

SIIRTYMÄ - JA VOIMASUUREIDEN VÄLITTYMINEN KESKENÄÄN ERILAISTEN AVOPROFIILIEIDEN JATKUVASSA PÄITÄISLIITOKSESSA

Risto Koivula

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 30
Nro 1, 1997, s. 25-46

Tiivistelmä

Kirjoituksessa mallinnetaan poikkileikkaukseltaan kolmesta suorakulmaisesti liittyvästä kaistasta (laipoista ja uumasta) muodostuvan avoprofiilisen 14-vapausasteisen palkkielementin siirtymä- ja voimasuureiden välittyminen ns. off-set-päittäisliitoksessa, jossa liittyvät profiilit ovat keskenään erilaisia tai ne on liitetty toisiinsa epäkeskeisesti. Jatkuvuus merkitsee sitä, että mitään vapausastetta ei ole nivelöity tai muuten vapautettu. Liitos on suora, ja molempien profiilien kaistat ovat akselien y ja z suuntaisia, mutta teoria voidaan yleistää kulma-, haara- ym. liitoksille.

Johdanto

Kirjallisuudessa on useissa lähteissä esitetty estetyin väännön huomioon ottava avoprofiilinen palkkielementti /2/, /8/. Myös vinoutumisvapausasteita huomioon otettavia palkkielementtejä on kehitetty /9/, /10/. Avoprofiilisille elementeille lukuun ottamatta kaksois- ja pistesymmetrisiä profiileita on ominaista, että niiden painopiste-, leikkaus- ja kiertymäakselit eivät yhtene. Ohjatusti deformoituvilla sauvoilla efektiiviset erikoisakselit riippuvat myös tuennasta. Tästä seuraa, että ns. keskeiset liitokset, joissa solmu voidaan ajatella yhdeksi, kahdeksi tai kolmeksi pisteeksi, joissa liittyvien elementtien toisiaan vastaavat erikoisakselit kohtaavat jatkuvien muodonmuutoksien, ovat avoprofiileilla poikkeus ja epäkeskeiset (muut) sääntö.

Liitosten epäkeskeisyyden vaikutuksen koko rakenteen voimasuurejakautumaan huomioon ottavan palkkirakenteiden elementtimenetelmän rungon on kehittänyt Ti-

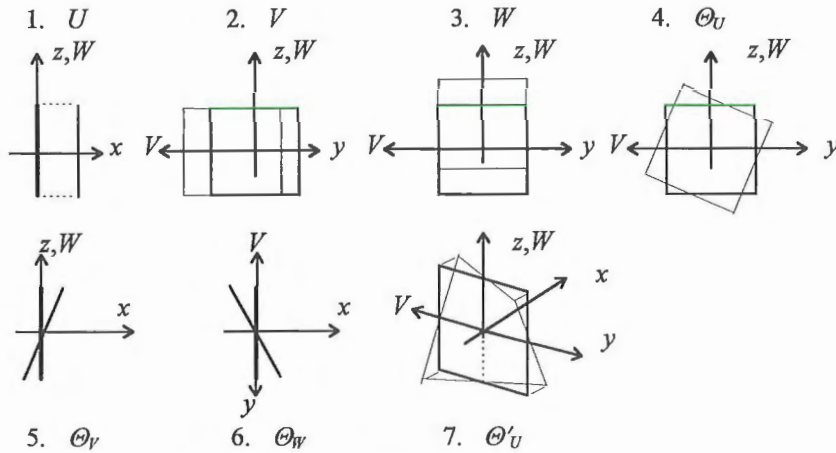
mo Björk lähteissä /2/ ja /6/. Tämä tutkimus liittyy menetelmän ja ohjelman AGIFAP /6/ edelleenkehittämiseen. Kirjoitus on jatkoa allekirjoittaneen artikkeliin 'Avoprofilisen sauvan ohjattu vääntö' /1/, jossa on täsmennetty tarvittavia peruskäsitteitä avoprofilisten sauvojen muodonmuutostilan mallintamiseksi ohjattuna ja myös liitoksissa, kuten tehdään tässäkin kirjoituksessa. Teorian kehittämiseksi edelleen olisi tutkittava mm. suureiden välittymistä muilla kuin tässä käsitellyillä poikkileikkauksilla. Useammasta kuin kolmesta suorasta osasta koostuvilla poikkileikkauksilla päätylevyliitoksen yli vaikuttava vääntymä aktivoi vinoutumisvapausasteita.

Tutkimus on suoritettu Lappeenrannan TKK:n konetekniikan osastolla professori Erkki Niemen johdolla.

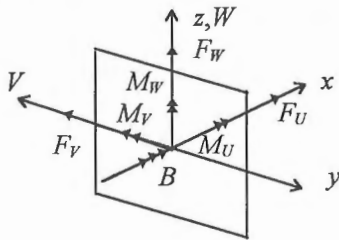
Oletukset

- 1) Sauvaelementit deformoituvat avoprofilisen ohutseinämäisen poikkileikkaukseltaan vinoutumattoman sauvan teorian mukaisesti, vapaasti tai ohjatusti.
- 2) Elementit on kiinnitetty toisiinsa poikittaisen levyn välityksellä. Tämän levyn liikemahdollisuudet ovat solmuisiirtymiä. Siirtymävapausasteita otetaan tässä tapauksessa huomioon 7 kappaletta:
 - pitenemä (etenemä) u , solmulla siirtymä U
 - taipumat v ja w , solmulla siirtymät V ja W
 - kiertymät (taipuman derivaatat) $\theta_v = -dw/dx$ ja $\theta_w = dv/dx$, solmulla Θ_V ja Θ_W
 - vääntökulma θ_u , solmulla Θ_U
 - vääntymä (vääntökulman derivaatta) θ'_u , solmulla Θ'_U

Voima- ja siirtymäkomponenttien etumerkit määräytyvät tavallisen oikeakätisen koordinaatiston u, v, w mukaan, mutta profiilin lokaalit paikkakoordinaatit x_i, y_i, z_i ja solmulinjakoordinaatit x, y, z vasenkätisen koordinaatiston mukaan. Koordinaatisto on tältä osin lähteiden /2/ ja /6/ mukainen. Lokaalit elementtisuuret ja -koordinaatit indeksoidaan pienellä kirjaimella, solmusuuret isolla. Solmussa liittyvien elementtien x_i -akselit ovat yhdensuuntaiset.



Kuva 1. Vapausasteita vastaavat solmuisiirtymät



Kuva 2. Vastaavat solmuvoimasuureet F_U , F_V , F_W , M_U , M_V , M_W ja B

3) Profiilit koostuvat kolmesta toisiinsa suorakulmaisesti liittyvästä y - ja z -akselien suuntaisesta kaistasta eli kahdesta yhdensuuntaisesta laipasta ja näitä kohtisuoraan yhdistävästä uumasta. Profiilin kaistat voivat myös ristetä (Kuva 5). y - ja z -akselit, joiden ei tarvitse olla pääjäyhyysakselit, ovat suunnaltaan muuttumattomat peräkkäin kytkettyjen elementtien suoralle jonolle, jonka ns. solmulinja määritellään tarkemmin tuonnempana. Tällöin profiilit myös omalta osaltaan sitovat solmulevyn toimimaan oletusten mukaisella tavalla. Liitoksen puolesta sopivat myös eräät muut profiilit kuten neljästä suorakulmaisesti liittyvästä kaistasta koostuvat kotelopalkit.

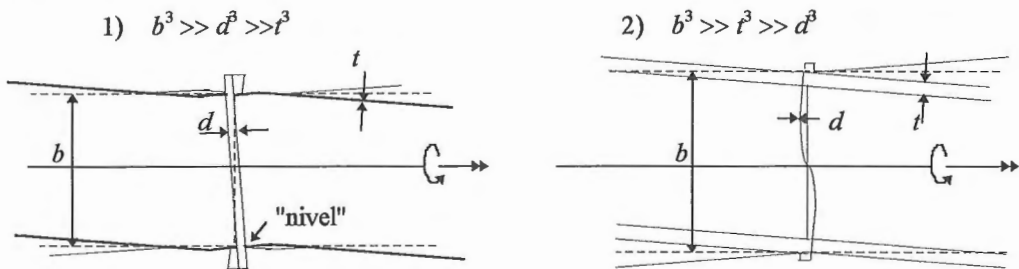
4) Vapausastetta Θ'_U vastaava solmudeplanaatiomuoto (kuva 1.7.) on

$$\Omega = -yz$$

1

Miinusmerkki on valittu positiivisen Ω :n lausekkeeseen, jotta I-palkki, jonka uuma on z -suuntainen (usein pystysuora) saisi positiivisesta Θ'_U :sta solmulla positiivisen lokaalin vääntymän θ'_{ui} . Elementtien painopisteiden etäisyys on riittävän pieni (esimerkiksi tietyssä suunnassa pienempi kuin maksimipäämitan puolikas profiileilla). Tarvittaessa liitos on vahvistettu y - ja z -suuntaisin rivoin siten, että liitoslevyn muodonmuutos voidaan katsoa olevan muotoa 1.

5) Liitoslevyn vääntöjäykkyyden GI_t katsotaan olevan pieni verrattuna profiilin kaistojen taivutusjäykkyyksiin keskipisteensä ympäri vahvemmassa suunnassa, mutta sen laattataivutusjäykkyyden katsotaan olevan suuri verrattuna kaistojen laattataivutusjäykkyyksiin keskiviivansa suhteen. Tämä vastaa tilannetta, jolloin kaistat liittyvät liitoslevyyn sarananivelin. Profiilin seinämä ei ota vastaan seinämän keskiviivan suuntaisia pistemomenteja. Tutkimme siis toistaiseksi vain kuvan 3. tapausta 1). Jäykkyydet ovat suurin piirtein verrannollisia oheisten mittojen kolmanteen potenssiin. Liitoslevyn vääntöjäykkyys GI_t ei vaikuta vääntödeplanaation muotoon, mutta sen maadoittava vaikutus bimomenttiin voidaan ottaa huomioon jäykkyyismatriisissa.



Ohutseinämäinen profiili, liitoslevy

Paksuseinämainen profiili, "solmulevy"

Kuva 3. Liitoslevyn ja seinämien paksuuksien vaikutus liitoksen toimintaan

Yleistetty sektorialinen koordinaatti $\Omega(y_i, z_i)$

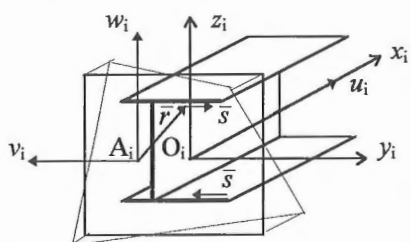
Ohutseinämäisen poikkileikkauksen yleistetty sektorialinen koordinaatti $\Omega(y_i, z_i)$ on lokaali siirtymäsuure, joka fysikaalisesti merkitsee sauvan päähän kiinnitetyn poikittaisen laatan, johon profiilin kaistat liittyvät sarananivelin keskiviivaltaan.

(laatta) taipumaa $u_i(y_i, z_i)$, kun sauvassa vastaavalla kohdalla vaikuttaa vääntymä $\theta_i'(x) = 1$.

Poikkileikkauksen keskiviivalla yleistetty sektoriaalinen koordinaatti yhtenee "tavallisen" sektoriaalisen koordinaatin kanssa:

$$\Omega_i(s) = \omega_i(s) = \bar{i} \cdot \int_s \bar{r} \times d\bar{s} = - \int_s h_i(s) ds, \quad 2$$

$h_i(s)$ on sektoriaalisesta navasta A_i seinämän keskiviivan tangentille vedetyn normaalin pituus ja positiivinen, jos s kiertää vastapäivään A_i :n ympäri katsottaessa x :n positiivisesta suunnasta. Miinusmerkki johtuu ristitulon määritelmästä vasenkätisessä koordinaatistossa.



$A_i = (a_{yi}, a_{zi})$ on sektoriaalinen napa, vapaasti deformoituvalla sauvalla leikkauksenkeskiö
 $O_i = (0,0)$ on origo, vapaasti deformoituvalla sauvalla painopiste

Kuva 4. Yleistetty sektoriaalinen koordinaatti

Yleistetty sektoriaalinen koordinaatti on sauvan pään bimomentin vaikutuspinta sauvan päässä vaikuttavalle x -suuntaiselle pistekuormalle /3/, /1/.

Vastaisuudessa Ω_i merkitsee aina sauvan lokaalista yleistettyä sektoriaalista koordinaattia (jos indeksi puuttuu tai on iso kirjain, se merkitsee solmudeplanaatiota 1) ja ω_i tavallista ω :aa seinämän alueella arvoltaan keskiviivan mukaisena.

Kun päätylevyn pisteeseen (y_p, z_p) vaikuttaa pistekuorma P_x , niin se aiheuttaa levyn tasossa bimomentin

$$B = P_x \Omega_i(y_p, z_p) \quad 3$$

Kun päätylevylle vaikuttaa x -suuntainen kuormitusjakautuma $p_x(y_i, z_i)$, niin se aiheuttaa poikkileikkaukselle bimomentin

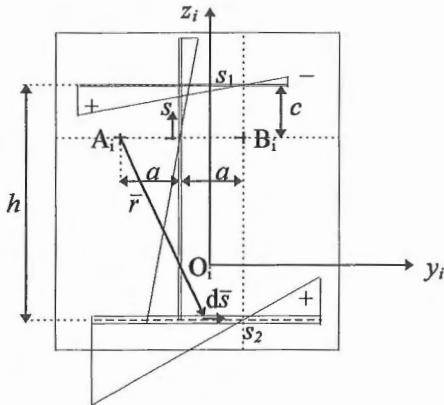
$$B = \iint_{A_{iwy}} p_x \Omega_i dA \quad 4$$

Oletusten mukaisille poikkileikkauksille kuvan 4. mukaisessa koordinaatistossa, jonka y_i - ja z_i -akseleiden suuntaisten suorien voidaan deformaatioissa katsoa py-

syvän suorina, yleistetyn sektorialisen koordinaatin lauseke on muotoa

$$\Omega_i(y_i, z_i) = a_i y_i z_i + b_i y_i + c_i z_i + d_i \quad 5$$

Vakioiden määrittämiseksi tarkastellaan sektorialista koordinaattia $\omega_i(s)$ mahdollisimman yleisellä oletusten mukaisella poikkileikkauksella.



Kuva 5. Profililinjalla $\omega_i(s) - \omega_i(0) = \Omega_i(y_i, z_i) - \omega_{0i}$

Asetetaan sektorialisen koordinaatin s 0-kohta pisteeseen, jossa sektorialisen navan kautta uumalle asetettu normaali leikkaa uuman keskiviivaa. Navan etäisyyttä uumasta merkitään a :lla. Lasketaan 2:n mukaan sektorialisen koordinaatin arvo laipoilla (tai niiden jatkeilla) uuman vastakkaisella puolella etäisyydellä a .

$$\omega_i(s_1) - \omega_i(0) = -\int_0^c -ads - \int_0^a cds = 0 \quad , \quad \omega_i(s_2) - \omega_i(0) = -\int_0^{-(h-c)} -ads - \int_0^a (h-c)ds = 0 \quad 6$$

Havaitaan, että $\Omega_i(y_i, z_i) - \omega_i(0) = 0$ kuvaan 5. katkoviivalla merkityillä y_i - ja z_i -akseleiden suuntaisilla suorilla, jotka risteävät pisteessä $B_i = (b_{yi}, b_{zi})$, joka sijaitsee sektorialisen navan $A_i = (a_{yi}, a_{zi})$ kanssa symmetrisesti uumaan nähden. Tämä lainalaisuus ei riipu siitä, onko A_i myös profiilin leikkauskeskiö.

Kuvan 5. mukaisella poikkileikkauksella koordinaatistossa $O_i y_i z_i$:

$$b_{yi} = a_{yi} + 2a, \quad b_{zi} = a_{zi} \quad 7$$

$$\Omega_i(y_i, z_i) = -(y_i - b_{yi})(z_i - b_{zi})\delta_i + \omega_{0i} \quad 8$$

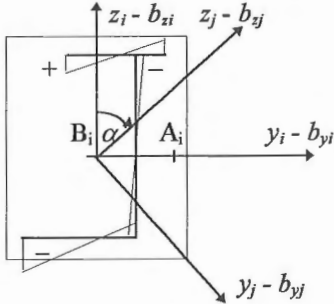
$$\omega_{0i} = \frac{\delta_i}{A_i} \iint_{A_i} (y_i - b_{yi})(z_i - b_{zi}) dA = \left(\frac{I_{yzi}}{A_i} + b_{yi} b_{zi} \right) \delta_i \quad 9$$

$$\delta_i = +1 \quad 10$$

A_i on elementin poikkipinta-ala, I_{yzi} on tulomomentti painopisteen suhteen.

Ω_i :n kierto

Suoritetaan koordinaatiston kierto pisteessä B_i kaavan 8 mukaiselle Ω_i :lle.



$$\begin{cases} y_j - b_{yj} \\ z_j - b_{zj} \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} y_i - b_{yi} \\ z_i - b_{zi} \end{cases} \quad 11$$

$$\begin{cases} y_i - b_{yi} \\ z_i - b_{zi} \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} y_j - b_{yj} \\ z_j - b_{zj} \end{cases} \quad 12$$

Kuva 6. Ω_i :n kierto

Ω_i voidaan nyt lausua (elementin j) koordinaatistossa j :

$$\begin{aligned} \Omega_i(y_j, z_j) &= -[(y_j - b_{yj}) \cos \alpha + (z_j - b_{zj}) \sin \alpha] \cdot [-(y_j - b_{yj}) \sin \alpha + (z_j - b_{zj}) \cos \alpha] + \omega_{oi} \\ &= \frac{1}{2} [(y_j - b_{yj})^2 - (z_j - b_{zj})^2] \sin 2\alpha + (y_j - b_{yj})(z_j - b_{zj}) \cos 2\alpha + \omega_{oi} \end{aligned} \quad 13$$

Tämän kaavan avulla voidaan laskea voimamenetelmällä likimääräisesti voima-
suureiden välittymistä profiililta toiselle liitoksissa, joissa oletusten mukaiset profiilit
on liitetty yhteen kulmassa α , $0 < \alpha < \pi/2$ toisiinsa nähden.

Tällä kertaa tässä kaavassa on kiinnostavinta tapaus, jossa $\alpha = \pi/2$, jolloin

$$\Omega_i(y_j, z_j) = (y_j - b_{yj})(z_j - b_{zj}) + \omega_{oj}, \text{ ja } \delta_i = -1, \omega_{oj} = \omega_{oi} = \omega_0 \quad 14$$

Kaikille profiileille on siis olemassa sekä positiivisen että negatiivisen δ_i :n omaava sektoriaalinen koordinaatti.

$$\delta_i = \begin{cases} +1, \text{ kun } z_i \text{ on uuman suuntainen} \\ -1, \text{ kun } y_i \text{ on uuman suuntainen} \end{cases} \quad 15$$

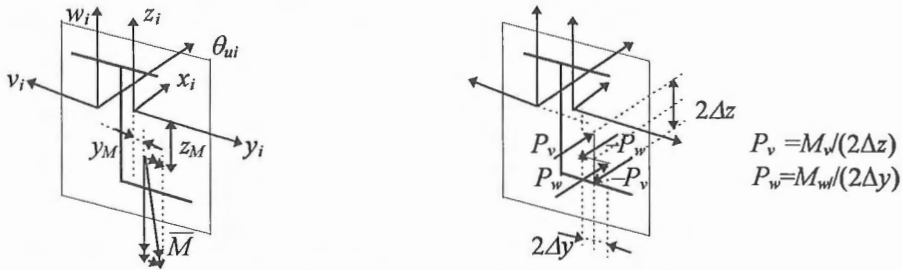
Liittyessään solmuun, jossa on vääntymä Θ'_U , elementti saa vääntymän

$$\theta'_{ui} = \delta_i \Theta'_U \quad 16$$

Kun vastakkaisen δ_i :n omaavat ω_i :t yhdistetään solmussa, niin vääntymä θ'_u
ja bimomentti B vaihtavat solmussa merkinsä. Solmussa voi olla negatiivinen
 Θ'_U ja B , vaikka nämä suureet kaikilla solmuun liittyvillä sauvoilla olisivat posi-
tiivisia tai päinvastoin.

Solmulevyllä yz -tasossa tai kohtisuoraan poikkileikkauksen seinämälle vaikuttavan pistemomenttikuorman aiheuttama bimomentti

Solmulevyn pisteeseen $R = (y_M, z_M)$ vaikuttava pistemomenttikuorma $\bar{M} = M_y \bar{j} + M_z \bar{k} = -M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$ voidaan aina jakaa kuvan 8. mukaan kahdeksi pistevoimapariksi, joiden momenttivarret Δy ja $\Delta z \rightarrow 0$.



Kuva 7. Pistemomentin jako ekvivalenteiksi pistekuormiksi

$$\begin{aligned} \Delta B &= \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \left\{ \frac{M_v}{2\Delta z} [\Omega_i(y_M, z_M + \Delta z) - \Omega_i(y_M, z_M - \Delta z)] + \frac{M_w}{2\Delta y} [\Omega_i(y_M + \Delta y, z_M) - \Omega_i(y_M - \Delta y, z_M)] \right\} \\ &= M_v \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i}(y_M, z_M) + \frac{\partial \Omega_i}{\partial y_i}(y_M, z_M) = -M_v(y_M - b_{yi}) \delta_i - M_w(z_M - b_{zi}) \delta_i \\ &= -[M_v(y_M - b_{yi}) + M_w(z_M - b_{zi})] \delta_i \end{aligned} \quad 17$$

Kun $y_M = b_{yi}$ ja $z_M = b_{zi}$, niin $\Delta B = 0$, joten pisteeseen B_i vaikuttavan yz -tason pistemomentin vaikutuksesta sauva taipuu vääntymättä.

Yleistetyn sektorialaisen koordinaatin $\Omega_i(y_i, z_i)$:n gradientin $\nabla \Omega_i$ nollapisteiden (satulapisteiden) B_i ura näyttäisi siis muodostavan poikkileikkauksen erikoisakselin, jolle kohdistuvat taivutusmomentti- ja bimomenttikuormat ovat sikäli ortogonaalisia, että ne eivät tee virtuaalista työtä toistensa vastinsiirtymissä.

Lähteessä /3/ on todistettu, että kun mielivaltaisen avoprofilisen jäykkäseinä-mäisen poikkileikkauksen seinämän keskiviivalla olevaan pisteeseen (y_M, z_M) vaikuttaa pistemomentti $\bar{M} = M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$, niin se aiheuttaa bimomentin muutoksen

$$\Delta B = -\bar{r} \cdot \bar{M} = -(y_M - a_{yi}) M_y - (z_M - a_{zi}) M_z = (y_M - a_{yi}) M_v - (z_M - a_{zi}) M_w \quad 18$$

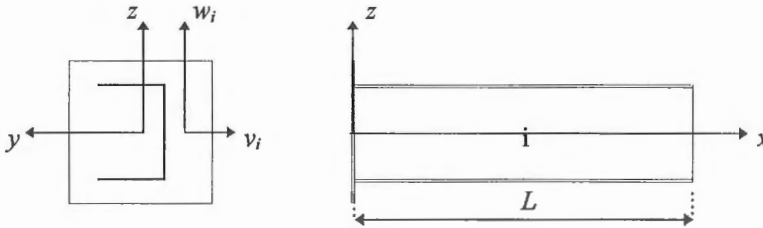
Miinusmerkki johtuu vasenkätisestä koordinaatistosta. Kaavat 17 ja 18 antavat seinämää vastaan kohtisuoran pistemomentin vaikutukselle saman tuloksen. Sen si-

jaan laipalle keskiviivan suunnassa vaikuttavan pistemomentin tapauksessa syntyy itseisarvoltaan $2Mc$ suuruinen ero, jossa c on vaikutuspisteen etäisyys uumasta. Koska seinämän ei katsota ottavan laattana vastaan momenttikuormaa (oletus 5), liitoslevy siirtää momentin kaksitukisena palkkina laippojen normaalijännityksiksi. Kaava 18 ei päde seinämän keskiviivan ulkopuolella vaikuttavalle pistemomentille.

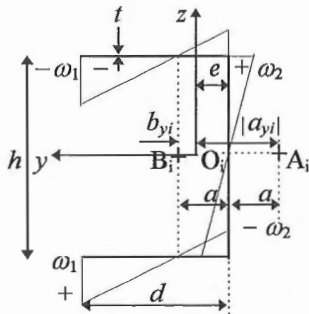
Kiertymien ja vääntymän yhteensovittaminen solmulla

Lähteiden /1/, /2/, /3/ ja /5/ mukaan poikkileikkaus kiertyy väännössä vääntöakselinsa eli taipuma-akselinsa ympäri, joka vapaasti deformoituvalla sauvalla yhtyy leikkausakseliin. Taipumat v_i ja w_i ja kiertymät $dv_i/dx = \theta_{vi}$, $dw_i/dx = -\theta_{wi}$ mitataan siis vääntöakselilta. Laskettaessa siirtymä- ja voimasuureiden välittymistä elementiltä toiselle on kiertymiin θ_{vi} ja θ_{wi} kuitenkin päästävä käsiksi poikkileikkauksen x -suuntaisten $u(y_i, z_i)$ -siirtymien y_i - ja z_i -derivaattojen avulla, joihin vaikuttavat kiertymien lisäksi $\Omega_i(y_i, z_i)$:n kaltevuudet vääntöakselin kohdalla, kun $\theta_{wi}' \neq 0$.

Tarkastellaan asiaa mahdollisimman pelkistetyn esimerkin avulla. Solmulinja on sijoitettu poikkileikkauksen painopisteeseen, joten $y_i = y$ ja $z_i = z$.



Kuva 8. Uloke-elementti



$$e = \frac{d^2}{2d+h} \quad a = \frac{3d^2}{6d+h} \quad t = \text{vakio}$$

$$\omega_1 = ah/2 \quad \omega_2 = h(d-a)/2$$

$$a_{yi} = -(a+e) \quad a_{zi} = 0$$

$$\Omega_i(y_i, z_i) = -y_i z_i + (a-e)z_i, \quad 19$$

josta saadaan kaavojen 8, 9 ja 14 mukaan

$$b_{yi} = a - e \quad b_{zi} = 0$$

$$\omega_o = 0 \quad \delta_i = +1$$

Kuva 9. Symmetrisen U-profiilin erikoispisteet ja $\Omega_i(y_i, z_i)$

Oletetaan solmulevyllä vaikuttavaksi siirtymätila $\theta'_{ij} = 1$ muiden solmulevyn siirtymäsuureiden ollessa $= 0$. Tällöin myös elementin pään 1 $\theta'_{ui1} = 1$ johtuen siirtymäkenttien (yz -termin) yhteensopivuuden vaatimuksesta, $v_{i1} = w_{i1} = \theta_{ui1} = 0$.

Tasapainosyistä

$$M_v \equiv M_w \equiv M_u \equiv F_v \equiv F_w \equiv F_u \equiv 0, \quad 20$$

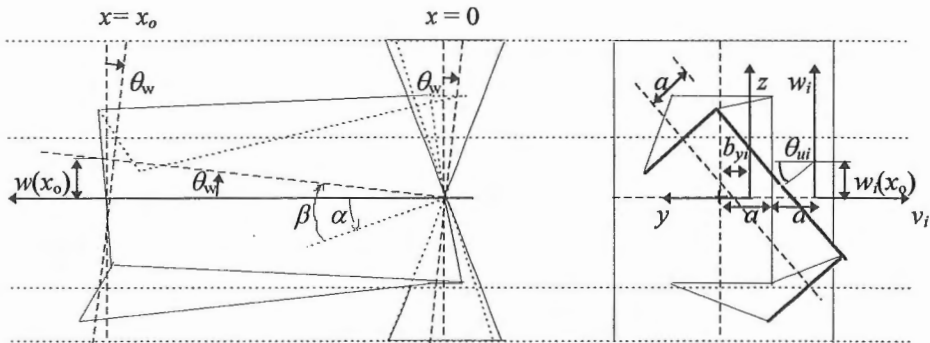
koska mikään kiinnitys ulokkeen toisessa päässä tai kuomitukset eivät niitä ole ottamassa vastaan. Tällöin taipumat ovat suoraviivaisia ja kiertymät vakioita.

$$v_i = x \theta_{vi}(0), \quad w_i = -x \theta_{wi}(0). \quad 21$$

Pitenemä $u(x) \equiv 0$, johon vapausasteeseen palataan seuraavassa luvussa.

Kun vielä oletetaan, että $kL \gg 1$, eli $L \rightarrow \infty$, niin differentiaaliyhtälölle $\theta^{(4)} - k^2 \theta'' = 0$ saadaan yksinkertainen ratkaisu

$$\theta_i(x) = \frac{1}{k} (1 - e^{-kx}), \quad \theta'_i(x) = e^{-kx}, \quad B_i(x) = -EI_w k e^{-kx} \quad 22$$



Kuva 10. Kuvien 8. ja 9. uloke-elementin muodonmuutos siirtymäkuormasta

$$\theta(0) = 0$$

Herää kysymys, minkä tiettyjen solmulevyn akselien kaltevuudet "edustavat" elementin pään 1 kiertymiä $\theta_{vi1} = -\frac{\partial w_i}{\partial x}(0, \alpha_{yi}, \alpha_{zi})$ ja $\theta_{wi1} = \frac{\partial v_i}{\partial x}(0, \alpha_{yi}, \alpha_{zi})$.

$\theta'_i(x)$:n vaimentuessa x :n kasvaessa akselin $y = b_{yi} = a - e$, $z = b_{zi} = 0$ kaltevuudet säilyvät vakioina:

$$\frac{\partial u_i}{\partial y}(x, a - e, 0) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial y}(0, a - e, 0) = \frac{\partial U}{\partial y}(a - e, 0) = \frac{\partial \Omega}{\partial y}(a - e, 0) = 0 \quad \text{ja} \quad 23$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial z}(x, a - e, 0) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial z}(0, a - e, 0) = \frac{\partial U}{\partial z}(a - e, 0) = \frac{\partial \Omega}{\partial z}(a - e, 0) = -(a - e) \quad 24$$

Merkinnät $u(x, y_i, z_i)$, $v(x, y_i, z_i)$, $v_{ii}(y_i, z_i)$, $U(y, z)$ jne. merkitsevät sen akselin siirtymä, joka on argumenteissa annettu. Ellei argumentteja ole annettu, u_i on poikkileikkaukselle tasan jakautunut pitenemä, v_i vääntöakselin y -taipuma jne.

"Äärettömydessä" kyseessä on jäykän kappaleen liike, joten

$$\frac{\partial u(x, y_i, z_i)}{\partial y_i} = \frac{\partial v(x, y_i, z_i)}{\partial x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u(x, y_i, z_i)}{\partial z_i} = -\frac{\partial w(x, y_i, z_i)}{\partial x}, \quad 25$$

21:sta, 23:stä, 24:stä ja 25:sta seuraa, että

$$\theta_{vi} \equiv e - a \quad \text{ja} \quad \theta_{wi} \equiv 0 \quad \forall x. \quad 26$$

Vääntöakselin kiertymät $\theta_v = -dw_i/dx$ ja $\theta_w = dv_i/dx$ ovat samat kuin sauvan sellaisen akselin kaltevuudet $\partial u(x, y_i, z_i)/\partial y_i$ ja $\partial u(x, y_i, z_i)/\partial z_i$, jolla $\partial \Omega_i/\partial y_i = 0$ ja $\partial \Omega_i/\partial z_i = 0$, eli kaavan 8. mukaan akselin $y_i = b_{yi}$, $z_i = b_{zi}$ kaltevuudet.

Tämä on yleinen lainalaisuus, joka voidaan helposti todentaa kirjoittamalla näkyviin lähteen /1/ ja tämän luvun alussa esitetyn perusteella elementin poikkileikkakseen x_i kuvitellun liitoslevyn pisteiden etenemän lauseke

$$u(x_i, y_i, z_i) = u_i(x) + \frac{\partial v(x_i, a_{yi}, a_{zi})}{\partial x_i} y_i - \frac{\partial w(x_i, a_{yi}, a_{zi})}{\partial x_i} z_i + \theta'_{wi}(x) \Omega_i(y_i, z_i) \quad 27$$

Derivoimalla tämä y_i :n suhteen ja sijoittamalla $y_i = b_{yi}$, $z_i = b_{zi}$ sekä vastavalla tavalla z_i :n suhteen saadaan tärkeät kaavat

$$\frac{\partial u}{\partial y_i}(x_i, b_{yi}, b_{zi}) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_i, a_{yi}, a_{zi}) = \frac{dv_i(x_i)}{dx_i} = \theta_{vi}(x_i) \quad 28$$

$$\frac{\partial u}{\partial z_i}(x_i, b_{yi}, b_{zi}) = -\frac{\partial w}{\partial x_i}(x_i, a_{yi}, a_{zi}) = -\frac{dw_i(x_i)}{dx_i} = \theta_{wi}(x_i) \quad 29$$

Näillä kaavoilla on perustava merkitys laskettaessa siirtymä- ja voimasuureiden välittymistä avoprofiiliselta sauvaelementiltä toiselle päittäisiitoksissa.

Kuvassa 9. on piirretty katkoviivalla leikkausakselin ja yz -tason akselin

$y_i = a - e$ asema deformoituneessa ja deformoitumattomassa tilassa sekä pisteviivalla solmulevyn normaalin kaltevuuskulma $\alpha = e + a$ leikkausakselin kohdalla.

Vääntöakseli muodostaa deformoituneen solmulevyn normaalin kanssa kulman

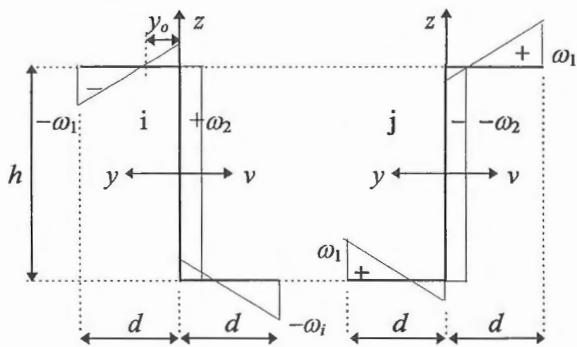
$$\beta = \theta'_{i1}(a_{y_i} - b_{y_i}) = -2a\theta'_{i1} = -2a \quad 30$$

Piste B_i , jossa $\nabla\Omega_i = 0$, määrittelee siis poikkileikkaukseltaan oletusten mukaiselle elementille akselin, jolla deformoituneen liitoslevyn kaltevuudet $\partial u/\partial y_i$ ja $\partial u/\partial z_i$ ovat riippumattomia väännöstä ja samansuuruiset kuin taipuman x -derivaatat eli kiertymät. Kaavan 17. mukaan se on myös akseli, jolta poikkileikkaustason pistemomentilla kuormitettaessa sauva taipuu vääntymättä. Akselia voitaisiin analogisesti taipuma-akselin kanssa nimittää kiertymäakseliksi.

Pitenemän ja vääntymän yhteensovittaminen solmulla

Tarkastellaan edellisen kohdan mukaista esimerkkiä, jossa vääntöhoikka ulokelementi ($kL \gg 1$) liittyy solmuun, jossa $\theta'_U = 1$ muiden siirymien ollessa $= 0$. Tällöin $\theta_{ui}(x)$:n, $\theta'_{ui}(x)$:n ja $B_i(x)$:n kaavat 22 ovat voimassa.

Vaihdetaan poikkileikkaukseksi tasalaippainen "vastapäivään kiertävä" Z-profiili. Verrataan samalla Z-profiiliin, jonka laipat osoittavat myötöpäivään.



$$t = \text{vakio}$$

$$a_{y_i} = b_{y_i} = 0$$

$$a_{z_i} = b_{z_i} = 0$$

$$\omega_1 = \frac{hd}{2} - \frac{1}{2} \frac{hd^2}{h+2d}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \frac{hd^2}{h+2d} = \omega_0$$

$$y_0 = \frac{d^2}{h+2d}$$

$$\Omega_i(y_i, z_i) = -y_i z_i + \omega_0 \quad \Omega_j(y_j, z_j) = -y_j z_j - \omega_0$$

$$\omega_{oi} = \omega_0$$

$$\omega_{oj} = -\omega_0$$

$$\delta_i = +1$$

$$\delta_j = +1$$

31,32

Kuva. 11. Oikea- ja vasenkätisen Z-profiilin $\Omega_i(y_i, z_i)$.

Asetetaan solmulinja painopisteakselille (joka on nyt myös leikkaus- ja kiertymäakseli). Kuten edellisessäkin esimerkissä, tasapainosyistä

$$M_v \equiv M_w \equiv M_u \equiv F_v \equiv F_w \equiv F_u \equiv 0 \quad 33$$

$$\theta_{vi} = \Theta_v(0,0) = \frac{\partial \Omega}{\partial z}(0,0) = 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial y}(0,0) = \Theta_w(0,0) = \theta_{wi} \quad 34$$

$$\theta_v \equiv \theta_w \equiv v \equiv w \equiv 0 \quad 35$$

$$du_i(x)/dx = 0 \Rightarrow u_i(x) = \text{vakio} \quad 36$$

Sauvan kokonaismuodonmuutos on siis

$$u(x, y_i, z_i) = u_i(x) + \Omega(y_i, z_i) \theta_{ui}'(x), \text{ josta} \quad 37$$

$$u(0, y_0, h/2) = U(y_0, h/2) = \Omega(y_0, h/2) = -y_0 h/2$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{hd^2}{h+2d} = -\omega_0 = \text{vakio} = u_i(x) \quad 38$$

Tämä esimerkki osoittaa selkeästi (ohjaamattoman) u_i :n luonteen keskimääräisenä (tasan jakautuneena) pitenemänä poikkileikkauksella, ei esimerkiksi painopisteakselin pitenemänä.

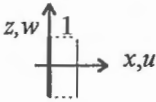
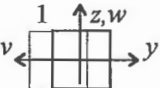
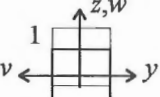
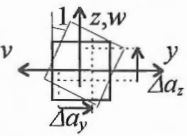
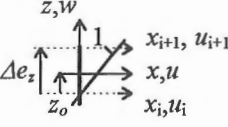
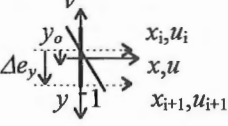
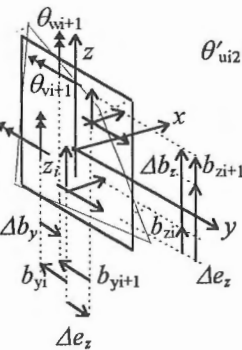
Itse asiassa yksikään avoprofiilisten sauvojen elementtimenetelmän seitsemästä perussuureesta $u, v, w, \theta, v', w', \theta'$ ei ilmennä välittömästi "kimmoviivaksi" usein katsotun painopisteakselin liikkeitä, niitä ei mitata yleiselle sauvalle tältä akselilta.

Painopiste on voimasuureiden erikoispiste.

Siirtymien muunnosmatriisit

Annetaan elementin i päälle 2 vuoron perään pakkosiirtymät $u_{i,2} = 1, v_{i,2} = 1, w_{i,2} = 1, \theta_{ui,2} = 1, \theta_{vi,2} = 1, \theta_{wi,2} = 1$ ja $\theta'_{ui,2} = 1$ muiden siirtymien ollessa nollia. Tällöin saadaan muodonmuutosfunktioiden $1, Y_i, Z_i$ ja Ω_i avulla elementin $i+1$ päälle 1 sekä liitoslevyn ja solmulinjan (y_0, z_0) siirtymät.

Y_i ja Z_i merkitsevät pintoja $y_i - x_i = 0, z_i - x_i = 0$, eli taivutusmomenttien vaikutuspintoja aksiaalisille pistekuormille.

Siirtymä	Elementin i pää 2	Elementin i + 1 pää 1	Solmu
	$u_{i,2} = 1$	$u_{i+1,1} = 1$	$U = 1$ 39a,b
	$v_{i,2} = 1$	$v_{i+1,1} = 1$	$V = 1$ 40a,b
	$w_{i,2} = 1$	$w_{i+1,2} = 1$	$W = 1$ 41a,b
	$\theta_{ui,2} = 1$	$\theta_{ui+1,1} = 1$ $v_{i+1,1} = -(a_{zi+1,i} - a_{zi}) = -\Delta a_z$ $w_{i+1,1} = -(a_{yi+1,i} - a_{yi}) = -\Delta a_y$	$\theta_U = 1$ $V = -(z_o - a_{zi})$ $W = -(y_o - a_{yi})$ 42a,b
	$\theta_{vi,2} = 1$	$\theta_{vi+1,1} = 1$ $u_{i+1,1} = e_{zi+1,i} - 0 = \Delta e_z$	$\theta_V = 1$ $U = z_o$ 43a,b
	$\theta_{wi,2} = 1$	$\theta_{wi+1,1} = 1$ $u_{i+1,1} = e_{yi+1,i} - 0 = \Delta e_y$	$\theta_W = 1$ $U = y_o$ 44a,b
	$\theta'_{ui2} = 1$	$\theta'_{ui+1,1} = \delta_i \delta_{i+1}$	$\theta'_U = \delta_i$
		$\theta_{vi+1,1} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial z_i} (b_{yi+1,i}, z_i) = -\Delta b_y \delta_i$	$\theta_V = (y_o - b_{yi}) \delta_i$
		$\theta_{wi+1,1} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial y_i} (y_i, b_{zi+1,i}) = -\Delta b_z \delta_i$	$\theta_W = -(z_o - b_{zi}) \delta_i$
		$u_{i+1,i} = \Omega_i(\Delta e_y, \Delta e_z) - \Omega_{i+1}(0,0) \delta_i \delta_{i+1}$	
		$= -(\Delta e_y - b_{yi})(\Delta e_z - b_{zi}) \delta_i + \omega_{oi} + b_{yi+1} b_{zi+1} \delta_i - \omega_{oi+1} \delta_i \delta_{i+1}$ 45a	
		Solmu: $U = \Omega_i(y_o, z_o) = -(y_o - b_{yi})(z_o - b_{zi}) \delta_i + \omega_{oi}$ 45b	

Kuva 12. Siirtymäsuureet

$a_{yj,i}$ ja $a_{zi,i}$ ovat elementin j leikkauskeskiön, $b_{yj,i}$ ja $b_{zi,i}$ "kiertymäkeskiön" sekä $e_{yj,i}$ ja $e_{zi,i}$ painopisteen paikat elementin i poikkileikkauskoordinaatistossa.

Kun sekaannuksen vaaraa ei ole, pyritään ylimääräisiä indeksejä jättämään pois, esim. $a_{y_i,i} = a_{y_i}$, $b_{z_{i+1},i+1} = b_{z_{i+1}}$ jne.

$\Delta a_y = a_{y_{i+1},i} - a_{y_i} = a_{y_{i+1}} - a_{y_i,i+1} = a_{y_{i+1}} + \Delta e_y - a_{y_i}$, $\Delta e_y = e_{y_{i+1},i} - 0 = e_{y_{i+1},i} = -e_{y_i,i+1}$ jne. Kaavoissa esiintyy siis kahdessa eri koordinaatistossa mitattuja suureita, esim. a_{y_i} , b_{y_i} , $a_{y_{i+1}}$ ja $b_{y_{i+1}}$. Tästä ongelmasta päästään eroon tuonnempana.

Yhtälöistä 39a - 45a saadaan matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_u \\ \theta_v \\ \theta_w \\ \theta'_u \end{Bmatrix}_{i+1,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta e_z & \Delta e_y & [b_{y_{i+1}}b_{z_{i+1}} - (b_{y_i} - \Delta e_y)(b_{z_i} - \Delta e_z)]\delta_i \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta a_z & 0 & 0 & +\omega_{oi} - \omega_{oi+1}\delta_i\delta_{i+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta a_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\Delta b_y\delta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\Delta b_z\delta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_i\delta_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_u \\ \theta_v \\ \theta_w \\ \theta'_u \end{Bmatrix}_{i,2} \quad 46$$

eli $\{u\}_{i+1,1} = [\delta]_{i+1}^{-1} [T]_{i+1,i} [\delta]_i \cdot \{u\}_{i,2}$

$$[\delta]_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{oj} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j \end{bmatrix} \quad [\delta]_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{oj}\delta_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j \end{bmatrix} \quad 47$$

$[\delta]_j$ on Ω_i :n kiertomatriisi. Matriisi $[T]_{i+1,i}$ saadaan poistamalla kaavan 46 matriisista kiertomatriisiin siirretyt muuttujat δ ja ω_o indekseineen.

Yhtälöistä 39b - 45b saadaan solmuisiirtymiksi

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta_U \\ \theta_V \\ \theta_W \\ \theta'_U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_o & y_o & -(y_o - b_{y_i})(z_o - b_{z_i})\delta_i + \omega_{oi} \\ 0 & 1 & 0 & a_{z_i} - z_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{y_i} - y_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (b_{y_i} - y_o)\delta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (b_{z_i} - z_o)\delta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_u \\ \theta_v \\ \theta_w \\ \theta'_u \end{Bmatrix}_{i,2} \quad 48$$

eli $\{U\}_s = [T]_{o,i} [\delta]_i \cdot \{u\}_{i,2}$.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_u \\ \theta_v \\ \theta_w \\ \theta'_u \end{Bmatrix}_{i,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_o & -y_o & -y_o z_o + b_{yi} b_{zi} - \omega_{oi} \delta_i \\ 0 & 1 & 0 & z_o - a_{zi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_o - a_{yi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_o - b_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_o - b_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Theta_U \\ \Theta_V \\ \Theta_W \\ \Theta'_U \end{Bmatrix}_s \quad 49$$

Siirtomatriisi solmulta $i+1$:en saadaan korvaamalla tässä y_o $y_o - \Delta e_y$:llä, z_o $z_o - \Delta e_z$:llä, a_{yi} a_{yi+1} :llä, a_{zi} a_{zi+1} :llä, b_{yi} b_{yi+1} :llä, b_{zi} b_{zi+1} :llä, ω_{oi} ω_{oi+1} :llä ja δ_i δ_{i+1} :llä:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_u \\ \theta_v \\ \theta_w \\ \theta'_u \end{Bmatrix}_{i+1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta e_z - z_o & \Delta e_y - y_o & -(\Delta e_y - y_o)(\Delta e_z - z_o) \\ 0 & 1 & 0 & z_o - \Delta e_z - a_{zi+1} & 0 & 0 & + b_{yi+1} b_{zi+1} - \omega_{oi+1} \delta_{i+1} \\ 0 & 0 & 1 & y_o - \Delta e_y - a_{yi+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_o - \Delta e_y - b_{yi+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_o - \Delta e_z - b_{zi+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \Theta_U \\ \Theta_V \\ \Theta_W \\ \Theta'_U \end{Bmatrix}_s \quad 50$$

$$\text{eli } \{u\}_{i+1,1} = [\delta]_{i+1}^{-1} \cdot [T]_{i+1,o} \cdot \{U\}_s$$

Kun yhtälön 50 matriisilla $[\delta]_{i+1}^{-1} \cdot [T]_{i+1,o}$ kerrotaan yhtälön 48 matriisi $[T]_{o,i} \cdot [\delta]_i$, saadaan yhtälön 46 matriisi $[\delta]_{i+1}^{-1} \cdot [T]_{i+1,i} \cdot [\delta]_i$.

Koska on samantekevää, minkä nimenomaisen solmupisteen (y_o, z_o) kautta on kuljettu, mikä tahansa liitoslevyn piste voidaan ottaa solmupisteeksi, ja molempien sauvojen muodonmuutossuureet voidaan muuntaa samaan solmulta solmulle kulkevaan ns. solmulinjakoordinaatistoon.

Kaavan 9. mukaisen Ω_i :n tapauksessa on voimassa

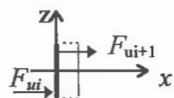
$$[T]_{i,j} \cdot [T]_{j,k} = [T]_{i,k} \quad 51$$

Voimasuureiden muunnosmatriisit

Annetaan sauvan i päälle 2 kullekin voimasuureelle vastaava virtuaalinen siirtymä suuruudeltaan 1, ja asetetaan kaikkien voimasuureiden näissä siirtymissä tekemä virtuaalinen työ nollassi.

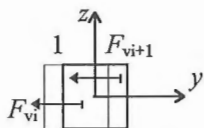
Tasapaino

Ekvivalentti solmuvoimasysteemi



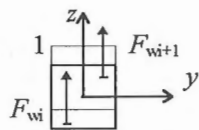
$$F_{ui} + F_{ui+1} = 0$$

$$F_{u,j} = F_{U,j} \quad \mathbf{52a,b}$$



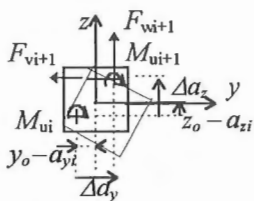
$$F_{vi} + F_{vi+1} = 0$$

$$F_{v,i} = F_{V,i} \quad \mathbf{53a,b}$$



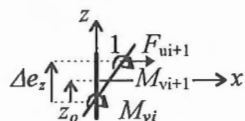
$$F_{wi} + F_{wi+1} = 0$$

$$F_{w,i} = F_{W,i} \quad \mathbf{54a,b}$$



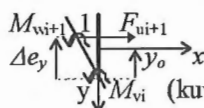
$$M_{ui} + M_{ui+1} - F_{vi+1}\Delta a_z - F_{wi+1}\Delta a_y = 0$$

$$M_{ui} = M_U - F_V(z_o - a_{zi}) - F_W(y_o - a_{yi}) \quad \mathbf{55a,b}$$



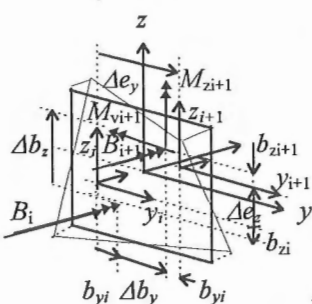
$$M_{vi} + M_{vi+1} + F_{ui+1}\Delta e_z = 0$$

$$M_{vi} = M_{V,i} + F_{U,i}z_o \quad \mathbf{56a,b}$$



$$M_{vi} + M_{vi+1} + F_{ui+1}\Delta e_y = 0$$

$$M_{vi} = M_{W,i} + F_{U,i}y_o \quad \mathbf{57a,b}$$



$$B_i + B_{i+1}\delta_i\delta_i + M_{vi+1}\frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i}(b_{yi+1,i}, z_i) + M_{vi+1}\frac{\partial\Omega_i}{\partial y_i}(y_i, b_{zi+1,i}) + F_{ui+1}[\Omega_i(\Delta e_y, \Delta e_z) - \Omega_{i+1}(0,0)\delta_i\delta_{i+1}]$$

$$= B_i + B_{i+1}\delta_i\delta_{i+1} - M_{vi+1}\Delta b_y\delta_i - M_{wi+1}\Delta b_z\delta_i + F_{ui+1}\{[-(\Delta e_y - b_{yi})(\Delta e_z - b_{zi}) + b_{yi+1}b_{zi+1}]\delta_i + \omega_{oi} - \omega_{oi+1}\delta_i\delta_{i+1}\} = 0 \quad \mathbf{58a}$$

Solmu:

$$B_i = B\delta_i + M_v\frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i}(y_o, z_i) + M_w\frac{\partial\Omega_i}{\partial y_i}(y_i, z_o) + F_U\Omega_i(y_o, z_o)$$

$$= B\delta_i - M_V(y_o - b_{yi})\delta_i - M_W(z_o - b_{zi})\delta + F_U[-(y_o - b_{yi})(z_o - b_{zi})\delta_i + \omega_{oi}] \quad \mathbf{58b}$$

Kuva 13. Voimasuureiden tasapaino

Tasapainoyhtälöt matriisimuodossa, kun $\Delta \approx 0$ on liitoslevyn vääntöjäykkyyydestä GI_v johtuva bimomentin maadoittuminen liitoksessa, eikä ole solmukuormia:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ M_u \\ M_v \\ M_w \\ B \end{Bmatrix}_{i,2} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta a_x & -\Delta a_y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta e_x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta e_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ [b_{y+1}b_{x+1} - (\Delta e_y - b_{yt})(\Delta e_x - b_{xt})]\delta_i & 0 & 0 & 0 & -\Delta b_y\delta_i & -\Delta b_x\delta_i & \delta_i\delta_{i+1} \\ +\omega_a - \omega_{a+1}\delta_i\delta_{i+1} & & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ M_u \\ M_v \\ M_w \\ B \end{Bmatrix}_{i+1,1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta \end{Bmatrix} \quad 59$$

$$\text{eli } \{F\}_{i,2} + [\delta]_i^T \cdot [S]_{i+1,i} \cdot [\delta]_{i+1}^{-T} \cdot \{F\}_{i+1,1} = \{F\}_{i,2} + [EX]_{i+1,i} \{F\}_{i+1,1} = 0$$

Yhtälön 55 matriisi on yhtälön 42 matriisin transpoosi.

$$[S]_{i,j} = [T]_{i,j}^T \quad 60$$

$[EX]_{i,j} = [\delta]_j^T \cdot [S]_{i,j} \cdot [\delta]_i^{-T}$ on epäkeskisyyss- eli eksentrisyyssmatriisi saualta i saualle j . Eksentrisyyssmatriiseilla kootaan voimasuuret elementin päissä samaan koordinaatistoon siten, että ne ovat yhteenlaskettavissa ja näin tasapainoehdot voidaan asettaa. /2/

Merkitään elementtikoordinaatistosta i koordinaatistoon j muunnettuja voimasuureita lihavoidulla vektorilla

$$\{F\}_{i,j} = [EX]_{i,j} \{F\}_i \quad 61$$

Fysikaaliselta merkitykseltään $\{F\}_{i,j}$ on sellainen koordinaatiston j voimasysteemi, jonka suorittama virtuaalinen työ koordinaatiston i yksikkömuodonmuutoksissa $1, Y_i, Z_i, \Omega_i$ on sama kuin $\{F\}_i$:n, kuten kaavoista 52 - 58b on pääteltävissä. Esimerkiksi yhtälössä 59 $\{F\}_{i+1,i} = [EX]_{i+1,i} \{F\}_{i+1,1}$. Jos bimomentin maadoittumista ei huomioida

$$\sum_i (\{F\}_{i,j} + \{R\}_{i,j}) + \{P\}_j = 0 \quad 62$$

$\{R\}_{i,j}$:t ovat elementtien ekvivalentteja kuormavektoreita muunnettuna koordinaatistoon j ja $\{P\}_j$ on solmukuormavektori tässä koordinaatistossa.

Voimasuurevektorin $\{F\}_{i,2}$ ja solmulinjan $S = (y_o, z_o)$ sille ekvivalenttisen sol-

muvoimavektorin $\{F\}_{Si}$ yhteys saadaan kaavojen 51b - 58b toisesta sarakkeesta:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ M_u \\ M_v \\ M_w \\ B \end{Bmatrix}_{i,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{zi} - z_o & a_{yi} - y_o & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_o & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(y_o - b_{yi})(z_o - b_{zi})\delta_i + \omega_{\alpha} & 0 & 0 & 0 & (b_{yi} - y_o)\delta_i & (b_{zi} - z_o)\delta_i & \delta_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ M_u \\ M_v \\ M_w \\ B \end{Bmatrix}_{Si} \quad 63$$

$$= [\delta]_i^T [S]_{o,i} \cdot \{F\}_{Si} = [EX]_i^{-1} \cdot \{F\}_{Si}$$

Kääntämällä $[EX]_i^{-1}$ saadaan tärkeä kaava

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ M_u \\ M_v \\ M_w \\ B \end{Bmatrix}_{i,S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_o - a_{zi} & y_o - a_{yi} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -z_o & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -y_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -y_o z_o + b_{yi} b_{zi} - \omega_{\alpha} \delta_i & 0 & 0 & 0 & y_o - b_{yi} & z_o - b_{zi} & \delta_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \\ M_u \\ M_v \\ M_w \\ B \end{Bmatrix}_{i,2} \quad 60$$

$$= [EX]_i \cdot \{F\}_{i,2} = [S]_{i,o} \cdot [\delta]_i^{-T} \{F\}_{i,2}$$

Tämä on lähteen /2/ mukainen eksentrisyysmatriisi, jolla voidaan muuntaa kunkin solmussa yhtyvän sauvanpään voimasuuret lokaalista painopiste-leikkauskeskiökoordinaatistosta solmulinjalle. Aivan samoin kuin siirtymäsuureilla myös voimasuureiden kohdalla voidaan osoittaa, että ainakin yleistetyn sektoriaalisen koordinaatin ollessa oletettua muotoa voidaan solmulinjaksi valita mikä tahansa akseli.

Elementin jäykkyysmatriisi on lähteen /2/ mukaan

$$[\tilde{K}]_i = \begin{bmatrix} [EX]_i & [0] \\ [0] & [EX]_i \end{bmatrix} \cdot [K]_i \cdot \begin{bmatrix} [EX]_i & [0] \\ [0] & [EX]_i \end{bmatrix}^T \quad 65$$

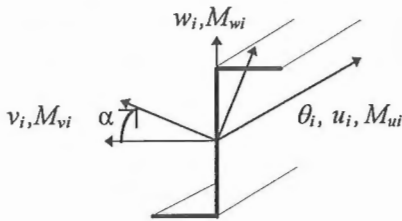
$[K]_i$ on elementin jäykkyysmatriisi akseleiltaan kaistojen suuntaisessa elementti-koordinaatistossa x_i, y_i, z_i . Se saadaan pääjäyhyskoordinaatistossa x_i, y_i', z_i' lausutusta jäykkyysmatriisista $[K]_i$ muunnoksella

$$[K]_i = [t]^T [K'] [t], \text{ jossa} \quad 66$$

$$[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

67

on pääkoordinaatistosta sen elementtikoordinaatistoon muuntava matriisi.



Kuva 14. Kierro solmulinjakoordinaatistosta pääkoordinaatistoon

Sauvan molemmissa päissä on sama "osaeksentrisyysmatriisi" $[EX]_i$. Monimutkaisemmilla deplanaatiomuodoilla nämä riippuvat myös liittyvän sauvan muodosta, ja ovat yleensä eri päissä erilaiset.

Epäkeskisyyssmatriisi menee yksinkertaisimpaan muotoonsa solmulinjakoordinaatistossa $Oxyz$. Tällöin myös eri elementtien epäkeskisyyssmatriisit ovat samanmuotoisia, vain indeksit poikkeavat. Jos merkitään c_{yi} :llä ja c_{zi} :llä elementtien leikkauskeskiöiden, d_{yi} :llä ja d_{zi} :llä kiertymäkeskiöiden sekä r_{yi} :llä ja r_{zi} :llä painopisteiden solmulinjakoordinaatteja, niin epäkeskisyyssmatriisi saa muodon.

$$[EX]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{zi} & -c_{yi} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{zi} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_{yi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_{yi}d_{zi} - r_{yi}d_{zi} - r_{zi}d_{yi} - \omega_{oi}\delta_i & 0 & 0 & 0 & -d_{yi} & -d_{zi} & \delta_i & 0 \end{bmatrix} \quad 68$$

$$= [S]_{i,o} \cdot [\delta]_i^{-T}$$

Jos matriisit annetaan sauvan koordinaatistossa, kuten lähteessä /2/, niin r -, c - ja d -alkioiden merkit vaihtuvat.

Yhteenveto

Siirtymä- ja voimasuureiden muunnosmatriisit ns. kaksilaippapalkeille voidaan muodostaa poikkileikkausten kolmen erikoispisteen paikkojen funktiona.

Sauvan sektoriallisen koordinaatin $\omega_i(s)$ pohjalta on määritelty yleistetty sektoriallinen koordinaatti $\Omega_i(y, z)$, joka on sauvan seinämien keskiviivoilla s $\omega_i(s)$:n arvon saava solmulevyn biharmoninen laattataipuma, kun vääntymä $\theta'_u(x) = 1$. Se on samalla bimomentin vaikutuspinta elementin akselin x -suuntaisille pistekuormille. Käsiteltävä profiilijoukko on rajattu siten, että solmulevyn vapausasteeksi tulee jätäkän kappaleen kuuden liikemahdollisuuden ohella muotoa $-yz$ oleva deplanaatio.

Ilmenee, että $\Omega_i(y, z)$:n gradientin $\nabla\Omega_i$ 0-kohta muodostaa oletusten mukaisen poikkileikkauksen kolmannen erikoispisteen ”kiertymäkeskiön”, jolla on keskeinen merkitys laskettaessa siirtymä- ja voimasuureiden välittymistä elementiltä toiselle. Kiertymäkeskiöiden uran muodostavalla akselilla todellisen tai kuvitellun solmulevyn siirtymätilan $u(x, y, z)$ derivaatat (kallistumat) $\partial u/\partial y$ ja $\partial u/\partial z$ ovat riippumattomia väännöstä, ja ne ovat itseisarvoltaan vääntöakselin taipumien x -derivaattojen (kiertymien) $\partial v/\partial x$ ja $\partial w/\partial x$ suuruiset. Sauva taipuu vääntymättä kuormitettaessa kiertymäkeskiöstä mielivaltaisella yz -tason pistemomentilla.

Jos liittyvien profiilien uumat ovat keskenään 90° :n kulmassa, niin bimomentti B ja vääntymä $\theta(x)$ vaihtavat tuella merkkinsä.

Muunnosmatriisit ovat ”eksakteja” avoprofiilisten palkkirakenteiden siirtymäelementtimenetelmän perusolettamusten puitteissa tapaukselle, jossa profiilin kaistat on saranoitu liitoslevyyn sekä tapaukselle, jossa liittyvät poikkileikkaukset voidaan ajatella saaduksi kolmannelle oletusten mukaisesta profiilista poistamalla osia tai muuttamalla seinämien paksuuksia, eikä liitoslevyä ole.

Lähteet

- /1/ Koivula Risto: Avoprofilisen sauvan ohjattu vääntö, Rakenteiden mekaniikka 4/1985
- /2/ Björk Timo: Joustavat ja epäkeskiset liitokset palkkielementtimenetelmässä, LTKK 1990
- /3/ Parland Herman: Rakenteiden vääntö, TTKK 1972
- /4/ Schardt Richardt: Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, 1989
- /5/ Vlasov V. Z.: Tonkostennye uprugie sterzhni, 1959
- /6/ AGIFAP, User Guide, version 5.51, LTTK 1995
- /7/ Hakala Matti K.: Lujuusopin elementtimenetelmä, TKK 1986
- /8/ Yang Yeong-Bin: Linear and Nonlinear Analysis of Space Frames with Nonuniform Torsion, Cornell University 1984
- /9/ Nikula Simo: Vinoutuvan poikkileikkauksen jännitys- ja stabiiliusanalyysi, liseniaattityö, LTKK 1994
- /10/ Liukkonen Vesa-Pekka: Poikkileikkauksen vääristymisen huomioon ottava palkkielementti, diplomityö TTKK 1995
- /11/ Roik, K., Albrecht G.: Beitrag zur Biegetorsion gerader, dünnwandiger Stäbe mit Zwangdrillachse, Bauingenieur 53/1978