YKSINKERTAISTEN RAKENNEMALLIEN TASAPAINO-YHTÄLÖT - osa II
LEVY- JA LAATTARAKENTEET

Juha Paavola ja **Eero-Matti Salonen**

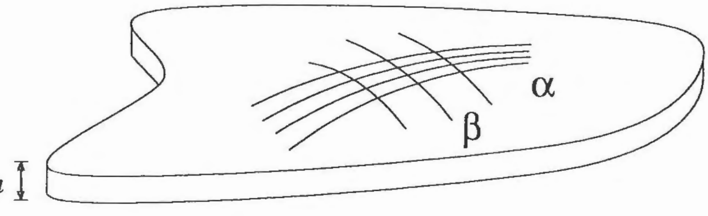
Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 29
No. 1, 1996, s. 51-75.

TIIVISTELMÄ Tämän artikkelisarjan tarkoituksena on valaista virtuaalisen työn periaatteen käyttökelpoisuutta yksinkertaisten perusrakennemallien, kuten sauvojen, laattojen ja kuorien tasapainoyhtälöitä johdettaessa. Sarja koostuu kolmesta artikkelista, joissa kussakin käsitellään yhtä edellä mainituista rakennetyypeistä. Huomiota kiinnitetään virtuaalisen työn periaatteen systemaattisuuden lisäksi erikoisesti siihen, miten liiketilan erilaiset perusotaksumat vaikuttavat tehtävien formulointiin. Tässä osassa käsitellään laattarakenteita edellä esitetyn ohjelman mukaisesti. Tarkastelussa selvitetään varsin perusteellisesti myös analysoinnissa tarvittavia matemaattisia työkaluja.

JOHDANTO

Laatta- ja levyrakenteita yhdessä kuorirakenteiden kanssa kutsutaan usein myös pintarakenteiksi. Niissä rakenteen pinnan ulottuvuuksiin liittyy paksuuden suunnassa pieni mitta, jossa pieniä matkoja kulkevalle normaalikoordinaatille valitaan tehtävän ratkaisussa aivan erityinen rooli. Lopullisesta tehtävän matemaattisesta formulaatiosta tämä koordinaatti suodattuu kokonaan pois, jolloin laattaprobleema redusoituu puhtaasti kaksidimensioiseksi. Laatan ja levyn osalta rakennemalli siis koostuu 'äärettömän' ohuesta tasomaisesta kalvosta, joka sijoittuu laatan referenssipinnalle. Täksi valitaan useimmiten laatan keskipinta. Paksuuden suunnassa kulkevan koordinaatin eliminointi tapahtuu jälleen kehittämällä kaikki siirtymäfunktiot potenssisarjoiksi normaalikoordinaatin suhteen ja ottamalla tarkasteluun mukaan tavanomaisesti vain korkeintaan ensimmäisen asteen termit. Virtuaalisen työn periaatteen mukaisissa tilavuusintegraaleissa normaalikoordinaatti näinollen häviää ratkaisusta.

Jatkossa tarkastelu suoritetaan aluksi mielivaltaisen muotoiselle tasomaiselle laatalle käyttäen täysin yleisiä käyräviivaisia suorakulmaisia koordinaatteja. Erikoistapauksina käsitellään suorakaide- ja ympyrälaattaa. Alan oppikirjoissa, kuten FLÜGGE (1972), NOVOZHILOV (1964), ODEN (1967), VLASOV (1963) ja WASHIZU (1975) on suoritettu perusteellisia pintarakenteiden traditionaalisia analyyseja. Tässä esityksessä on tarkoitus kuitenkin korostaa virtuaalisen työn periaatteen sekä paikallisen suorakulmaisen koordinaatiston soveltamisen tarjoamia erinomaisen käyttökelpoisia etuja kaksidimensioisten, yleisissä käyräviivaisissa koordinaateissa määriteltyjen tehtävien ratkaisussa.



Kuva 1. Laatan geometria.

LAATAN GEOMETRIA

Laatan kaksidimensioinen rakennemalli on matemaattisessa mielessä tasopinnan alue reunoineen. Jos asetetaan tämä taso yhtymään suorakulmaisen karteesisien koordinaattijärjestelmän x, y-tasoon, sen jokaisen pisteen aseman määrittää paikkavektori $\vec{r}_o = \vec{r}_o(\alpha, \beta)$ kaksidimensioisessa avaruudessa x, y. Paikkavektori

$$\vec{r}_o = \vec{r}_o(\alpha, \beta) = x(\alpha, \beta)\vec{e}_x + y(\alpha, \beta)\vec{e}_y$$

määritellään siten, että kutakin pisteparia (α, β) vastaa täsmälleen yksi tason piste. Parametrit α ja β voivat olla täysin mielivaltaisesti valittuja ja niiden muodostamat käyräviivaiset koordinaattiviivat sijaitsevat tarkasteltavalla tasolla. Käytännössä parametrit kuitenkin pyritään valitsemaan siten, että tietyt koordinaattiviivat yhtyvät laatan reunaviivaan. Tämä onnistuukin hyvin esimerkiksi suorakaiteen tai ympyrän muotoisen laatan tapauksessa, mutta täysin mielivaltaisen muotoista laattaa analysoitaessa tämä ei kuitenkaan ole mahdollista.

Keskitason normaalin suuntaisen z-koordinaatin positiivinen suunta valitaan siten, että järjestelmä α, β, z tulee oikeakätiseksi. Keskitason koordinaattiviivojen tangenttivektorit saadaan paikkavektorin derivaattoina. Kun derivaatat lasketaan parametrien α ja β suhteen, yksikkötangenttivektorit saadaan jakamalla ne mittakaavatekijöillä eli LAME'n parametreilla H_α ja H_β, jotka skaalaavat derivaattavektorit laadultaan ja pituudeltaan oikeiksi:

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \alpha},$$
$$\vec{e}_\beta = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial \vec{r}_o}{\partial \beta}.$$

Mittakaavatekijöiden lausekkeet ovat

$$H_\alpha = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}\right| = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \alpha})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \alpha})^2},$$

$$H_\beta = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}\right| = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial \beta})^2 + (\frac{\partial y}{\partial \beta})^2}.$$

Koordinaattiviivojen välinen kulma χ määritetään yhtälöstä

$$\begin{aligned}\cos\chi = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta &= \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}\cdot\frac{1}{H_\beta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}\\ &= \frac{1}{H_\alpha H_\beta}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}\right).\end{aligned}$$

Jos α ja β ovat ortogonaalisia, $\cos\chi = 0$. Keskitason normaalikoordinaatin z suuntainen yksikkövektori

$$\vec{e}_z = \frac{\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta}{|\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta|} = \frac{1}{\sin\chi}(\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta).$$

Rajoitetaan tarkastelu tässä yhteydessä suorakulmaisiin koordinaatteihin, jolloin siis $\chi = \pi/2$. Ortogonaalisuudesta seuraa

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0.$$

Tästä saadaan derivoimalla koordinaatin α suhteen

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_\beta + \vec{e}_\alpha\cdot\frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha} = 0,$$

eli

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_\beta = -\vec{e}_\alpha\cdot\frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha}. \tag{1a}$$

Vastaavasti derivoimalla koordinaatin β suhteen:

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\beta}\cdot\vec{e}_\beta = -\vec{e}_\alpha\cdot\frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\beta}. \tag{1b}$$

Lisäksi tiedetään, että yksikkövektorin derivaattavektori on kohtisuorassa itse vektoria vastaan eli

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_\alpha &= \frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\beta}\cdot\vec{e}_\alpha = 0,\\ \frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_\beta &= \frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\beta}\cdot\vec{e}_\beta = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Tarkastellaan seuraavaksi sekaderivaattatermiä $\partial^2\vec{r}/\partial\alpha\partial\beta$. Koska $\partial\vec{r}/\partial\alpha = H_\alpha\vec{e}_\alpha$ ja $\partial\vec{r}/\partial\beta = H_\beta\vec{e}_\beta$, tämä lauseke voidaan kirjoittaa kahdella vaihtoehtoisella tavalla derivoinnin kommutatiivisuuden eli vaihdannaisuuden nojalla. Näin saadaan

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}\right).$$

Tämä on yhtäkuin

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_\beta\vec{e}_\beta) = \frac{\partial}{\partial\beta}(H_\alpha\vec{e}_\alpha),$$

eli

$$\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha}\vec{e}_\beta + H_\beta\frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha} = \frac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}\vec{e}_\alpha + H_\alpha\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\beta}. \tag{3}$$

Määritetään tämän avulla vektoreiden $\vec{e}_\alpha$ ja $\vec{e}_\beta$ derivaattojen komponentit α- ja β-koordinaattien suunnille. Ratkaistaan aluksi vektori $\partial\vec{e}_\alpha/\partial\beta$:

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\beta} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha}\vec{e}_\beta + \frac{H_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha} - \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}\vec{e}_\alpha.$$

Muodostamalla skalaaritulo yksikkövektorin $\vec{e}_\beta$ kanssa saadaan

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\beta}\cdot\vec{e}_\beta = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha}(\vec{e}_\beta\cdot\vec{e}_\beta) + \frac{H_\beta}{H_\alpha}\left(\frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_\beta\right) - \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}(\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta) = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha}.$$

Ratkaisemalla yhtälöstä (3) nyt puolestaan vektori $\partial\vec{e}_\beta/\partial\alpha$ saadaan vastaavanlaisella tarkastelulla

$$\frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_\alpha = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}.$$

Ottamalla lisäksi huomioon kaavat (1) saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\beta}\cdot\vec{e}_\beta &= -\vec{e}_\alpha\cdot\frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\beta} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha},\\ \frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_\alpha &= -\vec{e}_\beta\cdot\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\alpha} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}.\end{aligned} \tag{4}$$

Yhteydet (2) ja (4) ovat matriisimerkinnöin

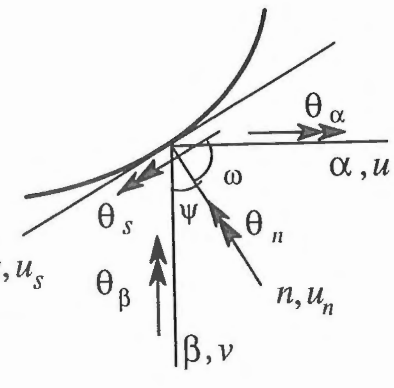
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{Bmatrix}\vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_\beta\end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{H_\beta}\dfrac{\partial H_\alpha}{\partial\beta}\\ \dfrac{1}{H_\beta}\dfrac{\partial H_\alpha}{\partial\beta} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_\beta\end{Bmatrix},\\ \frac{\partial}{\partial\beta}\begin{Bmatrix}\vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_\beta\end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{H_\alpha}\dfrac{\partial H_\beta}{\partial\alpha}\\ -\dfrac{1}{H_\alpha}\dfrac{\partial H_\beta}{\partial\alpha} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_\beta\end{Bmatrix}.\end{aligned} \tag{5}$$

Mielivaltaisen laatan keskitason ulkopuolisen pisteen paikkavektori saadaan jälleen lisäämällä vastaavaan keskitasolla olevan pisteen paikkavektoriin normaalin suuntainen komponentti:

$$\vec{r}(\alpha,\beta,z) = \vec{r}_o(\alpha,\beta) + z\vec{e}_z.$$

Tämän derivaattavektoreiksi saadaan soveltamalla suoraan edellä esitettyä

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha} &= \frac{\partial\vec{r}_o}{\partial\alpha} = H_\alpha\vec{e}_\alpha,\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta} &= \frac{\partial\vec{r}_o}{\partial\beta} = H_\beta\vec{e}_\beta,\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} &= \vec{e}_z.\end{aligned} \tag{6}$$



Kuva 2. Siirtymä- ja rotaatiokomponentit.

LAATAN KINEMATIIKKA ELI LIIKETILA

Laatan liike määräytyy kaikkiaan viiden toisistaan riippumattoman liikekomponentin avulla. Näistä kolme on translaatioita ja kaksi rotaatiota. Koordinaattien α, β ja z suuntaiset translaatiokomponentit ovat u, v ja w. Keskitason normaalin suuntaisen ainesäikeen rotattiokomponentit α- ja β-koordinaattiviivojen ympäri ovat θ_α ja θ_β. Laattateorian kaksidimensioisuuden mukaisesti sekä translaatiot että rotaatiot riippuvat ainoastaan laatan pintakoordinaateista. Laatta on siis kokoonpuristumaton normaalin suunnassa. Rotaatiot määritetään eri laattateorioissa aivan vastaavalla tavalla kuin eri palkkiteorioissa. Perinteisissä laattateorioissa siirtymävektorille otaksutaan lineaarinen riippuvuus normaalikoordinaatista z. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisen normaalin suuntaisen ainesäikeen otaksutaan pysyvän rakenteen deformoituessa suorana. Rotaatioita voidaan rajoittaa edellyttämällä, että kyseiset ainesäikeet pysyvät kohtisuorassa laatan deformoitunutta keskipintaa vastaan, jolloin estetään leikkausmuodonmuutosten syntyminen. Syntyvää teoriaa nimitetään Kirchhoffin teoriaksi. Kirchhoffin laattateoriassa rotaatiot sidotaan tietyllä tavalla laatan translaatiokomponentteihin. Jos näin ei tehdä saadaan yleisempi Reissner-Mindlinin teoria, joka jättää rotaatiokulmat riippumattomiksi. Lineaarisen teorian mukainen laatan siirtymätila on edellisen perusteella

$$\vec{u}(\alpha,\beta,z) = [u(\alpha,\beta) - z\theta_\beta(\alpha,\beta)]\,\vec{e}_\alpha(\alpha,\beta) + [v(\alpha,\beta) - z\theta_\alpha(\alpha,\beta)]\,\vec{e}_\beta(\alpha,\beta) + w(\alpha,\beta)\vec{e}_z. \tag{7}$$

Tämä on aikaisemmin esitetyn palkkiteorian yksidimensioisen kinematiikan looginen laajennus kahteen dimensioon. Rotaatiokomponenttien θ_α ja θ_β positiiviset suunnat on valittu kuvan 2 mukaisesti.

Muodonmuutoksia määritettäessä hyödynnetään jälleen paikallista kiinteää suorakulmaista koordinaattijärjestelmää X, Y, Z, nyt kolmessa dimensiossa. Tällöin tarvittavat derivaattojen väliset muunnoskaavat saadaan käyttökelpoiseen muotoon (vrt. osa I, kaava (4a))

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_X & \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_Y & \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}\cdot\vec{e}_Z \\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}\cdot\vec{e}_X & \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}\cdot\vec{e}_Y & \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}\cdot\vec{e}_Z \\ \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial z}\cdot\vec{e}_X & \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial z}\cdot\vec{e}_Y & \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial z}\cdot\vec{e}_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X} \\ \dfrac{\partial}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial}{\partial Z} \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Paikkavektorin $\vec{r}$ derivaattojen lausekkeiden (6) perusteella saadaan yksityiskohtaisemmin

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_\alpha \; \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_X & H_\alpha \; \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_Y & H_\alpha \; \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_Z \\ H_\beta \; \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_X & H_\beta \; \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_Y & H_\beta \; \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_Z \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_X & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_Y & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X} \\ \dfrac{\partial}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial}{\partial Z} \end{Bmatrix}. \tag{9}$$

Siirtymävektori $\vec{u}$ voidaan esittää myös komponentteina paikallisen koordinaattijärjestelmän koordinaattiakselien suunnille

$$\vec{u} = u_X \vec{e}_X + u_Y \vec{e}_Y + u_Z \vec{e}_Z,$$

jossa siirtymäkomponentit ovat

$$\begin{aligned} u_X &= \vec{u} \cdot \vec{e}_X, \\ u_Y &= \vec{u} \cdot \vec{e}_Y, \\ u_Z &= \vec{u} \cdot \vec{e}_Z. \end{aligned} \tag{10}$$

Muodonmuutokset määritetään analogisesti osassa I esitetyn sauvateorian kanssa paikallisissa suorakulmaisissa koordinaateissa

$$\begin{aligned} \epsilon_X &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_X, \\ \epsilon_Y &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Y, \\ \epsilon_Z &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_Z, \\ \gamma_{XY} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_X + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Y, \\ \gamma_{YZ} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_Y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Z, \\ \gamma_{ZX} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_X. \end{aligned} \tag{11}$$

Tässä on edullista sijoittaa ja suunnata paikallinen koordinaatisto siten, että X- ja Y-koordinaattiviivat asetetaan sivuamaan kussakin pisteessä laatan pinnalla käyräviivaisia pintakoordinaatteja α ja β. Tällöin Z-koordinaattiviiva yhtyy laatan normaalin suuntaan, eli yksikkövektoreiden väliset yhteydet $\vec{e}_X = \vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_Y = \vec{e}_\beta$, $\vec{e}_Z = \vec{e}_z$ ovat voimassa. On huomattava kuitenkin, että näin on taas vain tarkalleen ottaen paikallisen koordinaatiston origossa. Välittömästi, kun siirrytään pois origosta, tangentin suunta muuttuu eivätkä kiinteän paikallisen koordinaattijärjestelmän koordinaatit seuraa käyräviivaisia α- ja β-koordinaatteja. Näin valittaessa havaitaan myös, että derivointisääntö (9) eri koordinaattijärjestelmien välillä pelkistyy yksinkertaiseen diagonaaliseen muotoon

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X} \\ \dfrac{\partial}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial}{\partial Z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_\alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & H_\beta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

Itse asiassa kaavassa on esitetty käänteinen yhteys differentiaalioperaatioiden välillä, koska jatkossa tullaan nimenomaan käyttämään paikallisissa koordinaateissa määritettyjä derivaattoja.

LAATAN MUODONMUUTOKSET

Tarkastellaan edelleen kuvassa 1 esitettyä laattarakennetta. Siirtymätila on esitetty kaavassa (7). Muodonmuutosten lausekkeet ovat kaavojen (11) ja (12) perusteella

$$
\begin{aligned}
\epsilon_X &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_X = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_\alpha, \\
\epsilon_Y &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Y = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_\beta, \\
\epsilon_Z &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_Z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z, \\
\gamma_{XY} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_X + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Y = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_\alpha + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_\beta, \\
\gamma_{YZ} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_Y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \vec{e}_\beta + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_z, \\
\gamma_{ZX} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_X = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \vec{e}_\alpha.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Siirtymävektorin (7) derivaatat ovat

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} &= \Big(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - z\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha}\Big)\vec{e}_\alpha + (u - z\theta_\beta)\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} + \Big(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - z\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha}\Big)\vec{e}_\beta + (v - z\theta_\alpha)\frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\vec{e}_z, \\
\frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} &= \Big(\frac{\partial u}{\partial \beta} - z\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta}\Big)\vec{e}_\alpha + (u - z\theta_\beta)\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \beta} + \Big(\frac{\partial v}{\partial \beta} - z\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta}\Big)\vec{e}_\beta + (v - z\theta_\alpha)\frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\vec{e}_z, \\
\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} &= -\theta_\beta \vec{e}_\alpha - \theta_\alpha \vec{e}_\beta.
\end{aligned}
$$

Näiden sijoittaminen lausekkeisiin (13), ottaen huomioon yksikkövektoreiden derivaatoille edellä johdetut tulokset (4) tai (5) antaa

$$
\begin{aligned}
\epsilon_X &= \epsilon_\alpha = \frac{1}{H_\alpha}\Big(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - z\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} + \frac{v - z\theta_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta}\Big), \\
\epsilon_Y &= \epsilon_\beta = \frac{1}{H_\beta}\Big(\frac{\partial v}{\partial \beta} - z\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} + \frac{u - z\theta_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha}\Big), \\
\epsilon_Z &= \epsilon_z = 0, \\
\gamma_{XY} &= \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{H_\alpha}\Big(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - z\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{u - z\theta_\beta}{H_\beta}\frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{H_\beta}\Big(\frac{\partial u}{\partial \beta} - z\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} - \frac{v - z\theta_\alpha}{H_\alpha}\frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha}\Big), \\
\gamma_{YZ} &= \gamma_{\beta z} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial w}{\partial \beta} - \theta_\alpha, \\
\gamma_{ZX} &= \gamma_{z\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \theta_\beta.
\end{aligned}
$$

Ryhmittelemällä lausekkeet normaalikoordinaatista z riippumattomaan ja lineaarisesti riippuvaan osaan, lopullisiksi muodonmuutosten lausekkeiksi saadaan

$$\begin{aligned}
\epsilon_\alpha &= \frac{\partial u}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{v}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - z\Big(\frac{\partial \theta_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\theta_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta}\Big), \\
\epsilon_\beta &= \frac{\partial v}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - z\Big(\frac{\partial \theta_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\theta_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha}\Big), \\
\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{\partial v}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial u}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{v}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \\
&\quad - z\Big(\frac{\partial \theta_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial \theta_\beta}{H_\beta \partial \beta} - \frac{\theta_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{\theta_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha}\Big), \\
\gamma_{\beta z} &= \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} - \theta_\alpha, \\
\gamma_{z\alpha} &= \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} - \theta_\beta.
\end{aligned} \tag{14}$$

Kirchhoffin teoriaan päästään asettamalla $\gamma_{\beta z} = \gamma_{z\alpha} = 0$, jolloin kaksi viimeistä yhtälöä määrittävät rotaatioille rajoitteet

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha &= \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta}, \\
\theta_\beta &= \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Vastaavat muodonmuutosten lausekkeet ovat siis Kirchhoffin teoriassa

$$\begin{aligned}
\epsilon_\alpha &= \frac{\partial u}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{v}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - z\left(\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha}\Big(\frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha}\Big)\right), \\
\epsilon_\beta &= \frac{\partial v}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - z\left(\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial}{H_\beta \partial \beta}\Big(\frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta}\Big)\right), \\
\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{\partial v}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial u}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{v}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \\
&\quad + z\left(\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta} + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha}\Big(\frac{\partial w}{H_\beta \partial \beta}\Big) - \frac{\partial}{H_\beta \partial \beta}\Big(\frac{\partial w}{H_\alpha \partial \alpha}\Big)\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Johdettaessa jatkossa tasapainoyhtälöitä on tarpeen 'purkaa' muodonmuutoskomponentti $\gamma_{\alpha\beta}$ osiin siten, että $\gamma_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}$, jossa

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_\beta = \frac{1}{H_\alpha}\Big(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - z\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{u - z\theta_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta}\Big), \\
\epsilon_{\beta\alpha} &= \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_\alpha = \frac{1}{H_\beta}\Big(\frac{\partial u}{\partial \beta} - z\frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} - \frac{v - z\theta_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha}\Big).
\end{aligned}$$

Näiden fysikaalinen tulkinta on helposti havainnollistettavissa kummankin alkuaan toisiaan vastaan kohtisuorassa asemassa olevan materiaalisäikeen erikseen kokemana kulmanmuutoksena.

Muodonmuutoskomponenteista (14) ja (16) ϵ_α, ϵ_β ja $\gamma_{\alpha\beta}$ voidaan jakaa erillisiin keskipinnan muodonmuutoksiin ja käyristymiin, z-koordinaatista riippumattomien ja lineaarisesti riippuvien termien mukaisesti:

$$\begin{aligned}
\epsilon_\alpha &= \epsilon_\alpha^o + z\kappa_\alpha, \\
\epsilon_\beta &= \epsilon_\beta^o + z\kappa_\beta, \\
\gamma_{\alpha\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta}^o + \epsilon_{\beta\alpha}^o + \tfrac{1}{2}z(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\beta\alpha}).
\end{aligned}$$

Keskipinnan muodonmuutokset liittyvät laatan tarkasteluun levynä, eli tapaukseen, jossa kuormitukset kohdistuvat laattaan laatan keskipinnan tasossa, kun taas käyristymät sekä leikkausmuodonmuutokset $\gamma_{\beta z}$ ja $\gamma_{z\alpha}$ liittyvät taivutustilaan kuormituksen ollessa kohtisuorassa laatan keskipintaa vastaan. Pienten siirtymien teorian ollessa kyseessä nämä tarkastelut voidaan suorittaa toisistaan täysin riippumattomina.

Suorakaidelaatan tapauksessa, kuva 3a, saadaan yksinkertaisin esitys seuraavasti: $\alpha \to x$, $\beta \to y$. Tällöin paikkavektori on muotoa

$$\vec{r}(x,y,z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

ja koordinaateilla on pituuden dimensio, joten mittakaavatekijät ovat vakioita $H_x = H_y = 1$. Lisäksi yksikkövektoreiden derivaatat häviävät, koska vektorit ovat vakioita myös suunnaltaan. Reissner-Mindlinin teorian mukaiset muodonmuutokset (14) ovat muotoa:

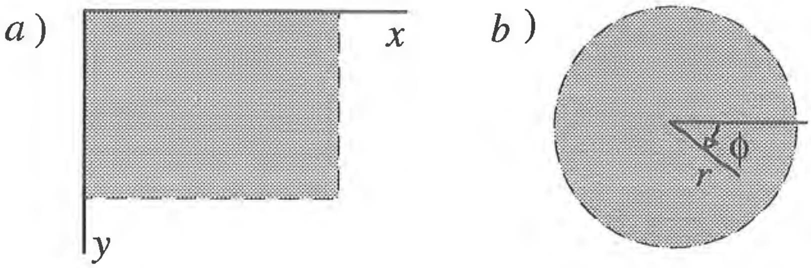
$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \\
\epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right), \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x, \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y.
\end{aligned}$$

vastaavat Kirchhoffin teorian muodonmuutokset (16) ovat

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
\epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Ympyrälaatan tapauksessa, kuva 3b, tehdään valinta $\alpha \to r$, $\beta \to \phi$. Paikkavektori on

$$\vec{r}(r,\phi,z) = r\cos\phi\vec{e}_x + r\sin\phi\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$



Kuva 3. a) Suorakaide- ja b) ympyrälaatta.

Derivoimalla saadaan

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\phi \vec{e}_x + \sin\phi \vec{e}_y,$$
$$\vec{e}_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin\phi \vec{e}_x + \cos\phi \vec{e}_y,$$

jolloin mittakaavatekijät ovat $H_r = 1$ ja $H_\phi = r$. Lisäksi yksikkövektoreiden derivaatat r:n suhteen häviävät ja ϕ:n suhteen ne ovat

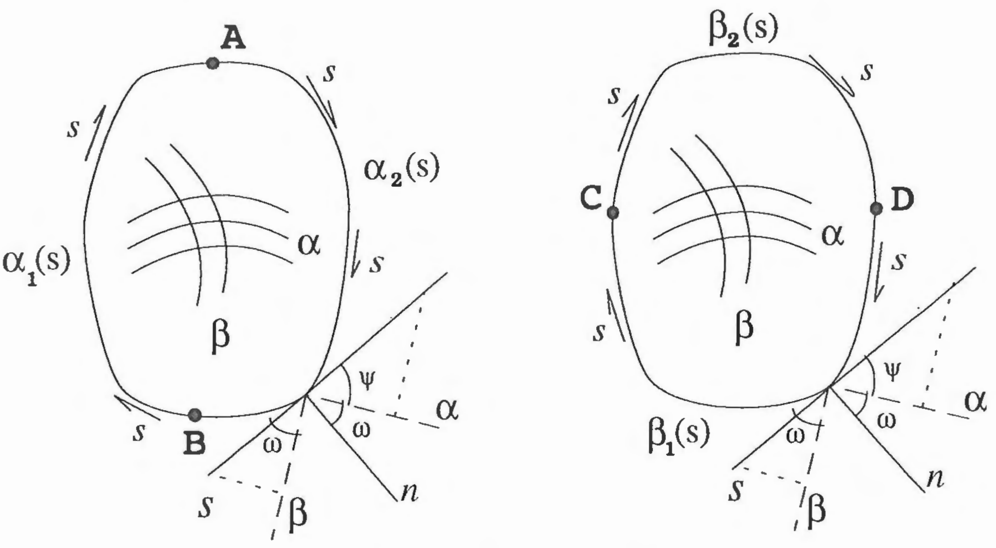
$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = \vec{e}_\phi,$$
$$\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_r.$$

Reissner-Mindlinin teorian antamat lausekkeet (14) ovat nyt muotoa

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} - z\frac{\partial \theta_\phi}{\partial r},$$
$$\epsilon_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{r} - z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \theta_r}{\partial \phi} + \frac{\theta_\phi}{r}\right),$$
$$\gamma_{r\phi} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{r} - z\left(\frac{\partial \theta_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta_\phi}{\partial \phi} - \frac{\theta_r}{r}\right),$$
$$\gamma_{\phi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi} - \theta_r,$$
$$\gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} - \theta_\phi.$$

Vastaavasti Kirchhoffin teorian lausekkeet (16) ovat

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} - z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2},$$
$$\epsilon_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{u}{r} - z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right),$$
$$\gamma_{r\phi} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{r} - 2z\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \phi}\right).$$



Kuva 4. Laatan reunaviivan geometria.

LAATAN TASAPAINOYHTÄLÖT

Osittaisintegrointi kahdessa dimensiossa

Tasapainoyhtälöt johdetaan jälleen käyttämällä virtuaalisen työn periaatetta. Tällöin joudutaan soveltamaan tyyppiä $\int_S f_1(x,y)(\partial f_2(x,y)/\partial x)\mathrm{d}S$ olevia integraaleja käsiteltäessä Greenin teoreemaan pohjautuvaa osittaisintegrointia kahdessa dimensiossa.

Olkoot $g = g(\alpha,\beta)$ ja $h = h(\alpha,\beta)$ kaksi kahden muuttujan α ja β funktiota, jotka on määritelty tarkasteltavassa alueessa. Tavanomaisista integrointikaavoista, jotka sovellettuna näiden kahden funktion tuloon ovat

$$\int_\alpha \int_\beta \frac{\partial(gh)}{\partial\alpha}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \int_\beta \Big[gh\Big]_{\alpha_1(\beta)}^{\alpha_2(\beta)}\mathrm{d}\beta,$$
$$\int_\alpha \int_\beta \frac{\partial(gh)}{\partial\beta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \int_\alpha \Big[gh\Big]_{\beta_1(\alpha)}^{\beta_2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha,$$

saadaan suoraan tulon derivointisääntöä soveltamalla, WEMPNER (1981), MALVERN (1969), kaavat

$$\begin{aligned}\int_\alpha \int_\beta g\frac{\partial h}{\partial\alpha}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta &= \int_\beta \Big[gh\Big]_{\alpha_1(\beta)}^{\alpha_2(\beta)}\mathrm{d}\beta - \int_\alpha \int_\beta \frac{\partial g}{\partial\alpha}h\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta,\\ \int_\alpha \int_\beta g\frac{\partial h}{\partial\beta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta &= \int_\alpha \Big[gh\Big]_{\beta_1(\alpha)}^{\beta_2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha - \int_\alpha \int_\beta \frac{\partial g}{\partial\beta}h\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta.\end{aligned} \tag{19}$$

Sijoitustermeissä ylä- ja alarajan määrittävät funktiot määräytyvät kuvan 4 mukaisesti. Esimerkiksi integraalissa β-koordinaatin suhteen alueen reunaviiva, joka otaksutaan sileäksi suljetuksi käyräksi, jaetaan kahteen osaan pisteillä A ja B. Nämä pisteet edustavat β- koordinaatin ääriarvoja tarkastelualueessa. Integroinnissa alarajana on laatan reunaviivan vasen puoli $\alpha_1(\beta)$ ja ylärajana reunaviivan oikea puoli $\alpha_2(\beta)$. Vastaavat rajat α-koordinaatin suhteen laskettavassa integraalissa ovat pisteiden C ja

D välillä käyrät $\beta_1(\alpha)$ ja $\beta_2(\alpha)$. Jotta reunaehdot laatan reunaviivoilla voidaan ottaa helpommin huomioon, sijoitustermeissä olevat viivaintegraalit muunnetaan reunaviivaa kiertävän koordinaatin s avulla esitetyiksi. Kun käytetään ulkoisen normaalin n suuntakosineille merkintöjä $n_\alpha = (\vec{e}_n \cdot \vec{e}_\alpha) = \cos\omega$ ja $n_\beta = (\vec{e}_n \cdot \vec{e}_\beta) = \cos\psi$, voidaan kuvan 4 merkintöjä käyttäen kirjoittaa

$$n_\alpha \mathrm{d}s = (\vec{e}_n \cdot \vec{e}_\alpha)\mathrm{d}s = H_\beta \mathrm{d}\beta,$$
$$n_\beta \mathrm{d}s = (\vec{e}_n \cdot \vec{e}_\beta)\mathrm{d}s = -H_\alpha \mathrm{d}\alpha.$$

On huomattava vielä, että valittaessa koordinaatti s kiertämään laatan reunaviivaa vastapäivään (vastoin kuvassa 4 sovellettua käytäntöä), tulee näissä kaavoissa muuttaa termin ds etumerkki. Viivaintegraalit lasketaan näinollen seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \Big[gh\Big]_{\alpha_1(\beta)}^{\alpha_2(\beta)} \mathrm{d}\beta &= \int_\beta gh\Big|_{\alpha=\alpha_2} \mathrm{d}\beta - \int_\beta gh\Big|_{\alpha=\alpha_1} \mathrm{d}\beta \\
&= \int_B^A gh\Big|_{\alpha=\alpha_2} \frac{\mathrm{d}\beta}{ds}\mathrm{d}s + \int_A^B gh\Big|_{\alpha=\alpha_1} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \\
&= \int_A^B gh\Big|_{\alpha=\alpha_1} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s + \int_B^A gh\Big|_{\alpha=\alpha_2} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \\
&= \oint_s \frac{gh}{H_\beta} n_\alpha \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

Toisella rivillä kirjoitettu yhtäsuuruus pätee, koska reunan osalla $\alpha_1(\beta)$ koordinaatit β ja s kasvavat vastakkaisiin suuntiin. Vastaavanlaisella laskutoimituksella muunnetaan toinenkin viivaintegraaleista ja näinollen kumpikin niistä voidaan erikseen lausua muodossa

$$\int_\beta \Big[gh\Big]_{\alpha_1(\beta)}^{\alpha_2(\beta)} \mathrm{d}\beta = \oint_s \frac{gh}{H_\beta} n_\alpha \mathrm{d}s,$$
$$\int_\alpha \Big[gh\Big]_{\beta_1(\alpha)}^{\beta_2(\alpha)} \mathrm{d}\alpha = \oint_s \frac{gh}{H_\alpha} n_\beta \mathrm{d}s,$$

Jos reunaviivaa kiertävän koordinaatin s kiertosuunta valitaankin positiiviseksi vastapäivään, edellä esitetyn mukaisesti ds:n etumerkki tulee vaihtaa. Mutta tällöin β ja s kasvavat vastakkaisiin suuntiin reunaviivalla $\alpha = \alpha_2(\beta)$, joten lopullinen integrointikaava säilyttää etumerkkinsä.

Kun nyt näin johdetut lausekkeet sijoitetaan kaksidimensioisiin osittaisintegrointikaavoihin (19), saadaan lopulliset sovelluskaavat

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \int_\beta g \frac{\partial h}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta &= \oint_s \frac{gh}{H_\beta} n_\alpha \mathrm{d}s - \int_\alpha \int_\beta \frac{\partial g}{\partial \alpha} h \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta, \\
\int_\alpha \int_\beta g \frac{\partial h}{\partial \beta} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta &= \oint_s \frac{gh}{H_\alpha} n_\beta \mathrm{d}s - \int_\alpha \int_\beta \frac{\partial g}{\partial \beta} h \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta.
\end{aligned} \tag{20}$$

Virtuaalisen työn periaate

Virtuaalisen työn periaatteessa kuviteltua, virtuaalista siirtymätilaa vastaavan rakenteen sisäisten voimien virtuaalisen työn δW^s (s=sisäinen) ja ulkoisen kuormituksen tekemän virtuaalisen työn δW^u (u=ulkoinen) summa häviää. Tämä periaate voidaan esittää lyhyesti kaavan muodossa

$$\delta W^s + \delta W^u = 0. \tag{21}$$

Sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ laatan tapauksessa on

$$\delta W^s = -\int_V (\sigma_X \delta\epsilon_X + \sigma_Y \delta\epsilon_Y + \tau_{XY}\delta\gamma_{XY} + \tau_{YZ}\delta\gamma_{YZ} + \tau_{ZX}\delta\gamma_{ZX})\mathrm{d}V.$$

Tämä lauseke jakaantuu kahteen osaan vastaten levytilan eli kalvotilan (venytys) ja laattatilan (taivutus) osuutta. Virtuaalisten muodonmuutoskomponenttien lausekkeet saadaan edellä esitetyistä lausekkeista (14) tai (16) varioimalla eli muodollisesti asettamalla $u \leftarrow \delta u$ jne. Lausekkeissa on tällöin z-koordinaatin suhteen vakiotermejä ja ensimmäisen asteen termejä. Keskipinnan virtuaalisia muodonmuutoksia merkitään yläindeksillä $(-)^o$. Ottamalla huomioon, että laatan tilavuusalkio

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\alpha}d\alpha\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\beta}\mathrm{d}\beta\mathrm{d}z = H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}z, \tag{22}$$

ja että kussakin pisteessä erikseen pätevät jännityskomponenttien välillä yhteydet $\sigma_X = \sigma_\alpha$, $\tau_{XY} = \tau_{\alpha\beta}$... sekä virtuaalisten venymäkomponenttien välillä vastaavasti $\delta\epsilon_X = \delta\epsilon_\alpha$, $\delta\gamma_{XY} = \delta\gamma_{\alpha\beta}$... virtuaalisen työn lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \delta W^s &= -\int_V (\sigma_\alpha \delta\epsilon_\alpha^o + \sigma_\beta\delta\epsilon_\beta^o + \tau_{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}^o)H_\alpha H_\beta \mathrm{d}z\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta + \\ &\quad - \int_V \left[z\sigma_\alpha\delta\kappa_\alpha + z\sigma_\beta\delta\kappa_\beta + z\tau_{\alpha\beta}\delta\kappa_{\alpha\beta} + \tau_{\beta z}\delta\gamma_{\beta z} + \tau_{z\alpha}\delta\gamma_{z\alpha}\right]H_\alpha H_\beta \mathrm{d}z\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\ &= \delta W_I^s + \delta W_{II}^s. \end{aligned} \tag{23}$$

Sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ on jaoteltu esitetyllä tavalla kalvotilaan ja taivutustilaan liittyviksi osuuksiksi.

Ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ koostuu tilavuusvoimien, esimerkiksi rakenteen oman painon, ja pintavoimien tekemästä työstä

$$\begin{aligned} \delta W^u &= \int_V \vec{f}\cdot\delta\vec{u}\ \mathrm{d}V + \int_{A_t} \vec{t}\cdot\delta\vec{u}\ \mathrm{d}A \\ &= \int_V [f_X\delta u_X + f_Y\delta u_Y + f_Z\delta u_Z]\mathrm{d}V + \int_{A_t}[t_X\delta u_X + t_Y\delta u_Y + t_Z\delta u_Z]\mathrm{d}A. \end{aligned} \tag{24}$$

Nimitys pintavoimat käsittää kuormitukset, jotka kohdistuvat laatan pintaan, siis ylä- ja alapintaan sekä reunapintaan. Edelliset on jätetty tarkastelusta erillisinä pois, jolloin ne voidaan ajatella sisällytetyiksi likimain tilavuusvoimien osuuteen. Kuormat laatan reunalla jaetaan suoraan komponentteihin reunaviivan normaalin ja tangentin suunnille, jolloin $\vec{t} = t_n\vec{e}_n + t_s\vec{e}_s + t_z\vec{e}_z$. Tällöin on otettava huomioon kuvan 2 perusteella siirtymä- ja rotaatiosuureiden positiiviset suunnat sekä niistä aiheutuvat muutokset tiettyihin etumerkkeihin. Samaan asiaan palataan uudelleen edempänä. Sijoittamalla siirtymän lauseke (7) ja hajoittamalla tilavuusintegraali osiin, kuten edellä, sekä myös pintaintegraali, jossa $\mathrm{d}A = \mathrm{d}z\mathrm{d}s$, saadaan

$$
\begin{aligned}
\delta W^u = & \int_\alpha \int_\beta \int_z [f_\alpha \delta u + f_\beta \delta v] \mathrm{d}z H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta + \int_{s_t} \int_z [t_n \delta u_n + t_s \delta u_s] \mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
& - \int_\alpha \int_\beta \int_z [f_\alpha z \delta\theta_\beta + f_\beta z \delta\theta_\alpha - f_z \delta w] \mathrm{d}z H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \\
& + \int_{s_t} \int_z [t_n z \delta\theta_s + t_s z \delta\theta_n + t_z \delta w] \mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
= & \ \delta W_I^u + \delta W_{II}^u.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ - kalvotila

Johdetaan erikseen lausekkeet kalvo- δW_I^s ja taivutustilaan δW_{II}^u liityvien sisäisten voimien tekemälle virtuaaliselle työlle. Lausekkeista (14) tai (16) varioimalla syntyvien z-koordinaatista riippumattomien termien $\delta\epsilon_\alpha^o$, $\delta\epsilon_\beta^o$, $\delta\epsilon_{\alpha\beta}^o$ ja $\delta\epsilon_{\beta\alpha}^o$ sijoitus kalvotilan sisäisten voimien tekemän virtuaalisen työn lausekkeeseen antaa

$$
\begin{aligned}
\delta W_I^s = & -\int_V (\sigma_\alpha \delta\epsilon_\alpha^o + \sigma_\beta \delta\epsilon_\beta^o + \tau_{\alpha\beta} \delta\epsilon_{\alpha\beta}^o + \tau_{\beta\alpha} \delta\epsilon_{\beta\alpha}^o) \mathrm{d}V \\
= & -\int_\alpha \int_\beta \Big\{ \int_z \Big[\sigma_\alpha \Big(\frac{\partial \delta u}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{\delta v}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) + \sigma_\beta \Big(\frac{\partial \delta v}{H_\beta \partial\beta} + \frac{\delta u}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} \Big) \\
& + \tau_{\alpha\beta} \Big(\frac{\partial \delta v}{H_\alpha \partial\alpha} - \frac{\delta u}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) + \tau_{\beta\alpha} \Big(\frac{\partial \delta u}{H_\beta \partial\beta} - \frac{\delta v}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} \Big) \Big] \mathrm{d}z \Big\} H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta.
\end{aligned}
$$

Määritellään kalvojännitysresultantit tavanomaisella tavalla jännitysjakaumien integraaleina yli laatan paksuuden

$$
N_\alpha = \int_z \sigma_\alpha \mathrm{d}z, \qquad N_\beta = \int_z \sigma_\beta \mathrm{d}z, \qquad N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \int_z \tau_{\alpha\beta} \mathrm{d}z = \int_z \tau_{\beta\alpha} \mathrm{d}z, \tag{26}
$$

Integrointi z-koordinaatin suhteen tuottaa lausekkeen, josta z-koordinaatti on suodattunut pois:

$$
\begin{aligned}
\delta W_I^s = & -\int_\alpha \int_\beta \Big\{ N_\alpha \Big(\frac{\partial \delta u}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{\delta v}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) + N_\beta \Big(\frac{\partial \delta v}{H_\beta \partial\beta} + \frac{\delta u}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} \Big) \\
& + N_{\alpha\beta} \Big(\frac{\partial \delta v}{H_\alpha \partial\alpha} - \frac{\delta u}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) + N_{\beta\alpha} \Big(\frac{\partial \delta u}{H_\beta \partial\beta} - \frac{\delta v}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} \Big) \Big\} H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta.
\end{aligned}
$$

Sovelletaan tässä lausekkeessa osittaisintegrointikaavaa (20) niihin termeihin, joissa esiintyy siirtymäkomponenttien δu tai δv derivaattoja, ja kootaan tämän jälkeen kummankin komponentin kertoimet erikseen yhteen, jolloin saadaan

$$
\begin{aligned}
\delta W_I^s = & \int_\alpha \int_\beta \Big[\Big(\frac{\partial N_\alpha}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{N_\alpha - N_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{H_\beta \partial\beta} + \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) \delta u \\
& + \Big(\frac{N_\beta - N_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} + \frac{\partial N_\beta}{H_\beta \partial\beta} + \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{H_\alpha \partial\alpha} \Big) \delta v \Big] H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \\
& - \int_s [(N_\alpha n_\alpha + N_{\beta\alpha} n_\beta) \delta u + (N_\beta n_\beta + N_{\alpha\beta} n_\alpha) \delta v] \mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Viivaintegraali reunaviivaa pitkin voidaan esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
&-\int_s [(N_\alpha n_\alpha + N_{\beta\alpha} n_\beta)\delta u + (N_\beta n_\beta + N_{\alpha\beta} n_\alpha)\delta v]\mathrm{d}s \\
&= -\int_s [\, n_\alpha \quad n_\beta \,] \begin{bmatrix} N_\alpha & N_{\alpha\beta} \\ N_{\beta\alpha} & N_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

ja ottamalla vielä huomioon kuvasta 4 geometriset relaatiot siirtymäkomponenttien välillä

$$
\begin{aligned}
\delta u &= \cos\omega \delta u_n - \cos\psi \delta u_s = n_\alpha \delta u_n - n_\beta \delta u_s, \\
\delta v &= \cos\psi \delta u_n + \cos\omega \delta u_s = n_\beta \delta u_n + n_\alpha \delta u_s,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

tämä on edelleen

$$
\begin{aligned}
&-\int_s [\, n_\alpha \quad n_\beta \,] \begin{bmatrix} N_\alpha & N_{\alpha\beta} \\ N_{\beta\alpha} & N_\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} \mathrm{d}s = \\
&-\int_s [\, n_\alpha \quad n_\beta \,] \begin{bmatrix} N_\alpha & N_{\alpha\beta} \\ N_{\beta\alpha} & N_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_\alpha & -n_\beta \\ n_\beta & n_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_n \\ \delta u_s \end{Bmatrix} \mathrm{d}s = \\
&-\int_s [\, N_n \quad N_{ns} \,] \begin{Bmatrix} \delta u_n \\ \delta u_s \end{Bmatrix} \mathrm{d}s = -\int_s (N_n \delta u_n + N_{ns} \delta u_s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

jossa on määritelty

$$
[\, N_n \quad N_{ns} \,] = [\, n_\alpha \quad n_\beta \,] \begin{bmatrix} N_\alpha & N_{\alpha\beta} \\ N_{\beta\alpha} & N_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_\alpha & -n_\beta \\ n_\beta & n_\alpha \end{bmatrix}. \tag{29}
$$

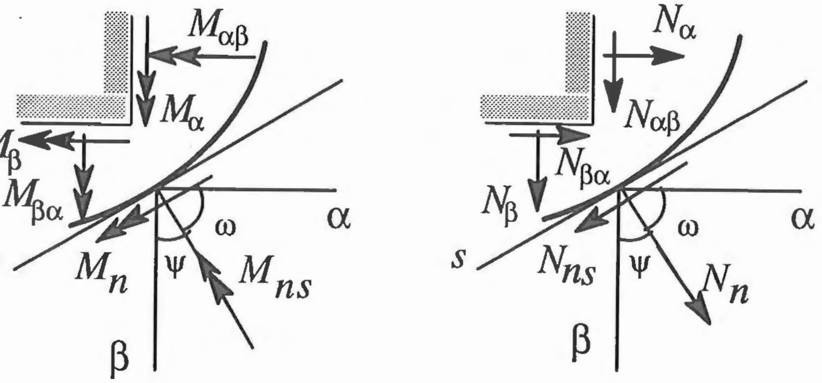
Sama komponenttimuodossa on:

$$
\begin{aligned}
N_n &= n_\alpha^2 N_\alpha + n_\alpha n_\beta (N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}) + n_\beta^2 N_\beta, \\
N_{ns} &= n_\alpha n_\beta (N_\beta - N_\alpha) + n_\alpha^2 N_{\alpha\beta} - n_\beta^2 N_{\beta\alpha}.
\end{aligned}
$$

Lauseke (27) voidaan tämän jälkeen esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
\delta W_I^s = \int_\alpha \int_\beta \Big[&\Big(\frac{\partial N_\alpha}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{N_\alpha - N_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{H_\beta \partial\beta} + \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) \delta u \\
&+ \Big(\frac{N_\beta - N_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} + \frac{\partial N_\beta}{H_\beta \partial\beta} + \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{H_\alpha \partial\alpha} \Big) \delta v \Big] H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \\
&- \int_s (N_n \delta u_n + N_{ns} \delta u_s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Kalvotilan lausekkeisiin ei laatan taivutustilan kinemaattisen mallin valinnalla ole luonnollisestikaan minkäänlaista vaikutusta.



Kuva 5. Voimasuureet laatan reunaviivalla.

Sisäisten voimien tekemä virtuaalinen työ - taivutustila

Menettelemällä aivan vastaavasti kuin edellä, nyt osuuden δW_{II}^s suhteen ja soveltamalla **Reissner-Mindlinin teorian** kinematiikan kaavoja saadaan

$$\delta W_{II}^s = \int_\alpha \int_\beta \int_z \Big\{ z\sigma_\alpha \Big(\frac{\partial \delta\theta_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{\delta\theta_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) + z\sigma_\beta \Big(\frac{\partial \delta\theta_\alpha}{H_\beta \partial\beta} + \frac{\delta\theta_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} \Big)$$
$$+ z\tau_{\alpha\beta} \Big(\frac{\partial \delta\theta_\alpha}{H_\alpha \partial\alpha} - \frac{\delta\theta_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) + z\tau_{\beta\alpha} \Big(\frac{\partial \delta\theta_\beta}{H_\beta \partial\beta} - \frac{\delta\theta_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} \Big)$$
$$- \tau_{\alpha z} \Big(\frac{\partial \delta w}{H_\alpha \partial\alpha} - \delta\theta_\beta \Big) - \tau_{\beta z} \Big(\frac{\partial \delta w}{H_\beta \partial\beta} - \delta\theta_\alpha \Big) \Big\} H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \mathrm{d}z.$$

Määrittelemällä jännitysjakaumia vastaavat momenttiresultantit

$$M_\alpha = \int_z \sigma_\alpha z \mathrm{d}z, \quad M_\beta = \int_z \sigma_\beta z \mathrm{d}z, \quad M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = \int_z \tau_{\alpha\beta} z \mathrm{d}z = \int_z \tau_{\beta\alpha} z \mathrm{d}z, \tag{31}$$

sekä lisäksi leikkausvoimaresultantit

$$Q_\alpha = \int_z \tau_{\alpha z} \mathrm{d}z, \qquad Q_\beta = \int_z \tau_{\beta z} \mathrm{d}z, \tag{32}$$

sisäisten voimien tekemän virtuaalisen työn lauseke saa muodon

$$\delta W_{II}^s = \int_\alpha \int_\beta \Big\{ M_\alpha \Big(\frac{\partial \delta\theta_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{\delta\theta_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) + M_\beta \Big(\frac{\partial \delta\theta_\alpha}{H_\beta \partial\beta} + \frac{\delta\theta_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} \Big)$$
$$+ M_{\alpha\beta} \Big(\frac{\partial \delta\theta_\alpha}{H_\alpha \partial\alpha} - \frac{\delta\theta_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial\beta} \Big) + M_{\beta\alpha} \Big(\frac{\partial \delta\theta_\beta}{H_\beta \partial\beta} - \frac{\delta\theta_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial\alpha} \Big)$$
$$- Q_\alpha \Big(\frac{\partial \delta w}{H_\alpha \partial\alpha} - \delta\theta_\beta \Big) - Q_\beta \Big(\frac{\partial \delta w}{H_\beta \partial\beta} - \delta\theta_\alpha \Big) \Big\} H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta.$$

Lukuunottamatta leikkausvoimien osuutta tämä lauseke on täsmälleen samaa muotoa kuin vastaava lauseke kalvotilassa. Momenttiresultantteja (31) vastaavat kalvovoimaresultantit (26) ja siirtymäkomponentteja δu ja δv rotaatiot $\delta\theta_\beta$ ja $\delta\theta_\alpha$. Soveltamalla jälleen osittaisintegrointikaavoja (20) virtuaalisen työn lauseke saadaan muotoon

$$
\begin{aligned}
\delta W_{II}^{s} = -\int_\alpha\int_\beta & \Big[\Big(\frac{\partial M_\alpha}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{M_\alpha - M_\beta}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{H_\beta\partial\beta} + \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta} - Q_\alpha\Big)\delta\theta_\beta \\
& + \Big(\frac{M_\beta - M_\alpha}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta} + \frac{\partial M_\beta}{H_\beta\partial\beta} + \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{H_\alpha\partial\alpha} - Q_\beta\Big)\delta\theta_\alpha \\
& - \Big(\frac{\partial Q_\alpha}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{H_\beta\partial\beta} + \frac{Q_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{Q_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta}\Big)\delta w\Big] H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \qquad (33) \\
& + \int_s [(M_\alpha n_\alpha + M_{\beta\alpha}n_\beta)\delta\theta_\beta + (M_\beta n_\beta + M_{\alpha\beta}n_\alpha)\delta\theta_\alpha - (Q_\alpha n_\alpha + Q_\beta n_\beta)\delta w]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Menettelemällä samoin kuin edellä kalvotilan ratkaisun yhteydessä, ottamalla huomioon kuvan 2 perusteella geometriset relaatiot rotaatiokomponenttien välillä

$$
\begin{aligned}
\delta\theta_\alpha &= -\cos\psi\delta\theta_s - \cos\omega\delta\theta_n = -n_\beta\delta\theta_s - n_\alpha\delta\theta_n, \\
\delta\theta_\beta &= -\cos\omega\delta\theta_s + \cos\psi\delta\theta_n = -n_\alpha\delta\theta_s + n_\beta\delta\theta_n,
\end{aligned} \qquad (34)
$$

viivaintegraalitermi voidaan esittää muodossa

$$
\begin{aligned}
&\int_s [(M_\alpha n_\alpha + M_{\beta\alpha}n_\beta)\delta\theta_\beta + (M_\beta n_\beta + M_{\alpha\beta}n_\alpha)\delta\theta_\alpha - (Q_\alpha n_\alpha + Q_\beta n_\beta)\delta w]\mathrm{d}s \\
&= -\int_s [M_n\delta\theta_s + M_{ns}\delta\theta_n + Q_n\delta w]\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

jossa on määritelty

$$
[\,M_n \quad M_{ns}\,] = [\,n_\alpha \quad n_\beta\,]\begin{bmatrix} M_\alpha & M_{\alpha\beta} \\ M_{\beta\alpha} & M_\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_\alpha & -n_\beta \\ n_\beta & n_\alpha \end{bmatrix}, \qquad (35)
$$

ja

$$
Q_n = Q_\alpha n_\alpha + Q_\beta n_\beta. \qquad (36)
$$

Lauseke (33) on lopulta

$$
\begin{aligned}
\delta W_{II}^{s} = -\int_\alpha\int_\beta & \Big[\Big(\frac{\partial M_\alpha}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{M_\alpha - M_\beta}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{H_\beta\partial\beta} + \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta} - Q_\alpha\Big)\delta\theta_\beta \\
& + \Big(\frac{M_\beta - M_\alpha}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta} + \frac{\partial M_\beta}{H_\beta\partial\beta} + \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{H_\alpha\partial\alpha} - Q_\beta\Big)\delta\theta_\alpha \\
& - \Big(\frac{\partial Q_\alpha}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{H_\beta\partial\beta} + \frac{Q_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{Q_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta}\Big)\delta w\Big] H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \qquad (37) \\
& - \int_s [M_n\delta\theta_s + M_{ns}\delta\theta_n - Q_n\delta w]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Sovellettaessa perinteistä **Kirchhoffin teoriaa** leikkausmuodonmuutokset $\gamma_{\alpha z}$ ja $\gamma_{\beta z}$ häviävät, eikä tästä johtuen sisäisten voimien tekemän virtuaalisen työn lausekkeeseen tule leikkausvoimien osuutta lainkaan, koska rotaatiokomponentit määräytyvät ehdon (15) mukaisesti. Tässä tapauksessa lauseketta (33) vastaten saadaan

$$\delta W_{II}^{s} = -\int_{\alpha}\int_{\beta}\Big[\Big(\frac{\partial M_\alpha}{H_\alpha \partial\alpha} + \frac{M_\alpha - M_\beta}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{H_\beta\partial\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}+M_{\beta\alpha}}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta}\Big)\frac{\partial\delta w}{H_\alpha\partial\alpha}$$
$$+\Big(\frac{M_\beta - M_\alpha}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta} + \frac{\partial M_\beta}{H_\beta\partial\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}+M_{\beta\alpha}}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{H_\alpha\partial\alpha}\Big)\frac{\partial\delta w}{H_\beta\partial\beta}\Big] H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$
$$+\int_s\Big[(M_\alpha n_\alpha + M_{\beta\alpha}n_\beta)\frac{\partial\delta w}{H_\alpha\partial\alpha} + (M_\beta n_\beta + M_{\alpha\beta}n_\alpha)\frac{\partial\delta w}{H_\beta\partial\beta}\Big]\mathrm{d}s.$$

Tehdään merkintäsopimukset

$$Q_\alpha^* = \frac{\partial M_\alpha}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{M_\alpha - M_\beta}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{H_\beta\partial\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}+M_{\beta\alpha}}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta},$$
$$Q_\beta^* = \frac{M_\beta - M_\alpha}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta\partial\beta} + \frac{\partial M_\beta}{H_\beta\partial\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}+M_{\beta\alpha}}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{H_\alpha\partial\alpha}, \tag{38}$$

jotka ovat todelliset leikkausvoimat ilman tilavuusvoimien osuutta. Lisäksi muunnetaan viivaintegraalilausekkeessa derivaattaoperaattorit käyttäen kuvan 4 geometriaa ja ketjuderivointisääntöä hyväksi

$$\frac{\partial}{H_\alpha\partial\alpha} = \frac{\partial n}{H_\alpha\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial s}{H_\alpha\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial s} = n_\alpha\frac{\partial}{\partial n} - n_\beta\frac{\partial}{\partial s},$$
$$\frac{\partial}{H_\beta\partial\beta} = \frac{\partial n}{H_\beta\partial\beta}\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial s}{H_\beta\partial\beta}\frac{\partial}{\partial s} = n_\beta\frac{\partial}{\partial n} + n_\alpha\frac{\partial}{\partial s}, \tag{39}$$

jolloin taivutustilaan liittyvän sisäisen virtuaalisen työn lauseke saa tarvittavan osittaisintegrointioperaation jälkeen muodon

$$\delta W_{II}^{s} = \int_\alpha\int_\beta\Big[\frac{\partial(H_\beta Q_\alpha^*)}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial(H_\alpha Q_\beta^*)}{H_\beta\partial\beta}\Big]\delta w H_\alpha H_\beta\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$
$$+\int_s\Big[M_n\frac{\partial\delta w}{\partial n} + M_{ns}\frac{\partial\delta w}{\partial s} - (Q_\alpha^* n_\alpha + Q_\beta^* n_\beta)\delta w\Big]\mathrm{d}s.$$

Suoritetaan reunaintegraalissa vielä kerran osittaisintegrointi s-koordinaatin suhteen, jolloin saadaan

$$\delta W_{II}^{s} = \int_\alpha\int_\beta\Big[\frac{\partial(H_\beta Q_\alpha^*)}{H_\alpha\partial\alpha} + \frac{\partial(H_\alpha Q_\beta^*)}{H_\beta\partial\beta}\Big]\delta w H_\alpha H_\beta\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$
$$+\int_s\Big[M_n\frac{\partial\delta w}{\partial n} - (Q_n^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s})\delta w\Big]\mathrm{d}s + M_{ns}\delta w\Big|_s. \tag{40}$$

Viimeisin termi lausekkeessa (40), eli osittaisintegroinnissa laatan reunaviivaa pitkin syntynyt sijoitustermi, saa arvoja ainoastaan laatan kulmapisteissä, eli kaikissa reunaviivan tangentin epäjatkuvuuskohdissa. Viivaintegraaliin syntynyttä termiä δw:n kertoimena

$$V_n = Q_n^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}, \tag{41}$$

kutsutaan laatan korvikeleikkausvoimaksi tai Kirchhoffin leikkausvoimaksi. Huomattakoon vielä, että rotaatioiden θ_α, θ_β, θ_n ja θ_s positiiviset suunnat voidaan perustellusti valita hyvin monella tavalla, jolloin tiettyjen termien etumerkeissä tapahtuu muutoksia. Tässä yhteydessä rotaatioiden θ_α ja θ_β etumerkit on valittu siten, että siirtymän lauseke (7) saa symmetrisen muodon muuttujien α ja β suhteen.

Ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ - kalvotila

Ulkoisten voimien tekemän virtuaalisen työn lauseke kalvotilassa on (ks. (25))

$$\delta W_I^u = \int_\alpha \int_\beta \int_z [f_\alpha \delta u + f_\beta \delta v] \mathrm{d}z H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta + \int_{s_t} \int_z [t_n \delta u_n + t_s \delta u_s] \mathrm{d}z \mathrm{d}s.$$

Määritellään ulkoiset kuormitusresultantit vastaavasti kuin edellä sisäiset, tällä kertaa erikseen tilavuus- ja pintavoimille

$$p_\alpha = \int_z f_\alpha \mathrm{d}z, \quad p_\beta = \int_z f_\beta \mathrm{d}z, \quad T_n = \int_z t_n \mathrm{d}z, \quad T_{ns} = \int_z t_s \mathrm{d}z, \tag{42}$$

jolloin saadaan

$$\delta W_I^u = \int_\alpha \int_\beta [p_\alpha \delta u + p_\beta \delta v] H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta + \int_{s_t} [T_n \delta u_n + T_{ns} \delta u_s] \mathrm{d}s. \tag{43}$$

Ulkoisten voimien tekemä virtuaalinen työ - taivutustila

Laatan taivutustilassa ulkoisten kuormitusten tekemän virtuaalisen työn lauseke on (ks. (25))

$$\begin{aligned} \delta W_{II}^u = &- \int_\alpha \int_\beta \int_z [z(f_\alpha \delta\theta_\beta + f_\beta \delta\theta_\alpha) - f_z \delta w] \mathrm{d}z H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \\ &+ \int_{s_t} \int_z [z(t_n \delta\theta_s + t_s \delta\theta_n) + t_z \delta w] \mathrm{d}z \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Määrittelemällä ulkoisten voimien momentti- sekä leikkausvoimaresultantit erikseen tilavuus- ja reunakuormituksille

$$\begin{gathered} m_\alpha = \int_z f_\alpha z \mathrm{d}z, \quad m_\beta = \int_z f_\beta z \mathrm{d}z, \quad W_n = \int_z t_n z \mathrm{d}z, \quad W_{ns} = \int_z t_s z \mathrm{d}z, \\ p_z = \int_z f_z \mathrm{d}z, \quad T_z = \int_z t_z \mathrm{d}z, \end{gathered} \tag{44}$$

ulkoisten voimien tekemän virtuaalisen työn lauseke saa muodon

$$\begin{aligned} \delta W_{II}^u = &- \int_\alpha \int_\beta [m_\alpha \delta\theta_\beta + m_\beta \delta\theta_\alpha - p_z \delta w] H_\alpha H_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \\ &+ \int_{s_t} [W_n \delta\theta_s + W_{ns} \delta\theta_n + T_z \delta w] \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{45}$$

Edellä esitetty lauseke on johdettu **Reissner-Mindlinin teorian** perusotaksumien pohjalta. **Kirchhoffin teoriaa** sovellettaessa rotaatiotermit määräytyvät ehdoista (15), jolloin lauseke (45) saa muodon

$$\delta W_{II}^{u} = -\int_{\alpha}\int_{\beta}[m_{\alpha}\frac{\partial\delta w}{H_{\alpha}\partial\alpha} + m_{\beta}\frac{\partial\delta w}{H_{\beta}\partial\beta} - p_z\delta w]H_{\alpha}H_{\beta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$
$$-\int_{s_t}\left[W_{\alpha}\frac{\partial\delta w}{H_{\alpha}\partial\alpha} + W_{\beta}\frac{\partial\delta w}{H_{\beta}\partial\beta} - T_z\delta w\right]\mathrm{d}s.$$

Sovelletaan tilavuusintegraalissa Greenin integrointikaavaa eli suoritetaan yhden kerran osittaisintegrointi, ja samalla muunnetaan reunaintegraalissa momentit ja derivaatta-operaattorit reunaviivan koordinaatteihin käyttämällä kaavoja (39). Tällöin saadaan

$$\delta W_{II}^{u} = \int_{\alpha}\int_{\beta}\left[\frac{\partial m_{\alpha}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{m_{\alpha}}{H_{\beta}}\frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{\partial m_{\beta}}{H_{\beta}\partial\beta} + \frac{m_{\beta}}{H_{\alpha}}\frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta}\partial\beta} + p_z\right]\delta w H_{\alpha}H_{\beta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$
$$-\int_{s_t}\left[W_n\frac{\partial\delta w}{\partial n} + W_{ns}\frac{\partial\delta w}{\partial s} - T_z\delta w + m_n\delta w\right]\mathrm{d}s,$$

jossa laatan reunalla $m_n = n_{\alpha}m_{\alpha} + n_{\beta}m_{\beta}$. Suorittamalla vielä osittaisintegrointi jälkimmäisessä eli reunaintegraalitermissä muuttujan s suhteen saadaan lopulta

$$\begin{aligned}\delta W_{II}^{u} = &\int_{\alpha}\int_{\beta}\left[\frac{\partial m_{\alpha}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{m_{\alpha}}{H_{\beta}}\frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{\partial m_{\beta}}{H_{\beta}\partial\beta} + \frac{m_{\beta}}{H_{\alpha}}\frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta}\partial\beta} + p_z\right]\delta w H_{\alpha}H_{\beta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\ &-\int_{s_t}\left[W_n\frac{\partial\delta w}{\partial n} - \left(\frac{\partial W_{ns}}{\partial s} + T_z - m_n\right)\delta w\right]\mathrm{d}s - W_{ns}\delta w\Big|_s.\end{aligned} \tag{46}$$

Viimeinen termi saa nollasta eroavia arvoja vain laatan reunaviivan kulmapisteissä.

Laatan tasapainoehdot ja reunaehdot

Laatan tasapainoehdot aluksi kalvotilassa saadaan sijoittamalla kalvotilaan liittyvät sisäisten (30) ja ulkoisten (43) voimien tekemien virtuaalisten töiden lausekkeet virtuaalisen työn periaatteeseen (21). Näin saadaan ehtoyhtälö

$$\int_{\alpha}\int_{\beta}\left[\left(\frac{\partial N_{\alpha}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{N_{\alpha}-N_{\beta}}{H_{\beta}}\frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{H_{\beta}\partial\beta} + \frac{N_{\alpha\beta}+N_{\beta\alpha}}{H_{\alpha}}\frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta}\partial\beta} + p_{\alpha}\right)\delta u\right.$$
$$\left.+\left(\frac{N_{\beta}-N_{\alpha}}{H_{\alpha}}\frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta}\partial\beta} + \frac{\partial N_{\beta}}{H_{\beta}\partial\beta} + \frac{N_{\alpha\beta}+N_{\beta\alpha}}{H_{\beta}}\frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + p_{\beta}\right)\delta v\right]H_{\alpha}H_{\beta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$
$$-\int_{s}\left[(N_n - T_n)\delta u_n + (N_{ns} - T_{ns})\delta u_s\right]\mathrm{d}s = 0.$$

Koska virtuaaliset siirtymät δu ja δv ovat täysin mielivaltaisesti valittuja, eli $\delta u \neq 0$ ja $\delta v \neq 0$ ainakin osassa tarkastelualuetta, määritelty ehto toteutuu ainoastaan, kun koko laatassa ovat voimassa tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_{\alpha}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{N_{\alpha}-N_{\beta}}{H_{\beta}}\frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{H_{\beta}\partial\beta} + \frac{N_{\alpha\beta}+N_{\beta\alpha}}{H_{\alpha}}\frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta}\partial\beta} + p_{\alpha} = 0, \\ &\frac{N_{\beta}-N_{\alpha}}{H_{\alpha}}\frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta}\partial\beta} + \frac{\partial N_{\beta}}{H_{\beta}\partial\beta} + \frac{N_{\alpha\beta}+N_{\beta\alpha}}{H_{\beta}}\frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{H_{\alpha}\partial\alpha} + p_{\beta} = 0,\end{aligned} \tag{47}$$

ja lisäksi laatan reunalla, jossa siirtymät voivat ainakin osalla reunaviivaa hävitä, joko tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned} -N_n + T_n &= 0, \\ -N_{ns} + T_{ns} &= 0, \end{aligned} \tag{48}$$

reunan osalla s_t tai siirtymätilalle asetetut reunaehdot

$$\begin{aligned} \delta u_n &= u_n - \bar{u}_n = 0, \\ \delta u_s &= u_s - \bar{u}_s = 0, \end{aligned} \tag{49}$$

osalla s_u. Yläviivalla varustetut siirtymäsuureet ovat annettuja siirtymiä eli niinsanottuja pakkosiirtymiä ja ehdot (49) edustavat kinemaattisesti luvalliselle siirtymätilalle asetettavia vaatimuksia. Reunaehdot (48) ja (49) yhdessä huolehtivat siitä, että reunaintegraali häviää laatan koko reunaviivalla.

Taivutustilassa **Reissner-Mindlinin teorian** sovelluksena virtuaalisen työn periaatteeseen sijoitetaan sisäisten (37) ja ulkoisten (45) töiden lausekkeet. Näin päädytään tasapainoyhtälöihin, joiden tulee toteutua koko laatan alueella

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{M_\alpha - M_\beta}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{H_\beta \partial \beta} + \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - Q_\alpha + m_\alpha &= 0, \\ \frac{M_\beta - M_\alpha}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial M_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{H_\alpha \partial \alpha} - Q_\beta + m_\beta &= 0, \\ \frac{\partial Q_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{Q_\alpha}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{Q_\beta}{H_\alpha}\frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + p_z &= 0, \end{aligned} \tag{50}$$

sekä tasapainoehtoihin

$$\begin{aligned} -M_n + W_n &= 0, \\ -M_{ns} + W_{ns} &= 0, \\ Q_n - T_z &= 0, \end{aligned} \tag{51}$$

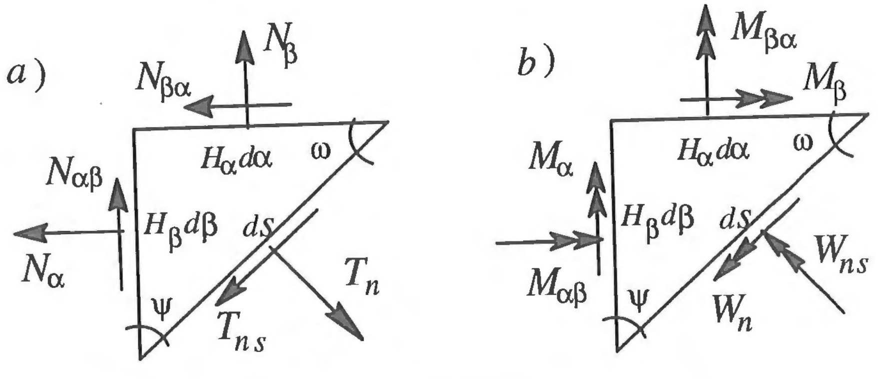
reunan osalla s_t ja siirtymätilan reunaehtoihin

$$\begin{aligned} \delta\theta_n &= \theta_n - \bar{\theta}_n = 0, \\ \delta\theta_s &= \theta_s - \bar{\theta}_s = 0, \\ \delta w &= w - \bar{w} = 0, \end{aligned} \tag{52}$$

reunan osalla s_u. Voima- (48) ja momenttitasapainoehtojen (50) fysikaalinen tulkinta määritelmien (29) ja (35) kanssa on helposti tunnistettavissa kuvassa 6 esitetyn laatan reuna-alkion tavanomaisiksi tasapainoehdoiksi.

Kirchhoffin teorian yhtälöt saadaan sijoittamalla lausekkeet (40) ja (46) virtuaalisen työn yhtälöön (21). Helposti havaitaan, että näin päädytään tasapainoyhtälöön, joka on täsmälleen sama kuin se edellä Reissner-Mindlinin teorian mukaisesti johdettu, josta leikkausvoimasuureet on eliminoitu pois. Sen sijaan toisistaan riippumattomia reunaehtoja voidaan tällöin antaa vain kaksi kutakin laatan reunaa kohden. Nämä ovat

$$\begin{aligned} M_n - W_n &= 0, \\ -V_n + \frac{\partial W_{ns}}{\partial s} + T_z - m_n &= 0, \end{aligned} \tag{53}$$



Kuva 6. a) Laatan reuna-alkioon vaikuttavat voimat ja b) momentit.

reunalla s_t ja

$$\frac{\partial \delta w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = 0, \qquad \delta w = w - \bar{w} = 0, \tag{54}$$

s_u:lla. Lisäksi ratkaisun tulee toteuttaa laatan nurkkapisteissä tasapainoehto

$$M_{ns} - W_{ns} = 0, \tag{55}$$

reunan osalla s_t tai s_u:lla taipuman rajoite-ehto

$$\delta w = w - \bar{w} = 0. \tag{56}$$

Reunaehdoista (53) havaitaan, että vaatimus vääntömomentin häviämisestä laatan reunalla ehdoissa (51) kytketään leikkausvoiman häviämiseen, mikä aiheuttaa tietynlaisen epäkonsistentin formulaation.

Suorakaidelaatan tapauksessa ($\alpha \to x$, $\beta \to y$), kun otetaan huomioon, että mittakaavatekijät ovat vakioita, laatan tasapainoehdoiksi kalvotilassa tulee

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + p_x = 0,$$
$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0,$$

ja taivutustilassa vastaavasti

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + m_x = 0,$$
$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y + m_y = 0,$$
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z = 0.$$

Reunaehdot, esimerkkinä y-akselin suuntaisella laatan sivulla, jossa $n = x$, ovat

$$\left.\begin{aligned} N_x - T_x &= 0, \\ N_{xy} - T_{xy} &= 0, \\ M_x - W_x &= 0, \\ M_{xy} - W_{xy} &= 0, \\ -Q_x + T_z &= 0, \end{aligned}\right\} \quad s_t : \text{lla}, \qquad \text{tai} \qquad \left.\begin{aligned} u - \bar{u} &= 0, \\ v - \bar{v} &= 0, \\ \theta_x - \bar{\theta}_x &= 0, \\ \theta_y - \bar{\theta}_y &= 0, \\ w - \bar{w} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad s_u : \text{lla}.$$

Sovellettaessa taivutustilan tarkasteluun Kirchhoffin teoriaa tasapainoyhtälöt pelkistyvät yhdeksi yhtälöksi

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (M_{yx} + M_{xy})}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + p_z = 0.$$

ja reunaehdot vastaavasti muotoon

$$\left.\begin{aligned} M_x - W_x &= 0, \\ V_x + \frac{\partial W_{xy}}{\partial y} + T_z - m_x &= 0, \end{aligned}\right\} \quad s_t : \text{lla}, \qquad \text{tai} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= 0, \\ w - \bar{w} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad s_u : \text{lla}.$$

Lisäksi laatan nurkkapisteissä ehtojen

$$M_{xy} - W_{xy} = 0, \quad s_t : \text{lla}, \qquad \text{tai} \qquad w - \bar{w} = 0, \quad s_u : \text{lla}.$$

tulee toteutua.

Ympyrälaatan tapauksessa ($\alpha \to r$, $\beta \to \phi$) laatan tasapainoehdot kalvotilassa ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{\phi r}}{r \partial \phi} + \frac{N_r - N_\phi}{r} + p_r &= 0, \\ \frac{\partial N_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial N_{r\phi}}{\partial r} + \frac{N_{r\phi} + N_{\phi r}}{r} + p_\phi &= 0, \end{aligned}$$

ja taivutustilassa

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{\phi r}}{r \partial \phi} + \frac{M_r - M_\phi}{r} - Q_r + m_r &= 0, \\ \frac{\partial M_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial M_{r\phi}}{\partial r} + \frac{M_{r\phi} + M_{\phi r}}{r} - Q_\phi + m_\phi &= 0, \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\phi}{r \partial \phi} + \frac{Q_r}{r} + p_z &= 0. \end{aligned}$$

Reunaehdot laatan kehällä ovat

$$\left.\begin{aligned} N_r - T_r &= 0, \\ N_{r\phi} - T_{r\phi} &= 0, \\ M_r - W_r &= 0, \\ M_{r\phi} - W_{r\phi} &= 0, \\ -Q_r + T_z &= 0, \end{aligned}\right\} \quad s_t : \text{lla}, \qquad \text{tai} \qquad \left.\begin{aligned} u - \bar{u} &= 0, \\ v - \bar{v} &= 0, \\ \theta_r - \bar{\theta}_r &= 0, \\ \theta_\phi - \bar{\theta}_\phi &= 0, \\ w - \bar{w} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad s_u : \text{lla}.$$

Sovellettaessa taivutustilan tarkasteluun Kirchhoffin teoriaa tasapainoyhtälöt pelkistyvät jälleen yhdeksi yhtälöksi

$$\frac{\partial^2(rM_r)}{r\partial r^2}+\frac{\partial^2[r(M_{\phi r}+M_{r\phi})]}{r^2\partial r\partial\phi}-\frac{\partial M_\phi}{r\partial r}+\frac{\partial^2 M_\phi}{r^2\partial\phi^2}+\frac{\partial(rm_r)}{r\partial r}+\frac{\partial m_\phi}{r\partial\phi}+p_z=0,$$

reunaehdot muotoon

$$\left.\begin{aligned}M_r-W_r&=0,\\ V_r+\frac{\partial W_{r\phi}}{r\partial\phi}+T_z-m_r&=0,\end{aligned}\right\}\quad s_t:\text{lla},\qquad\text{tai}\qquad\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial\bar{w}}{\partial r}&=0,\\ w-\bar{w}&=0,\end{aligned}\right\}\quad s_u:\text{lla}.$$

Ympyrän sektorin muotoisen laatan nurkissa tarvitaan vielä ehtoja

$$M_{r\phi}-W_{r\phi}=0,\quad s_t:\text{lla},\qquad\text{tai}\qquad w-\bar{w}=0,\quad s_u:\text{lla}.$$

YHTEENVETO

Artikkelisarjassa selvitellään lähinnä opetustarkoitusta silmällä pitäen erilaisten perusrakennetyyppien analysointia. Rakenteiden muodonmuutoksia tutkitaan käyttämällä hyväksi paikallista suoraviivaista ortogonaalista koordinaattijärjestelmää. Tässä osassa esitetään eri laattateorioiden perusteita. Laattojen yleiset tasapainoyhtälöt johdetaan soveltamalla virtuaalisen työn periaatetta. Esitetyn menettelyn etuna on systemaattisuus, jonka avulla monimutkaisetkin tarkastelut voidaan suorittaa periaatteessa hyvin yksinkertaisesti, ainoastaan perusmatematiikan alkeisiin tukeutuvia menetelmiä käyttäen.

KIRJALLISUUSREFERAATIT

Flügge W. (1972), Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springer-Verlag, New York.

Malvern L.E. (1969), Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs.

Novozhilov V.V. (1964), Thin Shell Theory. P. Noordhoff Ltd. Translation.

Oden J.T. (1967), Mechanics of Elastic Structures. McGraw-Hill.

Washizu K. (1975), Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 2.painos, Pergamon Press Ltd., London.

Vlasov V.Z. (1963), Thin-Walled Elastic Beams. Israel Program for Scientific Translations, Israel.

Wempner G. (1981), Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies. 2nd ed., Sijthoff & Noordhoff.

Juha Paavola, rakenteiden mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu,
Eero-Matti Salonen, mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu.