

ERÄITÄ MATALA-ASTEISIA LAATTAELEMENTTEJÄ

Reijo Kouhia

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 29
Nro 3-4, 1996 s. 51-68

Tiivistelmä: Kirchhoffin ja Reissnerin-Mindlinin laattamallit ovat kaksi yksinkertaisinta mallia ohuen laatan käyttäytymisen kuvaamiseen. Kummankin mallin numeerista ratkaisua häiritsevät tietyt käytännön ongelmat: Kirchhoffin malli vaatii interpolaatiofunktioiden derivaatoilta jatkuvuutta, kun taas Reissnerin-Mindlinin malliin perustuvia elementtejä ovat vaivanneet numeeriset lukkiutumisen- ja stabiiliusongelmat. Artikkelissa käsitellään yksinkertaisia toimivia Kirchhoffin ja Reissnerin-Mindlinin laattamalleihin perustuvia elementtiformulaatioita. Esitetyt Kirchhoffin mallin elementit perustuvat jatkuvuusominaisuuden keskimääräiseen toteuttamiseen ns. diskreetti Kirchhoff hypoteesiin. Reissnerin-Mindlinin mallin elementeistä kuvataan kolmi- ja nelisolmuiset versiot, jotka perustuvat ns. MITC reduktioteknikkaan ja stabilointiin, jolle esitetään fysikaalinen tulkinta.

JOHDANTO

Luotettavien ja yksinkertaisten laattaelementtien kehittäminen on osoittautunut ennakoitua hankalammaksi ongelmaksi. Erityisesti tämä pätee keskimääräisen poikittaisen leikkausmuodonmuutoksen huomioonottavan Reissnerin-Mindlinin laattamallin suhteen, jossa ratkaisun avaimet löydettiin vasta 90-luvun taitteessa.

Elementtiajattelun pioneirit yrittivät soveltaa menetelmää ensin Kirchhoffin malliin. Yhteensopivuusongelmaan löydettiin ratkaisuja varsin pian. Tosin useat niistä johtivat hyvin epäkäytännöllisiin elementteihin, joissa oli hankalia vapausasteita. Esimerkkinä voidaan mainita Argyriksen viidennen asteen kolmioelementti, jossa esiintyvät kaikki toisen kertaluvun derivaatat nurkkasolmujen vapausasteina. Korkeamman kertaluvun derivaattojen mukaantulo haittaa elementin käyttökelpoisuutta tilanteissa, joissa laatan paksuus tai materiaaliominaisuudet muuttuvat hyppäyksellisesti. Olisikin toivottavaa, että vapausasteina esiintyisivät ainoastaan taipuma ja kiertymät.

Hyvin käyttökelpoinen tapa konstruoida Kirchhoffin laattaelementtejä ehdotettiin jo 1960-luvun lopussa. Jatkuvuusvaatimusta ei toteutetakaan tarkasti elementin koko reunalla vaan vain tietyissä diskreeteissä pisteissä. Tämän vuoksi formulaatiota kutsutaan diskreetti Kirchhoff (DK) kondensoinniksi, vaikka menetelmän rajoitteet voidaan tulkita myös keskiarvomielessä.

Reissnerin-Mindlinin mallin ensimmäiset elementtiformulaatiot esitettiin samaan aikaan kuin DK tekniikkakin. Tämä on luonnollista, sillä DK lähestymistavassa liikkeelle lähdetään juuri Reissnerin-Mindlinin mallista. Ensimmäinen huomattava vaikeus oli elementtien huono käyttäytyminen analysoitaessa ohuita laattoja. Tästä leikkauslukkiutumisen nimellä kulkevasta ongelmasta päästiin eroon projisioimalla leikkausmuodonmuutos alempiasteiseksi polynomiksi kuin mihin interpolaatiot johtaisivat. Tämä johti kuitenkin numeeriseen epästabiiliuteen, joka ilmenee leikkausvoiman heilahteluna ja pahimmassa tapauksessa jäykkyysmatriisin singulaarisuutena.

Diskreetti Kirchhoff ja Reissnerin-Mindlinin laattaelementtien vaatimat tekniikat ovat helpoiten esitettävissä vastaavien yksidimensioisten palkkimallien avulla. Tämän vuoksi tarkastellaan aluksi Eulerin-Bernoullin ja Timoshenkon palkkimalleja.

PALKKIELEMENTIT

Diskreetti Eulerin-Bernoullin mallin elementti

Käsitellään aluksi diskreetti Eulerin-Bernoullin elementin formulaatiota. Lähtökohdiana on Timoshenkon keskimääräisen poikittaisen leikkausmuodonmuutoksen huomioonottava palkkimalli, jonka virtuaalisen työn yhtälö on muotoa¹

$$\int_0^L (M\delta\kappa + Q\delta\gamma - \bar{f}\delta v)dx = 0 \quad (1)$$

missä v on palkin akselin taipuma, M taivutusmomentti ja Q leikkausvoima. Palkin akselia vastaan kohtisuoraan vaikuttava jakaantuneen kuormituksen intensiteetti on \bar{f} ja virtuaaliselle muutokselle on käytetty klassista δ symbolia. Kinemaattisia suureita ovat käyristymä κ ja liukuma γ . Ottamalla huomioon sekä konstitutiiviset että kinemaattiset yhteydet, voimasuureet M ja Q voidaan lausua muodosa:

$$M = EI\kappa = -EI\theta' \quad \text{ja} \quad Q = GA_s\gamma = GA_s(v' - \theta), \quad (2)$$

missä θ on poikkileikkaustason kiertymä, EI palkin taivutus- ja GA_s leikkausjäykkyys. Pilkku suureen oikeassa yläkulmassa merkitsee derivointia paikkakoordinaatin x suhteen. Variaatioyhtälöstä havaitaan, että elementtimenetelmän mukainen diskretointi vaatii taipuman v ja kiertymän θ interpolaatiofunktioilta vain C^0 -jatkuvuutta. Mikäli diskreetti Eulerin-Bernoullin elementin vapausasteiksi halutaan taipuman ja kiertymän arvot elementin kahdessa solmussa, on lähdettävä interpolaatioista, joissa on yhteensä vähintään viisi vapausastetta, jotta leikkausmuodonmuutosrajoite voidaan ottaa huomioon. Lisäksi käyristymälle $\kappa = -\theta'$ haluttaisiin lineaarinen interpolaatio. Nämä vaatimukset voidaan toteuttaa valitsemalla taipumalle lineaarinen ja kiertymälle kvadraattinen interpolaatio:

$$v = N_1v_1 + N_2v_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)v_2, \quad (3a)$$

$$\theta = N_1\theta_1 + N_2\theta_2 + N_3\Delta\theta = \frac{1}{2}(1 - \xi)\theta_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)\theta_2 + (\xi^2 - 1)\Delta\theta, \quad (3b)$$

¹Olettaen homogeeniset reunaehdot.

missä ξ on elementin luonnollinen koordinaatti $\xi = 2(x - x_c)/h$, x_c on elementin keskipisteen koordinaatti ja h elementin pituus. Kiertymän kuplamuodon vapausaste $\Delta\theta$ voidaan eliminoida asettamalla leikkausmuodonmuutos γ keskimääräisesti häviämään elementin alueella:

$$\int_{I^{(e)}} \gamma dx = \int_{I^{(e)}} (v' - \theta) dx = 0. \quad (4)$$

Ehdosta seuraa

$$\Delta\theta = \frac{3}{4}(\theta_1 + \theta_2) - \frac{3}{2} \frac{v_2 - v_1}{h}, \quad (5)$$

jolloin kiertymän interpolaatio on

$$\theta = \frac{3}{2h} N_3 v_1 + (N_1 + \frac{3}{4} N_3) \theta_1 - \frac{3}{2h} N_3 v_2 + (N_2 + \frac{3}{4} N_3) \theta_2. \quad (6)$$

Elementin jäykkyysmatriisi voidaan nyt muodostaa ottamalla huomioon pelkästään taiputukseen liittyvä termi

$$\int EI\theta'\delta\theta' dx.$$

Näin konstruoidun elementin jäykkyysmatriisi on identtinen klassisen C^1 -jatkuvia Hermiten interpolaatiopolynomeja käyttävän Eulerin-Bernoullin palkkielementin jäykkyysmatriisin kanssa. Näin ei kuitenkaan ole kuormavektorin, geometrisen jäykkyysmatriisin tai massamatriisin laita, sillä taipuman interpolaatio on lineaarinen. Jakaantuneen kuorman tapauksessa kuormavektorit saadaan ekvivalenteiksi otaksumalla myös taipumalle kvadraattinen lauseke. Taipuman kuplamuotoa vastaava vapausaste Δv voidaan eliminoida momenttiehdosta

$$\int_{I^{(e)}} (x - x_c) \gamma dx = 0. \quad (7)$$

Taipuman kvadraattinen kuplamuoto ei vaikuta leikkausvoiman keskimääräiseen häviämisehtoon (4). Ratkaisuksi saadaan

$$\Delta v = \frac{1}{8} h(\theta_2 - \theta_1), \quad (8)$$

jolloin taipuman interpolaatio on

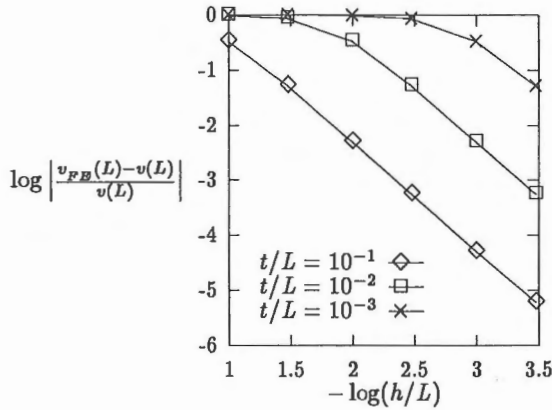
$$v = N_1 v_1 - \frac{1}{8} h N_3 \theta_1 + N_2 v_2 + \frac{1}{8} h N_3 \theta_2. \quad (9)$$

Eulerin-Bernoullin palkkimallin geometrisen jäykkyysmatriisin eli jännitysmatriisin tuottava termi virtuaalisen työn yhtälössä on muotoa

$$\int N v' \delta v' dx,$$

missä N on normaalivoima. Näin muodostettu jännitysmatriisi poikkeaa huomattavasti klassisen C^1 -formulaation vastaavasta matriisista. Diskreetti E-B elementti-formulaatiossa tämä termi voidaan vaihtoehtoisesti kirjoittaa muotoon

$$\int N \theta \delta \theta dx,$$



Kuva 1 Suhteellinen virhe ulokepalkin pään taipuman arvossa verkontiheyden funktiona eri hoikkuuden arvoilla (massiivinen neliöpoikkileikkaus) käytettäessä lineaarista Timoshenkon elementtiä.

jolloin päädytään samaan tulokseen kuin C^1 -formulaatioissa.

Vastaavasti dynamiikan tehtävissä tarvittava konsistentti massamatriisi tuottaa esitetyissä E-B palkkiformulaatioissa eri tuloksen. Menetelmien tarkkuus- ja suppenemisominaisuuksia on tarkasteltu viimeisessä luvussa, tosin vain laattojen lommahdus- ja värähtelytehtävissä.

Timoshenkon palkkimallin elementti

Suoraviivainen elementtimenetelmäformulaatio Timoshenkon mallin variaatiotehtävän (1) ratkaisemiseksi saadaan valitsemalla lineaariset interpolaatiofunktiot sekä taipuman että kiertymän approksimoimiseen. Tämä johtaa tunnetusti menetelmään, joka lukkiutuu kun elementtiä käytetään hyvin hoikkien palkkien analysointiin. Lukkiutumista päästään eroon vasta kun elementin pituus h on palkin korkeuden t luokkaa, katso kuvaa 1.

Tulos on odotettu, sillä taipuman pitäisi olla astetta korkeampi polynomi, jotta leikkausmuodonmuutoksen häviäminen identtisesti elementin alueella olisi mahdollista ohuen palkin rajatapauksessa. Yksinkertainen parannusehdoteus on lisätä taipuman interpolaatioon kvadraattinen kuplamuoto. Tämä elementin sisäinen vapausaste voidaan kondensoida pois elementtitasolla, joten vapausasteiden lukumäärä ei kasva. Kondensointu jäykkymatriisi on täsmälleen sama kuin leikkaustermin suhteen ali-integroitu (yhden pisteen Gaussin kvadratuurilla) jäykkymatriisi. Leikkausmuodonmuutosten ali-integroiminenhan vastaa leikkausmuodonmuutoksen projisioimista vakiofunktioiksi. Vakioiksi projisiointi, eli keskiarvoistus voidaan suorittaa myös kiinnittämällä etukäteen taipuman kvadraattinen kuplamuoto ehdolla

$$\gamma = v' - \theta = \gamma_0 = \text{vakio}, \quad (10)$$

jonka ratkaisu kuplamuodon vapausasteelle on sama kuin yhtälössä (8). Tämä on

tietenkin sama kuin keskiarvoehto:

$$\int_{I^{(e)}} (\gamma - \gamma_0) dx = \int_{I^{(e)}} (v' - \theta - \gamma_0) dx = 0. \quad (11)$$

Elementin käyttäytymistä voidaan vielä parantaa redusoimalla leikkausjäykkyyden lauseketta. MacNeal [14] on johtanut redusoidun leikkausjäykkyyden lausekkeen tarkastelemalla lineaarisesti interpoloidun ja leikkausmuodonmuutoksen suhteen ali-integroidun elementin taivutus- ja leikkausenergioita ja verrannut niitä vakioliukuma- ja lineaarista käyritymätilaa vastaavaan tarkkaan ratkaisuun. Lineaarisesti interpoloitu elementti kuvaa kyseistä muodonmuutostilaa tarkasti, mikäli leikkausjäykkyyden lauseke GA_s korvataan lausekkeella

$$GA_s^* = \frac{GA_s}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}}. \quad (12)$$

Asian yksityiskohtainen johto löytyy esim. lähteistä [14], [15].

Leikkausjäykkyyden korjauskertoimen lauseke (12) voidaan johtaa myös ilman energiataarkastelua. Lähtökohdana on tasapainoyhtälön keskimääräinen toteutumisen elementin alueella:

$$\int_{I^{(e)}} (Q - M') dx = \int_{I^{(e)}} [GA_s(v' - \theta) + EI\theta''] dx = 0. \quad (13)$$

Jotta tasapainoyhtälön testaaminen onnistuu, on kiertymän interpolaation oltava vähintään kvadraattinen. Yksinkertaisin mahdollinen valinta on siten lineaarinen taipuma ja kvadraattinen kiertymä. Kvadraattisella taipuman muodolla ei ole vaikutusta yhtälön (13) toteutumiseen. Tilanne on analoginen keskimääräisen leikkausmuodonmuutoksen häviämisehdon (4) kanssa. Kiertymän kuplamuotoa vastaava vapausaste voidaan eliminoida elementtitasolla, jolloin ratkaisu on

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{3GA_s h^2}{24EI + 2GA_s h^2} \left[\frac{1}{h}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right] \\ &= \frac{GA_s h^2}{8EI} \frac{1}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}} \left[\frac{1}{h}(v_1 - v_2) + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Elementin virtuaalisen työn yhtälön termissä

$$\int Q\delta\gamma dx$$

leikkausvoima voidaan laskea joko tasapainoyhtälön avulla:

$$Q = -EI\theta'' = -\frac{8EI}{h^2}\Delta\theta = \frac{GA_s}{1 + \frac{GA_s h^2}{12EI}} \left[\frac{1}{h}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right], \quad (15)$$

tai suoraan määritelmän avulla, tosin keskiarvoistamalla leikkausmuodonmuutos:

$$Q = GA_s \pi(v' - \theta) = GA_s \left[\frac{1}{h}(v_2 - v_1) - \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) + \frac{2}{3}\Delta\theta \right], \quad (16)$$

missä π on projektiio-operaattori, eli keskiarvoistaja. Tuloksena on tietenkin sama lauseke kuin yhtälössä (15). Virtuaalinen muodonmuutos on keskiarvoistettuna, eli laskettuna elementin keskipisteessä

$$\delta\gamma = \delta v' - \delta\theta = (\delta v_2 - \delta v_1)/h - \frac{1}{2}(\delta\theta_1 + \delta\theta_2). \quad (17)$$

Näin konstruoitu elementti on identtinen lineaarisen Timoshenkon palkkielementin kanssa, joka integroidaan yhden pisteen Gaussin kvadratuuria käyttäen ja johon sovelletaan leikkausjäykkyyden redusointia (12).

Stabiloivan kuplamuodon ja leikkausjäykkyyden redusoinnin välisen yhteyden lienee ensimmäisenä esittänyt Juhani Pitkäranta vuonna 1988 [17], kun taas itse redusointitekniikka on vuodelta 1973 ja idean isä Isaac Fried [7].

Leikkausjäykkyyden redusointi parantaa myös diskreetin yhtälösystemin numerista käyttäytymistä pienentämällä rakenteen jäykkyydematriisin häiriöalttiutta. Tämä voidaan helposti havaita tutkimalla elementin muodonmuutosenergian dimensiotomassa muodossa esitettyä lauseketta

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{EI}{h} \left[\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \frac{k}{2(1+\nu)} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \left(\frac{d\vartheta}{ds} - \theta \right)^2 \right] ds, \quad (18)$$

missä on merkitty $\vartheta = v/h$, $s = (x - x_1^{(e)})/h$, $I = Ar^2$ (r on poikkileikkauksen jähyys säde) ja $k = A_s/A$ on poikkileikkauksen leikkauskorjauskerroin. Havaitaan, että leikkausenergian osuuteen jää riippuvuus palkin hoikkuudesta r ($r \sim t$) ikävällä tavalla. Kun $r \rightarrow 0$ niin leikkausenergian kerroin lähestyy ääretöntä, jolloin myös elementin jäykkyydematriisin suurin ominaisarvo lähestyy ääretöntä, ja rakenteen jäykkyydematriisin häiriöalttiuus kasvaa rajatta.

Redusoimalla leikkausjäykkyyttä yhtälön (12) mukaisesti, muodonmuutosenergian lauseke muuttuu muotoon

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{EI}{h} \left[\left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} k \left[\frac{1}{24} k + (1+\nu) \left(\frac{r}{h} \right)^2 \right]^{-1} \left(\frac{d\vartheta}{ds} - \theta \right)^2 \right] ds, \quad (19)$$

josta patologinen riippuvuus hoikkuusparametristä r on hävinnyt.

LAATTAELEMENTIT

Diskreetti Kirchhoff elementit

Analogisesti palkkielementtien kanssa, diskreetti Kirchhoff elementtien lähtökohtana on keskimääräisen poikittaisen leikkausmuodonmuutoksen huomioonottava Reissnerin-Mindlinin laattamallin virtuaalisen työn yhtälö

$$\int_A (\mathbf{m}^T \delta \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{q}^T \delta \boldsymbol{\gamma} - \bar{f} \delta w) dA - \int_{s_e} (\bar{Q}_n \delta w - \bar{M}_n \delta \beta_n - \bar{M}_{n_s} \delta \beta_s) ds = 0, \quad (20)$$

missä momenttien, leikkausvoimien, käyritymien ja liukumien pystyvektorit ovat:

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Käyristymät voidaan lausua kiertymien avulla

$$\kappa_x = -\beta_{x,x}, \quad \kappa_y = -\beta_{y,y}, \quad \kappa_{xy} = -\beta_{x,y} - \beta_{y,x}, \quad (22)$$

ja liukumien lausekkeet ovat

$$\gamma_{xz} = w_{,x} - \beta_x, \quad \gamma_{yz} = w_{,y} - \beta_y. \quad (23)$$

Mukavuussyistä kiertymät β_x ja β_y on määritelty akselien x ja y ympäri kiertävien rotaatioiden θ_x ja θ_y avulla seuraavasti (katso kuvaa 2):

$$\beta_x = -\theta_y, \quad \beta_y = \theta_x. \quad (24)$$

Konstitutiiviset yhteydet voidaan kirjoittaa kompaktissa muodossa

$$m = D_b \kappa, \quad q = D_s \gamma, \quad (25)$$

missä D_b ja D_s ovat taivutus- ja leikkausjäykkyysematriisit.

Klassinen tapa konstruoida matala-asteinen DK elementti on otaksua taipuma määrittelyksi vain elementin reunaviivoilla. Kiertymille otaksutaan tavanomainen elementin alueella määritelty interpolaatio. Leikkausmuodonmuutosrajoitteet toteutetaan elementin nurkkasolmuissa ja reunan keskipisteessä. Usein myös reunan normaalin kiertymä rajoitetaan lineaarisiksi.

Ehkäpä vieläkin selkeämpi tapa muodostaa DK elementti on käyttää integaalimuotoisia rajoitteita. Kolmi- ja nelisolmuiset DK elementit voidaan siten johtaa seuraavasti.

Elementin taipumaa w interpoloidaan lineaarisilla (kolmio) tai bilineaarisilla (nelikulmio) funktioilla, kun taas kiertymille käytetään kvadraattista (kolmio) tai supistettua bikvadraattista (nelikulmio) interpolaatiota, joka mukavuussyistä valitaan hierarkiseksi. Interpolaatio voidaan siten kirjoittaa muodossa

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad (26a)$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^n (N_i \beta_{xi} + N_{n+i} \Delta \beta_{xi}), \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n (N_i \beta_{yi} + N_{n+i} \Delta \beta_{yi}), \quad (26b)$$

jossa n on elementin solmujen lukumäärä (3 tai 4). Kolmioelementille käytetään alakoordinaattien L_i avulla määriteltyjä interpolaatiofunktioita

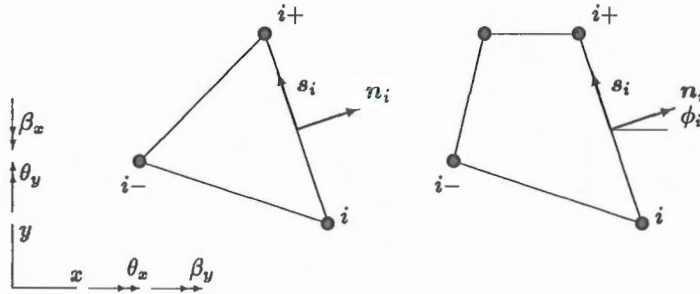
$$N_i = L_i, \quad (27a)$$

$$N_{3+i} = 4L_i L_{i+}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (27b)$$

ja merkintä $i+$ tarkoittaa solmua i seuraavaa solmua elementin reunaa pitkin positiiviseen kiertosuuntaan kierrettäessä. Nelikulmioelementin interpolaatio määritellään perusneliössä luonnollisten koordinaattien ξ, η ja supistetun bikvadraattisen kannan avulla seuraavasti:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad (28a)$$

$$N_{4+i} = \frac{1}{2} (1 - \eta_{4+i}^2 \xi^2 - \xi_{4+i}^2 \eta^2) (1 + \xi_{4+i} \xi + \eta_{4+i} \eta), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (28b)$$



Kuva 2 Kiertymien määritelmät ja laattaelementin merkintöjä.

Tällä tavoin määritellyille hierarkisille muodoille N_{3+i} , N_{4+i} indeksin i voidaan ajatella viittaavan myös elementin sivun numeroon. Tällöin sivu i on solmusta i solmuun $i+$ oleva elementin reunan osa. Kuvaan 2 on piirretty elementtien solmukonfiguraatiot ja solmujen sekä sivujen numerointi.

Elementissä on nyt $5n$ vapausastetta, jotka pitää redusoida määrään $3n$. Tällöin elementin jokaisessa kärkisolmussa on kolme vapausastetta $(w_i, \beta_{xi}, \beta_{yi}) = (w_i, \beta_i^T)$. Tarvitaan siten kaksi rajoitetta sivua kohden:

- sivun i suuntainen leikkausmuodonmuutos $\gamma_s = w_{,s} - \beta_{si} = w_{,s} - \beta^T s_i$ häviää keskimääräisesti

$$\int_{\text{reuna } i} \gamma_s ds = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (29)$$

- kiertymä $\beta_{ni} = \beta^T n_i$ muuttuu lineaarisesti elementin sivua pitkin

$$\Delta \beta_i^T n_i = C_i \Delta \beta_{xi} + S_i \Delta \beta_{yi} = 0. \quad (30)$$

Edellä on sivun normaalin ja tangentin suuntaisia yksikkövektoreita merkitty $n_i = [C_i \ S_i]^T$, $s_i = [-S_i \ C_i]^T$, missä $C_i = \cos \phi_i$ ja $S_i = \sin \phi_i$. Rajoiteyhälöt (29) ja (30) muodostavat yhtälöparin

$$n_i^T \Delta \beta_i = 0, \quad (31a)$$

$$s_i^T \Delta \beta_i = \frac{3}{2} \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4} s_i^T (\beta_i + \beta_{i+}) \quad (31b)$$

kutakin sivua kohden hierarkisten kiertymävapausasteiden eliminoinemiseksi. Ratkaisu on

$$\Delta \beta_i = \left[\frac{3}{2} \frac{w_{i+} - w_i}{\ell_i} - \frac{3}{4} s_i^T (\beta_i + \beta_{i+}) \right] s_i, \quad (32)$$

missä ℓ_i on sivun i pituus.

Kuten palkkielementin tapauksessa, taipumalle voidaan otaksua myös kvadraattinen interpolaatio jokaista sivua kohden. Näitä vastaava vapausaste eliminoidaan momenttiehdosta (7) pitkin elementin reunaviivaa.

Klassisen DK nelikulmioelementin (DKQ) käyttäytyminen on kuitenkin osoittautunut epätydyttäväksi. Lyons johti väitöskirjassaan [13] parannetun DKQ elementtiversioon, jossa käytetään sekä taipumalle että kiertymille Lagrangen bikvadraattista interpolaatiota. Syntyneet lisävapausasteet eliminoidaan seuraavista kolmesta ehdosta:

$$\int \gamma_{xz} dA = \int \gamma_{yz} dA = \int (\gamma_{xz,x} + \gamma_{yz,y}) dA = 0. \quad (33)$$

Lyonsin elementissä on siten 15 rajoitusehtoa, jotka hän otti huomioon numeerisessa muodossa. Crisfield esitti muunnetun elementin, jossa ainoastaan kiertymille otetaan käyttöön Lagrangen interpolaatio ja taipumalle käytetään supistettua bikvadraattista kantaa [5]. Tarvittavat kaksi rajoitetta Crisfield formuloi leikkausmuodonmuutoksen häviämisenä pitkin elementin reunojen keskipisteitä yhdistävien linjojen suhteen. Näin rotaatioiden kuplamuodot voidaan ratkaista eksplisiittisessä muodossa.

Morleyn vakiokaarevuuselementti on varmasti yksinkertaisin toimivista Kirchhoffin laattamallin elementeistä. Se voidaan johtaa myös DK kondensointitekniikalla, kun kiertymille valitaan *epäkonformit* lineaariset funktiot ja taipumalle tavanomainen lineaarinen interpolaatio. Soveltamalla rajoitetta (29) voidaan kiertymät β_x ja β_y lausua reunan normaalin kiertymän β_n avulla seuraavasti (reunalla i):

$$\beta_i = \mathbf{n}_i \beta_{ni} + s_i \left(\frac{w_{i+} - w_i}{l_i} \right). \quad (34)$$

Kiertymien interpolaatio on siten

$$\beta = \sum_{i=1}^3 N_i^{nc} \beta_i = \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{s_{i-}}{l_{i-}} - \frac{s_i}{l_i} \right) N_i^{nc} w_i + \mathbf{n}_i N_i^{nc} \beta_{ni} \right], \quad (35)$$

missä N_i^{nc} on epäkonformi lineaarinen interpolaatio

$$N_i^{nc} = L_i + L_{i+} - L_{i-}, \quad (36)$$

joka on jatkuva elementistä toiseen ainoastaan elementin sivujen keskipisteissä.

Mikäli normaalin kiertymään β_n kohdistuvaa rajoitetta (30) ei aseteta, saadaan elementti, jossa kullekin reunalle jää yksi kiertymävapausaste. Kolme DKT elementtikonfiguraatiota on esitetty kuvassa 3.

Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementtejä

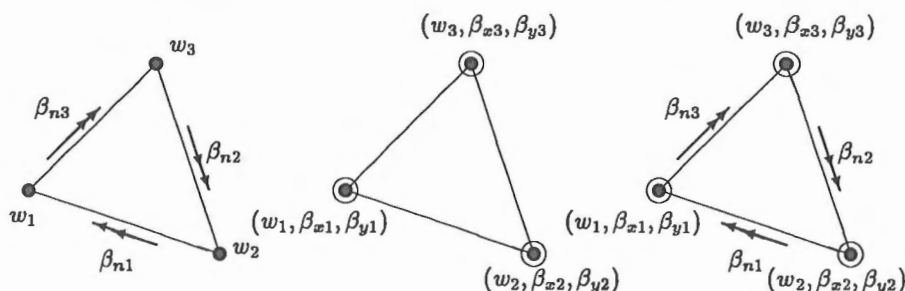
Ehkä yksinkertaisin tapa konstruoida hyvin käyttäytyvä matala-asteinen Reissnerin-Mindlinin laattaelementti on käyttää taipumalle kvadraattista ja kiertymille lineaarista interpolaatiota ja kondensoida taipuman kvadraattista muotoa vastaavat vapausasteet rajoittamalla leikkausmuodonmuutoksen tangentiaalikomponentti vakioksi elementin reunoilla. Jotta vältyttäisiin leikkausjännitysten heilahteluilta tarvitaan myös leikkausjäykkyyden redusointia. Tätä strategiaa sovelsivat Tessler ja Hughes 1985 [8].

Reissnerin-Mindlinin laattamallin elementeistä vain harvat läpäisevät matemaattisen virhetarkastelun moitteetta. Yksi ensimmäisistä alhaisasteisista R-M elementtiformulaatioista, joille matemaattinen virheanalyysi on suoritettu ovat stabiloidut

(a) Morleyn elementti

(b) klassinen DKT

(c) 12 vap. ast. DKT



Kuva 3 Kolme erilaista DKT-elementtikonfiguraatiota.

MITC elementit. Alkuperäisen MITC reduktiotekniikan idean esittivät Dvorkin ja Bathe 1984 kuorielementille [6] ja nelisolmuiselle laattaelementille [2]. Tekniikka voidaan yleistää kokonaiselle elementtiryhmälle ja matemaattisen virheanalyysin näiden elementtien stabiloiduille versioille todistivat Brezzi, Fortin ja Stenberg 1991 [4].

MITC elementtiformulaatio perustuu sekamenetelmään², jossa poikittaisille leikkausmuodonmuutoksille (täsmällisesti ilmaistuna niiden kovarianteille tensorikomponenteille) otaksutaan itsenäinen interpolaatio. Ensimmäisessä artikkelissaan Dvorkin ja Bathe [6] sovittivat nämä leikkausmuodonmuutoskomponentit alkuperäisiin siirtymäsuureisiin Lagrangen kertojien avulla.

Lyly [12] on osoittanut, että stabiloitu MITC-formulaatio ja Hughesin ja Tesslerin tekniikka johtavat samaan tulokseen.

Lineaarisen kinematiikan tapauksessa voidaan MITC elementtiformulaatio toteuttaa toisella tavalla. Leikkausmuodonmuutos lasketaan modifoiduista kiertymien interpolaatiofunktioista siten, että leikkausmuodonmuutos γ_α elementin reunaviivalla on samanasteinen polynomi kuin taipuman gradientti tässä suunnassa. Lineariselle ja bilineaariselle elementille tämä merkitsee leikkausmuodonmuutoksen vakioisuutta. Tämä vakiokomponentti asetetaan yhtäsuureksi elementin reunan keskipisteessä alkuperäisistä interpolaatioista lasketun leikkausmuodonmuutoksen arvon kanssa.

Esitetään MITC elementin konstruktion päävaiheet; yksityiskohtaisempi johto löytyy lähteestä [9]. Taipumalle ja kiertymille käytetään tavanomaista interpolaatiota

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i, \quad \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}, \quad \beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}. \quad (37)$$

Lisäksi leikkausmuodonmuutoksen määrittämiseen tarvittaville kiertymille otaksu-

²Nimi tulee sanoista Mixed Interpolated Tensorial Components.

taan oma interpolaatio ja merkitään sitä yläindeksillä S

$$\beta_x^S = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi}^S, \quad \beta_y^S = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}^S, \quad (38)$$

missä N_i :t ovat lineaariset alakoordinaateissa lausutut tai bilineaariset interpolaatiofunktioita ja n on elementin solmujen lukumäärä (3 tai 4). Uusi kiertymäsuureiden interpolaatio (38) lisää elementin vapausasteita kahdella sivua kohden. Nämä voidaan eliminoida kahdesta ehdosta:

- leikkausmuodonmuutos on vakio elementin reunalla i , eli

$$\gamma_{si} = w_{,s} - s_i^T \beta^S = \text{vakio}, \quad (39)$$

- ja yhtäsuuri alkuperäisistä interpolaatioista lasketun leikkausmuodonmuutoksen kanssa elementin reunan keskipisteessä, eli

$$w_{,s} - s_i^T \beta^S = w_{,s} - s_i^T \beta(\zeta = 0). \quad (40)$$

Jälkimmäinen ehto voidaan lausua myös integraalin avulla:

$$\int_{\text{reuna } i} s_i^T (\beta^S - \beta) ds = 0. \quad (41)$$

Ratkaisemalla yhtälöistä $(\beta_{xi}^S, \beta_{yi}^S)$, $i = 1, \dots, n$ ja sijoittamalla ne yhtälöihin (38) saadaan leikkausmuodonmuutoksen laskemiseen tarvittavien kiertymien interpolaatioiksi lausekkeet

$$\beta_x^S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(N_i + \frac{C_{i+} S_i}{D_{i+}} N_{i+} - \frac{C_{i-} S_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} \right) \beta_{xi} \right. \\ \left. + \left(\frac{C_{i-} C_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} - \frac{C_i C_{i+}}{D_{i+}} N_{i+} \right) \beta_{yi} \right], \quad (42a)$$

$$\beta_y^S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(N_i - \frac{S_{i-} C_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} - \frac{C_i S_{i+}}{D_{i+}} N_{i+} \right) \beta_{yi} \right. \\ \left. + \left(\frac{S_{i+} S_i}{D_{i+}} N_{i+} - \frac{S_{i-} S_{i-}}{D_{i-}} N_{i-} \right) \beta_{xi} \right], \quad (42b)$$

missä

$$D_i = C_i S_{i-} - S_i C_{i-}.$$

Merkintä $i -$ tarkoittaa sivua $i -$ edeltävää sivua.

Tarkastellaan nyt laattaelementin leikkauskorjauksen johtamista. Menetellään kuten Timoshenkon palkin tapauksessa, jossa todettiin kuplamuodon lisäämisen kiertymään ja leikkauskorjauksen olevan ekvivalentteja toimenpiteitä. Merkitään kinemaattista operaattorimatriisia symbolilla L ja jonka adjungantti on tasapaino-operaattori L^* . Leikkausvoimat voidaan lausua tasapainoyhtälön avulla seuraavasti:

$$q = L^* m = L^* D_b L \beta. \quad (43)$$

Merkitään kiertymävektorin lineaarista osaa ja kuplamuotoa seuraavasti

$$\beta = \beta_1 + \Delta\beta. \quad (44)$$

Laatalle yhtälön (13) vastine on

$$\int_{A^{(e)}} (\mathbf{q} - \mathbf{L}^* \mathbf{m}) dA = \int_{A^{(e)}} [\mathbf{D}_s (\nabla w - \beta^S - \Delta\beta) - \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L} (\beta_1 + \Delta\beta)] dA = \mathbf{o},$$

eli

$$\int_{A^{(e)}} (\mathbf{D}_s + \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}) \Delta\beta dA = \int_{A^{(e)}} \mathbf{D}_s (\nabla w - \beta^S) dA. \quad (45)$$

Merkitään elementin nurkkasolmuihin liittyvien vapausasteiden pystyvektoria \mathbf{u} :lla ja kiertymien kuplamuodon vapausastevektoria $\Delta\mathbf{u}$:lla. Yhtälön (45) ratkaisu voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}_s \mathbf{u}. \quad (46)$$

Leikkausvoimat määritetään yhtälöstä

$$\mathbf{q} = \mathbf{D}_s (\nabla w - \beta^S - \pi \Delta\beta) = \mathbf{D}_s (\mathbf{B}_s - p \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}_s) \mathbf{u}, \quad (47)$$

missä π on jälleen projektio vakiofunktiksi jonka arvo on p operoituna kiertymän kuplamuotoon. Mikäli leikkausmuodonmuutos keskiarvoistetaan yhtälössä (45), eli $\gamma = \pi (\nabla w - \beta^S)$, on $\mathbf{K}_s = A^{(e)} \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s$ ja leikkausvoimalle saadaan

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - p A^{(e)} \mathbf{D}_s \mathbf{C}^{-1}) \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s \mathbf{u}, \quad (48)$$

missä $A^{(e)}$ on elementin pinta-ala ja \mathbf{I} 2×2 yksikkömatriisi. Leikkausjäykkyyden redusoiduksi muodoksi saadaan siten

$$\mathbf{D}_s^* = (\mathbf{I} - p A^{(e)} \mathbf{D}_s \mathbf{C}^{-1}) \mathbf{D}_s. \quad (49)$$

Tarkastellaan nyt yksityiskohtaisesti millainen yllä oleva reduktio on suorakulmaiselle kolmioelementille, kun h on hypotenuusasivun mitta. Otaksutaan homogeeninen isotrooppisesti kimmainen tasapaksu laatta (paksuus t). Käytetään kuplamuodolle interpolaatiota $N_k = L_1 L_2 L_3$. Yksinkertaisten laskutoimitusten jälkeen matriisiksi \mathbf{C} saadaan:

$$\mathbf{C} = \int_{A^{(e)}} (\mathbf{D}_s + \mathbf{L}^* \mathbf{D}_b \mathbf{L}) N_k dA = \frac{Et^3}{72(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} a + b(h/t)^2 & c \\ c & a + b(h/t)^2 \end{bmatrix}, \quad (50)$$

ja korjatuksi leikkausjäykkyydeksi

$$\mathbf{D}_s^* = \frac{kGt}{2 + \alpha(h/t)^2 + f(t/h)^2} \begin{bmatrix} 1 + f(t/h)^2 & -g \\ -g & 1 + f(t/h)^2 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Edellä on käytetty merkintöjä

$$\begin{aligned} a &= 3 - \nu, & b &= \frac{3}{20} k(1 - \nu), & c &= \frac{1}{2} (1 - \nu), \\ \alpha &= b/a, & f &= (a^2 - c^2)/ab, & g &= c/a. \end{aligned}$$

Hyvin ohuen laatan tapauksessa $(t/h) \ll 1$, voidaan suhteellisen paksuuden neliöt pieninä suureina jättää huomioon ottamatta, jolloin saadaan likimäärin

$$D_s^* = \frac{kGt}{2 + \alpha(h/t)^2} \begin{bmatrix} 1 & -g \\ -g & 1 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Mikäli myös kytkentä C matriisissa jätetään huomioon ottamatta, eli asetetaan $c = 0$, saadaan

$$D_s^* = \frac{kGt}{1 + \alpha(h/t)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{t^2}{t^2 + \alpha h^2} D_s, \quad (53)$$

eli kuten stabilointi on esitetty esim. lähteessä [11]. Käyttämällä leikkauskorjauskertoimelle k arvoa $5/6$, on stabilointiparametrin $\alpha = b/a$ arvo välillä $0.025 \leq \alpha \leq 0.042$, kun suppeumaluku ν vaihtelee rajoissa: $\frac{1}{2} \geq \nu \geq 0$.

Nelisolmuisen elementin matriisi C on diagonaalinen suorakaidegeometriassa. Otaksutaan lineaarisesti kimmoinen ortotrooppinen materiaalilaki ja tilanne, jossa materiaalin symmetriasuunnat yhtyvät koordinaattiakselien suuntiin. Otetaan käyttöön seuraavat lyhennyserkinnät:

$$\begin{aligned} \chi_{12} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{G_{12}}{E_1}, & \chi_{13} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{G_{13}}{E_1}, \\ \chi_{23} &= (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{G_{23}}{E_1}, & \psi &= \frac{E_2}{E_1}. \end{aligned} \quad (54)$$

Elementin pitkän x -akselin suuntaisen sivun mitta on h ja y -suunnassa εh . Redusoitu leikkausjäykkymatriisi saadaan ilman likimääräistyksiä muotoon

$$D_s^* = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_{xz}(h/t)^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_{yz}(h/t)^2)^{-1} \end{bmatrix} D_s, \quad (55)$$

missä

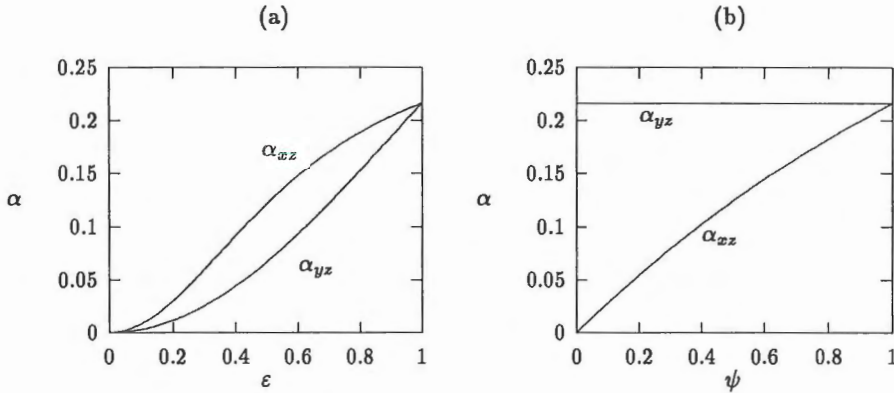
$$\alpha_{xz} = \frac{k\chi_{13}}{1 + \chi_{12}\varepsilon^{-2}}, \quad \alpha_{yz} = \frac{k\chi_{23}}{\chi_{12} + \psi\varepsilon^{-2}}.$$

Isotrooppiselle materiaalille ja neliön muotoiselle elementille α -parametrit ovat yhtäsuuria ja niillä on arvo $\alpha = k(1 - \nu)/(3 - \nu)$, joka siten vaihtelee rajoissa $0.1667 \leq \alpha \leq 0.3125$ suppeumaluvun muuttuessa välillä $\frac{1}{2} \geq \nu \geq 0$. Mikäli suppeumaluvulle valitaan arvo 0.3 on stabilointiparametri 0.216 , mikä vastaa melko hyvin lähteissä [10] ja [11] esitettyä taipuman neliövirheen suhteen optimaalista stabilointiparametrin arvoa (katso kuvaa 13 lähteessä [10] ja kuvaa 7 lähteessä [11]).

Stabilointiparametrin riippuvuus elementin sivusuhteesta ε on esitetty kuvassa 4a isotrooppiselle materiaalimallille, sekä kimmokerrointen suhteesta ortotrooppiselle materiaalille neligeometriassa kuvassa 4b.

Kuvasta 4a voidaan havaita stabilointiparametrien α_{xz} ja α_{yz} pienenevän elementin sivusuhteen pienentyessä. Täten saattaisi olla luontevampaa määrittää leikkauskorjaus muodossa

$$\left(1 + \alpha \frac{A^{(\varepsilon)}}{t^2}\right)^{-1}.$$



Kuva 4 Stabilointiparametrien α_{xz}, α_{yz} riippuvuus (a) elementin sivusuhteesta ϵ , isotrooppinen materiaali $\nu = 0.3$, (b) ortotrooppisen materiaalin tapauksessa kimmokertoimien suhteesta $\psi = E_2/E_1$, oletettuna $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3, G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_2/2.6$, neliöelementti.

Edellä esitetty menettely stabilointiparametrin arvon eksplisiittiseksi määrittämiseksi on hyvin riippuvainen kiertymän kuplamuodon valinnasta. Puuttumatta kysymykseen stabilointiparametrin optimaalisesta arvosta, antanee menettely kuitenkin hyväksyttävän fysikaalisen tulkinnan sen luonteesta.

NUMEERISIA ESIMERKKEJÄ

Demonstroidaan aluksi stabiloinnin, eli leikkauskorjauksen vaikutusta jäykkyysmatriisiin häiriöalttiuteen, joka määritellään kaavalla

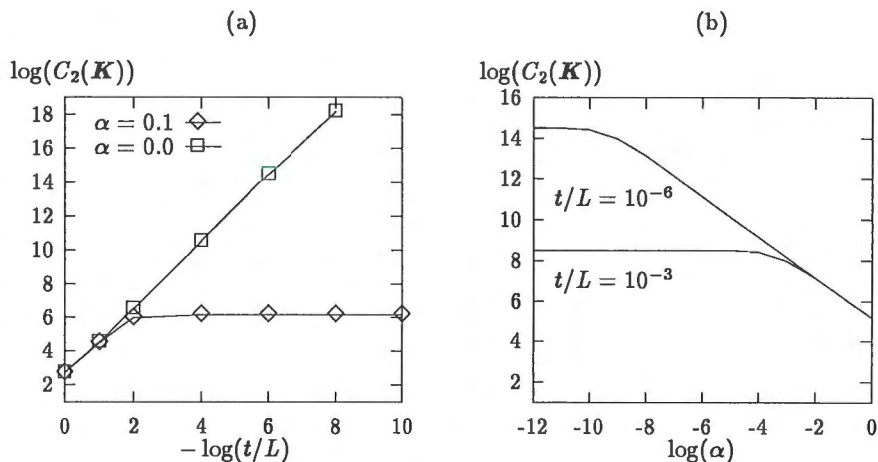
$$C_p(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\|_p \|\mathbf{K}^{-1}\|_p. \quad (56)$$

Mitattuna spektraalinormissa ($p = 2$) on symmetrisen positiivisesti definiitin matriisin häiriöalttiuus sen suurimman ja pienimmän ominaisarvon suhde. Ratkaisun merkitsevien numeroiden s ja häiriöalttiuden välillä on yhteys

$$s \geq r - \log(C_p(\mathbf{K})), \quad (57)$$

missä r on laskennan merkitsevien numeroiden määrä. Kuvassa 5a on esitetty vapaasti tuetun³ neliölaatan (sivun pituus L) jäykkyysmatriisin häiriöalttiuus suhteellisen paksuuden (t/L) funktiona kun laskennassa on käytetty nelisolmuista stabilointia ($\alpha = 0$) ja stabiloitua ($\alpha = 0.1$) MITC elementtiä. Rakenteesta on mallinnettu symmetriasystistä vain yksi neljännes, ja elementtiverkko on ollut tasajakoinen 10×10 . Käytettäessä DKQ tai sen kiertymien kuplamuodoilla parannettua elementtiversiota, on häiriöalttiuden logaritmi 5.72 ja riippumaton suhteellisesta paksuudesta. Stabiloidun MITC elementin vastaava luku paksuusalueella $10^{-4} < t/L < 10^{-10}$ on 6.15, kun parametri α on 0.1 ja vastaavasti 5.51 α :n ollessa 0.4.

³Esimerkissä on käytetty ns. kovaa vapaasti tuettua reunaehtotapausta, eli $w = \beta_s = 0$, missä s on laatan reunan suuntainen koordinaatti.



Kuva 5 Vapaasti tuetun neliölaatan jäykkymatriisin häiriöalttiuden logaritmi vasemmalla suhteellisen paksuuden funktiona ja oikealla sen riippuvuus stabilointiparametrilla α . Nelisolmuinen MITC elementti, 10×10 elementtiverkko laatan neljänneksellä (300 vapausastetta).

Taulukko 1 Pohjustetun konjugaattigradienttimenetelmän iteraatiomäärän riippuvuus stabilointiparametrilla α .

pohjustin	α				
	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
IC(0)	-	-	-	-	76
SSOR	148	108	77	63	54

Kuvasta 5b voidaan todeta jäykkymatriisin häiriöalttiuden pienenevän, mikäli stabilointiparametri on pienempi kuin $\alpha \approx (t/L)^{3/2}$. Käytettäessä optimaalisia α arvoja, siis $0.01 \leq \alpha \leq 1$, MITC elementtien häiriöalttiuus palautuu DK elementtien tasolle.

Häiriöalttiuden vaikutus näkyy erityisesti ratkaistaessa lineaarinen yhtälösystemi iteratiivisesti. Taulukossa 1 on esitetty pohjustetun konjugaattigradienttimenetelmän iteraatioiden lukumäärä pyrittäessä residuaalin suhteelliseen tarkkuuteen 10^{-4} edellä selostetussa tehtävässä, kun laatan suhteellinen paksuus on $t/L = 10^{-6}$. Pohjustimena on käytetty symmetristä ylirelaksaatiota (SSOR) tai epätäydellistä Choleskyn hajotelmaa, jossa täyttymistä ei sallita (IC(0)) [1]. IC(0) hajotelma onnistuu ainoastaan stabilointiparametrin arvoilla $\alpha \geq 0.39$. SSOR pohjustimessa tarvittavan ylirelaksaatioparametrin ω vaihtelu välillä 1–1.25 ei juurikaan vaikuta iteraatiomäärään ja antaa optimaalisen tuloksen.

DK elementtien vaihtoehtoisia geometrisen jäykkymatriisin \mathbf{K}_g muodostamistapoja on vertailtu vapaasti tuetun laatan kriittisen lommahduskuorman määrittämisessä. Laatan suhteellinen paksuus on $t/L = 10^{-6}$ ja materiaalivakiot ja referenssi-

Taulukko 2 Laatan lommahduskuorma, elementtien vertailua.

elementti		verkko laatan neljänneksellä		
		4×4	8×8	16×16
MITC4	$\alpha = 0.2$	1.0068220	1.0017086	1.0004273
MITC3	$\alpha = 0.4$ 3 int. p.	0.9895510	0.9974028	0.9993467
MITC3	$\alpha = 0.4$ 1 int. p.	0.9859422	0.9964383	0.9991011
DKQ-LC		1.0002306	1.0000144	1.0000009
DKQ-LC	K_g kiertymistä	1.0260923	1.0064502	1.0016079
DKQ	lineaarinen w	1.0151933	1.0037809	1.0009441
DKQ	kvadraattinen w	0.9773465	0.9941883	0.9985374
DKQ	K_g kiertymistä	1.0023089	1.0005663	1.0001408
DKT	lineaarinen w	1.0009434	1.0000751	0.9999991
DKT	kvadraattinen w	0.9881664	0.9968657	0.9991961
DKT	K_g kiertymistä	0.9981267	0.9994188	0.9998431
BFS		1.0000165	1.0000010	1.0000001

kuormituksen intensiteetti on valittu siten, että Kirchhoffin laattamallin mukainen kriittisen kuormaparametrin arvo on yksi. Kuormitus on yksiakselinen. Taulukossa 2 on esitetty kriittisen kuormaparametrin arvot käyttäen kolmea eri elementtijakoa. Lyonsin elementin Crisfieldin modifikaatiota on merkitty lyhenteellä DKQ-LC.

Vertailuun on otettu mukaan bikuubinen Bogner-Fox-Schmit elementti (BFS) [3], joka on yksi varhaisimmista Kirchhoffin mallin elementeistä. Siinä taipuman interpolaaatio on yhteensopiva ja konstruoitu klassisesta Eulerin-Bernoullin palkkielementistä tunnettujen Hermiten interpolaatiofunktioiden avulla. Vapausasteina ovat taipuma, sen ensimmäiset derivatat ja sekaderivaatta $w_{,xy}$, mikä hankaloittaa elementin käyttökelpoisuutta.

Taulukossa 3 on esitetty tulokset vapaasti tuetun laatan ominaistajuusanalyysistä. Laatan materiaalivakiot on jälleen valittu siten, että Kirchhoffin mallin ominaisvärähtelyn alin taajuus on 1 Hz. Geometriset mitat ovat kuten edellisessä esimerkissä.

Vaikka edellä esitetyt testit eivät ole mitenkään riittäviä varmojen päätelmien tekemiseen, voidaan niistä kuitenkin havaita tiettyjä ominaispiirteitä. Klassisten DK-elementtien geometrisen jäykkymatriisin muodostamiseen on syytä käyttää lineaarista taipuman interpolaatiota; tosin ero ei ole suuri käytettäessä kvadraattista taipumaa. Kaikkein huonoin tulos saatiin muodostamalla geometrinen jäykkymatriisi kiertymien interpolaatiosta. Lyonsin-Crisfieldin menettely parantaa huomattavasti DKQ elementin tarkkuutta esitetyissä testeissä, joten kiertymien kuplamuodon käyttö on suotavaa, koska elementin jäykkymatriisin muodostamistyö ei siitä juurikaan kasva. Stabiloidut MITC elementit ovat tarkkuudeltaan vastaavien DK elementtien luokkaa.

Bogner-Fox-Schmit elementin käyttäytyminen on ylivoimaisesti paras. Tosin työmäärä elementin jäykkymatriisin muodostamisessa on hieman suurempi DKQ ja MITC4 elementteihin verrattuna, sillä BFS elementti vaatii 3×3 Gaussin integroinnin. Lisäksi systeemin vapausastemäärä hieman kasvaa $w_{,xy}$ vapausasteen

Taulukko 3 Laatan alin ominaistajuus, elementtien vertailua.

elementti		verkko laatan neljänneksellä		
		4×4	8×8	16×16
MITC4	$\alpha = 0.2$	0.9845722	0.9960631	0.9990106
MITC3	$\alpha = 0.4$ 3 int. p.	1.0083457	1.0021861	1.0005506
MITC3	$\alpha = 0.4$ 1 int. p.	1.0065184	1.0017026	1.0004277
DKQ-LC		1.0001154	1.0000072	1.0000005
DKQ	lineaarinen w	1.0140540	1.0034989	1.0008738
DKQ	kvadraattinen w	0.9886102	0.9970899	0.9992685
DKT	lineaarinen w	1.0142039	1.0035334	1.0008775
DKT	kvadraattinen w	0.9942425	0.9984429	0.9995987
BFS		1.0000083	1.0000005	1.0000000

ansioista.

Alhaisasteisten MITC elementtien taipuman ja jännitysresultanttisuureiden suppenemisominaisuuksia on tutkittu lähteissä [10], [11]. Kuten em. artikkelien tuloksista voidaan havaita, jännitysresultantit, joista erityisesti leikkausvoimat ovat sitä tarkempia mitä suurempi arvo stabilointiparametrille valitaan. Myös kirjoittajan omat kokemukset epälineaarista analyysistä osoittaisivat aiheelliseksi käyttää hieman suurempia stabilointiparametrin arvoja kuin lähteissä [10], [11]. Tämä tuntuu luonnolliselta, sillä epälinearisessa analyysissä voimatila on tärkein tekijä tasapainopolun kulun määrittämisessä.

LOPUKSI

Kirjallisuudessa on esitetty lukematon joukko erilaisia laattaelementtien konstruointeja. Artikkelissa on pyritty valaisemaan muutamien alhaisasteisten laattaelementtiformulaatioiden perusteita. Pitkäranta ja Suri [18] ovat esittäneet melko yleisen matemaattisen formalismin toimivien so. lukkiutumattomien ja numeerisesti stabiilien Reissnerin-Mindlinin mallin elementtien muodostamiseksi. He konstruivat viisi ehtoa, jotka sitovat taipuman ja kiertymän interpolaatioita sekä leikkausmuodonmuutoksen laskemisessa tarvittavaa redusointioperaatiota. Koska em. ehtojen esittäminen vaatisi raskaan matemaattisen kaluston määrittelyä, tyydytään vain toteamaan kahden ehdon takaavan numeerisen ratkaisun yksikäsitteisyyden ja stabiiliuden ja toiset kaksi tarvitaan rajoittamaan leikkausmuodonmuutosta laskettaessa mahdollisesti syntyvää konsistenssivirhettä, joka aiheutuu redusointioperaatiosta jota tarvitaan korjaamaan taipuman ja kiertymien interpolaatioiden "epätasapainoa". Viides ehto sitoo taipuman ja kiertymien interpolaatioita. Voidaankin tyydytyksellä todeta, että laattaelementtien konstruoinnin periaatteet viimein tunnetaan.

Kiitokset

Juha Paavolalle, Henri Perttolalle, Eero-Matti Saloselle ja Markku Tuomalalle kommentteista.

VIITTEET

- [1] O. Axelsson, V.A. Barker, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computation*, Academic Press, 1984.
- [2] K.-J. Bathe, E.N. Dvorkin, A four node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and mixed interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21: 367–383, 1985.
- [3] F.K. Bogner, R.L. Fox, L.A. Schmit, The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas, *Conference of Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson AFB, Ohio, sivut 397–444, 1965.
- [4] F. Brezzi, M. Fortin, R. Stenberg, Error analysis of mixed interpolated elements for Reissner-Mindlin plates, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1: 125–151, 1991.
- [5] M.A. Crisfield, *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis*, Vol. 1: Linear Analysis, Pineridge Press, 1986.
- [6] E.N. Dvorkin, K.-J. Bathe, A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis, *Engineering Computations*, 1: 77–88, 1984.
- [7] I. Fried, S.K. Yang, Triangular, nine-degrees-of-freedom, C^0 plate bending element with quadratic accuracy, *Quarterly of Applied Mathematics*, 31:303–312, 1973.
- [8] A. Tessler, T.J.R. Hughes, A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50:71–101, 1985.
- [9] R. Kouhia, M. Tuomala, *Rakenteiden mekaniikan numeeriset menetelmät*, luentomoniste 1996.
- [10] M. Lyly, R. Stenberg, T. Vihinen, A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110: 343–357, 1993.
- [11] M. Lyly, R. Stenberg, New three and four noded plate bending elements, *Rakenteiden Mekaniikka*, 27: 3–29 (2), 1994.
- [12] M. Lyly, On the connection between some linear Reissner-Mindlin plate bending elements, käsikirjoitus 1996.
- [13] L.P.R. Lyons, A general finite element system with special reference to the analysis of cellular structures, väitöskirja, Imperial College, Lontoo, 1977.
- [14] R.H. MacNeal, A simple quadrilateral shell element, *Computers and Structures*, 8: 175–183, 1978.
- [15] R.H. MacNeal, *Finite Elements: Their Design and Performance*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1994.
- [16] L.S.D. Morley, The constant moment plate bending element, *Journal on Strain Analysis*, 6: 20–24, 1971.
- [17] J. Pitkäranta, Analysis of some low-order finite element schemes, *Numerische Mathematik*, 53: 237–254, 1988.
- [18] J. Pitkäranta, M. Suri, Design principles and error analysis for reduced-shear plate-bending finite elements, ilmestyy *Numerische Mathematik*.

Reijo Kouhia, TKK/rakenteiden mekaniikka, sähköposti: Reijo.Kouhia@hut.fi