N_{\varphi}$  on meridiaanivoima,  $N_{\theta}$  on kehävoima ja  $M_{\varphi}$  on meridiaanimomentti.

Kuvassa 3 esitetty tasapainopolku on määritetty viidellä kaarenpituusinkrementillä, joista kolme on kimmoplastisella alueella. Tasapainoiteroinnin suppenevuutta on tarkasteltu taulukossa 1. Globaalissa tasapainoiteroinnissa on käytetty suppenemiskriteeriä  $\|\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k\| < TOL \|\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^0\|$ , jossa  $TOL=10^{-10}$ . Jännitysinkrementin laskennassa kohdan (28) mukaiset toleranssit ovat  $TOL_1 = TOL_2 = 10^{-6}$ . Kuten taulukosta 1 nähdään, iterointi suppenee neliöllisesti suppenemiskartion sisällä.



**Kuva 3.** Aksiaalisesti vedetyn ideaaliplastisen sylinterikuoren tasapainopolku.

Sama esimerkki soveltuu luontevasti myös avoimien ja suljettujen jännityspäivitysmenetelmien vertailuun. Tätä varten kuvassa 3 esitetty tasapainopolku on määritetty kaavojen (11,13,14) mukaisella suoralla menetelmällä. Käytettäessä viittä askelta kuten suljetun menetelmän yhteydessä, saadaan tasapainopolku kyllä määritettyä mutta tarvittavien iteraatioiden lukumäärä on huomattavasti suurempi kuin suljettua menetelmää käytettäessä. Myöden alkaessa kolmannella askeleella residuaalinormin  $\|\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k\|$  pienin arvo on  $7,1 \cdot 10^{-4}$ , joten vaadittua suppenemistoleranssia  $TOL=10^{-10}$  ei saavuteta vaikka iteraatiokierrosten lukumäärää kasvatettaisiinkin. Neljäs ja viides askel suppenevat lineaarisella vauhdilla vaatien 20 ja 26 iteraatiokierrosta, kun vastaavat kierrosmäärät suljetun menetelmän yhteydessä ovat 9 ja 8.

**Taulukko 1.** Tasapainoiteraation suppeneminen vedetyn sylinterin analysoinnissa suljetulla jännityspäivitysmenetelmällä.

| Iteraatio | Residuaalinormin $\ \mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k\ $ arvo inkrementteittäin |               |          |          |          |
|-----------|---|---------------|----------|----------|----------|
|           | 1 (elastinen)   | 2 (elastinen) | 3        | 4        | 5        |
| 1         | 3,30E-1   | 3,30E-1       | 4,14E-1  | 5,95E-2  | 1,10E-1  |
| 2         | 2,00E-4   | 1,81E-4       | 3,37E-1  | 6,55E-2  | 1,55E-1  |
| 3         | 4,17E-7   | 3,58E-7       | 4,84E-2  | 4,79E-2  | 2,27E-1  |
| 4         | 1,08E-10  | 8,75E-11      | 4,23E-2  | 7,86E-2  | 2,39E-2  |
| 5         | 7,32E-14  | 6,01E-14      | 8,51E-2  | 2,75E-3  | 7,57E-5  |
| 6         |   |               | 2,51E-3  | 2,50E-5  | 6,70E-7  |
| 7         |   |               | 3,38E-6  | 1,09E-7  | 5,30E-9  |
| 8         |   |               | 5,81E-8  | 1,08E-9  | 5,10E-11 |
| 9         |   |               | 5,10E-10 | 1,05E-11 |          |
| 10        |   |               | 4,78E-12 |          |          |

## YHTEENVETO

Kirjoituksessa on esitetty katsaus kimmoplastisten rakenteiden analysoinnissa tarvittaviin jännitysinkrementin laskentamenetelmiin. Muutamien yleisesti käytettyjen menetelmien kohdalla on esitetty keskeisimmät yhtälöt sekä mainittu joitakin menetelmien etuja ja haittoja. Epälineaarisen tasapainoiteroinnin suppenevuuteen liittyen on myös johdettu nk. lähimmän pisteen jännitysinkrementin laskentamenetelmään liittyvä yhteensopiva materiaalmatriisi, jonka avulla on mahdollista säilyttää globaalin iteroinnin suppenevuus asympotoottisesti neliöllisenä. Esitetystä laskentaesimerkistä on havainnollistettu suljettujen ja avoimien jännitysinkrementin laskentamenetelmien eroja aksiaalisesti vedetyn sylinterikuoren tapauksessa. Laskennan tulokset ovat sopusoinnussa teorian kanssa.

Kirjoituksessa on tarkasteltu vain ajasta riippumatonta materiaalia, ja sitäkin usein ideaaliplastisena. Alan kirjallisuudesta [1,8,12] löytyy vastaavia laskentamenetelmiä esimerkiksi isotrooppisesti ja kinemaattisesti myötölujittuvalle sekä viskoplastiselle materiaalille.

## KIITOKSET

Haluan tässä yhteydessä esittää kiitokset Prof. Markku Tuomalalle sekä Prof. Reijo Kouhialle käsikirjoitukseen liittyvistä kommentteista.

## KIRJALLISUUSVIITTEET

1. K-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall 1996.
2. D. C. Drucker, R. T. Shield, 'Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution', *J. Appl. Mech.* **26**, 61-68 (1959).
3. J. Fish, K. Shek, 'Computational aspects of incrementally objective algorithms for large deformation plasticity', *Int. J. Num. Meth. Eng.* **44**, 839-851 (1999).
4. T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, 'Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/viscoplastic finite element analysis', *Computers & Structures* **8**, 169-173 (1978).
5. G. C. Nayak, O. C. Zienkiewicz, 'Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening', *Int. J. Num. Meth. Eng.* **5**, 113-135 (1972).
6. M. Ortiz, J. B. Martin, 'Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally extremal paths: a unification of concepts', *Int. J. Num. Meth. Eng.* **28**, 1839-1853 (1989).
7. E. Reissner, 'On finite axi-symmetrical deformations of thin elastic shells of revolution', *Comp. Mech.* **4**, 387-400 (1989).
8. J. C. Simo, T. J. R. Hughes, *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, New York, 1998.
9. J. C. Simo, J. G. Kennedy, S. Govindjee, 'Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms', *Int. J. Num. Meth. Eng.* **26**, 2161-2185 (1988).
10. J. C. Simo, M. Ortiz, 'A unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **49**, 221-245 (1985).

11. M. L. Wilkins, 'Calculation of elastic-plastic flow', *Methods of Computational Physics* (ed. B. Alder et al.) Vol. 3, Academic Press, London 1964.
12. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method. Vol. 2. Solid and fluid mechanics Dynamics and non-linearity - 4<sup>th</sup> edition*, McGraw-Hill, London, 1991.

Sami Pajunen, TkL, assistentti  
TTKK / Teknillinen mekaniikka  
PL 589, 33101 Tampere  
email: sami@mohr.me.tut.fi