

EPÄLINEAARISESTA LASKENNASTA RAKENTEIDEN MEKANIKASSA

Sami Pajunen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 31
Nrot 3-4, 1998, s. 16-30

TIIVISTELMÄ

Artikkelissa tarkastellaan epälineaarisen laskennan osuutta rakenteiden mekaniikan tehtävissä. Elementtimenetelmän mukaiseen diskretointiin perustuva staattisesti kuormitettujen rakenteiden laskentaprosessi käydään esittelynomaisesti läpi vaihe vaiheelta, ja jokaisen osatehtävän kohdalla esitellään lyhyesti joitakin tärkeimpiä ratkaisumenetelmiä. Artikkelin tarkoitus on antaa lukijalle vain karkea kokonaiskuva laskentaprosessista, joten yksittäisiin laskentamenetelmiin tutustumisen jätetään annettujen kirjallisuusviitteiden varaan.

JOHDANTO

Haluttaessa mallintaa tarkasti rakenteen käyttäytymistä annettujen kuormien alaisena on usein turvauduttava numeeriseen epälineaariseen laskentaan: Jos rakenteen siirtymät kasvavat kuormien vaikutuksesta siten, että deformoitunut rakenne eroaa tehtävän kannalta oleellisesti alkuperäisestä muodostaan, on laskennassa otettava huomioon *geometrinen* epälineaarisuus. Toisaalta, jos rakenteen jossakin kohdassa materiaalin jännitystila ylittää suhteellisuusrajan tehtävän kannalta oleellisesti, on myös *materiaali* mallinnettava epälineaarisesti.

Stabiilisuuden menetys on luonteeltaan aina epälineaarinen ja dynaaminen tapahtuma, joten epälineaarisen laskennan käyttöönotto on erityisen tärkeää aina jos on mahdollista, että analysoitava rakenne menettää stabiilisuutensa jollakin mahdollisella kuormayhdistelmällä. Jos ollaan kiinnostuneita rakenteen käyttäytymisestä ennen ja jälkeen stabiilisuuden menetyksen mutta ei sen aikana,

voidaan tapahtuma mallintaa ja laskea käyttäen statiikan lähestymistapaa. Jos lisäksi halutaan tarkastella rakenteen liiketilaa, jännityksiä ja muodonmuutoksia juuri stabiilisuuden menetyksen aikana, on käytettävä dynamiikan lähestymistapaa.

Vaikka epälineaarilla laskennalla pyritään todellisen rakenteen käyttäytymisen mahdollisimman tarkkaan mallinnukseen, liittyy siihen yksi ristiriitainen piirre, jonka tunteminen on ehdottoman tärkeää luotettavan laskennan kannalta: Epälineaarisen laskennan tulokset saattavat olla täysin erilaisia täydelliselle eli häiriöttömälle sekä epätäydelliselle eli häiritylle mallille, ja mielivaltaisenkin pienet erot mallien lähtötiedoissa saattavat johtaa kokonaan toisenlaisiin tuloksiin. Tämä johtuu siitä, että täydellinen malli saattaa menettää stabiilisuutensa raja- ja haarautumispisteissä, kun taas häiritylle mallille rajapiste on ainoa mahdollinen. Vastaavasti täydellisen mallin ratkaisujoukko saattaa sisältää useita ratkaisupolkuja (-pintoja), kun taas häirityn mallin ratkaisupolku (-pinta) on yksikäsitteinen. Tämän periaatteellisen eron tiedostaminen on ensiarvoisen tärkeää niin laskentamallin suunnittelun, laskennan kulun kuin tulosten tulkinnankin kannalta. Lisäksi on ymmärrettävä, että täydellinen ja häiritty malli antavat erityyppistä, mutta toisiaan täydentävää tietoa todellisen rakenteen käyttäytymisestä. Näin ollen *kumpaaakaan lähestymistapaa ei pitäisi sulkea pois eikä pitää toista tärkeämpänä.*

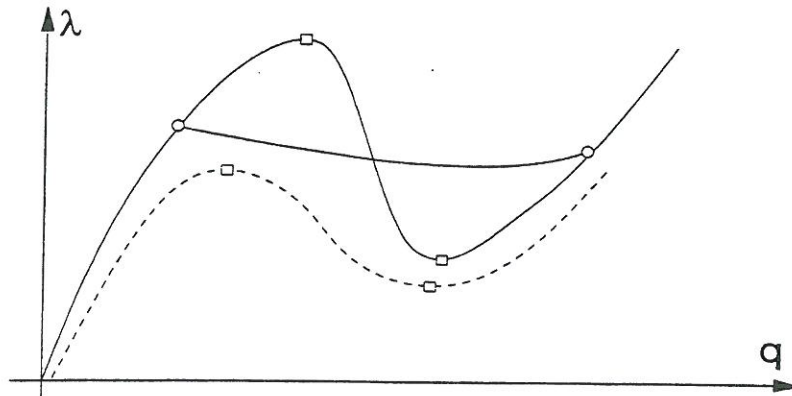
LASKENNAN OSATEHTÄVÄT

Tarkastellaan rakennetta, jonka laskentamallissa on n yleistettyä siirtymävapausastetta, jotka on koottu vektoriin $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Rakenne on tasapainossa, jos jokaista vapausastetta vastaavan sisäisen ja ulkoisen voiman summa on nolla. Yleisyyttä loukkaamatta voidaan olettaa, että kaikki ulkoiset kuormitukset riippuvat yhdestä kuormakertoimesta λ , jolloin tasapainoyhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) \equiv \mathbf{r}(\mathbf{q}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (1)$$

jossa \mathbf{r} on sisäisten voimien vektori ja \mathbf{p} on ulkoinen referenssikuormitusvektori. Yhtälöryhmässä (1) on n yhtälöä ja $n+1$ tuntematonta, joten sen ratkaisujoukko koostuu poluista (\mathbf{q}, λ) -avaruudessa. Ryhmän (1) ratkaisun kulku sisältää yleisessä

tapauksessa neljä vaihetta: 1) Primaaripolun laskenta, 2) polulla esiintyvien kriittisten pisteiden paikallistaminen ja luokittelu, 3) haarautumispisteisiin liittyvien sekundaaripolkujen laskenta ja 4) nurjahduksen dynaaminen analysointi. Kuvassa 1 on esimerkki ryhmän (1) mahdollisista ratkaisujoukoista.



Kuva 1. Ryhmän (1) kaksi erityyppistä ratkaisujoukkoa. Ehjä viiva kuvaa täydellistä ja katkoviiva häirittyä mallia, O = haarautumispiste ja □ = rajapiste.

Primaaripolun määrittäminen

Primaaripolukseksi nimitetään sitä tasapainopolkua, joka sisältää (q, λ) -avaruuden origon. Lähtien jostakin polun tunnetusta pisteestä voidaan polkua seurata inkrementaalisesti joko ennustaja-korjaaja (EK) menetelmällä tai approksimoimalla polkua paloittain lineaarisesti (PL-menetelmä). Näistä ensin mainittu on ylivoimaisesti suositumpi, koska sitä on tutkittu enemmän, ja se on tutkimuksissa osoittautunut tehokkaaksi ja luotettavaksi. On kuitenkin huomattava, että EK-menetelmää voidaan soveltaa vain, jos määritettävä tasapainopolkua on riittävän tasaisesti jatkuva, kun taas PL-menetelmällä ei tällaista rajoitusta yleisesti ottaen ole.

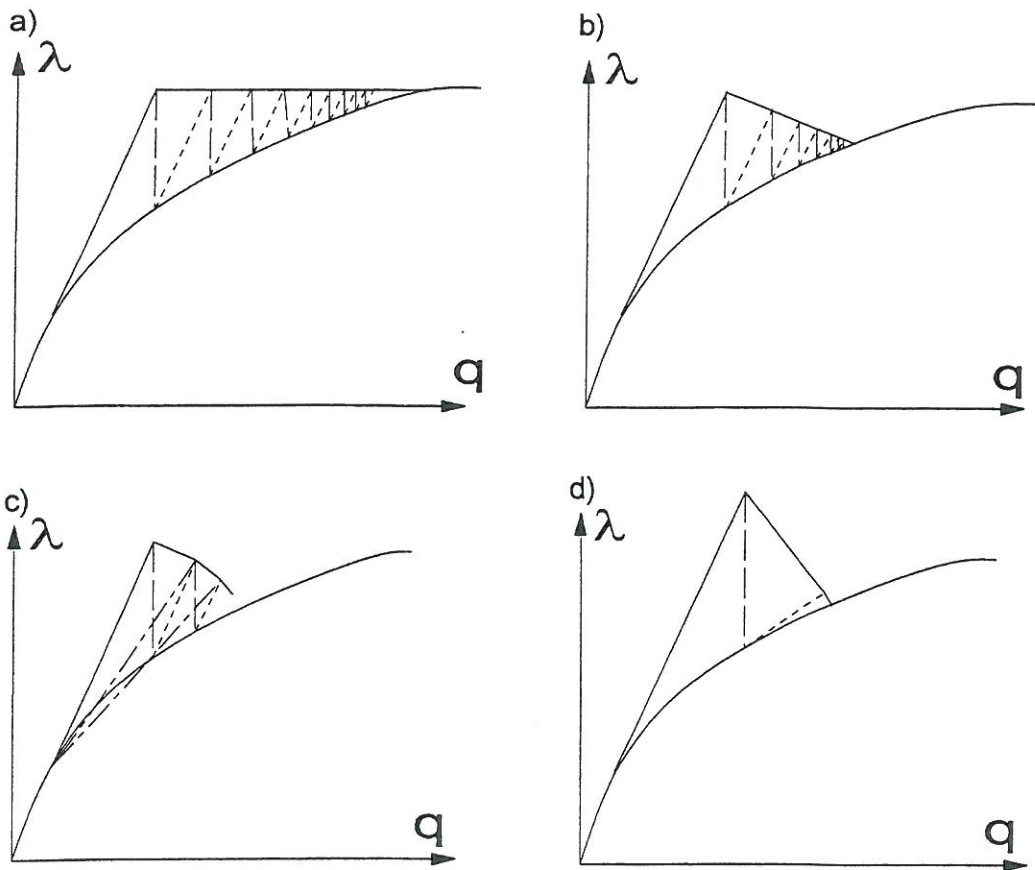
Yksinkertaisin EK-menetelmä on Newton-Raphson iterointi, jossa valittua ohjausparametria (kuormakerroin tai jokin siirtymävapausaste) kasvatetaan askeleittain, ja jokaisen askeleen sisällä muut muuttujat iteroidaan tasapainoarvoihinsa. Tällainen menetelmä on erinomaisen luotettava, kunhan ohjausparametrin arvot kasvavat seurattavalla polulla riittävän tasaisesti.

Ohjausparametrin oikea tehtäväkohtainen valinta ei aina ole itsestäänselvää, joten on jouduttu kehittämään luotettavampia menetelmiä polun seuraamiseen. Yksi parhaista on nk. kaarenpituusmenetelmä, joka perustuu yhtälöryhmän (1) laajentamiseen yhtälöllä, jolla rajoitetaan yhden askeleen aikana kuljetun polunosan pituus [27]:

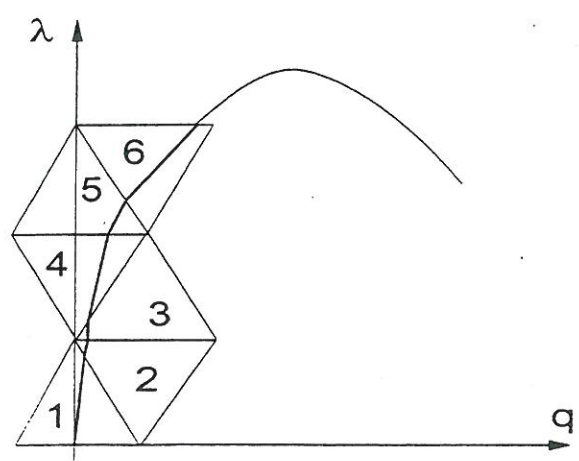
$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{q}) - \lambda \mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ c(\mathbf{q}, \lambda, s) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ryhmä (2) voidaan ratkaista tehokkaasti ja luotettavasti soveltamalla siihen Newton-Raphson iteraatiota, ja huomioimalla linearisoidun ryhmän kerroinmatriisin lähes symmetrinen rakenne [4,24]. Määritettäessä tasapainopolkua ryhmän (2) inkrementaalisen muodon avulla, pidetään kaikkia siirtymävapausasteita sekä kuormakerrointa muuttujina, ja kaarenpituusparametria s kasvatetaan askeleittain. Askeleen koko voi olla vakio, tai sitä voidaan kontrolloida adaptiivisesti laskennan aikana [7]. Kaarenpituusmenetelmästä on kehitetty eri versioita, jotka on nimetty rajoitusyhtälön $c(\mathbf{q}, \lambda, s) = 0$ mukaan. Normaalitasomenetelmässä rajoitusyhtälö määrää korjausaskelen ($d\mathbf{q}$, $d\lambda$) olevan kohtisuorassa ennustaja-askelta vastaan [27,32]. Päivitetyssä normaalitasomenetelmässä korjausaskel otetaan nimensä mukaisesti suuntaan, joka on kohtisuorassa ennustaja-askeleesta ja askeleen aikana aiemmin otetuista korjaaja-askelista koostuvaa kokonaismuutosta vastaan [24]. Kohtisuoran radan menetelmässä korjausaskel on kohtisuorassa primaaripolun tangenttia vastaan [8]. Kuvassa 2 on havainnollistettu eri EK-menetelmiä yksinkertaisessa yhden siirtymävapausasteen tapauksessa.

Tasapainopolun määrittäminen PL-menetelmällä eroaa EK-menetelmästä lähinnä siinä, että tasapainopolkua edetään inkrementaalisesti askel kerrallaan ilman minkäänlaista iterointia. PL-menetelmässä (\mathbf{q}, λ) -avaruuteen konstruoidaan ensin $n+1$ -kärkinen monitahokas siten, että jokin tunnettu tasapainopiste on monitahokkaan jollakin sivulla tai tahkolla. Tämän jälkeen epätasapainovektorin \mathbf{g} komponentit lasketaan monitahokkaan jokaisessa kärjessä, ja laskettujen arvojen avulla tasapainopolkua approksimoidaan lineaarisesti kyseisen monitahokkaan sisällä [1]. Polkua edetään konstruoimalla uusi monitahokas siten, että sillä on yksi yhteinen tahko tai sivu edellisen kanssa, kts. kuva 3.



Kuva 2. Muutamia ennustaja-korjaaja menetelmiä, a) kuormaohjattu Newton-Raphson iteraatio, b) normaalitasomenetelmä, c) päivitetty normaalitasomenetelmä, d) kohtisuoran radan menetelmä. Ennustaja- ja korjaaja-askleet on merkitty ehjällä viivalla.



Kuva 3. Tasapainopolun seuraaminen PL-menetelmällä.

PL-menetelmää on sovellettu rakenteiden mekaniikan tehtävissä melko vähän, mutta esimerkiksi lähteessä [6] esitettyä algoritmia on käytetty moniin mekaniikan tehtäviin ja ainakin sauvarakenteissa sen on todettu olevan kilpailukykyinen EK-menetelmän kanssa [21].

On huomattava, että vaikka näennäisen yksinkertaisten tasapainoyhtälöiden (1) ratkaiseminen on edellä esitetyillä menetelmillä suoraviivaista, saattaa laskennan aikana esiintyä ongelmia, joiden käsittelyyn tarvitaan varta vasten räätälöityjä menetelmiä. Esimerkiksi materiaalin plastisoituminen tai rakenteen kontaktiongelmiin käsittely saattavat tehdä yhtälöiden ratkaisemisen kertaluokkaa vaikeammaksi.

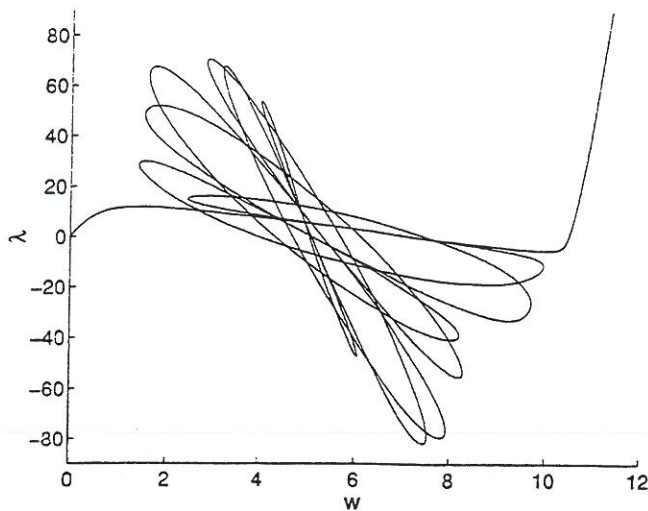
Singulaaripisteiden käsittely

Alkuaan stabiili tasapainotila muuttaa luonnettaan epästabiiliksi mikäli primaaripolkua seurattaessa ohitetaan nk. kriittinen tasapainopiste, jossa ryhmän (1) inkrementaalinen muoto, tai toisinsanoen elementtimallin tangenttijäykkyyismatriisi K_T on singulaarinen. Kriittisen pisteen ohituksen voi paikallistaa sille askeleelle, jonka aikana K_T :n negatiivisten pivot-alkioiden määrä muuttuu [18]. Kriittinen tasapainopiste voidaan luokitella joko rajapisteeksi tai haarautumispisteeksi erilaisten yksinkertaisten testifunktioiden avulla [3,34]. Haarautumispiste, joka voi olla yksin- tai moninkertainen, voidaan edelleen luokitella mm. sen symmetrisyyden perusteella usealla eri tavalla [31].

Jotta kriittisen pisteen tyyppi voitaisiin luotettavasti tunnistaa, on se ensin paikallistettava riittävällä tarkkuudella. Tämä voidaan tehdä joko pienentämällä askelpituutta kriittisen pisteen ympäristössä [21] tai interpoloimalla pienintä pivot-alkiota tai ominaisarvoa kahden kriittistä pistettä eri puolella olevan tasapainotilan välillä [18].

Mikäli kriittinen piste osoittautuu rajapisteeksi, tiedetään, että infinitesimaalisella kuormakertoimen kasvattamisella rakenne menettää stabiilisuutensa läpilyönti-ilmiön kautta. Toisinsanoen, rakenne nurjahtaa äkillisesti rajapisteestä johonkin toiseen stabiiliin tasapainotilaan. Tämä läpilyönti on luonteeltaan dynaaminen, ja jos halutaan tietää miten rakenne sen aikana

käyttäytyy, on siirryttävä statiikan polunseuraamismenettelystä dynamiikan aikaintegrointi-menetelmään [28,30,11]. Sopivan menetelmän valintaa on käsitelty mm. lähteessä [35]. Mikäli läpilyönnin analysointiin käytetään statiikan lähestymistapaa löydetään sama stabiili tasapainotila, johon rakenne dynaamisesti siirtyy, mutta tasapainopolku, jota sinne päästään, saattaa olla yllättävän monimutkainen eikä sen seuraamisesta ole sikäli hyötyä, että se ei kuvaa rakenteen todellista käyttäytymistä. Esimerkkinä tästä on kuvassa 4 esitetty laakean, hieman epäkeskisesti pistekuormitetun materiaaaliltaan lineaarisesti kimmoisen kaaren staattinen tasapainopolku kuormakertoimen λ ja lakipisteen taipuman w virittämässä tasossa.



Kuva 4. Läpilyönnin laskenta staattisella polunseurannalla.

Haarautumispisteessä tilanne on aivan toisenlainen, sillä siinä yksi tai useampia nk. sekundaarisia tasapainopolkuja leikkaa primaaripolun. Sekundaaripolut pystytään määrittämään em. polunseuraamismenetelmillä, kunhan ensin osataan ottaa nk. polunvaihtoaskel primaaripolulta sekundaariselle polulle. Tätä käsitellään tarkemmin seuraavassa kappaleessa. On selvää, että haarautumispiste ja siitä seuraava tasapainopolkujen monikäsitteisyys on mahdollista ainoastaan teoriassa, ja sielläkin vain täydellisten mallien yhteydessä. Täydellinen malli 'omituisine' haarautumispisteineen antaa kuitenkin niin paljon hyödyllistä tietoa myös todellisen

rakenteen mahdollisista tasapainopoluista, että sen tutkiminen on erittäin hyödyllistä. Tämä johtuu pääosin siitä, että todellisen rakenteen alkuhäiriöitä (geometrian epätäydellisyyksiä, materiaalivikoja, kuormien epäkeskisyyksiä, jne.) ei pystytä etukäteen tietämään. Tällöin *täydellisen mallin ratkaisujoukosta on suurta hyötyä, koska sen avulla voidaan approksimoida todellisen rakenteen käyttäytymistä mielivaltaisilla alkuhäiriöillä*. Suuressa mittakaavassa tämä approksimaatio on luonnollisestikin vain suuntaa antava, mutta paikallisesti (pienillä häiriöamplitudeilla) se eroaa vain hyvin vähän rakenteen todellisesta käyttäytymisestä [31].

Haarautumispisteen osalta on huomattava vielä yksi laskentaa suuresti vaikeuttava seikka: Joissakin tapauksissa haarautumispisteitä esiintyy primaaripolulla hyvin suuri määrä lähekkäin tai jopa täysin päällekkäin. Tällainen kriittisten pisteiden keskittymä tekee tangenttijäykkyyssmatriisin hyvin huonokuntoiseksi, joten numeerisia vaikeuksia on odotettavissa niin polun seuraamisessa kuin polunvaihtoaskeltenkin laskemisessa. Tällaisissa patologisissa tapauksissa on suositeltavaa pyrkiä esimerkiksi ryhmäteorian avulla jakamaan alkuperäinen tehtävä sarjaksi paremmin käyttäytyviä osatehtäviä [10,33].

Sekundaariset tasapainotilat

Sekundaaristen tasapainopolkujen määrittämisessä ylivoimaisesti vaikein ongelmakohta on em. polunvaihtoaskeleen määrittäminen. Yksinkertaisessa haarautumispisteessä, jossa tangenttijäykkyyssmatriisilla on vain yksi nollaominaisarvo, ja sekundaaripolkuja on vain yksi, ei ole vaikeuksia: Polunvaihtoaskel otetaan nollaominaisarvoa vastaavan ominaisvektorin suuntaan. Mikäli kyseessä on epäsymmetrinen haarautumispiste, on lisäksi laskettava kuormakertoimen muutos. Tämä onnistuu luotettavasti nk. algebrallisen haarautumisyhtälön avulla [16].

Moninkertainen haarautumispiste on sen sijaan huomattavasti hankalampi käsitellä, koska siinä risteävien sekundaaripolkujen lukumäärä kasvaa eksponentiaalisesti pisteen kertaluvun m funktiona, mutta polkujen tarkkaa lukumäärää ei yleisessä tapauksessa tiedetä. Tiedetään ainoastaan, että niiden

maksimimäärä on $(3^m - 1)/2$. Muutamia menetelmiä on kuitenkin esitetty kaksinkertaisenkin haarautumispisteen kaikkien sekundaaripolkujen löytämiseksi. Algebralliset haarautumisyhtälöt soveltuvat kaksinkertaisten haarautumispisteiden käsittelyyn, kunhan sekundaaripolkujen tangentit eroavat toisistaan [16]. Yhtälöillä on vankka teoreettinen perusta, ja ne ovat osoittautuneet toimiviksi myös numeerisessa laskennassa [22]. Hyvin samankaltainen menetelmä on johdettu Lyapunov-Schmidt-Koiter hajotelman perusteella, ja myös se on havaittu numeerisesti luotettavaksi [20]. Muutamia menetelmiä on johdettu perustuen mm. epätasapainovektorin normin [15] ja potentiaalienergian minimointiin [9] haarautumispisteen välittömässä läheisyydessä. Lisäksi on esitetty kaksi menetelmää, jotka perustuvat tasapainoyhtälöiden häirintään haarautumispisteen ympäristössä [1,12].

Lähinnä tehtävän numeeristen ongelmien takia mitään em. menetelmistä ei voida pitää niin varmatoimisena, että se syrjäyttäisi muut. Riippuu paljolti tehtävän luonteesta, mitä menetelmää kannattaa soveltaa. Vaikka menetelmät toimivat teoriassa hyvin, on niiden numeerisessa soveltamisessa vielä paljon tutkittavaa.

Alkuhäiriöiden mallinnus

Mikäli ei haluta määrittää edellä esitetyn mukaisesti täydellisen mallin kaikkia tasapainopolkua, voidaan heti alussa lisätä malliin todellisuutta jäljitteleviä alkuhäiriöitä. Tällöin ryhmän (1) ratkaisujoukko on yksikäsitteinen polku, eikä siinä voi esiintyä muita kriittisiä pisteitä kuin rajapisteitä. Näin ollen hankalia polunvaihtolaskentoja ei tarvitse lainkaan tehdä. Häirityn mallin laskennassa suurin ongelma liittyy alkuhäiriön mallintamiseen, koska ennalta ei voida tietää (suunniteltavan) rakenteen häiriöitä. Onkin päädytty joko 'varmalla puolella' olevaan lähestymistapaan, jossa pyritään määrittämään nurjahduskuorman kannalta vaarallisin häiriömuoto [5] tai menetelmään, jossa todellisen rakenteen käyttäytymistä approksimoidaan tilastomatematiikan keinoin [14].

Muita ratkaisustrategioita

Joissakin tapauksissa laskennan tavoitteena ei ole koko tasapainopolun määrittäminen, vaan esimerkiksi pelkästään rakenteen lommahduskuorman määrittäminen, täydennettynä mahdollisesti jälkikriittisen tilan likimääräisellä tarkastelulla. Tällaisissa tapauksissa voidaan käyttää ensin mainittuun tehtävään lineaarista ominisarvoanalyysiä ja jälkimmäiseen asymptoottista lähestymistapaa [19]. Nämä menetelmät ovat luotettavia ainoastaan, jos rakenteen primaaripolku origosta tarkasteltavaan kriittiseen pisteeseen asti on lähes lineaarinen. Näin ollen menetelmien käyttäjän on etukäteen tiedettävä, täyttääkö tarkasteltava rakenne vaadittavan lineaarisuusehdon. Väärin käytettyinä menetelmät saattavat antaa täysin väärän kuvan suunniteltavan rakenteen kantokyvystä. Erityisen vaaralliseksi tilanteen tekee se, että lineaarinen ominisarvoanalyysi on sisällytetty käytännöllisesti katsoen kaikkiin yleisessä käytössä oleviin elementtimenetelmäohjelmistoihin, joita pystyy käyttämään vaikka ei tuntisi taustalla olevaa teoriaa lainkaan.

RAKENTEEN DISKRETOINTI

Epälineaarisissa tehtävissä esiintyvät suuret siirtymät (translaatiot ja rotaatiot) asettavat rajoituksia rakenteen diskretointiin käytettäville elementeille. Riippuen elementin kyvystä kuvata rakenteen siirtymätila, tasapainoyhtälöt voidaan muodostaa joko kokonais-Lagrangen tai päivitetyn Lagrangen menettelyllä [2].

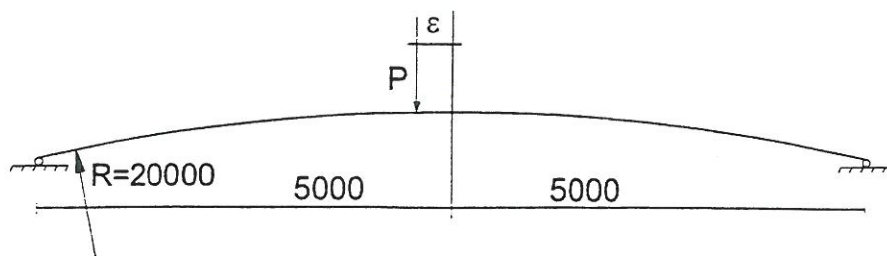
Mikäli elementti pystyy kuvaamaan rakenteen siirtymätilan tarkasti riittävän suurille translaatioille ja rotaatioille, voidaan tasapainoyhtälöt muodostaa kokonais-Lagrangen menettelyllä. Siinä elementin muodonmuutokset lasketaan sen hetkisistä siirtymistä vertaamalla niitä alkutilan siirtymiin. Kokonais-Lagrangen menettelyä voidaan käyttää tehokkaasti mielivaltaisten siirtymien laskennassa mikäli rakenne on diskretoitu nk. kinemaattisesti tarkoilla elementeillä. Tällaisia ovat mm. Reissnerin palkkiteoriaan perustuvat palkkielementti [25], pyörähdyssymmetrinen kuorielementti [26] sekä yleinen ohuen kuoren elementti [29].

Päivitetty Lagrangen menettely eroaa kokonais-Lagrangen menettelystä sen osalta, että muodonmuutokset lasketaan vertaamalla sen hetkisiä siirtymiä

edelliseen tasapainotilaan. Tällöin elementin on kyettävä kuvaamaan rakenteen siirtymätila tarkasti vain yhden askeleen aikana. Näin ollen, jos askelpituus pidetään riittävän pienenä, voidaan epälineaarinen tehtävä ratkaista 'lineaarilla' pienten siirtymien teorian mukaisilla elementeillä. Tässä tapauksessa suuret translaatiot ja rotaatiot on kyettävä jollain muulla tavoin päivittämään tasapainotila kerrallaan. Erityisen ongelmallista tämä on rotaation osalta, koska 3D-tapauksessa se ei noudata suunnikaslakia, eikä sitä näin ollen voida päivittää summaamalla. Tämän ongelman ratkaisua on käsitelty mm. lähteissä [13,17].

LASKENTAESIMERKKI

Tarkastellaan kuvan 5 mukaista niveltuettua laakea kaarta [23], jota kuormitetaan pistevoimalla P . Rakenne on mallinnettu kymmenellä Reissnerin palkkiteorian mukaisella materiaaliltaan lineaarisesti kimmoisella isoparametrisella elementillä, joiden jäykkyyismatriisit sekä sisäisten voimien vektorit on muodostettu kokonais-Lagrangen menettelyllä. Rakenne on analysoitu sekä täydellisenä eli häiriöttömänä, jolloin pistevoiman epäkeskisyyden $\varepsilon = 0$ että häiritynä, jolloin $\varepsilon \neq 0$.

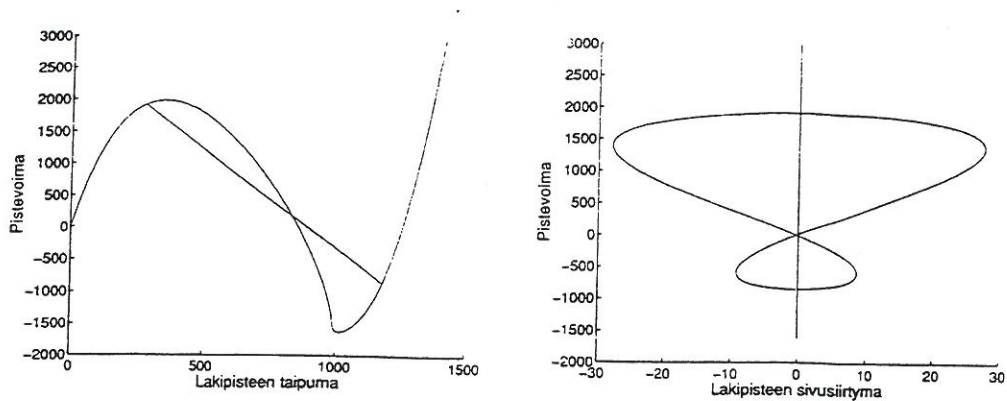


Kuva 5. Tarkasteltava kaarirakenne, $E=200$, $\nu=0$, $A=10^4$ ja $l=10^8$.

Täydellinen malli

Keskisellä pistevoimalla kuormitettuna rakenteen tasapainoyhtälöiden ratkaisujoukko sisältää primaaripolun lisäksi yhden sekundaaripolun. Primaaripolun rajapisteestä $P=1977$ alkava läpilyönti on analysoitu staattisena, ja tuloksena on saatu kuvan 6 mukainen tasapainopolku. Primaaripolku on stabiili origosta rajapisteeseen asti sekä läpilyönnin jälkeen pistevoiman arvoilla $P > 1977$.

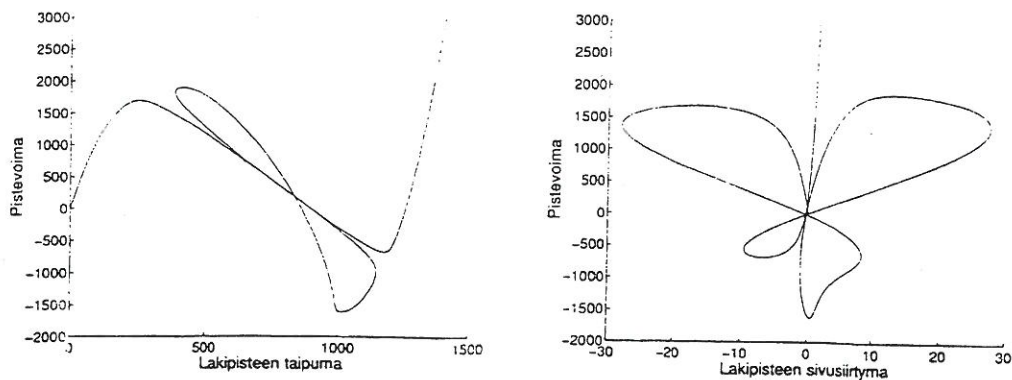
Sekundaaripolku leikkaa primaaripolun kohdissa $P=1910$ ja $P=-855$, ja sen määrittämisessä käytetty polunvaihtoaskel on laskettu algebrallisella haarautumisyhtälöllä. Sekundaaripolulle siirryttäessä rakenteen siirtymätilan symmetrisyys häviää. Tämä piirros on ominaista haarautumispisteille ja sekundaaripoluille yleisestikin.



Kuva 6. Täydellisen mallin staattiset tasapainopolut

Häiritty malli

Tässä yhteydessä tasapainoyhtälöiden täydellisyys on poistettu siirtämällä pistevoima hiukan ($\epsilon=200$) sivuun symmetria-akselilta. Tällöin tasapainopolku muuttuu siten, että haarautumispisteet poistuvat, ja ensimmäinen rajapiste kohdataan pistevoiman arvolla $P=1682$. Läpilyönnin aikainen staattinen epästabiili tasapainopolku on melko monimutkainen, kuten yleensäkin vastaavasti kuormitettujen laakeiden kaarien ja kuorien tapauksessa.



Kuva 7. Häirityn mallin staattiset tasapainopolut

KIRJALLISUUSVIITTEET

- 1 E. L. Allgower and K. Georg, *Numerical Continuation Methods - an Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- 2 K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1982.
- 3 P. G. Bergan, G. Horrigmoe, B. Kråkeland and T. H. Søreide, Solution techniques for non-linear finite element problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **12**, 1677-96 (1978).
- 4 M. A. Crisfield, A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-trough". *Computers & Structures* **13**, 55-62 (1981).
- 5 M. Deml and W. Wunderlich, Direct evaluation of the 'worst' imperfection shape in shell buckling, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **149**, 201-22 (1997).
- 6 G. Domokos and Zs. Gáspár, A global, direct algorithm for path-continuation and active static control of bar structures. *Mech. Struct. and Mach.* **23**, 549-571 (1995).
- 7 A. Eriksson and R. Kouhia, On step size adjustments in structural continuation problems, *Computers & Structures* **55**, 495-506 (1995).
- 8 I. Fried, Orthogonal trajectory accession to the nonlinear equilibrium curve. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **47**, 283-97 (1984).
- 9 F. Fujii and K. K. Choong, Branch switching in bifurcation of structures. *J. Eng. Mech.* **118**, 1578-1596 (1992).
- 10 T. J. Healey, A group-theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* **67**, 257-295 (1988).
- 11 M. W. Hilburger, A. M. Waas and J. H. Starnes, Modeling the dynamic response and establishing post-buckling / post snap-thru equilibrium of discrete structures via a transient analysis, *ASME J. Appl. Mech.* **64**, 590-595 (1997).
- 12 J. Huitfeldt, Nonlinear eigenvalue problems - prediction of bifurcation points and branch switching. Numerical analysis report 17, Department of Computer Sciences, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1991.
- 13 A. Ibrahimbegovic, On the choice of finite rotation parameters, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **149**, 49-71 (1997).

- 14 Ikeda K, Murota K, Elishakoff I. Reliability of structures subjected to normally distributed initial imperfections, *Computers & Structures* **59**, 463-69 (1996).
- 15 R. B. Kearfott, Some general bifurcation techniques. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **4**, 52-68 (1983).
- 16 H. B. Keller, Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. Applications of Bifurcation Theory, P. Rabinowitz (ed.), Academic Press, New York: 359-84, 1977.
- 17 R. Kouhia, Finite rotations in view of structural stability analysis, in *Modelling and Simulation Based Engineering*, S.N. Atluri and P.E. O'Donoghue eds., pp. 710-715, Tech Science Press, 1998.
- 18 R. Kouhia and M. Mikkola, Tracing the equilibrium path beyond simple critical points. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **28**, 2923-41 (1989).
- 19 R. Kouhia and M. Mikkola, Strategies for structural stability analysis, *Advances in Finite Element Technology*, Wiberg N.E. (ed.), CIMNE, 254-278, 1995.
- 20 R. Kouhia and M. Mikkola, Numerical treatment of multiple bifurcation points. S. R. Idelsohn, E. Onate and E. N. Dvorkin (eds.) *Computational Mechanics, New Trends and Applications, Proceedings of The Fourth World Congress of Computational Mechanics*, June 29-July 2, 1998 Buenos Aires, Argentina.
- 21 S. Pajunen, *Sauvarakenteiden epälineaarinen analysointi*, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Tampere 1997, Lisensiaatin tutkimus.
- 22 S. Pajunen and M. Tuomala, Branch-switching from coincident bifurcation points, submitted for publication.
- 23 Y-L. Pi and N. S. Trahair, Three-dimensional nonlinear analysis of elastic arches, *Engineering Structures* **18**, 49-63 (1996).
- 24 E. Ramm, Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. *Nonlinear Finite Element Analysis of Structural Mechanics*, W. Wunderlich (ed.), Springer-Verlag, 1981.
- 25 E. Reissner, On a one-dimensional finite strain beam theory: the plane problem, *J. Appl. Math. Phys.* **23**, 795-804 (1972).

- 26 E. Reissner, On finite axi-symmetrical deformations of thin elastic shells of revolution, *Comp. Mech.* **4**, 387-400 (1989).
- 27 E. Riks, The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *J. Appl. Mech.* **39**, 1060-66 (1972).
- 28 E. Riks, F. A. Brogan and C. C. Rankin, Numerical aspects of shell stability analysis, Proc. International Conference of Computational Engineering Science, Krätzig WB, Oñate E. (eds.), Springer-Verlag, Heidelberg 1990, 125-51
- 29 J. C. Simo, D. D. Fox and M. S. Rifai, On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **79**, 21-70 (1990).
- 30 G. Skeie and C. A. Felippa, Detecting and traversing bifurcation points in nonlinear structural analysis, *Int. J. Space Struct.* **6**, 77-98 (1991).
- 31 J. M. T. Thompson and G. W. Hunt, *Elastic Instability Phenomena*, Wiley, London, 1984.
- 32 G. A. Wempner, Discrete approximations related to the nonlinear theories of solids. *Int. J. Solids Struct.* **7**, 1581-99 (1971).
- 33 J. C. Wohlever and T. J. Healey, A group theoretic approach to the global bifurcation analysis of an axially compressed cylindrical shell, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **122**, 315-349 (1995).
- 34 P. Wriggers and J. C. Simo, A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. *Int. J. Num. Meth. Eng.* **30**, 155-76 (1990).
- 35 H. G. Zhong and M. A. Crisfield, An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of shell structures, *Engrg. Comp.* **15**, 552-576 (1998).

Sami Pajunen, TkL, assistentti
TTKK / Teknillinen mekaniikka
PL 589, 33101 Tampere
email: sami@mohr.me.tut.fi

ENGLISH SUMMARY

ON COMPUTATIONAL STRATEGIES IN NON-LINEAR STRUCTURAL MECHANICS

Sami Pajunen

Journal of Structural Mechanics, Vol. 31
Nos. 3-4, 1998, pp. 16-30

In the paper the computational methods needed in the solution process of non-linear structural problems are reviewed. The methods are introduced rather concisely, and relevant references are given for detailed descriptions. The main aim of the paper is to give qualitative picture on the solution techniques that are needed in the definition of the global solution set of non-linear structural problem.

