

YKSINKERTAISTEN RAKENNEMALLIEN TASAPAINO- YHTÄLÖT - osa I SUORAT JA KAAREVAT TASOSAUVAT

Juha Paavola ja Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 28
No. 4, 1995, s. 29-43.

TIIVISTELMÄ Tämän artikkelisarjan tarkoituksena on valaista virtuaalisen työn periaatteen käyttökelpoisuutta yksinkertaisten perusrakennemallien kuten sauvojen, laattojen ja kuorien tasapainoyhtälöitä johdettaessa. Sarja koostuu neljästä artikkelista, joissa kussakin käsitellään yhtä edellä mainituista rakennetyypeistä. Huomiota kiinnitetään virtuaalisen työn periaatteen systemaattisuuden lisäksi erikoisesti siihen, miten erilaiset kinemaattiset perusotaksumat vaikuttavat tehtävien formulointiin. Kukin tarkastelu käsittää rakenteen geometrian, siirtymätilan ja näistä johdetun pienten siirtymien olettamuksen mukaisen eli geometrisesti lineaarisen muodonmuutostilan määrittämisen sekä tasapainoehojen johtamisen reunaehtoineen. Huomiota kiinnitetään jonkin verran myös rakennemallien taustaan sekä analyysin yhdenmukaisuuteen.

JOHDANTO

Rakenteiden analyysin eräänä perustehtävänä on luoda kulloinkin tarkasteltavana olevasta rakenteesta käyttökelpoinen, mahdollisimman yksinkertainen, mutta kuitenkin riittävän hyvin rakenteen todellista käyttäytymistä kuvaava rakennemalli. Tämän mallin analysointi todellisen kolmiulotteisen rakenteen sijasta tarjoaa mahdollisuuden välttää lähes poikkeuksetta eteentulevat varsin mutkikkaat ja työlääät laskutoimitukset.

Rakennustekniikan, samoin kuin monen muunkin alan sovelluksissa on tavoitteenä pyrkiä keveisiin materiaalia säästäviin rakenneratkaisuihin. Näin päädytään usein hoikkiin rakenteisiin, joissa rakenteen geometria tarjoaa oivan mahdollisuuden redusoida eli alentaa tarkasteltavan probleeman dimensiota. Yksinkertainen sauvamalli perustuu siihen seikkaan, että sauvan poikkileikkauksen karakteristiset mitat ovat pieniä sauvan pituuteen verrattuna. Tällöin niille koordinaateille, jotka kulkevat poikkileikkauksen tasossa - siis itse asiassa hyvin lyhyitä matkoja - voidaan ratkaisussa valita yksinkertaisempi rooli ja suodattaa ne kokonaan pois lopullisesta tehtäväformulaatiosta. Tämä tehdään kehittämällä siirtymäfunktiot potenssisarjoiksi, joista ratkaisuun otetaan tavanomaisesti vain korkeintaan lineaarisesti poikkileikkauskoordinaateista riippuvat termit. Itse siirtymäfunctiot jäävät näin ainoastaan sauvan aksiaalikoordinaatista riippuviksi. Poikkileikkauskoordinaatit häviävät ratkaisusta virtuaalisen työn periaatteen mukaisessa tilavuusintegraalissa, joissa syntyy erilaisia voimaresultanteja tai sauvan jäyhyyksiä. Näitä ovat poikkileikkauksen aksiaalijäyhyys eli pinta-ala, taivutus- ja vääntöjäyhydet ja kehittyneemmissä sauvateorioissa lisäksi erilaiset käyritymä- ja vääristymäjäyhydet. Alkuperäinen kolmidimensioinen tehtävä formuloidaan näin yksidimensioiseksi.

Laatta-, levy- ja kuorirakenteiden eli niin sanottujen pintarakenteiden malleissa

ainoastaan rakenteen paksuutta karakterisoiva mitta on pieni pinnan muihin mittoihin verrattuna. Näissä malleissa siis vain paksuuden suunnassa kulkeva koordinaatti jää pois tehtävän lopullisesta formulaatiosta. Tällöin tarkasteltavan mallin dimensio redusoituu kolmesta kahteen.

Tässä esityksessä, ja jatkona seuraavissa kolmessa osassa, pyritään korostamaan erityisesti suoritettavan analyysin selkeyttä ja systemaattisuutta. Tarkastelu koostuu eri vaiheista, jotka ovat rakenteen geometrian kuvaaminen, kinematiikan määrittäminen ja tätä seuraava muodonmuutosten lausekkeiden laskeminen täysin mekaanisesti. Apuna käytetään - ikäänkuin työkaluna - paikallista karteesista koordinaattijärjestelmää, PAAVOLA ja SALONEN (1991), (1992). Lisäksi painotetaan virtuaalisen työn periaatteen käyttökelpoisuutta tasapainoyhtälöiden johtamisessa. Tavanomaisempi vapaakappalekuvioita hyväksi käytävä menettely - vaikka onkin erittäin havainnollinen yksinkertaisia suoria rakenteita tarkasteltaessa - on kaarevia rakenteita analysoitaessa usein varsin hankala, ja sen soveltaminen geometrisesti epälinearisissa analyyseissä on käytännössä lähes mahdotonta. Alan oppikirjoissa, kuten FLÜGGE (1972), ODEN (1967), VLASOV (1963) ja WASHIZU (1975), on esitetty sauvarakenteiden perusteellisia analyyseja.

SAUVAN GEOMETRIA

Sauvan rakennemalli eli sauvamalli koostuu siis yhdestä, suorasta tai kaarevasta viivasta, sauvan akselistä. Tämän viivan asema ja samalla kunkin sen pisteen etäisyys kiinteästä globaalien koordinaattijärjestelmän origosta määräytyy paikkavektorin \vec{r}_o avulla. Paikkavektori voi olla minkä tahansa mielivaltaisen skalaariparametrin α funktio, $\vec{r}_o = \vec{r}_o(\alpha)$. Toisin sanoen, vektorin kärki piirtää liikkuaessaan muuttujan α funktiona avaruuteen viivan, joka on sauvan akseli. Parametrina voi myös olla suoraan kaarenpituus s , jota jatkossa käytetään tehtävän formuloinnissa. Paikkavektori voidaan jakaa komponentteihin globaalien koordinaattijärjestelmän x, y, z koordinaattiakselien suunnille, jolloin

$$\vec{r}_o = \vec{r}_o(s) = x(s)\vec{e}_x + y(s)\vec{e}_y + z(s)\vec{e}_z.$$

Matemaattisessa tarkastelussa tehtävän määrittelyalue on tarkalleen ottaen edellä mainittu yksidimensioinen sauvan akseli. Reuna-alue, jolla reunaehdot annetaan, koostuu vain akselin kahdesta päätepisteestä.

Tarkasteltaessa yleistä kolmidimensioista sauvarakennetta on edullista käyttää koordinaattijärjestelmää, jossa käyräviivainen s -koordinaattiviiva yhtyy sauvan akseliin. Huolimatta siitä, että edellä mainitun globaalien koordinaattijärjestelmän koordinaatit tulevat samannimisiksi, otetaan poikkileikkauksen tasossa käyttöön tutut suoraviivaiset y - ja z -koordinaattimerkinnot siten, että y -akseli yhtyy sauvan päänormaalien suuntaan eli on oskuloivassa tasossa (pääkaarevuustaso) eli tasossa, jonka virittävät päänormaali ja sauvan akselin tangenttivektori ja z -akseli vastaavasti sivunormaalien suuntaan, kohtisuoraan oskuloivaa tasoa vastaan. Lisäksi koordinaattijärjestelmä s, y, z valitaan oikeakätiseksi. Koordinaattien y ja z virittämä taso, poikkileikkaustaso, siis seuraa käyräviivaista akselia ollen kohtisuorassa akselia vastaan jokaisessa sen pisteessä. Tasossa kaarevan sauvan tapauksessa oskuloiva taso on juuri sauvan taso. Tällöin sivunormaali on kohtisuorassa tätä tasoa vastaan.

Sauvan akselin suuntainen tangenttivektori määritellään paikkavektorin derivaattana. Jos derivaatta lasketaan suoraan kaarenpituusparametrin suhteen, tuloksena saadaan yksikkötangenttivektori \vec{e}_s . Jos taas derivaatta lasketaan jonkin muun parametrin

α suhteen, yksikkötangenttivektori määritetään jakamalla derivaattavektori ns. mitta-kaavatekijällä eli Lamé'n parametrilla H_α , joka skaalaa derivaattavektorin laadultaan ja pituudeltaan oikeaksi

$$\vec{e}_s = \frac{d\vec{r}_o}{ds} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{d\vec{r}_o}{d\alpha},$$

missä

$$H_\alpha = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2}.$$

Havaitaan myös, että pätee yhteys

$$ds = H_\alpha d\alpha.$$

Koska \vec{e}_s on yksikkövektori, sen derivaatta on kohtisuorassa itse vektoria vastaan. Olisi varsin luonnollista määritellä sauvan päänormaalien suunta \vec{e}_y yksikkötangenttivektorin derivaatan suunnaksi, mutta näin tehtäessä sauvan kaarevuudesta riippuen z -koordinaatti joutuisi vaihtamaan suuntaansa edestakaisin kahden vastakkaisen suunnan välillä. Tästä syystä on edullisempaa määritellä sauvalle sopivalla tavalla alapuoli, johon y -koordinaatti suunnataan. Näin z :n suunta pysyy samana koko sauvassa ja samalla määräytyy sauvan akselin kaarevuus $\kappa_s = 1/R_s$, josta merkintöjen lyhentämiseksi voidaan alaindeksit s jättää kokonaan pois

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = -\frac{1}{R} \vec{e}_y = -\kappa \vec{e}_y,$$

tai

$$\kappa = \frac{1}{R} = -\frac{d\vec{e}_s}{ds} \cdot \vec{e}_y.$$

Suure R on nimeltään sauvan kaarevuussäde ja se on positiivinen kaarevuuskeskipisteen sijaitessa negatiivisen y -akselin puolella. Näin määriteltäessä derivaattavektorilla ei ole komponenttia toisen poikkileikkauskoordinaatin eli z -koordinaatin suunnalle. Kaikissa muissa suunnissa tangenttivektorin derivaatalla olisi nolasta eroavat komponentit kummassakin poikkileikkauksen tason ortogonaalisen koordinaatin suunnassa. Tällöin määräytyisi sauvan akselille toinenkin kaarevuuskomponentti κ'_s .

Sauvan akselin sivunormaali $\vec{e}_z = \vec{e}_s \times \vec{e}_y$ on sekä kohtisuorassa yksikkötangentti-että yksikkönormaalivektoreita vastaan täydentäen oikeakätisen koordinaattijärjestelmän $\vec{e}_s, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Sivunormaalien derivaattana määritellään sauvan akselin kierevyys $\tau = 1/T_s = 1/T$

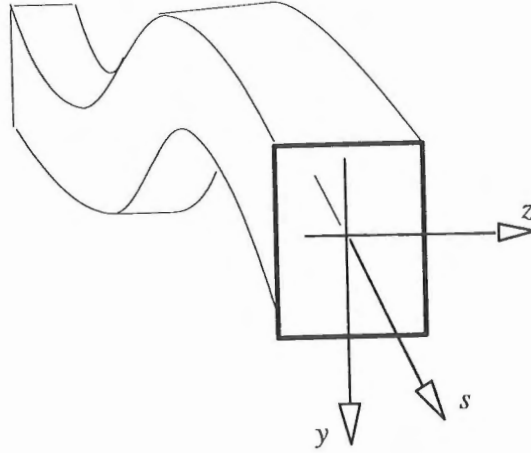
$$\frac{d\vec{e}_z}{ds} = \frac{1}{T} \vec{e}_y = \tau \vec{e}_y,$$

tai

$$\tau = \frac{1}{T} = \frac{d\vec{e}_z}{ds} \cdot \vec{e}_y.$$

Lopuksi normaalivektorin derivaatta lasketaan ristitulomääritelmästä $\vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_s$ ja saadaan

$$\frac{d\vec{e}_y}{ds} = \frac{d\vec{e}_z}{ds} \times \vec{e}_s + \vec{e}_z \times \frac{d\vec{e}_s}{ds} = -\frac{1}{T} \vec{e}_z + \frac{1}{R} \vec{e}_s.$$



Kuva 1. Tasosauvan geometria.

Kolme edellä johdettua yksikkövektorin derivoimiskaavaa, eli

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{e}_y, \quad \frac{d\vec{e}_y}{ds} = \frac{1}{R}\vec{e}_s - \frac{1}{T}\vec{e}_z, \quad \frac{d\vec{e}_z}{ds} = \frac{1}{T}\vec{e}_y, \quad (1)$$

kulkevat nimellä Frenet'n kaavat, VÄISÄLÄ (1975). Erityisesti näitä yhteyksiä tullaan käyttämään jatkossa yleistä sauvarakennetta analysoitaessa.

Kaarevalla tasosauvalla yksikkövektori \vec{e}_z on vakio, joten sen derivaatta häviää. Tämä tarkoittaa myös sitä, että tasosauvan akselin kierevyys häviää. Frenet'n kaavat tasokäyrälle pelkistyvät siis muotoon

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = -\frac{1}{R}\vec{e}_y, \quad \frac{d\vec{e}_y}{ds} = \frac{1}{R}\vec{e}_s. \quad (1a)$$

Koska sauvarakenne on kuitenkin kolmidimensioinen, tarvitaan paikkavektoria myös akselin ulkopuolella olevien pisteiden aseman määrittämiseksi. Minkä tahansa sauvan akselin ulkopuolien pisteen paikkavektori saadaan summaamalla vastaavassa poikkileikkaustasossa olevan sauvan akselin pisteen paikkavektoriin normaalien suuntaiset komponentit. Näin saadaan paikkavektori

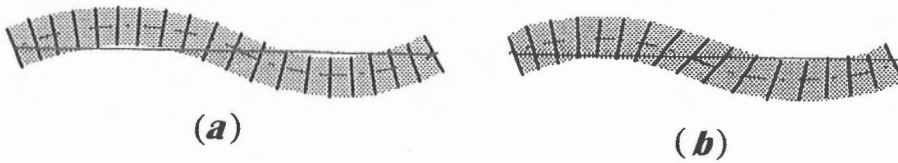
$$\vec{r}(s, y) = \vec{r}_o(s) + y\vec{e}_y(s) + z\vec{e}_z(s),$$

jonka derivaatta- eli tangenttivektoreiksi saadaan soveltamalla suoraan edellä esitettyä

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} &= \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial s} + y \frac{\partial \vec{e}_y}{\partial s} + z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial s} = \left(1 + \frac{y}{R}\right)\vec{e}_s + \frac{z}{T}\vec{e}_y - \frac{y}{T}\vec{e}_z, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= \vec{e}_y, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Tasossa sauvan geometrian määrittelee paikkavektori

$$\vec{r}(s, y) = \vec{r}_o(s) + y\vec{e}_y(s).$$



Kuva 2. Euler-Bernoullin (a) ja Timoshenkon (b) sauvamallit.

Tällöin riippuvuus z -koordinaatista jää tarkastelun ulkopuolelle ja vastaaviksi lausekkeiksi saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} &= \frac{\partial \vec{r}_o}{\partial s} + y \frac{\partial \vec{e}_y}{\partial s} = \left(1 + \frac{y}{R}\right) \vec{e}_s, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= \vec{e}_y.\end{aligned}\quad (2a)$$

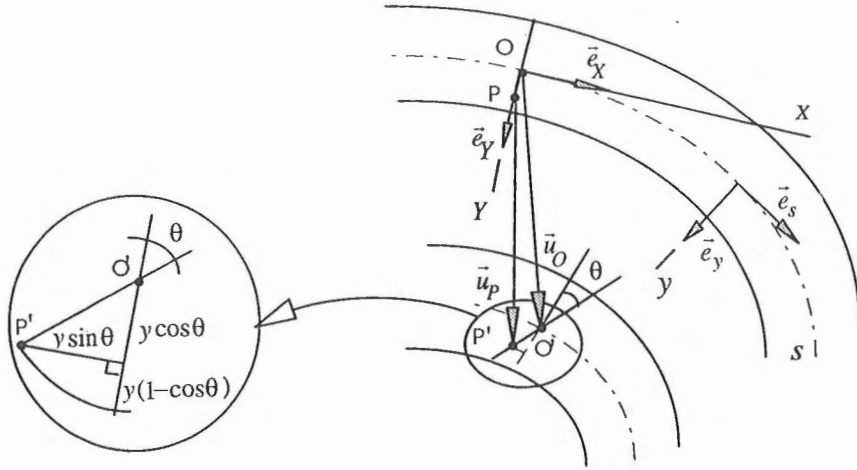
Huomataan myös, että samalla siirryttiin kahden muuttujan esitykseen, mistä johtuen derivaattatermeissä kokonaisdifferentiaalioperaattori korvattiin vastaavilla osittaisdifferentiaalioperaattoreilla, $d/ds \rightarrow \partial/\partial s$.

TASOSAUVAN KINEMATIikka ELI LIIKETILA

Pisteen liikkeen tasossa määrittävät kaksi toisistaan riippumatonta ortogonaalista liikekomponenttia eli translaatiota. Sauvarakenteiden analyysissä translaatiokomponentit u ja v annetaan akselin tangentin ja edellä määritellyn sauvan alapintaa kohden suunnatun päänormaalien eli y -koordinaatin suunnissa. Lisäksi tutkitaan eri suuntaisten ainesäikeiden rotaatioita. Kaikki rotaatioliikkeet tasossa tapahtuvat rakenteen tasoa vastaan kohtisuoran akselin ympäri. Sauvateorioissa tarkastellaan eritoten sauvan akselia vastaan kohtisuorien normaaleiden kiertymistä. Tavanomaisesti normaalien otaksutaan pysyvän suorina rakenteen deformaation tapahtuessa, mikä myös tarkoittaa sitä, että poikkileikkaustasojen otaksutaan pysyvän tasoina. Tämä on itse asiassa suora seuraus edellämämainitusta siirtymäfunktioiden kehittämistä potenssisarjoiksi, joista otetaan tarkasteluun korkeintaan lineaarisesti normaalin suuntaisesta koordinaatista riippuvat termit. Rotaatiokulma voidaan kiinnittää edellyttämällä, että normaalit pysyvät kohtisuorassa sauvan akselia vastaan, jolloin samalla estetään leikkausmuodonmuutoksen syntyminen. Leikkausmuodonmuutos voidaan myös valita erilliseksi vapaaksi muuttujaksi, eli sallia sen tapahtuvan vapaasti muusta deformaatiosta riippumatta. Edellistä teoriaa nimitetään Euler-Bernoullin ja jälkimmäistä Timoshenkon palkkiteoriaksi. Euler-Bernoullin palkkiteoriassa rotaatio sidotaan sauvan translaatiokomponentteihin. Kuvassa 2 pyritään havainnollisesti selventämään sauvan käyttäytymistä eri mallien mukaan.

Kuvassa 3 on esitetty tasosauvan deformaatio. Kunkin pisteen liike voidaan edellä mainituin otaksumin tarkkaan kuvata siirtymävektorilla

$$\begin{aligned}\vec{u}(s, y) &= u_s(s, y) \vec{e}_s(s) + u_y(s, y) \vec{e}_y(s) \\ &= [u(s) - y \sin \theta(s)] \vec{e}_s(s) + [v(s) - y(1 - \cos \theta(s))] \vec{e}_y(s),\end{aligned}$$



Kuva 3. Tasosauvan deformatuminen.

jossa siis $u(s)$ ja $v(s)$ ovat akselilla olevien pisteiden siirtymäkomponentit ja θ sauvan poikkileikkaustason kiertymä. Havaitaan helposti, että tässä kuvauksessa jokainen sauvan akselin normaali pysyy suorana. Yksinkertaistettaessa edellistä pienten siirtymien tapauksessa trigonometriset termit voidaan korvata sarjamuotoisilla kehitelmillään

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \mathcal{O}(\theta^5),$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4).$$

Virhetermi $\mathcal{O}(\theta^5)$ esimerkiksi kuvaa niitä termejä, jotka ovat verrannollisia kulman θ viidenteen tai korkeampiin potensseihin. Rajoituttaessa lineaariseen teoriaan, eli ottamalla huomioon vain kehitelmien ensimmäiset termit, saadaan tavanomainen Timoshenkon palkkiteorian siirtymätila

$$\vec{u}(s, y) = [u(s) - y\theta(s)] \vec{e}_s(s) + v(s) \vec{e}_y(s), \quad (3)$$

jossa rotaatio $\theta(s)$ on riippumaton siirtymäkomponenteista $u(s)$ ja $v(s)$, toisin sanoen normaalin kaltevuutta ei ole sidottu sauvan akselilla olevien pisteiden siirtymään eikä akselin kaltevuuteen.

Muodonmuutokset määritelmiensä mukaan ovat siirtymäsuureiden paikkaderivaattoja eli gradientteja, jotka voidaan laskea missä tahansa koordinaattijärjestelmässä. Tiettyjä etuja saavutetaan käyttämällä hyväksi paikallista karteesista kiinteäsuuntaista, siis ei-käyräviivaista koordinaattijärjestelmää X, Y . Tämä järjestelmä kiinnitetään ja suunnataan kussakin rakenteen pisteessä täysin mielivaltaisesti eikä sille ole tarvetta asettaa minkäänlaisia jatkuvuusvaatimuksia. Kuhunkin rakenteen pisteeseen voidaan siis tarvittaessa kiinnittää oma riippumaton paikallinen koordinaattijärjestelmänsä. Ketjuderivointisääntöä soveltamalla määritetään eri koordinaattijärjestelmissä lasket-

tujen derivaattojen keskinäinen riippuvuus

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial Y}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial}{\partial Y}.\end{aligned}\quad (4)$$

Kuvan 3 mukaisesti

$$\begin{aligned}X &= (\vec{r} - \vec{r}_O) \cdot \vec{e}_X, \\ Y &= (\vec{r} - \vec{r}_O) \cdot \vec{e}_Y.\end{aligned}$$

Koska paikallinen koordinaatisto on tässä tarkastelussa kiinteä, paikkavektori \vec{r}_O ja yksikkövektorit \vec{e}_X, \vec{e}_Y ovat vakiovektoreita ja derivointisääntö saa varsin käyttökelpoisen muodon

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot \vec{e}_Y \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \cdot \vec{e}_Y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{pmatrix}.\quad (4a)$$

Sijoittamalla paikkavektorin \vec{r} derivaattojen lausekkeet (2a) tähän saadaan

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{y}{R}\right) \vec{e}_s \cdot \vec{e}_X & \left(1 + \frac{y}{R}\right) \vec{e}_s \cdot \vec{e}_Y \\ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_X & \vec{e}_y \cdot \vec{e}_Y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{pmatrix}.\quad (5)$$

Siirtymävektori \vec{u} voidaan esittää myös paikallisen koordinaattijärjestelmän kantavektoreiden avulla, eli

$$\vec{u} = u_X \vec{e}_X + u_Y \vec{e}_Y,$$

jossa

$$\begin{aligned}u_X &= \vec{u} \cdot \vec{e}_X, \\ u_Y &= \vec{u} \cdot \vec{e}_Y.\end{aligned}\quad (6)$$

Muodonmuutosten lausekkeet tutuissa suorakulmaisissa koordinaateissa ovat

$$\begin{aligned}\epsilon_X &= \frac{\partial u_X}{\partial X}, \\ \epsilon_Y &= \frac{\partial u_Y}{\partial Y}, \\ \gamma_{XY} &= \frac{\partial u_X}{\partial Y} + \frac{\partial u_Y}{\partial X}.\end{aligned}\quad (7)$$

Komponenttien u_X ja u_Y lausekkeita ei suoraan tunneta yhtälössä (3) määrittelyn kinematiikan perusteella. Niitä ei myöskään ole tarpeen määrittää, koska muodonmuutosten lausekkeet (7) saadaan sijoittamalla komponentit (6) välittömästi muotoon

$$\begin{aligned}\epsilon_X &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_X, \\ \epsilon_Y &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Y, \\ \gamma_{XY} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_X + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Y.\end{aligned}\quad (8)$$

Näin johdetut lausekkeet ovat täysin yleispäteviä kaikissa käyräviivaisissa koordinaattijärjestelmissä.

Laskennan suorittamisen kannalta tulee paikallinen koordinaatisto nyt sijoittaa ja orientoida mahdollisimman edullisesti. Eräs mahdollisuus on tehdä se siten, että X -koordinaattiviiva asetetaan sivuamaan kussakin pisteessä sauvan akselia. Tällöin myös Y -koordinaattiviiva yhtyy sauvan normaaliin, eli yksikkövektoreiden väliset yhteydet $\vec{e}_X = \vec{e}_s$ sekä $\vec{e}_Y = \vec{e}_y$ ovat voimassa. On huomattava kuitenkin, että näin käy tarkalleen ottaen ainoastaan siinä poikkileikkaustasossa, jossa paikallisen koordinaatiston origo sijaitsee. Välittömästi, kun siirrytään pois origosta, tangentin suunta muuttuu eivätkä kiinteän paikallisen koordinaattijärjestelmän koordinaatit seuraa sauvan geometriaa. Näin valittaessa havaitaan myös, että derivointisääntö (5) eri koordinaattijärjestelmien välillä pelkistyy yksinkertaiseen diagonaaliseen muotoon

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \frac{y}{R})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Itse asiassa kaavassa on esitetty käänteinen yhteys differentiaalioperaatioiden välillä, koska jatkossa tullaan nimenomaan käyttämään paikallisissa koordinaateissa määritettyjä derivaattoja.

TAIVUTETUN SAUVAN MUODONMUUTOKSET

Tarkastellaan edelleen kuvassa 3 esitettyä kaarevaa tasosauvaa. Sauvan siirtymätilana käytetään Timoshenko-palkin kinematiikan määrittämää kaavassa (3) esitettyä lauseketta. Laskemalla muodonmuutokset (8) käyttäen hyväksi derivoimisääntöä (9) saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} \epsilon_X &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_X = \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \cdot \vec{e}_s, \\ \epsilon_Y &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Y = \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y, \\ \gamma_{XY} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_X = \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \vec{e}_s. \end{aligned} \quad (10)$$

Tarvittavat siirtymävektorin (3) derivaatat voidaan nyt helposti laskea, koska vektori on määritelty muuttujien s ja y avulla. Tuloksena saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} &= \left(\frac{\partial u}{\partial s} - y \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \vec{e}_s + (u - y\theta) \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_y + v \frac{\partial \vec{e}_y}{\partial s}, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} &= -\theta \vec{e}_s. \end{aligned} \quad (11)$$

Sijoittamalla nämä muodonmuutosten lausekkeisiin (10) ja käyttämällä hyväksi edellä johdettuja Frenet'n kaavoja (1a) saadaan tarkasteltavassa poikkileikkauksessa lopulli-

siksi muodonmuutosten lausekkeiksi

$$\begin{aligned}\epsilon_X &= \epsilon_s = \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} \left(\frac{du}{ds} - y \frac{d\theta}{ds} + \frac{v}{R}\right), \\ \epsilon_Y &= \epsilon_y = 0, \\ \gamma_{XY} &= \gamma_{sy} = \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} \left(-\frac{u - y\theta}{R} + \frac{dv}{ds}\right) - \theta \\ &= \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} \left(\frac{dv}{ds} - \frac{u}{R} - \theta\right).\end{aligned}\tag{12}$$

Venymä ϵ_Y häviää sauvateorian alkuotaksumien perusteella, niinkuin pitääkin. Näin saatujen eksaktien lausekkeiden johtaminen vaihtoehtoisesti differentiaaligeometrian tarjoamien piirrosten avulla on vähintäänkin ongelmallista ellei peräti mahdotonta.

On hyvä vielä huomata, että tarkoituksena oli johtaa paikallisen koordinaatiston origon määrittämässä poikkileikkaustasossa venymien $\epsilon_s = \epsilon_X$, $\epsilon_y = \epsilon_Y$ ja $\gamma_{sy} = \gamma_{XY}$ lausekkeet. Tätä varten paikallinen koordinaatisto suunnattiin edellä esitetyllä tavalla. Jotain muuta tarkoitusta varten toisenlainen paikallisen koordinaatiston orientaatio olisi saattanut olla edullisempi.

Esitettyjä lausekkeitä voidaan nyt helposti likimääräistää. Jos nimittäjässä olevassa termissä arvioidaan termi y/R pieneksi ykkösen rinnalla, toisin sanoen kaarevuussäde otaksutaan suureksi, saadaan

$$\begin{aligned}\epsilon_s &= \frac{du}{ds} + \frac{v}{R} - y \frac{d\theta}{ds}, \\ \gamma_{sy} &= \frac{dv}{ds} - \frac{u}{R} - \theta.\end{aligned}\tag{13}$$

Jos taas kehitetään lausekkeet y :n suhteen kasvavaksi potenssisarjaksi saadaan tulokset

$$\begin{aligned}\epsilon_s &= \frac{du}{ds} + \frac{v}{R} - \frac{y}{R} \left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{R} + \frac{Rd\theta}{ds}\right) + \mathcal{O}(y^2), \\ \gamma_{sy} &= \left(1 - \frac{y}{R} + \mathcal{O}(y^2)\right) \left(\frac{dv}{ds} - \frac{u}{R} - \theta\right).\end{aligned}\tag{14}$$

Kuvassa 4 pyritään havainnollistamaan leikkausmuodonmuutoksen syntymistä. Rotaatio θ voidaan valita siten, että palkin leikkausmuodonmuutos γ_{sy} häviää Euler-Bernoullin otaksuman mukaisesti. Kummastakin edelläjohdetusta lausekkeesta, samoin kuin kuvasta 4 nähdään, että näin tapahtuu, kun rotaatio on

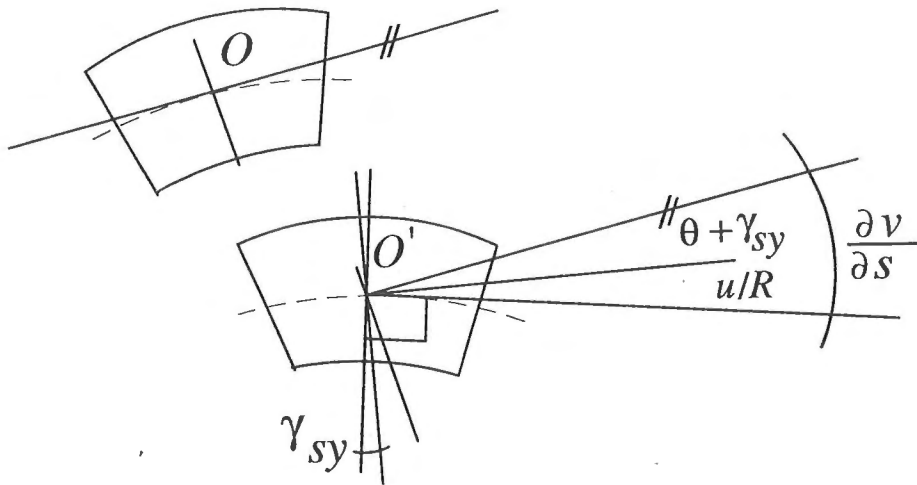
$$\theta = \frac{dv}{ds} - \frac{u}{R}.\tag{15}$$

Tätä otaksumaa vastaava venymän lauseke on

$$\epsilon_s = \frac{du}{ds} + \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} \left[\frac{v}{R} - y \left(\frac{u}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{d^2v}{ds^2}\right)\right],\tag{16}$$

tai sarjamuotoisessa esityksessä vastaavasti

$$\epsilon_s = \frac{du}{ds} + \frac{v}{R} - y \left(\frac{v}{R^2} + \frac{u}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{d^2v}{ds^2}\right) + \mathcal{O}(y^2).\tag{17}$$



Kuva 4. Leikkausmuodonmuutos.

On helppo nähdä lausekkeista (13) ja (14) ja todeta oikeiksi suoran sauvan venymien ja liukumien lausekkeet antamalla kaarevuussäteen R kasvaa, jolloin termi $1/R$ lähestyy nollaa. Tulokseksi saadaan

$$\epsilon_s = \frac{du}{ds} - y \frac{d\theta}{ds},$$

$$\gamma_{sy} = \frac{dv}{ds} - \theta,$$

tai vastaavasti Euler-Bernoullin teorian mukaisesti kaavoista (16) ja (17) leikkausmuodonmuutos eliminoiduna

$$\epsilon_s = \frac{du}{ds} - y \frac{d^2v}{ds^2}.$$

SAUVAN TASAPAINOYHTÄLÖT

Tasapainoyhtälöt johdetaan tässä yhteydessä käyttämällä virtuaalisen työn periaatetta. Tämän periaatteen soveltamisen systemaattisuus ja yksinkertaisuus sekä koko analyysin yhdenmukaisuus kaikkien rakennemallien tapauksessa puoltavat tätä valintaa. Lisäksi virtuaalisen työn periaatteen soveltuvuus sekä analyttisten että numeeristen laskentamenetelmien perustyökaluksi on omiaan yhentämään opetuksessakin perinteisesti varsin erillään olevia laskentatekniikkoja.

Ainoana perusmatematiikan työkaluna virtuaalisen työn periaatteen soveltamisessa sauvarakenneanalyyysiin tarvitaan yksidimensioista osittaisintegrointia. Määriteltäessä funktiot $g = g(s)$ ja $h = h(s)$ osittaisintegrointikaava on

$$\int_s \frac{dh}{ds} ds = [gh]_0^\ell - \int_s \frac{dg}{ds} h ds$$

$$= g(\ell)h(\ell) - g(0)h(0) - \int_s \frac{dg}{ds} h ds \quad (18)$$

Virtuaalisen työn periaatteessa kuviteltua, virtuaalista siirtymätilaa vastaavan rakenteen sisäisten voimien virtuaalisen työn δW^s (s=sisäinen) ja ulkoisen kuormituksen tekemän virtuaalisen työn δW^u (u=ulkoinen) summa häviää.

$$\delta W^s + \delta W^u = 0. \quad (19)$$

Rakenteen sisäinen jännitystila ja siihen liittyvä energia on luonteeltaan reaktiivista - ulkoinen kuormitus aiheuttaa rakenteen deformaation ja rakenteen sisälle syntyvät ulkoisen kuormituksen tasapainottavat jännitykset vastustavat deformaatioiden syntymistä. Tällöin

$$\delta W^s = - \int_V (\sigma_X \delta \epsilon_X + \sigma_Y \delta \epsilon_Y + \tau_{XY} \delta \gamma_{XY}) dV. \quad (20)$$

Hajoittamalla tilavuusintegraali erillisiksi integraaleiksi sauvan poikkileikkausalan A ja pituuden yli saadaan tilavuusalkioksi.

$$dV = dA dX = dA \frac{dX}{ds} ds = dA \left(1 + \frac{y}{R}\right) ds.$$

Kertoimena oleva derivaattatermi määräytyy suoraan derivaattaoperaattoreiden välisestä riippuvuudesta lausekkeista (4) ja (5). Tämän jälkeen sijoitetaan muodonmuutosten lausekkeet (12), jolloin saadaan

$$\delta W^s = - \int_s \left\{ \int_A \left[\sigma_s \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} \left(\frac{d\delta u}{ds} - y \frac{d\delta\theta}{ds} + \frac{\delta v}{R} \right) + \tau_{sy} \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1} \left(\frac{d\delta v}{ds} - \frac{\delta u}{R} - \delta\theta \right) \right] \left(1 + \frac{y}{R}\right) dA \right\} ds.$$

Edellisessä otettiin jo huomioon jokaisessa poikkileikkauksessa pätevät yhteydet $\sigma_X = \sigma_s$ ja $\tau_{XY} = \tau_{sy}$.

Kun määritellään normaalivoima-, leikkausvoima- ja taivutusmomenttiresultantit tavanomaisella tavalla sisäisten jännitys jakaumien integraaleina yli sauvan poikkileikkausalan

$$N = \int_A \sigma_s dA, \quad Q = \int_A \tau_{sy} dA, \quad M = \int_A \sigma_s y dA, \quad (21)$$

suodattuu samalla y koordinaatti pois tehtäväformulaatiosta, joka pelkistyy puhtaasti yksidimensioiseksi, s -koordinaatista riippuvaksi. Sisäisten voimien virtuaalisen työn lauseke saa näin muodon

$$\delta W^s = - \int_s \left[N \left(\frac{d\delta u}{ds} + \frac{\delta v}{R} \right) - M \frac{d\delta\theta}{ds} + Q \left(\frac{d\delta v}{ds} - \frac{\delta u}{R} - \delta\theta \right) \right] ds. \quad (22)$$

Vastaavasti ulkoisen kuormituksen tekemä virtuaalinen työ, joka koostuu sekä tilavuusvoimien, esimerkiksi rakenteen oman painon että pintavoimien tekemästä työstä, on

$$\begin{aligned} \delta W^u &= \int_V \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV + \int_{A_t} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} dA \\ &= \int_V [f_X \delta u_X + f_Y \delta u_Y] dV + \int_{A_t} [t_X \delta u_X + t_Y \delta u_Y] dA. \end{aligned} \quad (23)$$

Nimitys pintavoimat käsittää kuormitukset, jotka kohdistuvat sauvan kahteen pääty-poikkileikkaustasoon A_t , mutta mahdollisesti myös vaippapintaan sauvan ylä- ja alapinnalla. Kun otetaan huomioon siirtymän lauseke (3), hajoitetaan tilavuus- ja pintaintegraalit osiin sekä otetaan huomioon, että kussakin poikkileikkaustasossa pätevät relaatiot $f_X = f_s$ ja $f_Y = f_y$ ja päätypoikkileikkauksissa vastaavasti $t_X = t_s$ ja $t_Y = t_y$, saadaan

$$\begin{aligned} \delta W^u &= \int_s \int_A [f_s(\delta u - y\delta\theta) + f_y\delta v](1 + \frac{y}{R})dAds \\ &+ \int_{A_t} [t_s(\delta u - y\delta\theta) + t_y\delta v]dA. \end{aligned}$$

Käsittelyn lyhentämiseksi on tässä jätetty palkin vaippapintaan mahdollisesti kohdistuvien ulkoisten kuormitusten osuus huomioonottamatta. Määritellään kuormitusresultantit ensin tilavuusvoimille

$$\begin{aligned} n &= \int_A f_s(1 + \frac{y}{R})dA, \\ q &= \int_A f_y(1 + \frac{y}{R})dA, \\ m &= \int_A f_s y(1 + \frac{y}{R})dA. \end{aligned} \tag{24}$$

Muodostetaan edelleen sauvan kummassakin päässä akselin yksikkötangenttivektorin ja päätypoikkileikkaustason ulkonormaalien \vec{n} pistetulo

$$n_s = \vec{n} \cdot \vec{e}_s,$$

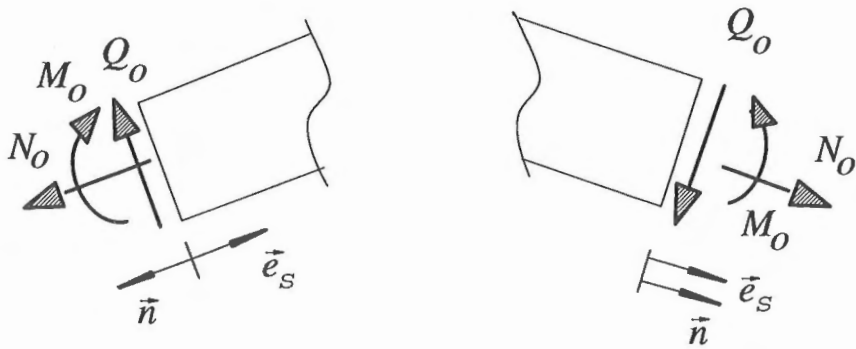
jolloin $n_s(\ell) = 1$ ja $n_s(0) = -1$, kuva 5. Tämän avulla voidaan sauvan kummassakin päässä määrittellä ulkoisten pintavoimien kuormaresultantit seuraavasti:

$$\begin{aligned} N_o &= \int_{A_t} t_s n_s dA, \\ Q_o &= \int_{A_t} t_y n_s dA, \\ M_o &= \int_{A_t} t_s y n_s dA. \end{aligned} \tag{25}$$

Tällöin ulkoisten voimien virtuaalisen työn lauseke saadaan muotoon

$$\delta W^u = \int_s [n\delta u + q\delta v - m\delta\theta] ds + [N_o\delta u + Q_o\delta v - M_o\delta\theta]_0^\ell. \tag{26}$$

On huomattava, että sijoitustermissä alarajan termit tulevat mukaan miinusmerkkisinä, mutta suureen n_s mukanaolo määritelmässä (25) johtaa kuitenkin oikeaan lopputulokseen. Asiaa on havainnollistettu kuvassa 5.



Kuva 5. Kuormitusresultantit sauvan päissä.

Sijoittamalla edellä määritetyt sisäisten ja ulkoisten voimien virtuaalisen työn lausekkeet (22) ja (26) virtuaalisen työn periaatteen kaavaan (19) saadaan

$$\begin{aligned}
 & - \int_s \left[N \left(\frac{d\delta u}{ds} + \frac{\delta v}{R} \right) - M \frac{d\delta\theta}{ds} + Q \left(\frac{d\delta v}{ds} - \frac{\delta u}{R} - \delta\theta \right) \right. \\
 & \quad \left. - n\delta u - q\delta v + m\delta\theta \right] ds + \left[N_o\delta u + Q_o\delta v - M_o\delta\theta \right]_0^\ell = 0.
 \end{aligned}$$

Sovelletaan tämän jälkeen osittaisintegrointia kaikkiin niihin termeihin, joissa esiintyy virtuaalisten siirtymäkomponenttien δu , δv tai $\delta\theta$ derivaattoja. Kootaan yhteen kunkin komponentin kertoimet. Näin saadaan

$$\begin{aligned}
 & \int_s \left\{ \left[\frac{dN}{ds} + \frac{Q}{R} + n \right] \delta u + \left[\frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R} + q \right] \delta v \right. \\
 & \quad \left. - \left[\frac{dM}{ds} - Q + m \right] \delta\theta \right\} ds \\
 & \quad + \left[(-N + N_o)\delta u + (-Q + Q_o)\delta v + (M - M_o)\delta\theta \right]_0^\ell = 0.
 \end{aligned}$$

Jotta yhtälö toteutuisi mielivaltaisesti valittujen virtuaalisten siirtymäkomponenttien δu , δv , $\delta\theta$ suhteen, kunkin siirtymäkomponentin kertoimen täytyy erikseen hävitä sekä sauvan akselilla että päissä. Näin muodostuvat sauvan tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{ds} + \frac{Q}{R} + n &= 0, \\
 \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R} + q &= 0, \\
 \frac{dM}{ds} - Q + m &= 0,
 \end{aligned} \tag{27}$$

joiden tulee toteutua jokaisessa sauvan akselin sisäpisteessä sekä reunaehdot

$$\left. \begin{aligned}
 -N + N_o &= 0 \\
 -Q + Q_o &= 0 \\
 M - M_o &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{ kun } s = s_t, \quad \text{tai} \quad \left. \begin{aligned}
 \delta u &= u - \bar{u} = 0 \\
 \delta v &= v - \bar{v} = 0 \\
 \delta\theta &= \theta - \bar{\theta} = 0
 \end{aligned} \right\} \text{ kun } s = s_u. \tag{28}$$

kummassakin akselin päätepisteessä. Mekaanisten eli voimatilalle asetettujen reunaehdojen tulee toteutua kuormitetulla osalla reuna-aluetta s_t , missä edellytetään tasapainoa ulkoisten kuormien kanssa, ja geometrinen vastaavasti tuetulla reunalla s_u . Reuna-alueet s_t ja s_u voivat lisäksi mennä päällekkäin eri vapausasteiden eli siirtymäkomponenttien osalta - esimerkiksi tuetussa sauvan päässä voi kuormituksena olla aksiaalinen voima tai taivutusmomentti. Alueita s_t ja s_u ei näinollen voi puhtaasti erottaa toisistaan. Geometrinen reunaehdojen osalta voi myös havaita, että virtuaalisten siirtymien tulee olla kinemaattisesti luvallisia eli toteuttaa geometrinen reunaehdot mukaanluettuna niin sanotut pakkosiirtymät eli nolasta eroavat tunnetut siirtymät \bar{u} , \bar{v} ja $\bar{\theta}$. Yhtälösystemistä (27) voidaan helposti eliminoida leikkausvoiman osuus pois, jolloin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} + n + \frac{1}{R} \left(\frac{dM}{ds} + m \right) &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{dM}{ds} + m \right) - \frac{N}{R} + q &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

Tuloksena saadut tasapainoehdot eli differentiaaliyhtälöt (27) ja (29) ovat luonnollisesti sauvan materiaalista riippumattomia. Jos halutaan edelleen johtaa tasapainoyhtälöt siirtymäkomponenttien avulla lausuttuina, tulee tarkasteluun kytkeä tarkasteltavan sauvan materiaalin konstitutiivinen malli, toisin sanoen jännitys-muodonmuutosriippuvuus. Tasapainoehdot ovat myös riippumattomia sauvan tarkastelussa tehdyistä kinemaattisista otaksumista, toisin sanoen siitä, käytetäänkö Timoshenkon vai Euler-Bernoullin palkkiteoriaa. Jos edellä suoritettu tarkastelu tehdään ottamalla huomioon jo ennalta Euler-Bernoullin palkkiteorian mukaan rotaatiolle asetettava rajoite (15), saadaan itse asiassa suoraan tasapainoyhtälöt (29). Reunaehdot saadaan tällöin muotoon

$$\left. \begin{aligned} -N + N_o - \frac{1}{R}(M - M_o) &= 0 \\ -\frac{dM}{ds} + Q_o &= 0 \\ M - M_o &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ kun } s = s_t \quad \text{tai} \quad \left. \begin{aligned} u - \bar{u} &= 0 \\ v - \bar{v} &= 0 \\ \frac{dv}{ds} - \frac{d\bar{v}}{ds} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ kun } s = s_u. \quad (30)$$

YHTEENVETO

Artikkelisarjassa selvitetään lähinnä opetustarkoitusta silmällä pitäen erilaisten perusrakennetyyppien analysointia. Rakenteiden muodonmuutoksia tutkitaan käyttämällä hyväksi paikallista suoraviivaista ortogonaalista koordinaattijärjestelmää. Eri palkkiteorioiden perusteita pyritään selkiyttämään. Tasapainoyhtälöt johdetaan soveltamalla virtuaalisen työn periaatetta. Esitetyn menettelyn etuna on systemaattisuus, jonka avulla monimutkaisetkin tarkastelut voidaan suorittaa periaatteessa hyvin yksinkertaisesti, ainoastaan perusmatematiikan alkeisiin tukeutuvia laskentamenetelmiä käyttämällä.

KIRJALLISUUSREFERAATIT

FLÜGGE W. (1972), Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springer-Verlag, New York.

ODEN J.T. (1967), Mechanics of Elastic Structures. McGraw-Hill.

PAAVOLA J. and SALONEN E.-M. (1991), Use of Local Rectangular Coordinates in Various Structural Analyses, in "Proceedings of the 4th Finnish Mechanics Days", E. Niemi (Ed.), Lappeenranta, ss. 369-376.

PAAVOLA J. and SALONEN E.-M. (1992), Muodonmuutokset ja kiinteät paikalliset karteesiset koordinaatit, Rakenteiden Mekaniikka, 24, No 3, ss. 38-55.

WASHIZU K. (1975), Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 2.painos, Pergamon Press Ltd., London.

VLASOV V.Z. (1963), Thin-Walled Elastic Beams. Israel Program for Scientific Translations, Israel.

VÄISÄLÄ K. (1975), Vektorianalyysi. 6.painos WSOY, Helsinki.

*Juha Paavola, rakenteiden mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu,
Eero-Matti Salonen, mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu.*