SARJARATKAISU NELIÖLLISEN VASTUSLAIN HEITTOLIIK-KEELLE

Matti A Ranta
Raimo von Hertzen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 34
Nro 2, 2000, s. 15-24

Tiivistelmä: Lentävän kappaleen liikeyhtälöiden neliöllisestä ilmanvastuksesta johtuu, että analyyttinen ratkaiseminen alkeisfunktioita käyttäen tulee mahdottomaksi. Nykyisten tehokkaiden valmisohjelmien ansiosta numeerinen ratkaisu on usein ainoa järkevä toimenpide. Analyyttisellä sarjamuotoisella ratkaisulla on kuitenkin omat hyvät puolensa. Tässä työssä osoitetaan miten helposti tällainen voidaan löytää ja miten tarkaksi se voidaan saattaa. Sarjaratkaisunkin käyttö vaatii laskentaa, mikä kuitenkin onnistuu ilman numeerista integrointia. Tämän vuoksi sarjaratkaisun laskeminen käy huomattavan nopeasti. Menetelmää sovelletaan kuulantyöntöön, joka on tyypillinen alkuarvotehtävä.

LENTÄVÄN KAPPALEEN LIIKEYHTÄLÖ

Lähteessä [1] käsitellään pallomaisen kappaleen ilmanvastusta. Dimensioanalyysillä voidaan osoittaa, että ilmanvastuksen lauseke on muotoa

$$D = C_D(R)A\frac{1}{2}\rho|\mathbf{N}-\mathbf{T}|^2 \ . \tag{1}$$

Tässä lauseke $|\mathbf{N}-\mathbf{T}|$ on kappaleen vauhti ilmaan nähden. Se muodostuu kappaleen oman nopeusvektorin **N** ja tuulen nopeusvektorin **T** erotuksen itseisarvosta.

Vastuskerroin $C_D(R)$ riippuu dimensiottomasta virtauksen luonnetta kuvaavasta *Reynoldsin* luvusta

$$R = \frac{|\mathbf{N}-\mathbf{T}|d}{\mu/\rho} = \frac{|\mathbf{N}-\mathbf{T}|d}{\upsilon} \ , \tag{2}$$

missä d on pallon halkaisija ja ilman viskositeetin ja tiheyden suhdetta $\upsilon = \mu/\rho$ kutsutaan *kinemaattiseksi viskositeetiksi*.

Vastuskertoimen riippuvuus Reynoldsin luvusta on pallomaiselle kappaleelle likipitäen seuraava [1]:

$$C_D(R) \simeq \begin{cases} 0.22 & , \ 3.85 \cdot 10^5 < R & \text{(turbulenssialue)} \\ 0.45 & , \ 10^3 < R < 3.85 \cdot 10^5 & \text{(normaali laminaarialue)} \\ \text{katso [1] s. 16} & , \ R < 10^3 \end{cases}$$

Viimeinen tapaus voidaan käytännössä yleensä unohtaa.

Kappaleen liikeyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$m\frac{d\mathbf{N}}{dt} = m\mathbf{g} - \frac{\mathbf{N}-\mathbf{T}}{|\mathbf{N}-\mathbf{T}|} C_D(R) A \tfrac{1}{2}\rho |\mathbf{N}-\mathbf{T}|^2 \ , \tag{3}$$

missä $\mathbf{g}$ on maan vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys. Seuraavassa oletetaan, että tuulen nopeus $\mathbf{T}$ on vakio lennon aikana. Otetaan käyttöön suhteelliselle nopeusvektorille merkintä

$$\mathbf{V} = \mathbf{N} - \mathbf{T} \ . \tag{4}$$

Tällöin kappaleen vauhti ilmaan nähden eli ilmanopeus on

$$|\mathbf{V}| \equiv |\mathbf{N}-\mathbf{T}| = \sqrt{(u-U)^2 + (v-V)^2 + (w-W)^2} \ , \tag{5}$$

missä (u,v,w) ovat kappaleen ja (U,V,W) tuulen nopeusvektorien suorakulmaiset komponentit. Määritellään dimensioton aika τ

$$\tau = \sqrt{gkC_D}\ t \tag{6}$$

ja dimensioton nopeusvektori $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{kC_D}{g}}\,\mathbf{V} \ , \tag{7}$$

missä

$$k = \frac{\rho A}{2m} \ . \tag{8}$$

Liikeyhtälö (3) voidaan nyt kirjoittaa dimensiottomassa muodossa

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + v\mathbf{v} = \hat{\mathbf{g}} \ , \tag{9}$$

missä $v = |\mathbf{v}|$, $\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g}/g$.

Liikeyhtälö (9) on epälineaarinen, mutta se ei haittaa, jos vain funktio $v = v(\tau)$ kyetään erikseen määrittämään. Tätä varten määritellään funktio $s(\tau)$ kaavalla

$$s(\tau) = \int_0^{\tau} v(\xi)d\xi = kC_D \int_0^{t} V(t')dt' = kC_D S \ , \tag{10}$$

jolloin $\dot{s}(\tau) = v(\tau)$, missä piste tarkoittaa derivaattaa muuttujan τ suhteen. Todetaan, että $s = kC_D S$ on väliaineesta ja kappaleen muodosta riippuvan kertoimen kC_D sekä kappaleen kulkeman matkan S tulo.

LIIKEYHTÄLÖN INTEGROINTI

Liikeyhtälö (9) kuuluu funktion s avulla lausuttuna

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \dot{s}\ \mathbf{v} = \hat{\mathbf{g}} \ . \tag{11}$$

Tämän vektoridifferentiaaliyhtälön alkuehdon $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ toteuttava ratkaisu on

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{v}_0 e^{-s(\tau)} + \hat{\mathbf{g}} e^{-s(\tau)} \int_0^{\tau} d\zeta e^{s(\zeta)} \ . \tag{12}$$

Kaavojen (4) – (7) perusteella on

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{gkC_D}} \left(\mathbf{T} + \sqrt{\frac{g}{kC_D}}\ \mathbf{v} \right) , \tag{13}$$

joten lentoradan vektorimuotoiseksi alkuehtoon $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ sovitetuksi ratkaisuksi saadaan

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{\sqrt{gkC_D}} \left\{ \mathbf{T}\tau + \sqrt{\frac{g}{kC_D}} \left[\mathbf{v}_0 \int_0^{\tau} d\zeta e^{-s(\zeta)} + \hat{\mathbf{g}} \int_0^{\tau} d\zeta e^{-s(\zeta)} \int_0^{\zeta} d\varsigma e^{s(\varsigma)} \right] \right\} . \tag{14}$$

FUNKTION $v(\tau)$ MÄÄRITTÄMINEN

Kerrotaan yhtälö (9) puolittain skalaarisesti vektorilla $\mathbf{v}$, jolloin saadaan

$$v\dot{v} + v^3 = \vartheta \ , \tag{15}$$

missä

$$\vartheta = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{g}} = -\sqrt{\frac{kC_D}{g}}\,(w-W) \tag{16}$$

on dimensiottoman nopeusvektorin v alaspäin suuntautuva komponentti.

Kerrotaan yhtälö (9) sitten skalaarisesti vektorilla $\hat{\mathbf{g}}$, jolloin saadaan

$$\dot{\vartheta} + v\vartheta = 1 \ . \tag{17}$$

Derivoimalla yhtälö (15) muuttujan τ suhteen ja eliminoimalla saadusta yhtälöstä suureet ϑ ja $\dot{\vartheta}$ yhtälöitä (15) ja (17) käyttämällä saadaan

$$v\ddot{v} + \dot{v}^2 + 4v^2\dot{v} + v^4 = 1 \tag{18}$$

tai korkeimman derivaatan $\ddot{v}$ suhteen ratkaistuna

$$\ddot{v} = \frac{1 - v^4 - 4v^2\dot{v} - \dot{v}^2}{v} \ . \tag{19}$$

Yhtälö (18) voidaan kirjoittaa vielä muotoon

$$v\frac{d}{d\tau} Ar\tanh\left(\dot{v} + v^2\right) = 1 \ . \tag{20}$$

Yhtälö (20) voidaan kerran integroida suljetussa muodossa sopivasti valittujen muuttujien avulla. Ratkaisua ei kuitenkaan hyödynnetä tässä yhteydessä.

Yhtälöryhmän (15) ja (17) alkuehdot ovat

$$v(0) = v_0 = \sqrt{\frac{kC_D}{g}}\sqrt{(u_0 - U)^2 + (v_0 - V)^2 + (w_0 - W)^2} \tag{21}$$

$$\vartheta(0) = \mathbf{v}_0 \cdot \hat{\mathbf{g}} = -\sqrt{\frac{kC_D}{g}}\,(w_0 - W) \ . \tag{22}$$

Yhtälölle (19) seuraa yhtälöstä (15) toinen alkuehto

$$\dot{v}(0) = \dot{v}_0 = \frac{\vartheta(0) - v_0^3}{v_0} \ . \tag{23}$$

Differentiaaliyhtälö (19) kuvaa dimensiottoman ilmanopeuden v kehitystä lennon aikana. Muoto (20) antaa viitteitä sen käyttäytymisestä suurilla dimensiottoman ajan τ arvoilla.

SARJOIHIN PERUSTUVA RATKAISUMENETELMÄ

Fysikaalisin perustein voidaan todeta funktion $v = v(\tau)$ käyttäytyvän juohevasti, joten sille voidaan kirjoittaa *MacLaurin*-sarja

$$v(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \tau^n \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{v^{(n)}(0)}{n!} \tau^n \ . \tag{24}$$

Tarvittavat derivaatat voidaan laskea lausekkeiden (21)–(23) ja (19) avulla. Neljä ensimmäistä ovat

$$v^{(0)}(0) = v_0 \tag{25}$$

$$v^{(1)}(0) = \frac{\vartheta(0) - v_0^3}{v_0} \tag{26}$$

$$v^{(2)}(0) = \frac{1 - v_0^4 - 4v_0^2 \dot{v}_0 - \dot{v}_0^2}{v_0} \tag{27}$$

$$v^{(3)}(0) = -\frac{\left[3v^{(1)}(0) + 4v_0^2\right]v^{(2)}(0) + v_0\left[8v^{(1)}(0) + 4v_0^2\right]v^{(1)}(0)}{v_0} \ . \tag{28}$$

Yhtälöä (19) derivoimalla voidaan muodostaa yhä korkeampia derivaattoja $v^{(n)}(0)$. Mikäli $v_0 = 0$, on yhtälöllä (19) kohdassa $\tau = 0$ singulariteetti eikä yhtälöitä (25)–(28) voida käyttää. Suoritetut numeeriset laskut osoittivat, että suureen v_0 pienentyessä yhä korkeammat derivaatat $v^{(n)}(0)$ alkoivat vaikuttaa sarjassa (24). Näin ollen pidettäessä arvoa N vakiona approksimaation (24) tarkkuus heikkenee, kun v_0 pienenee. Sarjaa (24) integroimalla saadaan

$$s(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{(n)}(0)}{(n+1)!} \tau^{n+1} \ . \tag{29}$$

Määritellään vielä jatkoa ajatellen alkuehdot $\Gamma(0) = \dot{\Gamma}(0) = 0$ toteuttava funktio $\Gamma(\tau)$ kaavalla

$$\ddot{\Gamma}(\tau) = s(\tau) \ . \tag{30}$$

Tällöin saadaan

$$\Gamma(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{(n)}(0)}{(n+3)!} \tau^{n+3} \ . \tag{31}$$

Koska heikosti vaimennetussa lyhyen ja keskimatkan heittoliikkeessä on voimassa

$$0 < s(\tau) << 1 \ , \tag{32}$$

voidaan lausekkeissa (12) ja (14) esiintyviä eksponenttifunktioita approksimoida lausekkeilla

$$e^{\pm s} \simeq 1 \pm s \ . \tag{33}$$

Approksimaation (33) tarkkuutta pitkille lentomatkoille voi parantaa ottamalla eksponenttifunktion kehitelmään korkeampia potensseja. Liikeyhtälöiden integrointi voitaisiin edelleenkin helposti suorittaa sarjamuotoisena, mutta jatkossa rajoitutaan approksimaatioon (33), koska lopputulos on tällöin erityisen siisti. Nyt saadaan nopeudelle **N** kaavojen (4) ja (7) avulla likilauseke

$$\mathbf{N}(\tau) = \mathbf{N}_0 - (\mathbf{N}_0 - \mathbf{T})\ddot{\Gamma}(\tau) + \hat{\mathbf{g}}\sqrt{\frac{g}{kC_D}}\left[1 - \ddot{\Gamma}(\tau)\right]\left[\tau + \dot{\Gamma}(\tau)\right] \ , \tag{34}$$

missä on siirrytty käyttämään funktiota Γ. Komponenttimuodossa yhtälö (34) kuuluu

$$u(\tau) = u_0 \qquad - (u_0 - U)\ddot{\Gamma}(\tau) \tag{35}$$

$$v(\tau) = v_0 \qquad - (v_0 - V)\ddot{\Gamma}(\tau) \tag{36}$$

$$w(\tau) = w_0 - \sqrt{\frac{g}{kC_D}}\tau - (w_0 - W)\ddot{\Gamma}(\tau) - \sqrt{\frac{g}{kC_D}}\left[\dot{\Gamma}(\tau) - \tau\ddot{\Gamma}(\tau) - \dot{\Gamma}(\tau)\ddot{\Gamma}(\tau)\right] \ . \tag{37}$$

Paikkavektorille **r** saadaan kaavasta (14) likilauseke

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{\sqrt{gkC_D}} \Big\{ & \mathbf{N}_0\tau - (\mathbf{N}_0 - \mathbf{T})\dot{\Gamma}(\tau) + \\ & + \hat{\mathbf{g}}\sqrt{\frac{g}{kC_D}}\left[\tfrac{1}{2}\tau^2 - \tau\dot{\Gamma}(\tau) + 2\Gamma(\tau) - \tfrac{1}{2}\dot{\Gamma}^2(\tau)\right] \Big\} \ . \end{aligned} \tag{38}$$

Komponenttimuodossa kaava (38) kuuluu

$$x(\tau) = x_0 + \frac{u_0\,\tau}{\sqrt{gkC_D}} \qquad - \frac{u_0 - U}{\sqrt{gkC_D}}\,\dot{\Gamma}(\tau) \tag{39}$$

$$y(\tau) = y_0 + \frac{v_0\,\tau}{\sqrt{gkC_D}} \qquad - \frac{v_0 - V}{\sqrt{gkC_D}}\,\dot{\Gamma}(\tau) \tag{40}$$

$$z(\tau) = z_0 + \frac{1}{\sqrt{gkC_D}}\left[w_0\tau - \sqrt{\frac{g}{kC_D}}\,\frac{\tau^2}{2}\right] - \frac{w_0 - W}{\sqrt{gkC_D}}\,\dot{\Gamma}(\tau)$$
$$- \frac{1}{kC_D}\left[2\Gamma(\tau) - \tau\dot{\Gamma}(\tau) - \tfrac{1}{2}\dot{\Gamma}^2(\tau)\right]. \tag{41}$$

Kaavoista (35) – (37) ja (39) – (41) ilmanvastustermit käyvät selvästi esille.

LENTOAJAN MÄÄRITTÄMINEN

Määritellään ns. korkeusparametri kaavalla

$$\sigma = \frac{w_0^2}{2gz_0}\ . \tag{42}$$

Dimensioton lentoaika $\mathcal{T}$ saadaan yhtälöstä (41), kun asetetaan $z(\mathcal{T}) = 0$. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\frac{\mathcal{T}^2}{2} - \frac{w_0}{\sqrt{g/kC_D}}\mathcal{T} - z_0 kC_D$$
$$+ \left[\sqrt{\frac{kC_D}{g}}(w_0 - W) - \mathcal{T}\right]\dot{\Gamma}(\mathcal{T}) + 2\Gamma(\mathcal{T}) - \tfrac{1}{2}\dot{\Gamma}^2(\mathcal{T}) = 0\ . \tag{43}$$

Kolme ensimmäistä termiä muodostavat toisen asteen polynomin, joka määrittää lentoajan tyhjiössä. Kolme viimeistä termiä muodostavat ilmanvastuksesta aiheutuvan korjauksen. Polynomin juuri $\mathcal{T}_0$ on

$$\mathcal{T}_0 = \sqrt{\frac{kC_D}{g}}\,w_0\left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma}}\right]\ . \tag{44}$$

Picard-Lindelöfin peräkkäisten approksimaatioiden keinolla saadaan ensimmäisen askeleen jälkeen korjattu ilmanvastuksen huomioon ottava lentoajan lauseke

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 - \frac{\left[\sqrt{\frac{kC_D}{g}}(w_0 - W) - \mathcal{T}_0\right]\dot{\Gamma}(\mathcal{T}_0) + 2\Gamma(\mathcal{T}_0) - \frac{1}{2}\dot{\Gamma}^2(\mathcal{T}_0)}{\sqrt{\frac{kC_D}{g}}w_0\sqrt{1+\frac{1}{\sigma}}} . \tag{45}$$

Nyt voidaan kantama $x(\mathcal{T}_1)$ ja sivuttainen siirtymä $y(\mathcal{T}_1)$ laskea yhtälöistä (39) ja (40).

LASKUESIMERKKI

Esitettyä menetelmää sovelletaan kuulantyöntötuloksen laskemiseen erilaisissa tuuliolosuhteissa, kun kuulan lähtöpiste ja lähtönopeus on annettu. Käytetyt arvot on esitetty taulukoissa 1 ja 2. Lähtöarvot vastaavat Mika Halvarin 2. työntöä Kyröskoskella 10.7.1999 [2,3]. Taulukossa 3 on verrattu tässä työssä esitetyn menetelmän antamia tuloksia *Mathematica*-ohjelmiston numeerisen integrointiohjelman *NDSolve* antamiin tuloksiin.

TAULUKKO 1. *Esimerkissä käytetyt lukuarvot.*

Suure	Symboli	Arvo
ilman tiheys	ρ	1.23 kg m^{-3}
ilman kinemaattinen viskositeetti	υ	$1.47 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-1}$
kuulan halkaisija	d	0.12 m
kuulan projektion pinta-ala	A	1.13 dm^2
kuulan massa	m	7.28 kg
vastuskerroin	k	0.001 m^{-1}
ilmanvastuskerroin	C_D	0.45
vetovoiman kiihtyvyys	g	9.81 ms^{-2}
lähtöpiste	x_0	- 0.09 m
	y_0	0.14 m
	z_0	2.21 m
lähtönopeus	u_0	10.22 m s^{-1}
	v_0	0.80 m s^{-1}
	w_0	8.94 m s^{-1}

Koordinaatisto on asetettu niin, että origo on ringin reunalla, x-akseli yhtyy työntösektorin puolittajaan ja z-akseli on maasta kohtisuoraan ylöspäin.

TAULUKKO 2. *Eri tapauksia vastaavat tuulen nopeuden arvot ja työntötulos NDSolve-ohjelmalla laskettuna.*

Tapaus	$U(\mathrm{ms}^{-1})$	$V(\mathrm{ms}^{-1})$	$W(\mathrm{ms}^{-1})$	NDSolve (m)
1	0.00	0.00	0.00	20.7422
2	10.22	0.80	0.00	20.8572
3	− 10.22	− 0.80	0.00	20.4470
4	0.00	5.00	0.00	20.7389
5	0.00	0.00	0.00	1460.97

Ulkoballistisessa sovellutuksessa eli tapauksessa 5 on kuulan lähtönopeus kymmenkertainen taulukon 1 arvoihin nähden, jolloin $C_D = 0.22$.

TAULUKKO 3. *Tämän työn menetelmällä laskettu tulos ja ero verrattuna NDSolve-tulokseen sarjan* (24) *termien lukumäärän* $N + 1$ *funktiona, kun lentoaika on* (a) *laskettu kaavalla* (45) *tai* (b) *ratkaistu suoraan numeerisesti kaavasta* (43).

Tapaus	N	(a)			(b)		
		Tulos (m)	Ero (mm)	Suht.ero (‰)	Tulos (m)	Ero (mm)	Suht.ero (‰)
1	1	20.7564	+ 14.1988	+ 0.6869	20.7564	+ 14.1957	+ 0.6868
	2	20.7471	+ 4.8978	+ 0.2369	20.7471	+ 4.8642	+ 0.2353
	3	20.7427	+ 0.5354	+ 0.0259	20.7427	+ 0.4834	+ 0.0234
2	1	20.8467	− 10.4774	− 0.5040	20.8467	− 10.4371	− 0.5021
	2	20.8468	− 10.4099	− 0.5008	20.8468	− 10.3703	− 0.4989
	3	20.8467	− 10.4536	− 0.5029	20.8468	− 10.4136	− 0.5010
3	1	20.4688	+ 21.8778	+ 1.0737	20.4687	+ 21.7723	+ 1.0685
	2	20.4488	+ 1.8136	+ 0.0890	20.4486	+1.6736	+ 0.0821
	3	20.4450	− 2.0065	− 0.0985	20.4448	− 2.1553	− 0.1058
4	1	20.7519	+ 12.9922	+ 0.6288	20.7519	+ 12.9819	+ 0.6283
	2	20.7429	+ 4.0700	+ 0.1970	20.7429	+ 4.0283	+ 0.1950
	3	20.7392	+ 0.2867	+ 0.0139	20.7391	+ 0.2274	+ 0.0110
5		Tulos (m)	Ero (m)	Suht.ero (‰)	Tulos (m)	Ero (m)	Suht.ero (‰)
	1	1504.98	+ 44.0144	+ 30.2192	1505.27	+ 44.2989	+ 30.4145
	2	1464.52	+ 3.5497	+ 2.4371	1455.90	− 5.0639	− 3.4768
	3	1468.56	+ 7.5863	+ 5.2086	1460.61	− 0.3561	− 0.2445

Joissakin tapauksissa taulukon 3 a)- ja b)-kohtien ero on niin pieni, että se ei näy ensimmäisessä sarakkeessa pyöristettäessä neljään desimaaliin. Havaitaan, että tapauksissa 1, 3 ja 4 päästään jo neljällä sarjan (24) termillä ($N = 3$) erittäin hyvään tarkkuuteen suhteellisen virheen ollessa luokkaa ≤ 0.1‰. Tapaus 2 on poikkeuksellinen, sillä sitä vastaavat tuulen nopeuden x- ja y-komponenttien arvot ovat täsmälleen yhtä suuret kuin kuulan lähtönopeudella. Tämä merkitsee sitä, että vaakasuunnassa kuula ei koe minkäänlaista ilman vastusta, joten vastusta esiintyy vain pystysuunnassa ja v_0 saa varsin pienen arvon, mikä heikentää sarjan (24) suppenemista. Tässä tapauksessa suhteellinen virhe on luokkaa 0.5 ‰, joten tarkkuutta voidaan edelleenkin pitää hyvänä. Tapauksessa 5 lentomatkan ollessa lähes 1.5 km päästään likimääräistä lentoaikaa käyttäen 0.5 % suhteelliseen tarkkuuteen ja tarkempaa lentoaikaa käyttäen 0.24 ‰ tarkkuuteen. Tarkkuutta voitaisiin luonnollisesti edelleen parantaa valitsemalla sarjoihin (24) ja (33) lisää termejä. Jatkokäsittely tulisi tällöin jonkin verran monimutkaisemmaksi, mutta integroinnit voitaisiin edelleen suorittaa analyyttisesti.

YHTEENVETO

Tässä työssä on esitetty sarjaratkaisu neliöllisen ilmanvastuslain alaiselle heittoliikkeelle. Olennaista on, että liikeyhtälöt on voitu integroida analyyttisesti, jolloin ratkaisua varten tarvitsee laskea vain riittävä määrä termejä sarjassa ja käyttää sen jälkeen valmiita kaavoja. Tästä seuraa, että termien lukumäärän $N+1$ ollessa kiinnitetty sarjaratkaisun laskenta-aika on lentomatkasta lähes riippumaton, toisin kuin numeerisessa askeltamisessa. Tietokoneen CPU-aikojen vertailu osoitti, että lentomatkoilla ≤ 1.5 km sarjaratkaisu oli tapauksesta riippuen 5-30 kertaa nopeampi kuin NDSolvella suoritettu numeerinen integrointi. Kuulantyöntömatkoilla lentomatkan suhteellinen virhe arvolla $N=3$ oli tyypillisesti luokkaa 10^{-4} ja ulkoballistisissa sovellutuksissa eli kilometrimatkoillakin vielä tyypillisesti luokkaa 10^{-3}.

LÄHTEITÄ

1. Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill Book Company 1960, pp. 16 and 471.
2. Vänttinen, T., Blomqvist, M., Luhtanen, P., Auvinen, M., Palokangas, J., Tuominiemi, J., Aaltonen, M., Yrjölä, M., Ranta, M.A., von Hertzen, R., Holmlund, U., *Kuulantyönnön pyörähdystyylin työntötekniikka* VI, Kilpa- ja huippu-urheilun tutkimuskeskus (KIHU), raportti, Jyväskylä, Finland, 1999.
3. Ranta, M. A., von Hertzen, R., Rahikainen A. ja Luhtanen P. *Biomekaaninen kuulantyönnön analyysi.* Teknillinen korkeakoulu, Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto, Mekaniikan laboratorio. Työn alla.

Matti A Ranta, TkT, prof.emer.
TKK, Mekaniikka, PL 1100
puh: (09)-4513077
email: matti.ranta@hut.fi

Raimo von Hertzen, TkT, ma.prof.
TKK, Lujuusoppi, PL 4100
puh: (09)-4513079 / 4513450
email: rvhertz@csc.fi