GEOMETRISESTI EPÄLINEAARISEN 3D-PALKKITEHTÄVÄN KINEMATIIKKA KVATERNIONEJA KÄYTTÄEN

Lassi Syvänen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 30
Nrot 3-4, 1997, s. 72-83

JOHDANTO

Suurten siirtymien tehtävän laskenta vaikeutuu huomattavasti, mikäli tehtävä on 3-ulotteinen ja muuttujina on myös rotaatiovapausasteita. Rotaatioita ei voida esittää aitojen 3D-vektoreiden avulla, eli esim. FEM-laskennassa vapausasteiden suuntaiset rotaatiokomponentit eivät muodosta aitoa vektoria, jota voitaisiin summata suunnikassäännön perusteella. Tavallisesti solmun kiertymää seurataan laskennassa rotaatiomatriisin avulla. Se sisältää 3D-tehtävässä yhdeksän komponenttia, joita sitoo kuusi sidosyhtälöä, eli rotaatiomatriisissa on kuusi ylimääräistä parametria.

Kolmen parametrin avulla esitetyillä rotaatioilla (kuten Rodriques'n parametrit /1/) esiintyy singulaarisuuspiste, kun rotaatiokulma on 180 astetta. Eulerin parametreja /2/ käyttämällä mikä tahansa rotaatio voidaan esittää neljän parametrin avulla, eikä singulaarisuuspisteitä esiinny.

Sir William Rowan Hamiltonin vuonna 1843 keksimä kvaternionien algebra soveltuu erinomaisesti rotaatioiden laskentaan Eulerin parametrien avulla. Kvaternionit jäivät kuitenkin pitkäksi aikaa vektorilaskennan varjoon, ja vasta viime aikoina Hamiltonin elämäntyö on löydetty uudelleen. Nykyisin kvaternionien algebraa käytetään mm. avaruustekniikassa, robotiikassa, ydinfysiikassa ja tietokonegrafiikassa. Suurissa FEM-ohjelmistoissa (ANSYS, ABAQUS) on alettu käyttää rotaatioiden yhdistämisessä kvaternioneita, mutta muissa rotaatioihin liittyvissä operaatioissa ne turvaavat edelleen (tarpeettomasti) rotaatio- ja orientaatiomatriisien käyttöön.

KVATERNIONIT

Suurten rotaatioiden yhteydessä tarvittavat yhteenlaskut ja koordinaatiston muunnokset voidaan kätevästi esittää kvaternionien /2/ algebraa käyttäen. Kvaternion $\bar{q}$ kirjoitetaan skalaarin ja vektorin summana kuten kompleksiluku, jolloin se sisältää 3D-tapauksessa 4 reaalikomponenttia $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$

$$\bar{q} = c_0 + c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}.$$

Konjugaattikvaternion $\tilde{q}$ saadaan, kun kvaternionin vektorin etumerkki vaihdetaan

$$\tilde{q} = c_0 - c_1\vec{i} - c_2\vec{j} - c_3\vec{k}.$$

Kvaternionin normi lasketaan sen komponenttien avulla

$$|\bar{q}| = c_0^{\,2} + c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + c_3^{\,2}. \tag{1}$$

Mikäli $|\bar{q}| = 1$ se on yksikkökvaternion, ja jos $c_0 = 0$, $\bar{q}$ on vektorikvaternion. Mikäli parametrit $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ valitaan siten, että

$$c_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ ja } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}, \tag{2}$$

niitä kutsutaan Eulerin parametreiksi. Tällöin kulma θ esittää kiertokulmaa yksikkövektorin $\vec{e}$ ympäri.

Puhdasta rotaatiota esittävän kvaternionin normi on aina 1. Kuten kaavan (1) mukaisesti muodostetun rotaatiokvaternionin normista nähdään, on kaikilla kulmilla ja suuntavektoreilla $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}\cdot\vec{e} = 1.$

Kvaternionien kertolaskua tarvitaan, kun esimerkiksi lasketaan peräkkäisten suurien rotaatioiden yhteisvaikutusta. Kahden kvaternionin $\bar{q}_1 = a + \vec{b}$ ja $\bar{q}_2 = c + \vec{d}$ tulo $\bar{q}_3 = \bar{q}_2\bar{q}_1$ on myös kvaternion, jossa

$$\bar{q}_3 = ac + a\vec{d} + c\vec{b} - \vec{d}\cdot\vec{b} + \vec{d}\times\vec{b}. \tag{3}$$

Sen skalaariosuus on $S(\bar{q}_3) = ac - \vec{d}\cdot\vec{b}$ ja vektoriosuus $V(\bar{q}_3) = a\vec{d} + c\vec{b} + \vec{d}\times\vec{b}$. Vektoriosuuden ristitulosta huomataan, että kvaternionien kertomisjärjestyksellä (rotaatioiden järjestyksellä) on vaikutusta yhdistettyyn kvaternioon (rotaatioon), eli kvaterniot kuten suuret rotaatiotkaan eivät ole kommutatiivisia. Mikäli kvaternionit $\bar{q}_1$ ja $\bar{q}_2$ edustavat rotaatioita, antaa kaava (3) yhdistetyn rotaation kvaternionin, kun ensin on suoritettu rotaatio 1 ja sitten rotaatio 2.

Vektoria voidaan kiertää koordinaatistossa tai se voidaan lausua toisessa koordinaatistossa kvaternionin avulla samoin kuin rotaatiomatriisinkin. Annetaan vektorin (vektorikvaternion) $\bar{p} = 0 + \vec{p}$ kiertyä kulman θ verran akselin $\vec{e}$ ympäri. Mikäli $\bar{q}$ on rotaatiota $R(\theta, \vec{e})$ vastaava kvaternion, saadaan kiertynyt vektori $\bar{p}' = 0 + \vec{p}'$ (vektorikvaternion)

$$\bar{p}' = \bar{q}\bar{p}\tilde{q}. \tag{4}$$

Kvaternionin $\bar{r}$ komponentit voidaan lausua rotaation $R(\theta, \vec{e})$ verran kiertyneessä koordinaatistossa. Uudet komponentit $\bar{r}'$ ovat tällöin

$$\bar{r}' = \tilde{q}\bar{r}\bar{q}. \tag{5}$$

Kvaterniot ovat assosiatiivisia, joten sulkeita ei tarvita kertolaskujärjestystä osoittamaan.

SUURTEN SIIRTYMIEN TEHTÄVÄN CR-FORMULOINNIN LOKAALEISTA KOORDINAATISTOISTA

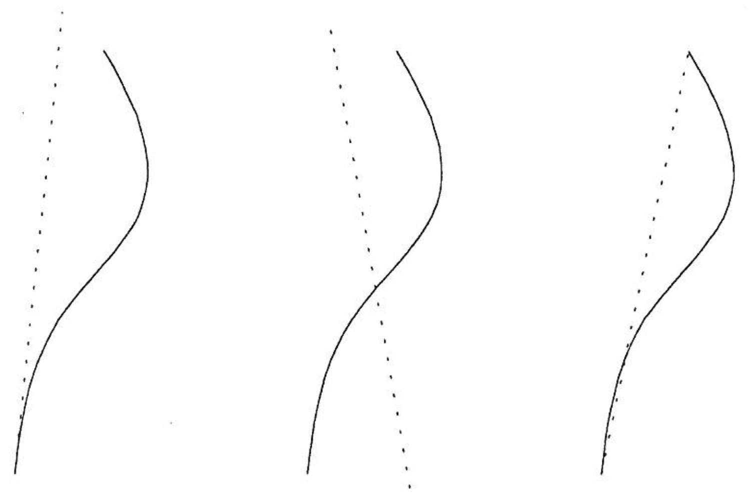
Palkkien suurten siirtymien FEM-laskennassa yleisesti käytetyssä CR-formuloinnissa (co-rotational) jaetaan elementin siirtymät jäykän kappaleen liikkeeseen ja pieniä muodonmuutoksia aiheuttaviin siirtymiin. Jäykän kappaleen liikkeen tunnistamiseen on käytetty erilaisia tapoja /3/. Kuvassa 1 on esitetty kolme vaihtoehtoa:

1) jäykkä kappale (lokaali x-akseli) osoittaa alkusolmusta tangentin suuntaan (se saa alkusolmun rotaation)
2) jäykän kappaleen rotaatio vastaa elementin alku- ja loppusolmujen rotaatioiden keskiarvoa

3) jäykkä kappale (lokaali x-akseli kuten kuvassa 2) muodostaa jänteen alku- ja loppusolmujen välille.

Tavoissa 1 ja 2 ei tule ongelmia muiden lokaalin koordinaatiston kantavektoreiden (y ja z -akseleiden suunnat) määrittämisessä, mutta tavassa 3 muut koordinaatiston kantavektorit (y ja z) täytyy määrittää erikseen. Tapa 3 osoittautuu paremmin konvergoivaksi kuin tapa 1 /3/. Suurista FEM-ohjelmista esim. ANSYS /8/ käyttää tapaa 2.

Tässä artikkelissa käytetään tapaa 3 (sekanttimenetelmä), eli jäykän kappaleen liikkeen jälkeen palkki muodostaa jänteen alku- ja loppusolmun välille.



Tapa 1. Alkusolmusta tangentiaalisesti

Tapa 2. Alku- ja loppusolmujen keskimääräisen rotaation mukaan

Tapa 3. Sekanttina alkusolmusta loppusolmuun

Kuva 1. Jäykän kappaleen liikkeen esittämisvaihtoehtoja

ROTAATIOKVATERNIONIN MUODOSTAMINEN KIERTYMÄKOMPONENTEISTA

Geometrisesti epälineaarisissa palkki- ja kuorirakenteissa käytetään vapausasteina kiertymiä, jotka voivat olla suuria. Koska solmujen suuria rotaatioita ei voida esittää 3D -

tehtävissä aitona vektorina, otetaan käyttöön pseudovektori $\vec{\theta}$, jonka Argyris /4/ on esittänyt.

$$\vec{\theta}=\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{pmatrix}=\theta\vec{e}, \tag{6}$$

missä θ_1, θ_2 ja θ_3 ovat rotaatiokomponentteja, $\theta=\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2}$ ja $\vec{e}=\dfrac{(\theta_1\,\theta_2\,\theta_3)^{\mathrm{T}}}{\theta}$ on rotaatioakselin suuntainen yksikkövektori. Muodostetaan pseudovektorista $\vec{\theta}$ rotaatiokvaternion

$$\bar{q}=\omega+\vec{\omega}, \tag{7}$$

ja normeerataan se kaavan (2) mukaisesti, jolloin

$$\omega=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ ja } \vec{\omega}=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}. \tag{8}$$

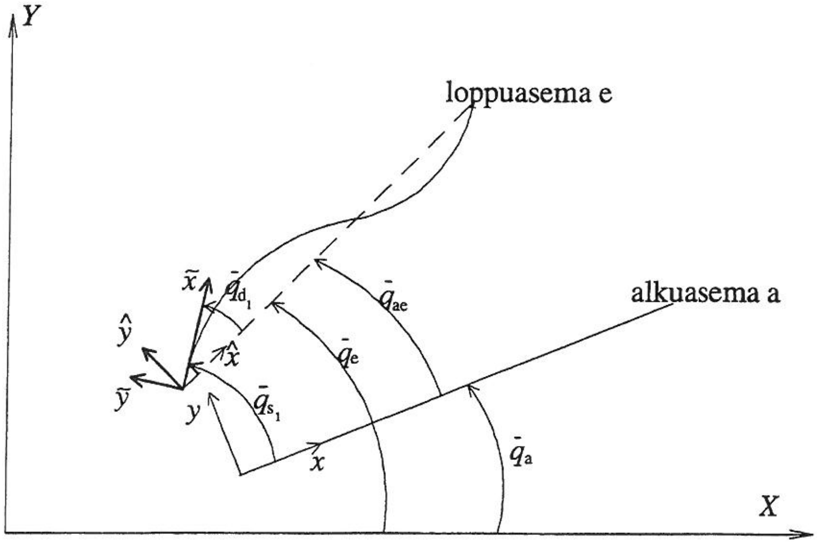
Mikäli kiertymiskulma θ on nolla, rotaatiokvaternion voidaan kirjoittaa suoraan $\bar{q}=1+(000)^{\mathrm{T}}$.

PAIKALLISKOORDINAATISTOJEN MÄÄRITTÄMINEN

Alkuasemaa a (kuva 2) vastaavan orientaatiokvaternionin $\bar{q}_{\mathrm{a}}$ määrittämistä varten muodostetaan alkutilan a koordinaatiston (x,y,z) akselien suuntaiset yksikkövektorit $(\vec{e}_{\mathrm{x}}, \vec{e}_{\mathrm{y}}, \vec{e}_{\mathrm{z}})$. Kantavektori $\vec{e}_{\mathrm{x}}$ saadaan elementin alku- ja loppusolmujen paikkavektorien ($\vec{p}_{\mathrm{a_i}}$ i=1,2) avulla $\vec{e}_{\mathrm{x}}=\dfrac{\vec{p}_{\mathrm{a_2}}-\vec{p}_{\mathrm{a_1}}}{L}$, missä L on elementin pituus alkutilassa ja i on solmunumero. Kantavektori $\vec{e}_{\mathrm{y}}$ määritetään annetun (tai suuntasolmusta lasketun) suuntavektorin $\vec{s}$ avulla /5/

$$\vec{e}_{\mathrm{y}}=\frac{\vec{s}-(\vec{s}\cdot\vec{e}_{\mathrm{x}})\vec{e}_{\mathrm{x}}}{\left|\vec{s}-(\vec{s}\cdot\vec{e}_{\mathrm{x}})\vec{e}_{\mathrm{x}}\right|}, \vec{s}\neq a\vec{e}_{\mathrm{x}}\,(a\in\mathbb{R}).$$

Lopuksi oikean käden säännön mukaan saadaan kantavektori $\vec{e}_{\mathrm{z}}=\vec{e}_{\mathrm{x}}\times\vec{e}_{\mathrm{y}}$.



Kuva 2. Jäykän kappaleen liikkeen koordinaatistot ja orientaatiokvaternionit

Elementtikoordinaatiston $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ $\vec{e}_{\hat{x}}$-kantavektori saadaan suoraan siirtymillä päivitetyn alku- ja loppusolmujen paikkavektorien $\vec{p}_{e_i}$ (i=1,2) erotuksena

$$\vec{e}_{\hat{x}} = \frac{\vec{p}_{e_2} - \vec{p}_{e_1}}{\hat{L}}, \tag{9}$$

missä $\hat{L}$ on jänteen pituus lopputilassa. Kantavektori $\bar{e}_{\hat{y}}$ on alkutilassa tasossa, jonka määrittävät annettu suuntavektori ja palkin lokaali x-akseli. Siirtymien jälkeen palkin päiden solmuihin "kiinnitetyt" $\tilde{y}$-akselit saattavat osoittaa eri suuntiin, joten valitaan jäykän kappaleen $\hat{y}$-akselin suunnaksi näiden keskimääräinen suunta

$$\vec{e}_{\hat{y}} = \frac{(\vec{e}_{\tilde{y}_1} + \vec{e}_{\tilde{y}_2}) - ((\vec{e}_{\tilde{y}_1} + \vec{e}_{\tilde{y}_2}) \cdot \vec{e}_{\hat{x}})\vec{e}_{\hat{x}}}{\left|(\vec{e}_{\tilde{y}_1} + \vec{e}_{\tilde{y}_2}) - ((\vec{e}_{\tilde{y}_1} + \vec{e}_{\tilde{y}_2}) \cdot \vec{e}_{\hat{x}})\vec{e}_{\hat{x}}\right|}, \tag{10}$$

missä $0 + \vec{e}_{\tilde{y}_i} = \overline{q}_{s_i}(0 + \vec{e}_y)\tilde{q}_{s_i}$ (solmun i rotaation saava $\vec{e}_y$).

Solmun i rotaatiokvaternion $\overline{q}_{s_i}$ (kuva 2) muodostetaan rotaatiokomponenteista kaavojen (6),...,(8) mukaisesti. Elementtikoordinaatiston $\hat{z}$-akselin suunta saadaan oikean käden säännöllä $\vec{e}_{\hat{z}} = \vec{e}_{\hat{x}} \times \vec{e}_{\hat{y}}$.

ORIENTAATIOKVATERNIONIN MÄÄRITTÄMINEN

Orientaatiokvaternionit globaalista koordinaatistosta alku- ($\bar{q}_a$) ja lopputilan ($\bar{q}_e$) koordinaatistoon saadaan kantavektoreista muodostetun vastaavan orientaatiomatriisin $T_a = \left[\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right]$ ja $T_e = \left[\vec{e}_{\hat{x}}, \vec{e}_{\hat{y}}, \vec{e}_{\hat{z}}\right]$ avulla /6/.

$$|c_0| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + T_{ll} + T_{mm} + T_{nn}} \qquad \text{a)}$$

$$|c_l| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + T_{ll} - T_{mm} - T_{nn}} \qquad \text{b)} \qquad (11)$$

$$c_m c_n = \frac{1}{4}(T_{nm} + T_{mn}) \qquad \text{c)}$$

$$c_0 c_l = \frac{1}{4}(T_{nm} - T_{mn}) \qquad \text{d)}$$

Kaavoissa (11) T_{ij} tarkoittaa matriisin T (T_a tai T_e) alkiota i,j. Indeksit $l,m,n \in \{1,2,3\}$ on valittava siten, että permutaatiotensori $\varepsilon_{lmn} = 1$. Kvaternionin muodostamiseen tarvittavien Eulerin parametrien $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ laskentajärjestys valitaan siten, että neliöjuurilauseke ei mene pieneksi. Koska $|\bar{q}| = 1$, yksi parametreista on aina vähintään ½, ja tarvittava neliöjuurilauseke sekä muut parametrit voidaan laskea pelkäämättä tarkkuuden menettämistä.

On huomattava, että samaan lopputilaan päästään kahdella eri rotaatiolla $\mathrm{R}(\theta, \vec{e})$ ja $\mathrm{R}(-\theta, -\vec{e})$ (vastaavasti $\bar{q}$ ja $-\bar{q}$), joten muunnos matriisimuodosta Eulerin parametreiksi ei ole yksikäsitteinen. Yksikäsitteinen epäsingulaarinen muunnos vaatisi vähintään viisi parametria /7/, mutta siihen ei ole tässä tarvetta. Valitaan esimerkiksi aina parametrin c_0 etumerkki positiiviseksi, jolloin muiden parametrien etumerkit määräytyvät kaavojen (11)c ja (11)d mukaan.

Kuvan 2 jäykän kappaleen liikkeen kvaternion $\bar{q}_{ae}$ voidaan laskea siten, että ensin tehdään rotaatio alkuasemasta globaaliin koordinaatistoon $\tilde{q}_a$ ja sitten rotaatio globaalista koordinaatistosta loppuasemaan $\bar{q}_e$. Yhdistetyn rotaation kvaternion $\bar{q}_{ae}$ on tällöin $\bar{q}_{ae} = \bar{q}_e \tilde{q}_a$.

DEFORMAATIOITA AIHEUTTAVIEN ROTAATIOIDEN LASKENTA

Deformaatioita aiheuttavien muodonmuutosten kvaternion solmulle i $\bar{q}_{d_i}$ (i = 1,2) lasketaan solmukiertymäkvaternionin $\bar{q}_{s_i}$ (kaavat (6),...,(8)) ja kvaternionin $\bar{q}_{ae}$ avulla $\bar{q}_{d_i} = \bar{q}_{s_i}\tilde{q}_{ae}$. Tässä kaikkien käytettyjen kvaternionien vektorit on lausuttu globaalin koordinaatiston kantavektorien avulla, joten myös $\bar{q}_{d_i}$ on globaalissa koordinaatistossa. Usein pienet muodonmuutokset tarvitaan kuitenkin elementtikoordinaatistossa (loppuasema e). Kvaternion $\bar{q}_{d_i}$ voidaan transformoida elementtikoordinaatistoon $\bar{q}^{e}_{d_i}$ kaavan (5) avulla $\bar{q}^{e}_{d_i} = \tilde{q}_e \bar{q}_{d_i} \bar{q}_e$. Saadusta kvaternionista $\bar{q}^{e}_{d_i}$ palataan kaavoista (6),...,(8) ratkaistuilla yhtälöillä solmun rotaatiokomponentteihin, joista voidaan edelleen laskea muodonmuutoksiin liittyviä solmuvoimia jne.

ROTAATIOIDEN YHDISTÄMINEN

Kahdesta normeeratusta rotaatiokvaternionista $\bar{q}_1 = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) + \bar{\omega}_1$ ja $\bar{q}_2 = \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + \bar{\omega}_2$ tulon $\bar{q}_3 = \bar{q}_2\bar{q}_1$ avulla saadaan kaavalla (3) rotaatioiden $\vec{\theta}_1$ ja $\vec{\theta}_2$ summa $\vec{\theta}_3 = \theta_3 \frac{\vec{\omega}_3}{|\vec{\omega}_3|}$ (huom. ensin $\vec{\theta}_1$, sitten $\vec{\theta}_2$), missä

$$\cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 \text{ ja} \tag{12}$$

$$\vec{\omega}_3 = \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\vec{\omega}_1 + \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1. \tag{13}$$

Rotaatiovektorin pitämiseksi yksikäsitteisenä yli 180 asteen rotaatiossa käytetään kulman θ asemasta kulmaa θ', joka saadaan, kun kulman θ origoa siirretään kaavan (14) mukaisesti /8/

$$\theta' = \begin{cases} \theta & , \text{ jos } |\theta| \le \pi \\ 2\pi - \theta, & \text{jos } |\theta| > \pi \end{cases}. \tag{14}$$

Rotaatiokvaternionin skalaariosuus on tällöin aina positiivinen tai nolla.

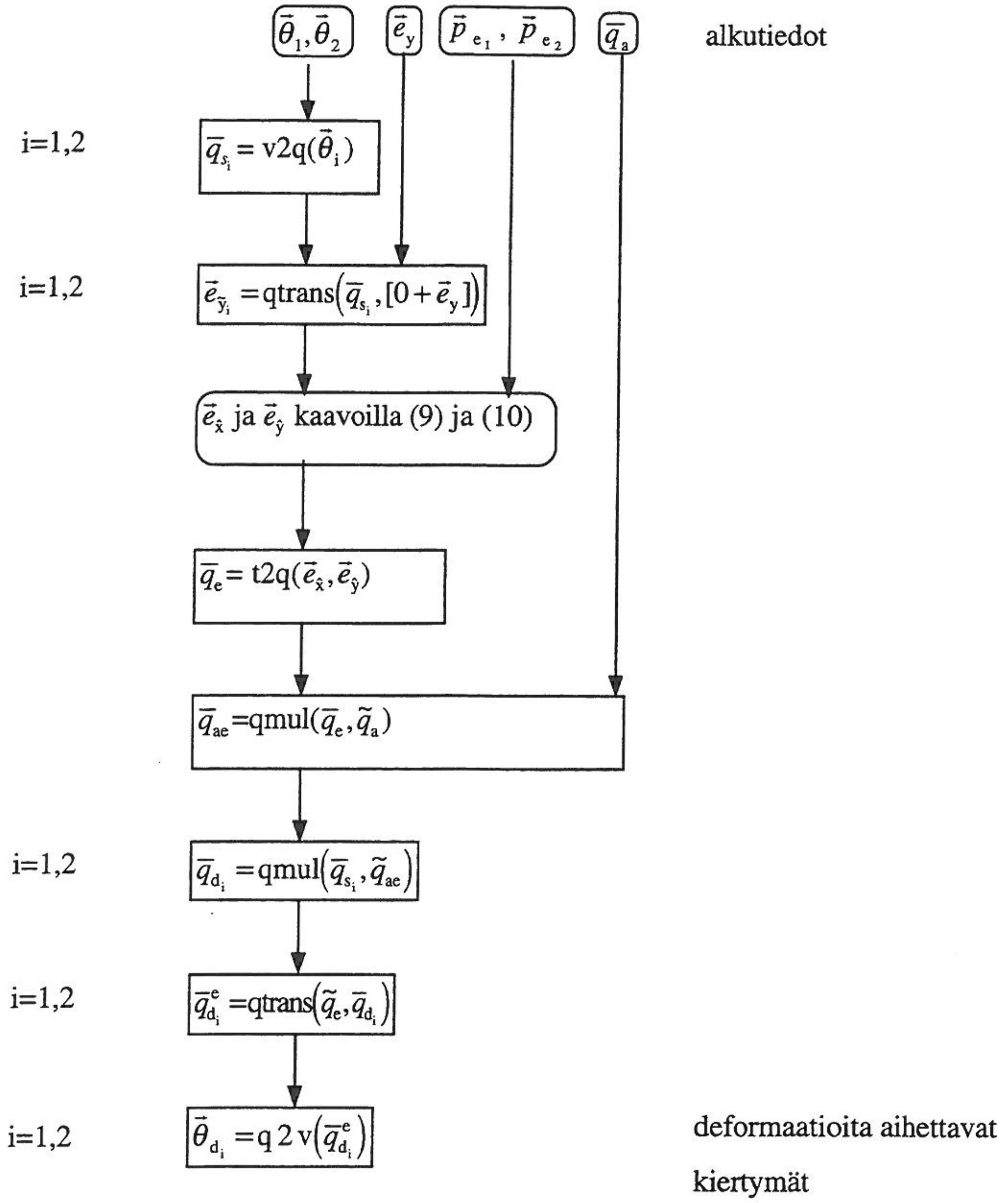
Kaavoista (12) ja (13) nähdään, ettei yhdistetyn rotaation kvaterniona laskettaessa tarvitse laskea uusia trigonometrisiä funktioita, vaan yhteen- ja kertolasku riittävät.

MUODONMUUTOSTEN JA JÄYKÄN KAPPALEEN LIIKKEEN EROTTAMINEN

Edellä esitetyllä sekanttimenetelmällä muodostetun jäykän kappaleen liikkeen ja pienten muodonmuutosten erottamisen laskenta voidaan esittää vuokaavion muodossa (kuva 3). Alkutietoina tarvitaan elementin solmun i kyseisen siirtymätilan kiertymävapausastekomponentit $\vec{\theta}_i$ (i=1,2), alkutilan *y*-akselin suuntavektori $\vec{e}_y$, siirtymätiedoilla päivitetyt paikkavektorit $\vec{p}_{e_i}$ ja tallennettu alkutilan orientaatiokvaternion $\overline{q}_a$.

Kuvassa 3 esiintyvät funktiot tekevät seuraavia operaatioita kvaternioilla:

- qmul$(\overline{q}_1,\overline{q}_2)$	kvaternionien $\overline{q}_1$ ja $\overline{q}_2$ kertolasku (kaava (3))
- qtrans$(\overline{q}_1,\overline{q}_2)$	kvaternionin $\overline{q}_2$ transformoiminen (kaava (4))
- t2q$(\vec{e}_{\hat{x}},\vec{e}_{\hat{y}})$	kvaternionin muodostaminen globaalissa koordinaatistossa kantavektoreiden avulla (kaavat (11))
- v2q$(\vec{\theta})$	kvaternionin muodostaminen kiertymäkomponenteista (kaavat (6),...,(8))
- q2v$(\overline{q})$	rotaatiopseudovektorin muodostaminen kvaternionista (ratkaistaan kaavoista (6),...,(8)).



Kuva 3. Vuokaavio deformaatioita aiheuttavien rotaatioiden erottamisesta.

Sekanttimenetelmässä elementin jäykän kappaleen liikkeen erottamisen jälkeen siirtymätila sisältää vain pieniä kiertymäkomponentteja sekä jänteen lyhenemisestä johtuvan aksiaalisen muodonmuutoksen $\Delta L = \hat{L} - L$, koska elementtikoordinaatiston $\hat{x}$-akseli kulkee tarkasti alku- ja loppusolmujen kautta.

PÄÄTELMÄT JA YHTEENVETO

Kvaternionalgebra yhdessä Eulerin parametrien kanssa on osoittautunut väkeväksi työkaluksi rotaatioiden käsittelyssä. Perinteiseen yhdeksän komponenttiseen matriisiesitykseen verrattuna vain neljä komponenttia vaativa kvaternionlaskenta on monesti tietokoneella tehokkaampaa ja käsin laskien havainnollisempaa.

Kvaternioilla esitetyt Eulerin parametrit eivät sisällä singulariteettipisteitä, mutta rotaatiomatriisin muunnos kvaternioniksi on kaksikäsitteinen. Kaksikäsitteisyydestä ei ole haittaa; kvaterniona laskettaessa on vain valittava jonkin parametrin etumerkki - esimerkiksi siten, että kiertokulma on aina enintään 180 astetta.

Myös dynamiikan tehtävän muodostaminen onnistuu hyvin, koska tarvittavat derivoinnit ovat helppoja kvaternioilla ja lausekkeet pysyvät yksinkertaisessa muodossa /2/. FEM-laskenta on lisäksi mahdollista muotoilla siten, että matriisimuotoja ei tarvita, ja näin laskenta nopeutuu ja muistin tarve vähenee.

LÄHTEET

1 *Holopainen, P.* Dynamiikan jatkokurssi. Opintomoniste. TTKK, 1993.

2 *Bottema O. & Roth B.* Theoretical Kinematics. Amsterdam 1979, North-Holland. 558 s.

3 *Iura, M.* Effects of coordinate system on the accuracy of corotational formulation for Bernoulli-Euler's beam. Int. J. Solids Structures, 31(1994)20, s. 2793-2806.

4 *Argyris, J.* An excursion into large rotations. Comput. Meth. appl. Mech. Engng 32(1982), s. 85-155.

5 *Outinen, H. & Pramila, A.* Lujuusopin elementtimenetelmän käyttö, Opintomoniste 110A, TTKK, 1986

6 *Spring, K.* Euler parameters and the use of quaternion algebra in the manipulation of finite rotations: A Review. Mechanics and Machine Theory. 21(1986)5, s. 365-373.

7 *Stuelpnagel, J.* On the parametrization of the threedimensional rotation group. SIAM Rev. 6(1964)4, s. 422-430.

8 Ansys Theory Ref. 000656. Ver 5.3. Seventh Edition. SAS IP, Inc. s. 3.11-3.15

Lassi Syvänen, DI

TTKK, Teknillinen mekaniikka

PL 589

33101 Tampere