

YKSINKERTAISTEN RAKENNEMALLIEN TASAPAINO- YHTÄLÖT - osa III KUORIRAKENTEET

Juha Paavola ja Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 29
Nro 3-4, 1996, s. 11-34

TIIVISTELMÄ Tämän artikkelisarjan tarkoituksena on valaista virtuaalisen työn periaatteen käyttökelpoisuutta yksinkertaisten perusrakennemallien, kuten sauvojen, laattojen ja kuorien tasapainoyhtälöitä johdattaessa. Sarja koostuu neljästä artikkelista, joissa kussakin käsitellään yhtä edellä mainituista rakennetyypeistä. Huomiota kiinnitetään virtuaalisen työn periaatteen systemaattisuuden lisäksi erikoisesti siihen, miten liiketilän erilaiset perusotaksumat vaikuttavat tehtävien formulointiin. Tässä osassa käsitellään kuorirakenteita edellä esitetyn ohjelman mukaisesti.

JOHDANTO

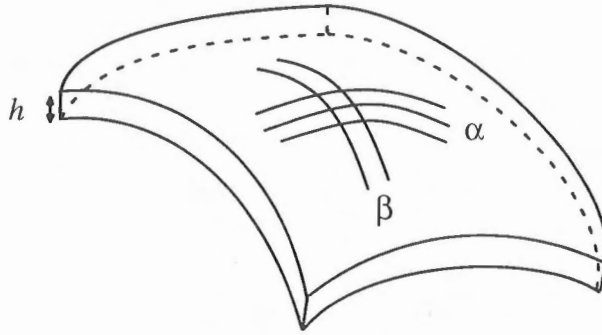
Kuoret ovat pintarakenteita kuten artikkelisarjan osassa II käsitellyt laattarakenteetkin. Erona on kuitenkin se, että kuoret muodostuvat kaarevista pinnoista kun taas laatat ovat tasopintoja. Suhde on aivan vastaavanlainen kuin suorien ja kaarevien sauvojen välillä. Myös kuoreissa rakenteen pinnan ulottuvuuksiin liittyy paksuuden suunnassa pieni mitta. Lopullisesta tehtävän matemaattisesta formulaatiosta paksuuden suuntainen koordinaatti suodattuu jälleen kokonaan pois, jolloin kuoriprobleema redusoituu puhtaasti kaksidimensioiseksi. Kuoren rakennemalli siis koostuu äärettömän ohuesta kalvosta, joka sijoittuu referenssipinnalle. Täksi valitaan useimmiten kuoren keskipinta.

Tarkastelussa käytetään täysin yleisiä käyräviivaisia suorakulmaisia koordinaatteja. Erikoistapauksena käsitellään pyörähdyssymmetristä kuorirakennetta. Tässä esityksessä on tarkoitus jälleen korostaa virtuaalisen työn periaatteen sekä paikallisen suorakulmaisen koordinaatiston soveltamisen tarjoamia etuja yleisissä käyräviivaisissa koordinaateissa määriteltyjen tehtävien ratkaisussa.

KUOREN GEOMETRIA

Laatan geometriaa määritettäessä laatan keskipinta asetettiin x, y -tasoon, jossa $z = 0$. Näin ei voida menetellä kuoren tapauksessa, vaan jokaisen kuoren referenssipinnan pisteen (α, β) aseman kolmidimensioisessa avaruudessa x, y, z määrittää paikkavektori

$$\vec{r}_o = \vec{r}_o(\alpha, \beta) = x(\alpha, \beta)\vec{e}_x + y(\alpha, \beta)\vec{e}_y + z(\alpha, \beta)\vec{e}_z.$$



Kuva 1. Kuoren geometria.

Parametrit α ja β , joita kutsutaan jatkossa myös pintaparametreiksi, voivat olla mielivaltaisesti valittuja ja niiden muodostamat käyräviivaiset koordinaattiviivat sijaitsevat kuoren referenssipinnalla. Käytännössä parametrit kuitenkin pyritään valitsemaan siten, että tietyt koordinaattiviivat yhtyvät kuoren reunaviivaan. Täysin mielivaltaisen muotoista rakennetta analysoitaessa tämä ei kuitenkaan ole mahdollista.

Referenssipinnan paikallista normaalikoordinaattia merkitään jatkossa symbolilla z , jota käytettiin myös yhdelle suunnaltaan kiinteälle globaalille koordinaatille. Näin menetellään, jotta säilytettäisiin esityksen yhdenmukaisuus osassa II esitetyn laattateorian kanssa. Suurta haittaa ei merkintäsopimuksesta varmaan kuitenkaan pääse syntymään. Kyseisen z -koordinaatin positiivinen suunta valitaan siten, että järjestelmä α, β, z tulee oikeakätiseksi. Referenssipinnan koordinaattiviivojen tangenttivektorit saadaan paikkavektorin derivaattoina parametrien α ja β suhteen. Vastaavat yksikkötangenttivektorit saadaan jakamalla ne mittakaavatekijöillä eli LAME'n parametreilla H_α ja H_β , jotka skaalaavat derivaattavektorit laadultaan ja pituudeltaan oikeiksi:

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \alpha},$$

$$\vec{e}_\beta = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \beta}.$$

Mittakaavatekijöiden lausekkeet ovat

$$H_\alpha = \left| \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \alpha} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2},$$

$$H_\beta = \left| \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \beta} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2}.$$

Koordinaattiviivojen välinen kulma χ määritetään yhtälöstä

$$\begin{aligned} \cos \chi &= \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \beta} \\ &= \frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} \right). \end{aligned}$$

Jos α ja β ovat ortogonaalisia, $\cos \chi = 0$. Suunnaltaan muuttuvan normaalin suuntainen yksikkövektori

$$\vec{e}_z = \frac{\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta}{|\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta|} = \frac{1}{\sin \chi} (\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta).$$

Kaarevan pinnan geometriaa kuvataan perinteisesti niinsanottujen pinnan neliömuotojen avulla. Ensinnäkin, koska $\vec{r}'_o = \vec{r}'_o(\alpha, \beta)$ ja $\vec{e}_z = \vec{e}_z(\alpha, \beta)$ differentiointi antaa

$$\begin{aligned} d\vec{r}'_o &= \frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \beta} d\beta, \\ d\vec{e}_z &= \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \beta} d\beta. \end{aligned}$$

Pinnan ensimmäinen neliömuoto I on

$$\begin{aligned} I = d\vec{r}'_o \cdot d\vec{r}'_o &= \left(\frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \alpha} \right) (d\alpha)^2 + 2 \left(\frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta + \left(\frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \beta} \right) (d\beta)^2 \\ &= H_\alpha^2 (d\alpha)^2 + 2H_\alpha H_\beta \cos \chi d\alpha d\beta + H_\beta^2 (d\beta)^2, \end{aligned}$$

ja toinen vastaavasti

$$\begin{aligned} II = d\vec{r}'_o \cdot d\vec{e}_z &= \left(\frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \alpha} \right) (d\alpha)^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \beta} + \frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \alpha} \right) d\alpha d\beta + \left(\frac{\partial \vec{r}'_o}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \beta} \right) (d\beta)^2 \\ &= \frac{H_\alpha^2}{R_\alpha} (d\alpha)^2 - 2 \frac{H_\alpha H_\beta}{R_{\alpha\beta}} d\alpha d\beta + \frac{H_\beta^2}{R_\beta} (d\beta)^2. \end{aligned}$$

Pinnan kaarevuudet ja kaarevuussäteet R_α ja R_β koordinaattiviivojen suunnissa on määritelty aivan vastaavasti kuin osassa I sauvan tapauksessa, eli

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_\alpha} &= -\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_\alpha \cdot \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \alpha}, \\ \frac{1}{R_\beta} &= -\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_\beta \cdot \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \beta}, \end{aligned} \quad (1)$$

joissa jälkimmäinen esitysmuoto on saatu ehdosta, että yksikkönormaali on kohtisuorassa pintakoordinaatteja vastaan. Lisäksi on määritelty pintaan liittyvät kierevyydet ja kierevyysäteet $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{\alpha\beta}} &= \frac{1}{R_{\beta\alpha}} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_z \\ &= -\vec{e}_\beta \cdot \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \alpha} = -\vec{e}_\alpha \cdot \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Määrittämällä nyt normaalikaarevuus

$$\frac{1}{R} = \frac{II}{I},$$

ja etsimällä sille ääriarvot parametrin $\lambda = \frac{H_\alpha d\alpha}{H_\beta d\beta}$ suhteen saadaan toisen asteen yhtälö

$$\left(\frac{\cos \chi}{R} + \frac{1}{R_{\alpha\beta}}\right)^2 - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_\alpha}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_\beta}\right) = 0,$$

pinnan pääkaarevuuksien määrittämiseksi. Tämä voidaan edelleen esittää muodossa

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 - 2H\frac{1}{R} + K = 0,$$

jossa kertoimet H ja K , joita kutsutaan pinnan keskikaarevuudeksi ja Gaussin kaarevuudeksi, ovat

$$2H = \frac{1}{\sin^2 \chi} \left(\frac{2 \cos \chi}{R_{\alpha\beta}} + \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

$$K = \frac{1}{\sin^2 \chi} \left(\frac{1}{R_{\alpha\beta}^2} - \frac{1}{R_\alpha} \frac{1}{R_\beta} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}.$$

Pääkaarevuuksiksi saadaan

$$\frac{1}{R_1} = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad \frac{1}{R_2} = H - \sqrt{H^2 - K},$$

ja ne esiintyvät pääsuunnissa, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Pintaa sanotaan elliptiseksi, jos Gaussin kaarevuus on positiivinen $K > 0$, paraboliseksi, jos Gaussin kaarevuus häviää $K = 0$ ja hyperboliseksi, jos Gaussin kaarevuus on negatiivinen $K < 0$.

Rajoitetaan tarkastelu tässä yhteydessä suorakulmaisiin käyräviivaisiin koordinaatteihin, jolloin siis $\chi = \pi/2$. Ortogonaalisuudesta seuraa

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0.$$

Osassa II laattaa käsiteltäessä johdettiin pinnan koordinaattiviivojen suuntaisten yksikkötangenttivektoreiden derivaattojen lausekkeet:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} \\ \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} \\ -\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \end{Bmatrix}.$$

Nämä pätevät myös kuoren tapauksessa. Sen sijaan yksikkönormaali ei enää ole suunnaltaan vakio, joten tarvitaan lisäksi lausekkeet normaalivektorin derivaatoille sekä pinnan tangenttivektoreiden derivaattojen komponentit normaalin suunnalle. Nämä saadaan suoraan kaarevuuksien ja kierevyyden määritelmistä (1) ja (2) komponenteittain.

Täten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} & -\frac{H_\alpha}{R_\alpha} \\ \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} & 0 & \frac{H_\alpha}{R_{\alpha\beta}} \\ \frac{H_\alpha}{R_\alpha} & -\frac{H_\alpha}{R_{\alpha\beta}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} & \frac{H_\beta}{R_{\alpha\beta}} \\ -\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} & 0 & -\frac{H_\beta}{R_\beta} \\ -\frac{H_\beta}{R_{\alpha\beta}} & \frac{H_\beta}{R_\beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Mielivaltaisen kuoren referenssipinnan ulkopuolisen pisteen paikkavektori saadaan jälleen lisäämällä vastaavaan referenssipinnalla olevan pisteen paikkavektoriin normaalin suuntainen komponentti:

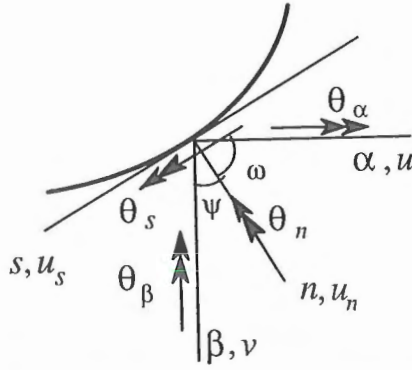
$$\vec{r}(\alpha, \beta, z) = \vec{r}_o(\alpha, \beta) + z\vec{e}_z(\alpha, \beta).$$

Tämän derivaattavektoreiksi saadaan soveltamalla suoraan edellä esitettyä

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \alpha} + z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \alpha} = H_\alpha \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \vec{e}_\alpha - H_\alpha \frac{z}{R_{\alpha\beta}} \vec{e}_\beta, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} &= \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \beta} + z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \beta} = H_\beta \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) \vec{e}_\beta - H_\beta \frac{z}{R_{\alpha\beta}} \vec{e}_\alpha, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (4)$$

KUOREN KINEMATIikka ELI LIIKETILA

Kuoren kuten laatankin liike määräytyy kaikkiaan viiden toisistaan riippumattoman liikekomponentin avulla. Näistä kolme on translaatioita ja kaksi rotaatioita. Koordinaattien α , β ja z suuntaiset translaatiokomponentit ovat u , v ja w . Keskitason normaalin suuntaisen ainesäikeen rotaatiokomponentit α - ja β -koordinaattiviivojen ympäri ovat θ_α ja θ_β . Kaikki mitä osassa II esitettiin laatan kinematiikasta pätee täsmälleen samanlaisena kuorirakenteeseen. Niin perinteisissä laatta- kuin kuoriteorioissa siirtymävektorille otaksutaan lineaarinen riippuvuus normaalikoordinaatista z . Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisen normaalin suuntaisen ainesäikeen otaksutaan pysyvän rakenteen deformaatioissa suorana. Reissner-Mindlinin ja Kirchhoffin kuoriteorioiden välisenä erona on se, että jälkimmäisessä keskipinnan normaalin otaksutaan pysyvän normaalina deformaation aikana, kun taas edellisessä normaalin rotaatiot ovat riippumattomia muuttujia. Siirtymä- ja rotaatiokomponenttien positiiviset suunnat on esitetty kuvassa 2.



Kuva 2. Siirtymät ja rotaatiokomponentit.

Lineaarisen teorian mukainen kuoren siirtymätila on edellisen perusteella

$$\begin{aligned} \vec{u}(\alpha, \beta, z) = & [u(\alpha, \beta) - z\theta_\beta(\alpha, \beta)] \vec{e}_\alpha(\alpha, \beta) \\ & + [v(\alpha, \beta) - z\theta_\alpha(\alpha, \beta)] \vec{e}_\beta(\alpha, \beta) + w(\alpha, \beta) \vec{e}_z(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (5)$$

Tämä eroaa aikaisemmin esitetystä laatan siirtymätilasta ainoastaan siten, että pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori ei ole suunnaltaan vakio eikä näinollen vakio derivoinnin suhteen.

Muodonmuutoksia määritettäessä hyödynnetään jälleen paikallista kiinteää suorakulmaista koordinaattijärjestelmää X, Y, Z . Tällöin tarvittavat derivaattojen väliset muunnoskaavat saadaan käyttökelpoiseen muotoon (vrt. osa II)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_x & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_y & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_z \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_x & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_y & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_z \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \cdot \vec{e}_x & \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \cdot \vec{e}_y & \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Siirtymävektori \vec{u} voidaan esittää myös paikallisen koordinaattijärjestelmän avulla:

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z,$$

jossa siirtymäkomponentit ovat $u_x = \vec{u} \cdot \vec{e}_x$, $u_y = \vec{u} \cdot \vec{e}_y$, $u_z = \vec{u} \cdot \vec{e}_z$. Muodonmuutosten lausekkeet ovat täsmälleen samat kuin aikaisemmin laattateorian yhteydessä:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_x, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_y, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_y, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_z, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_x. \end{aligned} \quad (7)$$

Paikallinen koordinaatisto sijoitetaan siten, että X - ja Y -koordinaattiviivat sivuavat kussakin pisteessä kuoren pinnalla käyräviivaisia pintakoordinaatteja α ja β . Tällöin Z -koordinaattiviiva yhtyy kuoren paikallisen normaalin suuntaan, eli yksikkövektoreiden väliset yhteydet $\vec{e}_X = \vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_Y = \vec{e}_\beta$, $\vec{e}_Z = \vec{e}_z$ ovat voimassa. Kun derivointisääntöön (6) sijoitetaan paikkavektorin derivaatat (4) ja otetaan huomioon edellä esitetty yksikkövektoreiden väliset yhteydet, saadaan

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_\alpha(1 + \frac{z}{R_\alpha}) & H_\alpha \frac{z}{R_{\alpha\beta}} & 0 \\ H_\beta \frac{z}{R_{\alpha\beta}} & H_\beta(1 + \frac{z}{R_\beta}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Itse asiassa on esitetty käänteinen yhteys differentiaalioperaattoreiden välillä, jota jatkossa tullaan nimenomaan käyttämään. Se, että matriisi, joka välittää yhteyden operaattoreiden välillä, ei ole diagonaalinen, kun $z \neq 0$, tarkoittaa fysikaalisesti, että ortogonaalisuus referenssipinnalla ei takaa ortogonaalisuutta referenssipinnan ulkopuolella. Ei-ortogonaalisuus aiheuttaa käytännön ongelmia, koska tarvittavan kääntematriisin alkiot tulevat olemaan varsin mutkikkaita lausekkeita. Tätä varten siirretään tarkastelu pääkaarevuuskoordinaatistoon, jossa pinnan kierevyys $1/R_{\alpha\beta}$ häviää. Jatkossa siis koordinaatit α ja β otaksutaan pääkaarevuuskoordinaateiksi. Tällöin edellä esitetty matriisi palautuu diagonaaliseen muotoon ja saadaan

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_\alpha^{-1}(1 + \frac{z}{R_\alpha})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & H_\beta^{-1}(1 + \frac{z}{R_\beta})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Tästä yhtälöstä nähdään myös myöhemmin tarvittavat yhteydet $dX = H_\alpha(1 + z/R_\alpha)d\alpha$ ja $dY = H_\beta(1 + z/R_\beta)d\beta$.

KUOREN MUODONMUUTOKSET

Tarkastellaan edelleen kuvassa 1 esitettyä kuorirakennetta. Siirtymätila on esitetty kaavassa (5). Johdettaessa muodonmuutosten lausekkeita tehdään vertailua vastaavien laattateorian lausekkeiden kanssa alleviivaamalla ne termit, jotka eivät esiinny laattateoriassa. Kaavojen (7) ja (8) perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_x = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\alpha}} \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_\alpha, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_y = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_\beta}} \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_\beta, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_y = \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_\alpha + \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_\beta, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \vec{e}_\beta + \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_z, \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_x = \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \vec{e}_\alpha.
\end{aligned}$$

Näissä on ainoana erona laattateoriaan verrattuna differentiaalioperaattoreiden muunnoskaavassa (8) esiintyvät pinnan kaarevuudesta johtuvat alleviivatut termit $1 + z/R_i, i = \alpha, \beta$. Siirtymävektorin (5) derivaatan lausekkeissa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - z \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha}\right) \vec{e}_\alpha + (u - z\theta_\beta) \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - z \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha}\right) \vec{e}_\beta \\
&\quad + (v - z\theta_\alpha) \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \vec{e}_z + w \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \alpha}, \\
\frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} &= \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - z \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta}\right) \vec{e}_\alpha + (u - z\theta_\beta) \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - z \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta}\right) \vec{e}_\beta \\
&\quad + (v - z\theta_\alpha) \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \vec{e}_z + w \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \beta}, \\
\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} &= -\theta_\beta \vec{e}_\alpha - \theta_\alpha \vec{e}_\beta.
\end{aligned}$$

eron laattateoriaan aiheuttavat koordinaattiakselien suuntaisten yksikkövektoreiden derivaattojen komponentit normaalin suunnalle sekä normaalin suuntaisen yksikkövektorin derivaatta. Pelkistetyksi voitaisiin sanoa, että ero laatta- ja kuoriteorian välillä on nähtävissä vertailemalla yhtälöitä (3) ja (8) vastaaviin kaavoihin (5) ja (12) artikkelisarjan osassa II.

Sijoittamalla siirtymävektorin derivaatat lausekkeisiin (9), ottamalla huomioon yksikkövektoreiden derivaatoille edellä johdetut tulokset (3) saadaan

$$\begin{aligned}
\epsilon_x = \epsilon_\alpha &= \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} \frac{1}{H_\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - z \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} + \frac{v - z\theta_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{w}{R_\alpha}\right), \\
\epsilon_y = \epsilon_\beta &= \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} \frac{1}{H_\beta} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - z \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} + \frac{u - z\theta_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} + H_\beta \frac{w}{R_\beta}\right), \\
\epsilon_z = \epsilon_z &= 0, \\
\gamma_{xy} = \gamma_{\alpha\beta} &= \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} \frac{1}{H_\alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - z \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{u - z\theta_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta}\right) \\
&\quad + \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} \frac{1}{H_\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - z \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} - \frac{v - z\theta_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha}\right), \\
\gamma_{yz} = \gamma_{\beta z} &= \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} \frac{1}{H_\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} - H_\beta \frac{v - z\theta_\alpha}{R_\beta}\right) - \theta_\alpha, \\
\gamma_{zx} = \gamma_{z\alpha} &= \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} \frac{1}{H_\alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - H_\alpha \frac{u - z\theta_\beta}{R_\alpha}\right) - \theta_\beta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Nämä voidaan esittää tavanomaisesti myös z :n kasvavan potenssin mukaan kehitettyinä sarjalausekkeina. Ottamalla käyttöön eri kertoimille lyhennysmerkinnät, joihin liittyy perinteinen deformaatiotilan geometrinen tulkinta, saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\alpha &= \epsilon_\alpha^o + z\kappa_\alpha + \mathcal{O}(z^2), \\
 \epsilon_\beta &= \epsilon_\beta^o + z\kappa_\beta + \mathcal{O}(z^2), \\
 \gamma_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}^o + z\kappa_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(z^2), \\
 \gamma_{\beta z} &= \gamma_{\beta z}^o \left[1 - \frac{z}{R_\beta} + \mathcal{O}(z^2) \right], \\
 \gamma_{z\alpha} &= \gamma_{z\alpha}^o \left[1 - \frac{z}{R_\alpha} + \mathcal{O}(z^2) \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Vakiotermit, joissa yläindeksi nolla viittaa kuoren referenssipintaan, edustavat kalvotilan muodonmuutoksia. Linearisesti kuoren normaalikoordinaatista riippuvien termien kertoimet vastaavat referenssipinnan kaarevuuksien ja kierevyyden muutoksia, joita nimitetään yleistetyssä mielessä käyrityksiksi. Kalvotilan muodonmuutosten lausekkeet ovat

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\alpha^o &= \frac{\partial u}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{v}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha}, \\
 \epsilon_\beta^o &= \frac{\partial v}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta}, \\
 \gamma_{\alpha\beta}^o &= \frac{\partial u}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial v}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{v}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha}, \\
 \gamma_{\beta n}^o &= \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} - \frac{v}{R_\beta} - \theta_\alpha, \\
 \gamma_{n\alpha}^o &= \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u}{R_\alpha} - \theta_\beta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Käyritymien lausekkeet ovat

$$\begin{aligned}
 \kappa_\alpha &= -\frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{\partial u}{H_\alpha \partial \alpha} + \left(\frac{v}{H_\alpha} + \frac{R_\alpha \theta_\alpha}{H_\alpha} \right) \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha} + \frac{R_\alpha \partial \theta_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \right), \\
 \kappa_\beta &= -\frac{1}{R_\beta} \left(\frac{\partial v}{H_\beta \partial \beta} + \left(\frac{u}{H_\beta} + \frac{R_\beta \theta_\beta}{H_\beta} \right) \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} + \frac{R_\beta \partial \theta_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \right), \\
 \kappa_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{\partial v}{H_\alpha \partial \alpha} - \left(\frac{u}{H_\alpha} + \frac{R_\alpha \theta_\beta}{H_\alpha} \right) \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{R_\alpha \partial \theta_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{R_\beta} \left(\frac{\partial u}{H_\beta \partial \beta} - \left(\frac{v}{H_\beta} + \frac{R_\beta \theta_\alpha}{H_\beta} \right) \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{R_\beta \partial \theta_\beta}{H_\beta \partial \beta} \right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Kirchhoffin teoriaan päästään, kuten laattojenkin kohdalla, asettamalla kahdessa viimeisessä yhtälöistä (10) tai (12) $\gamma_{\beta z} = \gamma_{z\alpha} = 0$, joista saadaan rotaatioille rajoitteet

$$\begin{aligned}
 \theta_\alpha &= \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} - \frac{v}{R_\beta}, \\
 \theta_\beta &= \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u}{R_\alpha}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Sijoittamalla nämä yhteydet muodonmuutosten lausekkeisiin (10) päädytään vastaaviin perinteisen kuoriteorian lausekkeisiin

$$\begin{aligned}
\epsilon_\alpha &= \frac{\partial u}{H_\alpha \partial \alpha} + \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} \left[\left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) \frac{v}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha} \right. \\
&\quad \left. - z \left(\frac{u}{R_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \right) \right], \\
\epsilon_\beta &= \frac{\partial v}{H_\beta \partial \beta} + \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} \left[\left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \frac{u}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} \right. \\
&\quad \left. - z \left(\frac{v}{R_\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial}{H_\beta \partial \beta} \left(\frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} \right) \right) \right], \quad (15) \\
\gamma_{\alpha\beta} &= -\frac{u}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{v}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} \left[\left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) \frac{\partial v}{H_\alpha \partial \alpha} \right. \\
&\quad \left. - z \left(\frac{v}{R_\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} \right) \right) \right] \\
&\quad + \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} \left[\left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \frac{\partial u}{H_\beta \partial \beta} - z \left(\frac{u}{R_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial}{H_\beta \partial \beta} \left(\frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

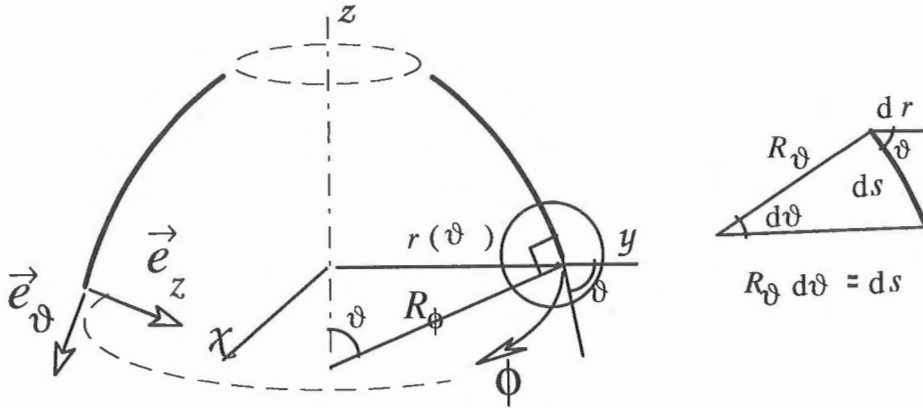
Nämä voidaan lopuksi haluttaessa esittää z :n kasvavien potenssien mukaan kehitettyinä sarjoina, vastaten lausekkeita (11), joissa keskipinnan muodonmuutokset ovat samat kuin yhtälöissä (13) esitetyt, mutta käyrästymät ovat lausekkeiden (13) sijasta muotoa

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha &= \left(\frac{1}{R_\beta} - \frac{1}{R_\alpha} \right) \frac{v}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u}{R_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{w}{R_\alpha^2} - \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} \right), \\
\kappa_\beta &= \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) \frac{u}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{v}{R_\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{H_\beta \partial \beta} - \frac{w}{R_\beta^2} - \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{\partial}{H_\beta \partial \beta} \left(\frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} \right), \\
\kappa_{\alpha\beta} &= \left(\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) \left(\frac{\partial u}{H_\beta \partial \beta} - \frac{\partial v}{H_\alpha \partial \alpha} \right) - \frac{u}{R_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{v}{R_\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \\
&\quad + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} \right) - \frac{\partial}{H_\beta \partial \beta} \left(\frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} \right). \quad (16)
\end{aligned}$$

Johdettaessa jatkossa tasapainoyhtälöitä on tarpeen purkaa muodonmuutoskomponentti $\gamma_{\alpha\beta}$ osiin siten, että $\gamma_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}$, jossa

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_\beta = \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} \frac{1}{H_\alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - z \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{u - z\theta_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} \right), \\
\epsilon_{\beta\alpha} &= \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_\alpha = \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} \frac{1}{H_\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - z \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} - \frac{v - z\theta_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} \right).
\end{aligned}$$

Näiden fysikaalinen tulkinta on helposti havainnollistettavissa kummankin alkuaan toisiaan vastaan kohtisuorassa asemassa olevan materiaalisäikeen erikseen kokemana kulmanmuutoksena.



Kuva 3. Pyörähdyssymmetrinen kuorirakenne.

Pyörähdyssymmetrisen kuoren tapauksessa, kuva 3, saadaan geometrian kuvaus yksinkertaisesti tulokinnalla $\alpha \rightarrow \vartheta$, $\beta \rightarrow \phi$. Koordinaatti ϕ on pyörähdyssymmetrisen kehän suuntainen. Tunnuksen z kahden eri merkityksen vuoksi käytetään globaalien koordinaattien symboleina tässä sekaannuksen välttämiseksi kaunokirjainfontteja $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$. Kuoren paikkavektori on muotoa

$$\vec{r}(\vartheta, \phi, \mathcal{Z}) = r(\vartheta) \sin \phi \vec{e}_{\mathcal{X}} + r(\vartheta) \cos \phi \vec{e}_{\mathcal{Y}} + \mathcal{Z}(\vartheta) \vec{e}_{\mathcal{Z}}.$$

Lasketaan tästä derivaatat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \sin \phi \vec{e}_{\mathcal{X}} + \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \cos \phi \vec{e}_{\mathcal{Y}} + \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \vartheta} \vec{e}_{\mathcal{Z}}, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} &= r \cos \phi \vec{e}_{\mathcal{X}} - r \sin \phi \vec{e}_{\mathcal{Y}}. \end{aligned}$$

Lamen parametrit saavat arvot

$$\begin{aligned} H_{\vartheta}^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} \sin \phi\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta} \cos \phi\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \vartheta}\right)^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \vartheta}\right)^2 \\ &= \frac{(\partial r)^2 + (\partial \mathcal{Z})^2}{(\partial \vartheta)^2} = \left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad H_{\vartheta} = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}, \\ H_{\phi} &= r = R_{\phi} \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Koordinaattiviivojen suuntaisten yksikkövektoreiden lausekkeet ovat näinollen

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\vartheta} &= \cos \vartheta \sin \phi \vec{e}_{\mathcal{X}} + \cos \vartheta \cos \phi \vec{e}_{\mathcal{Y}} - \sin \vartheta \vec{e}_{\mathcal{Z}}, \\ \vec{e}_{\phi} &= \cos \phi \vec{e}_{\mathcal{X}} - \sin \phi \vec{e}_{\mathcal{Y}}. \end{aligned}$$

Pinnan normaalin suuntainen yksikkövektori on

$$\vec{e}_z = \vec{e}_{\vartheta} \times \vec{e}_{\phi} = -\sin \vartheta \sin \phi \vec{e}_{\mathcal{X}} - \sin \vartheta \cos \phi \vec{e}_{\mathcal{Y}} - \cos \vartheta \vec{e}_{\mathcal{Z}}.$$

Yksikkönormaalien derivaatat, joita tarvitaan kaarevuuksien määrittämisen yhteydessä, ovat

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \vartheta} &= -\cos \vartheta \sin \phi \vec{e}_x - \cos \vartheta \cos \phi \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z, \\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \phi} &= -\sin \vartheta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \vartheta \sin \phi \vec{e}_y.\end{aligned}$$

Määritelmien (1) ja (2) avulla voidaan laskea pinnan kaarevuudet

$$\frac{1}{R_\vartheta} = \frac{1}{H_\vartheta}, \quad \frac{1}{R_\phi} = \frac{\sin \vartheta}{H_\phi} = \frac{\sin \vartheta}{r}, \quad \frac{1}{R_{\vartheta\phi}} = 0,$$

joista kaksi ensinmainittua ovat myös pääkaarevuuksia. Keskikaarevuus ja Gaussin kaarevuus ovat vastaavasti

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_\vartheta} + \frac{\sin \vartheta}{r} \right), \quad K = \frac{\sin \vartheta}{R_\vartheta r}.$$

Kun kuormitus on myös pyörähdyssymmetrinen, kuoren kinematiikan määrittää lausekkeen (5) sijasta lauseke

$$\vec{u}(\vartheta, z) = [u(\vartheta) - z\theta_\phi(\vartheta)]\vec{e}_\vartheta(\vartheta) + w(\vartheta)\vec{e}_z(\vartheta).$$

Nähdään, että kehän suuntainen siirtymäkomponentti häviää, eli $v = \theta_\vartheta \equiv 0$, ja riippuvuus ϕ -koordinaatista jää pois. Edelleen leikkausmuodonmuutokset $\gamma_{\vartheta\phi} = \gamma_{\phi z} \equiv 0$. Reissner-Mindlinin teorian mukaiset muodonmuutokset lasketaan kaavoista (10), (12) ja (13) ja ne ovat

$$\begin{aligned}\epsilon_\vartheta &= \left(1 + \frac{z}{R_\vartheta}\right)^{-1} \left(\frac{du}{R_\vartheta d\vartheta} - \frac{z}{R_\vartheta} \frac{d\theta_\phi}{d\vartheta} + \frac{w}{R_\vartheta} \right) \\ &= \frac{du}{R_\vartheta d\vartheta} + \frac{w}{R_\vartheta} - \frac{z}{R_\vartheta} \left(\frac{du}{R_\vartheta d\vartheta} + \frac{w}{R_\vartheta} + \frac{d\theta_\phi}{d\vartheta} \right) + \mathcal{O}(z^2), \\ \epsilon_\phi &= \left(1 + \frac{z \sin \vartheta}{r}\right)^{-1} \left(\frac{u - z\theta_\phi}{r} \cos \vartheta + \frac{w}{r} \sin \vartheta \right) \\ &= \frac{u}{r} \cos \vartheta + \frac{w}{r} \sin \vartheta - \frac{z \sin \vartheta}{r} \left(\frac{u}{r} \cos \vartheta + \frac{w}{r} \sin \vartheta + \theta_\vartheta \cot \vartheta \right) + \mathcal{O}(z^2), \\ \gamma_{z\vartheta} &= \left(1 + \frac{z}{R_\vartheta}\right)^{-1} \left(\frac{dw}{R_\vartheta d\vartheta} - \frac{u}{R_\vartheta} - \theta_\phi \right) \\ &= \left(1 - \frac{z}{R_\vartheta} + \mathcal{O}(z^2)\right) \left(\frac{dw}{R_\vartheta d\vartheta} - \frac{u}{R_\vartheta} - \theta_\phi \right),\end{aligned}$$

kun taas vastaavat Kirchhoffin teorian mukaiset (12), (15) ja (16) ovat

$$\begin{aligned}\epsilon_\vartheta &= \left(1 + \frac{z}{R_\vartheta}\right)^{-1} \left[\frac{du}{R_\vartheta d\vartheta} - \frac{z}{R_\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{dw}{R_\vartheta d\vartheta} \right) + \frac{z}{R_\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{u}{R_\vartheta} \right) + \frac{w}{R_\vartheta} \right] \\ &= \frac{du}{R_\vartheta d\vartheta} + \frac{w}{R_\vartheta} - \frac{z}{R_\vartheta} \left(\frac{u}{R_\vartheta^2} \frac{dR_\vartheta}{d\vartheta} + \frac{w}{R_\vartheta} + \frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{dw}{R_\vartheta d\vartheta} \right) \right) + \mathcal{O}(z^2), \\ \epsilon_\phi &= \left(1 + \frac{z \sin \vartheta}{r}\right)^{-1} \left[\frac{u}{r} \cos \vartheta + \frac{w}{r} \sin \vartheta - \frac{z}{r} \left(\frac{dw}{R_\vartheta d\vartheta} - \frac{u}{R_\vartheta} \right) \cos \vartheta \right] \\ &= \frac{u}{r} \cos \vartheta + \frac{w}{r} \sin \vartheta - \frac{z \cos \vartheta}{r} \left(\frac{dw}{R_\vartheta d\vartheta} - \frac{u}{R_\vartheta} (1 - \sin \vartheta) + \frac{w}{R_\vartheta} \sin \vartheta \tan \vartheta \right) + \mathcal{O}(z^2), \\ \gamma_{z\vartheta} &\equiv 0.\end{aligned}$$

KUOREN TASAPAINOYHTÄLÖT

Osittaisintegrointi kahdessa dimensiossa

Artikkelisarjan osassa II johdettiin varsin yksityiskohtaisesti yleiset osittaisintegrointi-kaavat kahdessa dimensiossa

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} \int_{\beta} g \frac{\partial h}{\partial \alpha} d\alpha d\beta &= \oint_s \frac{gh}{H_{\beta}} n_{\alpha} ds - \int_{\alpha} \int_{\beta} \frac{\partial g}{\partial \alpha} h d\alpha d\beta, \\ \int_{\alpha} \int_{\beta} g \frac{\partial h}{\partial \beta} d\alpha d\beta &= \oint_s \frac{gh}{H_{\alpha}} n_{\beta} ds - \int_{\alpha} \int_{\beta} \frac{\partial g}{\partial \beta} h d\alpha d\beta.\end{aligned}\quad (17)$$

Integrointikaavat ovat samassa muodossa suoraan sovellettavissa myös kaarevien pintojen yli integraaleja laskettaessa. Kuoren reunapinnan yksikkönormali on kuoren tangenttitasossa ja suuntakosinit n_{α} ja n_{β} ovat sen projektiot pintakoordinaattien suunnille.

Virtuaalisen työn periaate

Virtuaalisen työn periaate on esitettävissä lyhyesti kaavana

$$\delta W^s + \delta W^u = 0. \quad (18)$$

Sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ kuoren, kuten laatankin tapauksessa on

$$\delta W^s = - \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV.$$

Virtuaalisten muodonmuutoskomponenttien lausekkeet saadaan edellä esitetyistä lausekkeista (10) ... (16) varioimalla eli muodollisesti asettamalla $u \rightarrow \delta u$ jne. Ottamalla huomioon, että kuoren tilavuusalkio

$$dV = dX dY dZ = \frac{dX}{d\alpha} d\alpha \frac{dY}{d\beta} d\beta dz = \frac{H_{\alpha} H_{\beta} (1 + \frac{z}{R_{\alpha}})(1 + \frac{z}{R_{\beta}})}{d\alpha d\beta} d\alpha d\beta dz, \quad (19)$$

ja että kussakin pisteessä erikseen pätevät jännityskomponenttien välillä yhteydet $\sigma_x = \sigma_{\alpha}$, $\tau_{xy} = \tau_{\alpha\beta}$... sekä virtuaalisten venymäkomponenttien välillä vastaavasti $\delta \epsilon_x = \delta \epsilon_{\alpha}$, $\delta \gamma_{xy} = \delta \gamma_{\alpha\beta}$... sisäisten voimien tekemän virtuaalisen työn lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\delta W^s = - \int_V (\sigma_{\alpha} \delta \epsilon_{\alpha} + \sigma_{\beta} \delta \epsilon_{\beta} + \tau_{\alpha\beta} \delta \gamma_{\alpha\beta} + \tau_{\beta z} \delta \gamma_{\beta z} \\ + \tau_{z\alpha} \delta \gamma_{z\alpha}) \frac{H_{\alpha} H_{\beta} (1 + \frac{z}{R_{\alpha}})(1 + \frac{z}{R_{\beta}})}{d\alpha d\beta} dz d\alpha d\beta.\end{aligned}\quad (20)$$

Tähän lausekkeeseen sijoitetaan suoraan muodonmuutosten lausekkeet (10).

Ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ koostuu tilavuusvoimien, esimerkiksi rakenteen oman painon, ja pintavoimien tekemästä työstä

$$\begin{aligned}
\delta W^u &= \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dV + \int_{A_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} \, dA \\
&= \int_V [f_x \delta u_x + f_y \delta u_y + f_z \delta u_z] dV + \int_{A_t} [t_x \delta u_x + t_y \delta u_y + t_z \delta u_z] dA.
\end{aligned} \tag{21}$$

Nimitys pintavoimat käsittää kuormitukset, jotka kohdistuvat kuoren pintaan, siis ylä- ja alapintaan sekä reunapintaan. Edelliset on jätetty tarkastelusta erillisinä pois, jolloin ne voidaan ajatella sisällytetyiksi likimain tilavuusvoimien osuuteen. Kuormitus kuoren reunalla voidaan jakaa suoraan komponentteihin reunaviivan normaalin ja tangentin suunnille, jolloin $\vec{t} = t_n \vec{e}_n + t_s \vec{e}_s + t_z \vec{e}_z$. Tällöin on otettava huomioon siirtymä- ja rotaatiosuureiden positiiviset suunnat sekä niistä aiheutuvat muutokset tiettyihin etumerkkeihin. Samaan asiaan palataan uudelleen edempänä. Kuoren reunalla pintaalkio on

$$\begin{aligned}
dA &= \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2} dz = \sqrt{\left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^2 (d\alpha)^2 + \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^2 (d\beta)^2} dz \\
&= \sqrt{n_\beta^2 \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^2 + n_\alpha^2 \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^2} dz ds \equiv d\bar{z} ds,
\end{aligned} \tag{22}$$

Ottamalla huomioon siirtymän lauseke (5) saadaan täten

$$\begin{aligned}
\delta W^u &= \int_\alpha \int_\beta \int_z [f_\alpha \delta u + f_\beta \delta v + f_z \delta w] \underbrace{\left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)}_{d\bar{z}} H_\alpha H_\beta dz d\alpha d\beta \\
&\quad + \int_{s_t} \int_z [t_n \delta u_n + t_s \delta u_s + t_z \delta w] d\bar{z} ds \\
&\quad - \int_\alpha \int_\beta \int_z [f_\alpha z \delta \theta_\beta + f_\beta z \delta \theta_\alpha] \underbrace{\left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)}_{d\bar{z}} H_\alpha H_\beta dz d\alpha d\beta \\
&\quad + \int_{s_t} \int_z [t_n z \delta \theta_s + t_s z \delta \theta_n] d\bar{z} ds.
\end{aligned} \tag{23}$$

Sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ - kalvotila

Sijoitetaan lausekkeista (10) varioimalla syntyvien muodonmuutosten lausekkeet sekä sisäisten että ulkoisten voimien tekemien virtuaalisten töiden lausekkeisiin (20) ja (23). Jaetaan tarkastelu edelleen kahteen osaan erottamalla kaikki rotaatiotermit sekä leikkausmuodonmuutostermit $\gamma_{\beta z}$ ja $\gamma_{z\alpha}$ omaksi osakseen - taivutustilan tarkasteluksi. Kalvotilan tarkasteluun jää näinollen kaikkien siirtymäkomponenttien osuudet. Näin menetellään, jotta koko tarkastelu voidaan jakaa pienempiin kokonaisuuksiin. Merkintä δW_I^s edustaa kalvotilan osuutta sisäisen virtuaalisen työn lausekkeesta ja δW_{II}^s vastaavasti taivutustilan osuutta. Merkinnät δW_I^u ja δW_{II}^u ovat vastaavia ulkoisen virtuaalisen työn osuuksia.

Sijoitetaan nyt venymien $\delta \epsilon_\alpha^o$, $\delta \epsilon_\beta^o$, $\delta \epsilon_{\alpha\beta}^o$ ja $\delta \epsilon_{\beta\alpha}^o$ lausekkeet sisäisten voimien tekemän virtuaalisen työn lausekkeeseen (20) ottamalla huomioon tilavuusalkion lauseke (19). Kun samalla määritellään kalvojännitysresultantit tavanomaisella tavalla jännitys jakaumien integraaleina kuoren paksuuden yli,

$$\begin{aligned}
N_\alpha &= \int_z \sigma_\alpha \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) dz, & N_\beta &= \int_z \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \sigma_\beta dz, \\
N_{\alpha\beta} &= \int_z \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) dz, & N_{\beta\alpha} &= \int_z \tau_{\beta\alpha} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) dz,
\end{aligned} \tag{24}$$

saadaan tuloksena kalvotilan osuus virtuaalisen työn lausekkeesta

$$\begin{aligned}
\delta W_I^s &= - \int_V (\sigma_\alpha \delta \epsilon_\alpha^o + \sigma_\beta \delta \epsilon_\beta^o + \tau_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta}^o + \tau_{\beta\alpha} \delta \epsilon_{\beta\alpha}^o) dV \\
&= - \int_\alpha \int_\beta \left\{ \left[N_\alpha \left(\frac{\partial \delta u}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\delta v}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\delta w}{R_\alpha} \right) + N_\beta \left(\frac{\partial \delta v}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\delta u}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\delta w}{R_\beta} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + N_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta v}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{\delta u}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \right) + N_{\beta\alpha} \left(\frac{\partial \delta u}{H_\beta \partial \beta} - \frac{\delta v}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \right] \right\} H_\alpha H_\beta d\alpha d\beta.
\end{aligned}$$

Sovelletaan tässä lausekkeessa osittaisintegroitikaavaa (17) niihin termeihin, joissa esiintyy siirtymäkomponenttien δu , δv tai δw derivaattoja, ja kootaan tämän jälkeen kummankin komponentin kertoimet erikseen yhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\delta W_I^s &= \int_\alpha \int_\beta \left[\left(\frac{\partial N_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{N_\alpha - N_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{H_\beta \partial \beta} + \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \right) \delta u \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{N_\beta - N_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial N_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \delta v \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} \right) \delta w \right] H_\alpha H_\beta d\alpha d\beta - \int_s [(N_\alpha n_\alpha + N_{\beta\alpha} n_\beta) \delta u + (N_\beta n_\beta + N_{\alpha\beta} n_\alpha) \delta v] ds.
\end{aligned} \tag{25}$$

Viivaintegraali reunaviivaa pitkin voidaan esittää aivan vastaavasti kuin laattateoriassa muodossa

$$- \int_s [(N_\alpha n_\alpha + N_{\beta\alpha} n_\beta) \delta u + (N_\beta n_\beta + N_{\alpha\beta} n_\alpha) \delta v] ds = - \int_s (N_n \delta u_n + N_{n_s} \delta u_s) ds,$$

jossa on määritelty, kuva 4,

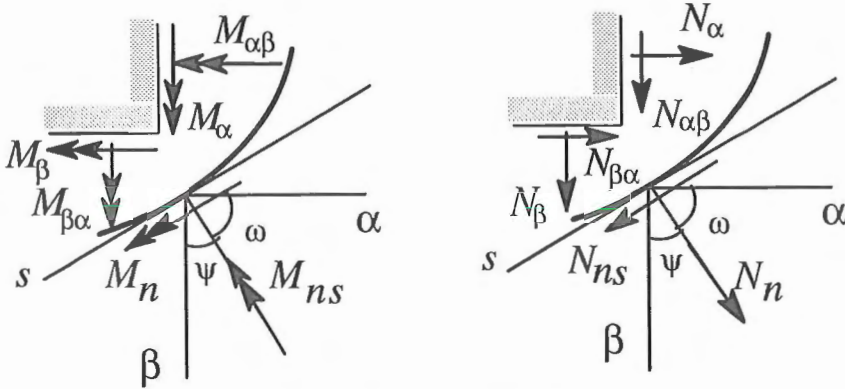
$$\begin{aligned}
N_n &= n_\alpha^2 N_\alpha + n_\alpha n_\beta (N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}) + n_\beta^2 N_\beta, \\
N_{n_s} &= n_\alpha n_\beta (N_\beta - N_\alpha) + n_\alpha^2 N_{\alpha\beta} - n_\beta^2 N_{\beta\alpha}.
\end{aligned} \tag{26}$$

ja on käytetty hyväksi yhteyksiä

$$\begin{aligned}
\delta u &= \cos \omega \delta u_n - \cos \psi \delta u_s = n_\alpha \delta u_n - n_\beta \delta u_s, \\
\delta v &= \cos \psi \delta u_n + \cos \omega \delta u_s = n_\beta \delta u_n + n_\alpha \delta u_s,
\end{aligned} \tag{27}$$

Lauseke (25) voidaan tämän jälkeen esittää muodossa

$$\begin{aligned}
\delta W_I^s &= \int_\alpha \int_\beta \left[\left(\frac{\partial N_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{N_\alpha - N_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{H_\beta \partial \beta} + \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \right) \delta u \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{N_\beta - N_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial N_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \delta v \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} \right) \delta w \right] H_\alpha H_\beta d\alpha d\beta - \int_s (N_n \delta u_n + N_{n_s} \delta u_s) ds.
\end{aligned} \tag{28}$$



Kuva 4. Kuoren voimasuureet.

Kalvotilan lausekkeisiin ei laatan taivutustilan kinemaattisen mallin valinnalla kuitenkaan ole minkäänlaista vaikutusta.

Sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ - taivutustila

Menetellään nyt aivan vastaavalla tavalla kuin edellä, sijoittamalla kuitenkin rotaatioita sisältävät termit muodonmuutosten lausekkeista (10) sisäisten voimien virtuaalisen työn lausekkeeseen, jolloin saadaan taivutustilan osuus δW_{II}^s tästä työstä. Sovelletaan **Reissner-Mindlinin teorian** kinematiikan kaavoja. Määritellään jännitysjakautumia vastaavat momenttiresultantit

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \int_z \sigma_\alpha \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) z dz, & M_\beta &= \int_z \sigma_\beta \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) z dz, \\ M_{\alpha\beta} &= \int_z \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) z dz, & M_{\beta\alpha} &= \int_z \tau_{\beta\alpha} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) z dz, \end{aligned} \quad (29)$$

sekä lisäksi leikkausvoimaresultantit

$$Q_\alpha = \int_z \tau_{\alpha z} \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) dz, \quad Q_\beta = \int_z \tau_{\beta z} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) dz. \quad (30)$$

Näin päästään tulokseen

$$\begin{aligned} \delta W_{II}^s &= \int_\alpha \int_\beta \left\{ M_\alpha \left(\frac{\partial \delta \theta_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\delta \theta_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \right) + M_\beta \left(\frac{\partial \delta \theta_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\delta \theta_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \right. \\ &+ M_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \delta \theta_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{\delta \theta_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \right) + M_{\beta\alpha} \left(\frac{\partial \delta \theta_\beta}{H_\beta \partial \beta} - \frac{\delta \theta_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \\ &\left. - Q_{\alpha z} \left(\frac{\partial \delta w}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{\delta v}{R_\alpha} - \delta \theta_\beta \right) - Q_{\beta z} \left(\frac{\partial \delta w}{H_\beta \partial \beta} - \frac{\delta v}{R_\beta} - \delta \theta_\alpha \right) \right\} H_\alpha H_\beta d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Lukuunottamatta alleviivattujen termien osuutta tämä lauseke on täsmälleen samaa muotoa kuin vastaava lauseke laattateoriassa. Soveltamalla osittaisintegroitikaavoja

(17) virtuaalisen työn lauseke saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\delta W_{II}^s = & - \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[\left(\frac{\partial M_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{M_{\alpha} - M_{\beta}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta \alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} - Q_{\alpha} \right) \delta \theta_{\beta} \right. \\
& + \left(\frac{M_{\beta} - M_{\alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{\partial M_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha \beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} - Q_{\beta} \right) \delta \theta_{\alpha} \\
& - \left. \left(\frac{\partial Q_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial Q_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{Q_{\alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{Q_{\beta}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} \right) \delta w + \frac{Q_{\alpha}}{R_{\alpha}} \delta u + \frac{Q_{\beta}}{R_{\beta}} \delta v \right] H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta \\
& + \int_s [(M_{\alpha} n_{\alpha} + M_{\beta \alpha} n_{\beta}) \delta \theta_{\beta} + (M_{\beta} n_{\beta} + M_{\alpha \beta} n_{\alpha}) \delta \theta_{\alpha} - (Q_{\alpha} n_{\alpha} + Q_{\beta} n_{\beta}) \delta w] ds. \quad (31)
\end{aligned}$$

Tämä lauseke ei ole riippumaton siirtymäkomponentin w variaatiosta, joten edellä suoritettu jako kalvo- ja taivutustilaan ei jaa tarkastelua kahteen toisistaan riippumattomaan osaan, kuten tapahtui laattarakenteiden analyysissä. Reunaintegraalitermi voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}
& \int_s [(M_{\alpha} n_{\alpha} + M_{\beta \alpha} n_{\beta}) \delta \theta_{\beta} + (M_{\beta} n_{\beta} + M_{\alpha \beta} n_{\alpha}) \delta \theta_{\alpha} - (Q_{\alpha} n_{\alpha} + Q_{\beta} n_{\beta}) \delta w] ds \\
& = - \int_s [M_n \delta \theta_s + M_{n_s} \delta \theta_n + Q_n \delta w] ds,
\end{aligned}$$

jossa on määritelty

$$\begin{aligned}
M_n &= n_{\alpha}^2 M_{\alpha} + n_{\alpha} n_{\beta} (M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}) + n_{\beta}^2 M_{\beta}, \\
M_{n_s} &= n_{\alpha} n_{\beta} (M_{\beta} - M_{\alpha}) + n_{\alpha}^2 M_{\alpha \beta} - n_{\beta}^2 M_{\beta \alpha}.
\end{aligned} \quad (32)$$

ja lisäksi

$$Q_n = Q_{\alpha} n_{\alpha} + Q_{\beta} n_{\beta}. \quad (33)$$

Myös rotaatiokomponenttien muunnoskaavaa

$$\begin{aligned}
\delta \theta_{\alpha} &= -\cos \psi \delta \theta_s - \cos \omega \delta \theta_n = -n_{\beta} \delta \theta_s - n_{\alpha} \delta \theta_n, \\
\delta \theta_{\beta} &= -\cos \omega \delta \theta_s + \cos \psi \delta \theta_n = -n_{\alpha} \delta \theta_s + n_{\beta} \delta \theta_n,
\end{aligned} \quad (34)$$

on hyödynnetty. Lauseke (31) on lopulta

$$\begin{aligned}
\delta W_{II}^s = & - \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[\left(\frac{\partial M_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{M_{\alpha} - M_{\beta}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta \alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} - Q_{\alpha} \right) \delta \theta_{\beta} \right. \\
& + \left(\frac{M_{\beta} - M_{\alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{\partial M_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha \beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} - Q_{\beta} \right) \delta \theta_{\alpha} \\
& - \left. \left(\frac{\partial Q_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial Q_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{Q_{\alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{Q_{\beta}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} \right) \delta w \right. \\
& \left. + \frac{Q_{\alpha}}{R_{\alpha}} \delta u + \frac{Q_{\beta}}{R_{\beta}} \delta v \right] H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta - \int_s [M_n \delta \theta_s + M_{n_s} \delta \theta_n + Q_n \delta w] ds. \quad (35)
\end{aligned}$$

Sovellettaessa perinteistä **Kirchhoffin teoriaa** leikkausmuodonmuutokset $\gamma_{\alpha z}$ ja $\gamma_{\beta z}$ häviävät, eikä tästä johtuen sisäisten voimien tekemän virtuaalisen työn lausekkeeseen tule leikkausvoimien osuutta lainkaan, koska rotaatiokomponentit määräytyvät ehdon (14) mukaisesti. Jotta välttyttäisiin kohtuuttoman pitkien lausekkeiden kirjoittamiselta, otetaan käyttöön merkinnät

$$\begin{aligned} Q_{\alpha}^* &= \frac{\partial M_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{M_{\alpha} - M_{\beta}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta \alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta}, \\ Q_{\beta}^* &= \frac{M_{\beta} - M_{\alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{\partial M_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha \beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha}, \end{aligned} \quad (36)$$

jotka itse asiassa ovat kuoren todelliset leikkausvoimat ilman tilavuusvoimien osuutta. Tällöin lauseketta (31) vastaten saadaan

$$\begin{aligned} \delta W_{II}^s &= - \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[Q_{\alpha}^* \left(\frac{\partial \delta w}{H_{\alpha} \partial \alpha} - \frac{\delta u}{R_{\alpha}} \right) + Q_{\beta}^* \left(\frac{\partial \delta w}{H_{\beta} \partial \beta} - \frac{\delta v}{R_{\beta}} \right) \right] H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta \\ &+ \int_s \left[(M_{\alpha} n_{\alpha} + M_{\beta \alpha} n_{\beta}) \left(\frac{\partial \delta w}{H_{\alpha} \partial \alpha} - \frac{\delta u}{R_{\alpha}} \right) + (M_{\beta} n_{\beta} + M_{\alpha \beta} n_{\alpha}) \left(\frac{\partial \delta w}{H_{\beta} \partial \beta} - \frac{\delta v}{R_{\beta}} \right) \right] ds. \end{aligned} \quad (37)$$

Kun nyt muunnetaan reunaintegraalilausekkeessa derivaattaoperaattorit ketjuderivointisääntöä

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{H_{\alpha} \partial \alpha} &= \frac{\partial n}{H_{\alpha} \partial \alpha} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial s}{H_{\alpha} \partial \alpha} \frac{\partial}{\partial s} = n_{\alpha} \frac{\partial}{\partial n} - n_{\beta} \frac{\partial}{\partial s}, \\ \frac{\partial}{H_{\beta} \partial \beta} &= \frac{\partial n}{H_{\beta} \partial \beta} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial s}{H_{\beta} \partial \beta} \frac{\partial}{\partial s} = n_{\beta} \frac{\partial}{\partial n} + n_{\alpha} \frac{\partial}{\partial s}, \end{aligned} \quad (38)$$

hyväksikäyttäen sekä lasketaan kuoren kaarevuudet ja kierevyys reunaviivan koordinaateissa

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_n} &= \frac{n_{\alpha}^2}{R_{\alpha}} + \frac{n_{\beta}^2}{R_{\beta}}, \\ \frac{1}{R_{ns}} &= \left(\frac{1}{R_{\beta}} - \frac{1}{R_{\alpha}} \right) n_{\alpha} n_{\beta}, \\ \frac{1}{R_s} &= \frac{n_{\alpha}^2}{R_{\beta}} + \frac{n_{\beta}^2}{R_{\alpha}}, \end{aligned} \quad (39)$$

käyttäen muunnoskaavoja (27) ja (34), saadaan taivutustilaan liittyvän sisäisen virtuaalisen työn lauseke tarvittavan osittaisintegrointioperaation jälkeen muotoon

$$\begin{aligned} \delta W_{II}^s &= \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[\left(\frac{\partial (H_{\beta} Q_{\alpha}^*)}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial (H_{\alpha} Q_{\beta}^*)}{H_{\beta} \partial \beta} \right) \delta w + \frac{Q_{\alpha}^*}{R_{\alpha}} \delta u + \frac{Q_{\beta}^*}{R_{\beta}} \delta v \right] H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta \\ &+ \int_s \left[M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial \delta w}{\partial s} - \left(\frac{M_n}{R_n} + \frac{M_{ns}}{R_{ns}} \right) \delta u_n \right. \\ &\left. - \left(\frac{M_n}{R_{ns}} + \frac{M_{ns}}{R_s} \right) \delta u_s - (Q_{\alpha}^* n_{\alpha} + Q_{\beta}^* n_{\beta}) \delta w \right] ds. \end{aligned}$$

Suoritetaan reunaintegraalissa vielä kerran osittaisintegrointi s -koordinaatin suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \delta W_{II}^s = & \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[\left(\frac{\partial(H_{\beta} Q_{\alpha}^*)}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial(H_{\alpha} Q_{\beta}^*)}{H_{\beta} \partial \beta} \right) \delta w + \frac{Q_{\alpha}^*}{R_{\alpha}} \delta u + \frac{Q_{\beta}^*}{R_{\beta}} \delta v \right] H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta \\ & + \int_s \left[M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} - (Q_n^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}) \delta w - \left(\frac{M_n}{R_n} + \frac{M_{ns}}{R_{ns}} \right) \delta u_n - \right. \\ & \left. - \left(\frac{M_n}{R_{ns}} + \frac{M_{ns}}{R_s} \right) \delta u_s \right] ds + M_{ns} \delta w \Big|_s. \end{aligned} \quad (40)$$

Viimeisin termi lausekkeessa (40), eli osittaisintegroinnissa kuoren reunaviivaa pitkin syntynyt sijoitustermi, saa arvoja ainoastaan kuoren kulmapisteissä, eli kaikissa reunaviivan tangentin epäjatkuvuuskohdissa. Viivaintegraaliin syntynyttä termiä δw :n kertoimena

$$V_n = Q_n^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}, \quad (41)$$

kutsutaan kuoren korvikeleikkausvoimaksi tai Kirchhoffin leikkausvoimaksi. Huomattakoon vielä, että rotaatioiden θ_{α} , θ_{β} , θ_n ja θ_s positiiviset suunnat voidaan perustellusti valita hyvin monella tavalla, jolloin tiettyjen termien etumerkeissä tapahtuu muutoksia. Tässä yhteydessä rotaatioiden θ_{α} ja θ_{β} etumerkit on valittu siten, että siirtymän lauseke (5) saa symmetrisen muodon muuttujien α ja β suhteen.

Ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ - kalvotila

Ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ kuuluu edellä määriteltyyn kalvotilaan ja on muotoa

$$\begin{aligned} \delta W_I^u = & \int_{\alpha} \int_{\beta} \int_z (f_{\alpha} \delta u + f_{\beta} \delta v + f_z \delta w) dz \frac{(1 + \frac{z}{R_{\alpha}})(1 + \frac{z}{R_{\beta}})}{1} H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta \\ & + \int_{s_t} \int_z (t_n \delta u_n + t_s \delta u_s + t_z \delta w) d\bar{z} ds. \end{aligned}$$

Määritellään ulkoiset kuormitusresultantit vastaavasti kuin edellä sisäiset, tällä kertaa erikseen tilavuus- ja pintavoimille

$$\begin{aligned} p_{\alpha} &= \int_z f_{\alpha} \frac{(1 + \frac{z}{R_{\alpha}})(1 + \frac{z}{R_{\beta}})}{1} dz, & T_n &= \int_z t_n d\bar{z}, \\ p_{\beta} &= \int_z f_{\beta} \frac{(1 + \frac{z}{R_{\alpha}})(1 + \frac{z}{R_{\beta}})}{1} dz, & T_{ns} &= \int_z t_s d\bar{z}, \\ p_z &= \int_z f_z \frac{(1 + \frac{z}{R_{\alpha}})(1 + \frac{z}{R_{\beta}})}{1} dz, & T_z &= \int_z t_z d\bar{z}, \end{aligned} \quad (42)$$

jolloin saadaan

$$\delta W_I^u = \int_{\alpha} \int_{\beta} (p_{\alpha} \delta u + p_{\beta} \delta v + p_z \delta w) H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta + \int_{s_t} (T_n \delta u_n + T_{ns} \delta u_s + T_z \delta w) ds. \quad (43)$$

Ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ - taivutustila

Kuoren taivutustilassa ulkoiset momentit tekevät virtuaalista työtä, joka on

$$\begin{aligned} \delta W_{II}^u = & - \int_{\alpha} \int_{\beta} \int_z z (f_{\alpha} \delta \theta_{\beta} + f_{\beta} \delta \theta_{\alpha}) \left(1 + \frac{z}{R_{\alpha}}\right) \left(1 + \frac{z}{R_{\beta}}\right) dz H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta \\ & + \int_{s_t} \int_z z (t_n \delta \theta_s + t_s \delta \theta_n) d\bar{z} ds. \end{aligned}$$

Määrittelemällä ulkoiset momenttiresultantit erikseen tilavuus- ja reunakuormituksille

$$\begin{aligned} m_{\alpha} &= \int_z f_{\alpha} z \left(1 + \frac{z}{R_{\alpha}}\right) \left(1 + \frac{z}{R_{\beta}}\right) dz, & W_n &= \int_z t_n z d\bar{z}, \\ m_{\beta} &= \int_z f_{\beta} z \left(1 + \frac{z}{R_{\alpha}}\right) \left(1 + \frac{z}{R_{\beta}}\right) dz, & W_{ns} &= \int_z t_s z d\bar{z}, \end{aligned} \quad (44)$$

jolloin tämä lauseke saa muodon

$$\delta W_{II}^u = - \int_{\alpha} \int_{\beta} (m_{\alpha} \delta \theta_{\beta} + m_{\beta} \delta \theta_{\alpha}) H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta + \int_{s_t} (W_n \delta \theta_s + W_{ns} \delta \theta_n) ds. \quad (45)$$

Edellä esitetty on johdettu **Reissner-Mindlinin teorian** perusotaksumien pohjalta. **Kirchhoffin teoriaa** sovellettaessa rotaatiotermit määräytyvät ehdoista (14), jolloin lauseke (45) saa muodon

$$\begin{aligned} \delta W_{II}^u = & - \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[m_{\alpha} \left(\frac{\partial \delta w}{H_{\alpha} \partial \alpha} - \frac{\delta u}{R_{\alpha}} \right) + m_{\beta} \left(\frac{\partial \delta w}{H_{\beta} \partial \beta} - \frac{\delta v}{R_{\beta}} \right) \right] H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta \\ & - \int_{s_t} \left[W_n \left(\frac{\partial \delta w}{\partial n} - \frac{\delta u_n}{R_n} - \frac{\delta u_s}{R_{ns}} \right) + W_{ns} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial s} - \frac{\delta u_n}{R_{ns}} - \frac{\delta u_s}{R_s} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Rotaatiosuureet on määritetty käyttäen muunnoskaavoja (38) ja (39). Sovelletaan tilavuusintegraalissa Greenin integrointikaavaa eli suoritetaan yhden kerran osittaisintegrointi, ja samalla lausutaan reunaintegraalissa momentit ja derivaattaoperaattorit reunaviivan koordinaateissa käyttämällä kaavoja (38). Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \delta W_{II}^u = & \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[\left(\frac{\partial m_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{m_{\alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial m_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{m_{\beta}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} \right) \delta w \right. \\ & \left. + \frac{m_{\alpha}}{R_{\alpha}} \delta u + \frac{m_{\beta}}{R_{\beta}} \delta v \right] H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta \\ & - \int_{s_t} \left(W_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + W_{ns} \frac{\partial \delta w}{\partial s} - \left(\frac{W_n}{R_n} + \frac{W_{ns}}{R_{ns}} \right) \delta u_n - \left(\frac{W_n}{R_{ns}} + \frac{W_{ns}}{R_s} \right) \delta u_s + m_n \delta w \right) ds, \end{aligned}$$

jossa kuoren reunalla $m_n = n_{\alpha} m_{\alpha} + n_{\beta} m_{\beta}$. Suorittamalla vielä osittaisintegrointi

jälkimmäisessä eli reunaintegraalitermissä muuttujan s suhteen saadaan lopulta

$$\begin{aligned}
\delta W_{II}^u = & \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[\left(\frac{\partial m_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{m_{\alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial m_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{m_{\beta}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} \right) \delta w \right. \\
& + \left. \frac{m_{\alpha}}{R_{\alpha}} \delta u + \frac{m_{\beta}}{R_{\beta}} \delta v \right] H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta \\
& - \int_{s_i} \left[W_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} - \left(\frac{W_n}{R_n} + \frac{W_{ns}}{R_{ns}} \right) \delta u_n - \left(\frac{W_n}{R_{ns}} + \frac{W_{ns}}{R_s} \right) \delta u_s \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial W_{ns}}{\partial s} - m_n \right) \delta w \right] ds - W_{ns} \delta w \Big|_s.
\end{aligned} \tag{46}$$

Viimeinen termi saa nollasta eroavia arvoja vain kuoren reunaviivan kulmapisteissä.

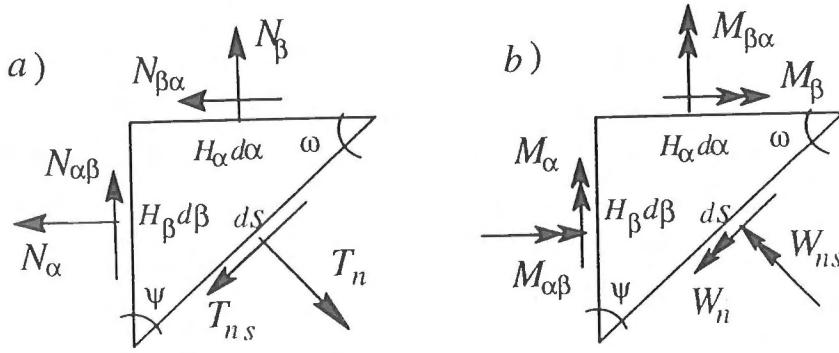
Kuoren tasapainoehdot ja reunaehdot

Kuoriteoriassa ei kalvo- ja taivutustiloja voida erottaa toisistaan, vaan niiden välillä vallitsee tietty kytkentä. Kirjoitettaessa **Reissner-Mindlinin teorian** mukaisia tasapainoyhtälöitä kootaan sisäisten (28) ja (35) sekä ulkoisten (43) ja (45) voimien tekemien virtuaalisten töiden lausekkeet virtuaalisen työn periaattetta kuvaavaan yhtälöön (18). Näin saadaan ensin tilavuusintegraaliosuus

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[\left(\frac{\partial N_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{N_{\alpha} - N_{\beta}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial N_{\beta \alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{N_{\alpha \beta} + N_{\beta \alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{Q_{\alpha}}{R_{\alpha}} + p_{\alpha} \right) \delta u \right. \\
& + \left(\frac{N_{\beta} - N_{\alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{\partial N_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{N_{\alpha \beta} + N_{\beta \alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha \beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{Q_{\beta}}{R_{\beta}} + p_{\beta} \right) \delta v \\
& - \left(\frac{\partial M_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{M_{\alpha} - M_{\beta}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta \alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} - Q_{\alpha} + m_{\alpha} \right) \delta \theta_{\beta} \\
& - \left(\frac{M_{\beta} - M_{\alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{\partial M_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha \beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} - Q_{\beta} + m_{\beta} \right) \delta \theta_{\alpha} \\
& \left. + \left(\frac{\partial Q_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial Q_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{Q_{\alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{Q_{\beta}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} - \frac{N_{\alpha}}{R_{\alpha}} - \frac{N_{\beta}}{R_{\beta}} + p_z \right) \delta w \right] H_{\alpha} H_{\beta} d\alpha d\beta = 0.
\end{aligned}$$

Koska tämän integraalilausekkeen tulee hävitä kaikissa rakenteen sisäpisteissä ja koska virtuaaliset siirtymäkomponentit on siten valittu, että $\delta u \neq 0$, $\delta v \neq 0$, $\delta \theta_{\alpha} \neq 0$, $\delta \theta_{\beta} \neq 0$ ja $\delta w \neq 0$ ainakin osassa tarkastelualuetta, tulee koko rakenteessa olla voimassa tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{N_{\alpha} - N_{\beta}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial N_{\beta \alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{N_{\alpha \beta} + N_{\beta \alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{Q_{\alpha}}{R_{\alpha}} + p_{\alpha} = 0, \\
& \frac{N_{\beta} - N_{\alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{\partial N_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{N_{\alpha \beta} + N_{\beta \alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial N_{\alpha \beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{Q_{\beta}}{R_{\beta}} + p_{\beta} = 0, \\
& \frac{\partial M_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{M_{\alpha} - M_{\beta}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta \alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} + \frac{M_{\alpha \beta} + M_{\beta \alpha}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} - Q_{\alpha} + m_{\alpha} = 0, \tag{47}
\end{aligned}$$



Kuva 5. a) Kuoren reunan voima- ja b) momenttisuureet.

$$\begin{aligned} \frac{M_\beta - M_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial M_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{H_\alpha \partial \alpha} - Q_\beta + m_\beta = 0, \\ + \frac{\partial Q_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{Q_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{Q_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{N_\alpha}{R_\alpha} - \frac{N_\beta}{R_\beta} + p_z = 0. \end{aligned}$$

Syntyneestä viiden tasapainoyhtälön ryhmästä voidaan leikkausvoimat Q_α ja Q_β eliminoida, ratkaisemalla ne kolmännestä ja neljännestä yhtälöstä ja sijoittamalla jäljelle jääviin kolmeen.

Kokoamalla vastaavista yhtälöistä reunaehtotermit saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} - \int_s [(N_n - T_n) \delta u_n + (N_{ns} - T_{ns}) \delta u_s + (M_n - W_n) \delta \theta_s \\ + (M_{ns} - W_{ns}) \delta \theta_n + (Q_n - T_z) \delta w] ds = 0. \end{aligned}$$

Koska jälleen siirtymät ovat mielivaltaisia ja ainakin osalla reunaviivaa erisuuria kuin nolla, tulee joko tasapainoyhtälöiden eli geometristen reunaehtojen (kuva 5)

$$\begin{aligned} -N_n + T_n &= 0, \\ -N_{ns} + T_{ns} &= 0, \\ -M_n + W_n &= 0, \\ -M_{ns} + W_{ns} &= 0, \\ -Q_n + T_z &= 0. \end{aligned} \tag{48}$$

toteutua reunan osalla s_t ja kinemaattisten vastaavasti

$$\begin{aligned} \delta u_n &= u_n - \bar{u}_n = 0, \\ \delta u_s &= u_s - \bar{u}_s = 0, \\ \delta \theta_s &= \theta_s - \bar{\theta}_s = 0, \\ \delta \theta_n &= \theta_n - \bar{\theta}_n = 0, \\ \delta w &= w - \bar{w} = 0, \end{aligned} \tag{49}$$

osalla s_u . Yläviivalla varustetut siirtymäsuureet ovat annettuja siirtymiä eli niinsanottuja pakko siirtymiä ja ehdot (49) edustavat kinemaattisesti luvalliselle siirtymätilalle asetettavia vaatimuksia. Reunaehdot (48) ja (49) yhdessä huolehtivat siitä, että reuna-integraali häviää laatan koko reunaviivalla.

Kirchhoffin teorian yhtälöt saadaan sijoittamalla, kuten edellä, sisäisen virtuaalisen työn (28) ja (40) ja ulkoisen lausekkeet (43) ja (46) virtuaalisen työn yhtälöön (18). Helposti havaitaan, että päädytään tasapainoyhtälöihin, jotka ovat täsmälleen samat kuin edellä Reissner-Mindlinin teorian pohjalta johdetut (47), joista kuitenkin leikkausvoimasuureet on eliminoitu pois. Reunaintegraali reunaehtoien määrittämiseksi saa muodon

$$\int_s \left[-\left(N_n + \frac{M_n}{R_n} + \frac{M_{ns}}{R_{ns}} - \frac{W_n}{R_n} - \frac{W_{ns}}{R_{ns}} - T_n\right)\delta u_n - \left(N_{ns} + \frac{M_n}{R_{ns}} + \frac{M_{ns}}{R_s} - \frac{W_n}{R_{ns}} - \frac{W_{ns}}{R_s} - T_{ns}\right)\delta u_s - \left(V_n - \frac{\partial W_{ns}}{\partial s} - T_z + m_n\right)\delta w - (M_n - W_n)\frac{\partial \delta w}{\partial n} \right] ds - W_{ns}\delta w \Big|_s = 0,$$

josta seuraa reunaehdot

$$\begin{aligned} -N_n - \frac{M_n}{R_n} - \frac{M_{ns}}{R_{ns}} + \frac{W_n}{R_n} + \frac{W_{ns}}{R_{ns}} + T_n &= 0, \\ -N_{ns} - \frac{M_n}{R_{ns}} - \frac{M_{ns}}{R_s} + \frac{W_n}{R_{ns}} + \frac{W_{ns}}{R_s} + T_{ns} &= 0, \\ -V_n + \frac{\partial W_{ns}}{\partial s} + T_z - m_n &= 0, \\ -M_n + W_n &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

reunalla s_t ja

$$\begin{aligned} \delta u &= u - \bar{u} = 0, \\ \delta v &= v - \bar{v} = 0, \\ \delta w &= w - \bar{w} = 0, \\ \frac{\partial \delta w}{\partial n} &= \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = 0, \end{aligned} \quad (51)$$

s_u :lla. Lisäksi ratkaisun tulee toteuttaa kuoren mahdollisissa nurkkapisteissä tasapainoehto

$$M_{ns} - W_{ns} = 0, \quad (52)$$

reunan osalla s_t tai s_u :lla taipuman rajoite-ehto

$$\delta w = w - \bar{w} = 0. \quad (53)$$

Pyörähdyssymmetrisen kuoren tapauksessa ($\alpha \rightarrow \vartheta$, $\beta \rightarrow \phi$), kun lisäksi kuormitus on pyörähdyssymmetrinen, mistä seuraa ehdot $N_{\vartheta\phi} = M_{\vartheta\phi} = Q_{\phi} \equiv 0$, päädytään kolmeen tasapainoyhtälöön

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\vartheta}}{R_{\vartheta}d\vartheta} + \frac{N_{\vartheta} - N_{\phi}}{r} \cos \vartheta + \frac{Q_{\vartheta}}{R_{\vartheta}} + p_{\vartheta} &= 0, \\ \frac{dM_{\vartheta}}{R_{\vartheta}d\vartheta} + \frac{M_{\vartheta} - M_{\phi}}{H_{\phi}} \cos \vartheta - Q_{\vartheta} + m_{\vartheta} &= 0, \\ \frac{dQ_{\vartheta}}{R_{\vartheta}d\vartheta} + \frac{Q_{\vartheta}}{r} \cos \vartheta - \frac{N_{\vartheta}}{R_{\vartheta}} - \frac{N_{\phi}}{r} \sin \vartheta + p_z &= 0. \end{aligned}$$

Reunaehdot ovat Reissner-Mindlinin teorian mukaan

$$\left. \begin{aligned} -N_{\vartheta} + T_{\vartheta} &= 0, \\ -Q_{\vartheta} + T_z &= 0, \\ -M_{\vartheta} + W_{\vartheta} &= 0, \end{aligned} \right\} s_t : \text{lla}, \quad \text{tai} \quad \left. \begin{aligned} u - \bar{u} &= 0, \\ w - \bar{w} &= 0, \\ \theta_{\phi} - \bar{\theta}_{\phi} &= 0, \end{aligned} \right\} s_u : \text{lla},$$

tai vastaavasti Kirchhoffin tapauksessa

$$\left. \begin{aligned} -N_{\vartheta} - \frac{M_{\vartheta}}{R_{\vartheta}} + \frac{W_{\vartheta}}{R_{\vartheta}} + T_{\vartheta} &= 0, \\ V_{\vartheta} + T_z - m_{\vartheta} &= 0, \\ M_{\vartheta} - W_{\vartheta} &= 0, \end{aligned} \right\} s_t : \text{lla}, \quad \text{tai} \quad \left. \begin{aligned} u - \bar{u} &= 0, \\ w - \bar{w} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vartheta} &= 0. \end{aligned} \right\} s_u : \text{lla}.$$

YHTEENVETO

Artikkelisarjassa selvitetään lähinnä opetustarkoitusta silmällä pitäen erilaisten perusrakennetyyppien analysointia. Rakenteiden muodonmuutoksia tutkitaan käyttämällä hyväksi paikallista suoraviivaista ortogonaalista koordinaattijärjestelmää. Tässä osassa esitetään eri kuoriteorioiden perusteita. Kuorien yleiset tasapainoyhtälöt johdetaan soveltamalla virtuaalisen työn periaatetta. Esitetyn menettelyn etuna on systemaattisuus, jonka avulla monimutkaisetkin tarkastelut voidaan suorittaa periaatteessa hyvin yksinkertaisesti, ainoastaan perusmatematiikan alkeisiin tukeutuvia menetelmiä käyttäen.

KIRJALLISUUSREFERAATIT

Flügge W. (1972), *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, New York.

Malvern L.E. (1969), *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs.

Novozhilov V.V. (1964), *Thin Shell Theory*. P. Noordhoff Ltd. Translation.

Oden J.T. (1967), *Mechanics of Elastic Structures*. McGraw-Hill.

Washizu K. (1975), *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. 2.painos, Pergamon Press Ltd., London.

Vlasov V.Z. (1963), *Thin-Walled Elastic Beams*. Israel Program for Scientific Translations, Israel.

Wempner G. (1981), *Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies*. 2.painos, Sijthoff & Noordhoff.

Juha Paavola, rakenteiden mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu, Eero-Matti Salonen, mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu.