

ELEMENTTIVERKON VAIKUTUKSESTA LAATTARAKENTEIDEN OPTIMOINNISSA

Timo Turkkila

Rakenteiden Mekaniikka, Vol 28
No 3, 1995, s. 44 - 58

TIIVISTELMÄ

Kantavien rakenteiden optimoinnissa rakenne analysoidaan usein elementtimenetelmäohjelmaa käyttäen. Tällöin varsinkin levy- ja laattatehtävissä sopivan elementtiverkon valinta saattaa muodostua ongelmaksi. Jos elementtiverkko on liian harva, niin tulokset ovat arveluttavia. Toisaalta verkko voi olla myös tarpeettoman tiheä, jolloin joko laskenta-aika tai tilantarve aiheuttaa vaikeuksia. Tämän tutkimuksen tarkoituksena on tutkia esimerkin avulla miten elementtiverkko vaikuttaa optimointiprosessiin ja optimirakenteisiin. Tutkimuksen keskeisin tulos on, että yksi elementti kullakin suunnittelumuuttuja-alueella ei riitä takaamaan hyvää laskentatarkkuutta ja optimirakennetta.

JOHDANTO

Optimointi on systemaattinen tapa parantaa rakenteiden ominaisuuksia. Kantavien rakenteiden optimointiohjelma sisältää usein kolme eri osaa: optimointialgoritmin, rakenteen analysoinnin ja herkkyysanalyysin. Ohjelmiston keskeisin osa on optimointialgoritmi. Se voi olla joko yleisen matemaattisen optimointitehtävän ratkaiseva tai yksittäistä tarkoitusta varten räätälöity algoritmi. Hyvä yleinen optimointialgoritmi pystyy ratkaisemaan todella monentyyppisiä tehtäviä. Räätälöity algoritmi saattaa taas olla tehokkaampi omassa ongelmassaan, mutta toisaalta se voi olla erittäin huono ratkaisemaan muita optimointitehtäviä.

Optimointialgoritmi tarvitsee kohdefunktion ja rajoitusehtojen arvot eri iteraatiokierroksilla, joten rakenteen ominaisuudet on laskettava kymmeniä, joskus jopa satoja kertoja optimoinnin aikana. Analysointi ei saa siis kestää kovin kauan. Toisaalta laskennan täytyy olla riittävän tarkka, jotta optimointialgoritmi osaa tehdä oikeita johtopäätöksiä. Kantavien rakenteiden optimoinnissa rakenteen ominaisuudet lasketaan lähes aina elementtimenetelmällä.

Kolmas optimointiohjelmiston osa syntyy useimpien optimointialgoritmien tarpeesta saada kohde- ja rajoitusehtofunktioista myös derivaattatietoa. Derivaatat suunnittelmuuttujien suhteen saadaan herkkyysoanalyysistä. Se voidaan suorittaa joko numeerisesti tai analyttisesti. Analyttinen tapa on huomattavasti tehokkaampi, koska siinä derivointi on tehty jo ohjelmaa kehitettäessä.

Elementtiverkko vaikuttaa optimointiprosessiin sekä kohdefunktioiden ja rajoitusehtojen laskennan että herkkyysoanalyysin kautta. Tutkimuksessa selvitetään elementtiverkon vaikutusta laattarakenteiden optimointiin ja se perustuu lähinnä pienehköistä testiesimerkeistä saatuihin kokemuksiin. Lopuksi esitellään yksi käytetyistä testiesimerkeistä.

OPTIMOINTIOHJELMA

Testiesimerkit on laskettu CASOP-optimointiohjelmistolla [1], joka on kehitetty Tampereen teknillisen korkeakoulun teknillisen mekaniikan laitoksella. Optimointiohjelmalla voidaan tällä hetkellä optimoida ristikoita, levyjä ja laattoja. Ohjelmisto soveltuu normaalin jatkuvan optimoinnin lisäksi diskreettiin ja monitavoitteiseen optimointiin.

Ohjelmistossa on kaksi vaihtoehtoista optimointiohjelmaa: Schittkowskin NLPQL [2] ja Vanderplaatsin ADS [3]. Molemmat ovat yleisiä optimointiohjelmaa eli ne pystyvät ratkaisemaan erilaisia optimointitehtäviä. NLPQL käyttää SQP-algoritmia ja ADS-ohjelmassa voidaan valita haluttu algoritmi, joista SQP on osoittautunut parhaaksi. Kumpikin ohjelma on sijoitettu ohjelmistoon ns. mustaksi laatikoksi, joten niitä ei optimointiprosessin aikana ulkoisesti ohjata.

SQP-algoritmi [4] on tällä hetkellä yksi parhaista epälineaarisen optimoinnin algoritmeista. Se antaa globaalin minimin konveksille tehtävälle, mutta valitettavasti rakenteiden optimointitehtävät ovat harvoin konvekseja. Epäkonveksille tehtävälle algoritmi, kuten monet muutkin algoritmit, konvergoi yleensä lokaaliin minimiin. Onneksi käytännössä lokaali minimikin riittää, kunhan rakenne vain paranee.

CASOP-optimointiohjelmassa on pienehkö elementtimenetelmäohjelma. Siinä on 2D ja 3D -sauvaelementit, levyelementti ja laattaelementti. Kaikilla elementeillä voidaan laskea statiikan tehtäviä ja laattaelementillä lisäksi myös alimpia ominaiskulmataajuuksia. Levy- ja laattaelementtejä voidaan käyttää myös komposiittirakenteiden laskentaan.

Ohjelman Reissner-Mindlin -teoriaan perustuva laattaelementti [5] on nelisolmuisen ja siinä käytetään bilineaarista interpolointia. Elementille on johdettu myös konsistenttia tyyppiä oleva massamatriisi [6]. Elementin jännityskomponentit lasketaan sen keskipisteessä ja niistä muodostetaan von Mises -vertailujännitys. Tätä vertailujännitystä voidaan käyttää jännitysrajoitusehdossa.

Ohjelman herkkyysanalyysi on tehty analyttisesti. Aluksi herkkyysanalyysissä derivoidaan jokaisen elementin jäykkyys- ja massamatriisit sekä kuormitusvektori suunnittelumuuttujien suhteen. Näistä elementtien derivaatoista muodostetaan globaalit jäykkyys- ja massamatriisin sekä kuormitusvektorin derivaatat. Ohjelmassa oletetaan, että kuormitusvektori ei riipu suunnittelumuuttujista, joten kuormituksen derivaatta on nolla jokaisen suunnittelumuuttujan suhteen.

Elementtimenetelmän perusyhtälöitä

$$\begin{aligned} K\bar{u} &= \bar{p} \\ (K - \omega_i^2 M) \bar{\Phi}_i &= \bar{0} \end{aligned} \quad (1)$$

derivoimalla siirtymälle ja ominaiskulmataajuudelle saadaan derivaattakaavat

$$\begin{aligned} K\bar{u}' &= \bar{p}' - K'\bar{u} = -K'\bar{u} \\ \omega_i' &= \frac{1}{2\omega_i} \frac{\bar{\Phi}_i^T (K' - \omega_i^2 M') \bar{\Phi}_i}{\bar{\Phi}_i^T M \bar{\Phi}_i}. \end{aligned} \quad (2)$$

Kaavoissa (1) ja (2) K tarkoittaa rakenteen jäykkyyismatriisia, M massamatriisia, \vec{u} siirtymävektoria, \vec{p} kuormitusvektoria, ω_i ominaiskulmataajuutta ja $\vec{\phi}_i$ siihen liittyvää ominaisvektoria. Pilkutetut suureet ovat näiden derivaattoja suunnittelumuuttujien suhteen. Statiikan tehtävässä siirtymän derivaatan laskeminen on siis vain uusi kuormitustapaus ja ominaiskulmataajuuden derivaatan laskentaan tarvitaan muutamia matriisin ja vektorin välisiä kertolaskuja. Laskennan muihin osiin verrattuna nämä ovat pienitöisiä.

Kun siirtymien ja ominaiskulmataajuuksien derivaatat on laskettu, niiden avulla saadaan muiden siirtymistä ja ominaiskulmataajuuksista riippuvien suureiden, kuten esimerkiksi jännitysten ja ominaisvektorien, derivaatat. Näiden derivaattojen avulla päästään edelleen kohdefunktion ja rajoitusehtojen derivaattoihin, jotka palautetaan optimointialgoritmille.

ELEMENTTIVERKON VAIKUTUS OPTIMOINTIPROSESSIIN

Jos elementtiverkko ei ole riittävän tiheä, niin elementtimenetelmässä malli on yleensä liian jäykkä, jolloin optimointialgoritmi kuvittelee tilanteen todellista paremmaksi. Optimoitu rakenne jää siis liian hennoksi, jolloin siirtymät ja jännitykset ovat liian suuria sekä ominaiskulmataajuudet ovat liian pieniä. Elementtiverkolla, jolla FEM-analyysin tulos on kohtuullisen tarkka, voidaan kuitenkin saada jo varsin hyviä optimirakenteita. Niissä voi olla vielä yksittäisiä liian heikkoja kohtia, mutta perusmuoto on jo oikea.

Kun elementtiverkkoa tihennetään, niin laskenta-aika ja muistin tarve kasvavat nopeasti. Optimointitehtävästä ja tietokoneesta riippuu, kumpi on rajoittavampi tekijä. Tiheitä verkkoja käytettäessä elementtiverkon tekeminen on työläämpää, joten esi- ja mahdollisesti myös jälkikäsitteilyä tarvitaan verkon käsittelyyn. Esi- ja jälkikäsitteilyä voidaan käyttää kaupallisia ohjelmia, kuten esimerkiksi Ansys, Patran tai Matlab, mutta tällöin tarvitaan erityistä linkkiohjelmaa esi- ja jälkikäsitteilyä sekä optimointiohjelman väliin.

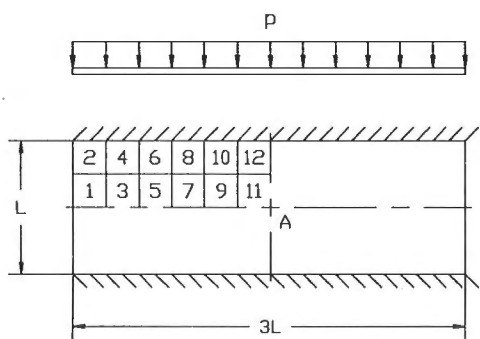
Rakenne ja siinä olevat jännitykset muuttuvat optimoinnin aikana, joten optimoinnin lähtöpisteessä hyväksi havaittu elementtiverkko ei välttämättä ole enää hyvä

optimirakennetta analysoitaessa. Tämä ilmiö houkuttelee käyttämään adaptiivista verkon generointia. Adaptiivisen verkon generoinnin käytännön toteutukseen liittyvien ongelmien lisäksi on pari seikkaa, jotka saattavat vaikeuttaa optimointia. Ensiksi adaptiivinen verkon generointi vie aikaa, koska eri verkkovaihtoehtoja täytyy kokeilla. Tämä ajan lisäys helposti moninkertaistuu, sillä elementtiverkkoa täytyy ehkä muuttaa jopa kymmeniä kertoja optimointiprosessin aikana.

Toinen mahdollinen ongelma on epäjatkuvuus. Samasta rakenteesta saadaan eri elementtiverkoilla aina erilainen tulos. Jos iteraatioiden välillä muutetaan elementtiverkkoa, niin seuraavassa iteraatiossa analyysin tulokseen vaikuttaa rakenteen muuttumisen ohella elementtiverkon erilaisuus. Tällöin iteraatioiden välillä on epäjatkuvuutta, mistä SQP-algoritmi ei pidä, sillä siinä funktioiden ja niiden ensimmäisten derivaattojen suunnittelumuuttujien suhteen oletetaan olevan jatkuvia [2, s. 81] [4, s. 404]. Jatkuvuusongelmat ilmenevät lähinnä optimoinnin ennenaikaisena päättymisenä.

ESIMERKKI

Esimerkkinä käytetään kuvan 1. mukaista teräslaattaa. Laatta on pitkiltä sivuiltaan jäykästi tuettu ja sitä kuormitetaan tasaisella painekuormalla. Laskennassa huomioidaan laatan kaksoissymmetria, joten vain laatan neljännes mallinnetaan. Mallinnettu neljännes on jaettu kuvan 1. mukaisesti 12 osaan, joiden paksuudet ovat suunnittelumuuttujia.



$$\begin{aligned}
 E &= 206 \text{ GPa} \\
 \nu &= 0,3 \\
 p &= 0,4 \text{ MPa} \\
 \rho &= 7800 \text{ kg/m}^3 \\
 L &= 600 \text{ mm} \\
 \sigma_{\text{sell}} &= 140 \text{ MPa} \\
 t_L &= 3 \text{ mm} \\
 t_U &= 60 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Kuva 1. Laatan tuenta, kuormitus ja suunnittelumuuttujat

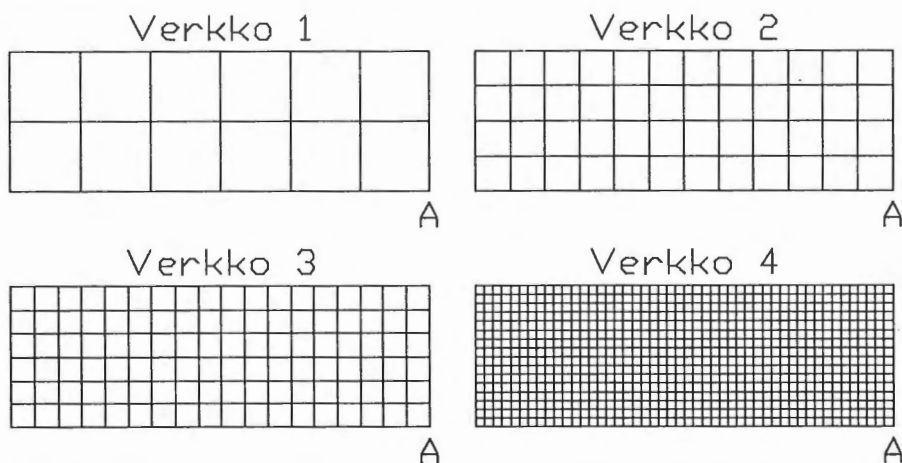
Laattaa optimoidaan monitavoitteisesti [7], jolloin kriteereinä ovat: laatan massa m , keskipisteen A pystysiirtymä δ_A ja alin ominaiskulmataajuus ω_1 . Massaa ja pystysiirtymää minimoidaan, ominaiskulmataajuutta maksimoidaan. Optimointitehtävä on siis

$$\min [m \quad \delta_A \quad -\omega_1]^T$$

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{sall}}$$

$$t_L \leq t_j \leq t_U, \quad j=1, \dots, 12.$$
(3)

Kaavassa (3) suurella t_j tarkoitetaan alueen j paksuutta ja σ_{\max} on suurin laatussa oleva von Mises -vertailujännitys. Yleensä monitavoitteinen optimointitehtävä ratkaistaan laskemalla keskenään ristiriidassa olevien kriteerien minimit sekä useita Pareto-optimeja näiden minimien väliltä. Tällä kertaa välipisteitä ei lasketa vaan tyydytään pelkkiin kriteerien minimeihin.



Kuva 2. Laatan neljänneksen mallintamiseen käytetyt elementtiverkot. Verkot 1, 2 ja 3 ovat optimointia ja verkko 4 tarkistuslaskentaa varten.

Tehtävä lasketaan kolmella eri elementtiverkolla, jotka on esitetty kuvassa 2. Elementtiverkossa 1 on 12 elementtiä ja 39 vapausastetta. Se on harvin mahdollinen verkko eli jokaisella suunnittelumuuttuja-alueella on vain yksi elementti. Verkossa 2 on suunnittelumuuttuja-alueella 4 elementtiä, joten koko mallissa on 48 elementtiä ja

151 vapausastetta. Verkko 3 on tihein optimointiverkoista ja sisältää jokaisella suunnittelumuuttuja-alueella 9 elementtiä eli yhteensä 108 elementtiä ja 335 vapausastetta. Verkossa 4 on 768 elementtiä ja 4998 vapausastetta. Tätä verkkoa käytetään tulosten tarkistamiseen. Tarkistuslaskenta tehdään ABAQUS-ohjelmalla käyttäen nelisolmuista S4R-kuorielementtiä. Samoilla elementtiverkoilla tämän kuorielementin ja CASOP-ohjelman laattaelementin siirtymien välinen ero on enintään pari prosenttia, joten elementin erilaisuus ei juurikaan vaikuta laskentatuloksiin.

Aluksi verkkoja kokeiltiin tasapaksulle ($t = 20$ mm) laatalle. Tulokset on esitetty taulukossa 1. Kaikki kolme optimointiverkkoa antoivat suuruusluokaltaan samoja tuloksia kuin vertailuverkko, joskin verkon 1 tulokset ovat aika kaukana vertailutuloksesta. Elementtiverkoilla 2 ja 3 siirtymä ja alin ominaiskulmataajuus ovat jo varsin tarkkoja, mutta vertailujännitys on vielä virheellinen. Tämä on kuitenkin normaalia, sillä vapausasteita lisättäessä jännityskomponentit konvergoivat yleensä siirtymiä hitaammin.

Taulukko 1. FEM-analyysin tulokset tasapaksulle laatalle, kun käytetyt elementtiverkot ovat kuvan 2 mukaiset.

	Verkko 1	Verkko 2	Verkko 3	Verkko 4
δ_A / mm	0,685	0,852	0,883	0,904
ω_1 /(rad/s)	2361	2006	1950	1915
σ_{max} / MPa	62	111	129	155

Eri elementtiverkkojen testaaminen tasapaksulla laatalle on mielekästä, sillä se on rakennevaihtoehtoista helpoin analysoida. Jos elementtiverkolla ei saada laskettua edes tasapaksua laattaa riittävän tarkasti, niin tuskin laattarakenteen, jossa on runsaasti paksuuden vaihteluja, laskentakaan onnistuu. Toisaalta, jos elementtiverkolla tasapaksun laatan analysointi onnistuu hyvällä tarkkuudella, niin se ei vielä takaa, että sama onnistuisi optimoinnin aikana, jolloin laatan eri alueiden paksuus vaihtelee.

Kun elementtiverkkojen tarkkuus tasapaksulla laatala oli testattu, niitä kokeiltiin optimoinnissa. Jokaisella optimointiverkolla, eli verkoilla 1, 2 ja 3, laskettiin massan ja keskipisteen pystysiirtymän minimi sekä alimman ominaiskulmataajuuden maksimi. Optimoinnin lähtöpisteenä käytettiin tasapaksua ($t = 20$ mm) laattaa. Samaa lähtöpistettä käyttämällä eri verkkojen optimointiprosessit ovat vertailukelpoisempia kuin eri lähtöpisteistä optimoimalla.

Eri verkkojen tuloksia vertaillen kannattaa kiinnittää huomiota itse optimirakenteisiin, kriteerien arvoihin sekä suurimpaan von Mises -vertailujännitykseen. Optimirakenteet on esitetty kuvissa 3, 4 ja 5. Kuvassa 3 on massan minimi, kuvassa 4 on pystysiirtymän minimi ja kuvassa 5 on alimman ominaiskulmataajuuden maksimi. Näissä kuvissa suunnittelumuuttuja-alueelle on merkitty kyseisellä alueella oleva laatan paksuus eli suunnittelumuuttujan arvo.

Taulukkoihin 2, 3 ja 4 on koottu optimien eri kriteerien sekä vertailujännityksen arvot. Taulukossa 2 on massan minimi, taulukossa 3 on keskipisteen pystysiirtymän minimi ja taulukossa 4 on alimman ominaiskulmataajuuden maksimi. Näissä taulukoissa ilman sulkua on esitetty kokeiluverkoilla saadut tulokset eli ne, joiden perusteella optimointi on tehty.

Jotta optimirakenteen ominaisuuksista saataisiin todellisempi kuva, rakenne analysoidaan myös ABAQUS-ohjelmalla. Tarkistuslaskennassa käytetään kuvan 2 tiheintä elementtiverkkoa 4. Taulukkoihin 2, 3 ja 4 tarkistuslaskennan tulos on kirjoitettu sulkuihin. Verkolla 4 saadut siirtymät ja ominaiskulmataajuudet lienevät hyvin lähellä oikeaa eivätkä jännityskomponentitkaan ole kovin virheellisiä, jos siirtymät pysyvät laatan paksuuteen verrattuna pieninä. Kuten myöhemmin havaitaan, elementtiverkon 1 optimirakenteissa siirtymät kasvoivat niin suuriksi, ettei laskenta enää onnistu lineaarisella FEM-analyysillä. Tässä tapauksessa virheellisestäkin tarkistuslaskennasta saatiin kuitenkin tieto, ettei optimirakenne kestä.

Laatan massan arvoa ei tarvitse tarkistaa, sillä se lasketaan kappaleen mittojen ja materiaaliheyden avulla eikä se siis suoranaisesti riipu elementtiverkosta.

MASSAN MINIMI

Verkko 1						Verkko 2					
11,98	30,36	3,00	3,00	32,17	3,00	21,67	21,67	21,32	21,30	21,33	21,48
3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	7,90	7,56	7,60	7,60	7,60	7,58
A						A					
Verkko 3											
22,78	22,86	22,39	22,48	22,47	22,47						
8,76	8,06	8,16	8,15	8,15	8,15						
A											

Kuva 3. Massan minimiratkaisut eri elementtiverkoilla. Kuvan luvut ovat laatan eri alueiden paksuuksia millimetreinä.

Taulukko 2. Kriteerien ja maksimijännitysten arvot kuvan 3 massan minimirakenteilla. Taulukossa ilman sulkuja on esitetty tutkittavalla verkolla saatu tulos ja suluissa on verkolla 4 saatu vertailutulos.

Verkko 1	Verkko 2	Verkko 3
$m = 71,3 \text{ kg}$	$m = 122,5 \text{ kg}$	$m = 129,8 \text{ kg}$
$\delta_A = 1,26 \text{ mm}$	$\delta_A = 1,94 \text{ mm}$	$\delta_A = 1,76 \text{ mm}$
($\delta_A = 46,3 \text{ mm}$)	($\delta_A = 2,21 \text{ mm}$)	($\delta_A = 1,85 \text{ mm}$)
$\omega_1 = 2995 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 2189 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 2197 \text{ rad/s}$
($\omega_1 = 773 \text{ rad/s}$)	($\omega_1 = 2016 \text{ rad/s}$)	($\omega_1 = 2127 \text{ rad/s}$)
$\sigma_{\max} = 140 \text{ MPa}$	$\sigma_{\max} = 140 \text{ MPa}$	$\sigma_{\max} = 140 \text{ MPa}$
($\sigma_{\max} = 3737 \text{ MPa}$)	($\sigma_{\max} = 198 \text{ MPa}$)	($\sigma_{\max} = 166 \text{ MPa}$)

PYSTYSIIRTYMÄN MINIMI

Verkko 1						Verkko 2					
3,00	3,00	3,00	3,00	60,00	60,00	11,76	7,21	3,00	60,00	60,00	60,00
26,89	10,54	3,00	11,51	60,00	10,97	12,86	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00
A						A					
Verkko 3											
17,63	3,65	3,67	60,00	60,00	60,00						
15,32	23,67	60,00	60,00	60,00	60,00						
A											

Kuva 4. Keskipisteen pystysiirtymän minimirakenteet eri elementtiverkoilla. Kuvan luvut ovat laatan eri alueiden paksuuksia millimetreinä.

Taulukko 3. Kriteerien ja maksimijännityksen arvot kuvan 4 siirtymän minimiratkaisuilla. Taulukossa ilman sulkua on tutkittavalla elementtiverkolla saatu tulos ja suluissa on verkolla 4 saatu vertailutulos.

Verkko 1	Verkko 2	Verkko 3
$m = 193 \text{ kg}$	$m = 362 \text{ kg}$	$m = 341 \text{ kg}$
$\delta_A = 0,017 \text{ mm}$	$\delta_A = 0,022 \text{ mm}$	$\delta_A = 0,027 \text{ mm}$
($\delta_A = 0,193 \text{ mm}$)	($\delta_A = 0,024 \text{ mm}$)	($\delta_A = 0,028 \text{ mm}$)
$\omega_1 = 2034 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 1790 \text{ rad/s}$	$\omega_1 = 2205 \text{ rad/s}$
($\omega_1 = 259 \text{ rad/s}$)	($\omega_1 = 1661 \text{ rad/s}$)	($\omega_1 = 2044 \text{ rad/s}$)
$\sigma_{\max} = 140 \text{ MPa}$	$\sigma_{\max} = 140 \text{ MPa}$	$\sigma_{\max} = 140 \text{ MPa}$
($\sigma_{\max} = 4543 \text{ MPa}$)	($\sigma_{\max} = 236 \text{ MPa}$)	($\sigma_{\max} = 227 \text{ MPa}$)

ALIMMAN OMINAISKULMATAAJUUDEN MAKSIMI

Verkko 1						Verkko 2					
60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00
3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	23,94	3,00	28,06	3,00	60,00	14,40
A						A					
Verkko 3											
60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00						
60,00	3,93	60,00	3,93	60,00	15,08						
A											

Kuva 5. Alimman ominaiskulmataajuuden maksimirakenteet eri elementtiverkoilla. Kuvan luvut ovat laatan eri alueiden paksuuksia millimetreinä.

Taulukko 4. Kriteerien ja maksimijännityksen arvot kuvan 5 ominaiskulmataajuuden maksimiratkaisuille. Taulukossa ilman sulkua on tutkittavalla elementtiverkolla saatu tulos ja sulussa on verkolla 4 saatu vertailutulos.

Verkko 1	Verkko 2	Verkko 3
$m = 265 \text{ kg}$	$m = 347 \text{ kg}$	$m = 395 \text{ kg}$
$\delta_A = 0,08 \text{ mm}$ ($\delta_A = 16,4 \text{ mm}$)	$\delta_A = 0,12 \text{ mm}$ ($\delta_A = 0,13 \text{ mm}$)	$\delta_A = 0,12 \text{ mm}$ ($\delta_A = 0,12 \text{ mm}$)
$\omega_1 = 11174 \text{ rad/s}$ ($\omega_1 = 1169 \text{ rad/s}$)	$\omega_1 = 6278 \text{ rad/s}$ ($\omega_1 = 4965 \text{ rad/s}$)	$\omega_1 = 5931 \text{ rad/s}$ ($\omega_1 = 5764 \text{ rad/s}$)
$\sigma_{\max} = 14 \text{ MPa}$ ($\sigma_{\max} = 1564 \text{ MPa}$)	$\sigma_{\max} = 26 \text{ MPa}$ ($\sigma_{\max} = 294 \text{ MPa}$)	$\sigma_{\max} = 122 \text{ MPa}$ ($\sigma_{\max} = 165 \text{ MPa}$)

Jos tarkastellaan pelkästään optimointiohjelman antamia tuloksia, niin havaitaan, että verkolla 1 saadaan parhaat kriteerien arvot. Paremmuus on kuitenkin vain näennäistä, sillä tarkistuslaskenta osoittaa, että verkolla 1 lasketut tulokset ovat täysin väärä. Siirtymät ovat jopa niin suuria, ettei laattateorian pienten siirtymien oletuskaan ole enää voimassa, jolloin vertailutuloksetkin ovat todennäköisesti kaukana oikeista. Kun elementtiverkolla 1 saadut optimirakenteet lisäksi poikkeavat selvästi muista vastaavista rakenteista, ei verkon 1 tuloksia voida pitää käyttökelpoisina.

Verkoilla 2 ja 3 saadut optimirakenteet muistuttavat toisiaan ja tarkistuslaskenta osoittaa FEM-analyysin tuloksen olevan kummallakin verkolla oikeaa suuruusluokkaa myös rakenteilla, joissa materiaalipaksuus vaihtelee. Kun tehtävää optimoidaan käyttäen elementtiverkkoa 2, rakenteeseen jää suurehkoja alueita, jotka ovat liian heikkoja. Esimerkiksi paksuuden alaraja $t = 3$ mm ei näyttäisi kestävän missään laatan kohdassa. Pienien korjausten jälkeen verkolla 2 saatuja optimituloksia voidaan kuitenkin käyttää.

Verkolla 3 saadaan jo hyviä tuloksia. Siirtymän ja ominaiskulmataajuuden virhe on alle 5 %. Jännitysrajoitusehto $\sigma_{\max} \leq 140$ MPa rikkoontuu vielä paksuuden äkillisistä muutoksista syntyvien nurkka- ja reunahäiriöiden takia. Verkolla 3 saadut tulokset ovat kuitenkin jo lähes sellaisenaan (valmistustekniikan puitteissa) käyttökelpoisia.

Osasy elementtiverkon 1 huonoon tarkkuuteen on laattaelementin bilineaarisessa interpoloinnissa. Jos oletetaan, että joku paksuus on alarajallaan eli $t = 3$ mm, niin tälle suunnittelumuuttuja-alueelle syntyy painekuorman vaikutuksesta paikallinen kuplamuotoinen taipuma. Alueella olevalla yhdellä bilineaarista interpolointia käyttävällä elementillä kuplamuotoa ei voida esittää. Jos alueella on neljä elementtiä eli käytetään elementtiverkkoa 2, niin kuplamuotoa voidaan jo karkeasti hahmotella. Verkko ei ole kuitenkaan tarpeeksi tiheä, sillä ohjelma tarjoaa yhä paksuuden alarajaa. Vasta yhdeksän elementtiä yhdellä suunnittelumuuttuja-alueella näyttäisi riittävän tämän paikallisen ilmiön mallintamiseen kohtuullisella tarkkuudella.

Laskennan tarkkuuden ohella on mielenkiintoista vertailla myös laskennan vaatimia CPU-aikoja. Eri verkoilla käytetyt CPU-ajat on koottu taulukkoon 5. Niistä havaitaan, että harvimmalla verkolla laskenta-aika on pienin ja tiheimmällä verkolla suurin, kuten oli odotettavissakin. Lisäksi nähdään, että CPU-aika kasvaa vapausasteiden

lukumäärää nopeammin. Vapausasteiden lukumäärä vaikuttaa laskenta-aikaan analyysin kestoajan lisäksi ohjaamalla optimointialgoritmia eri tietä eri ratkaisuun, jolloin myös tarvittavien FEM-analyysojen määrä muuttuu.

Taulukko 5. Optimointiin käytetyt CPU-ajat Silicon Graphics Iris Indigo -työasemalla.

	Verkko 1 39 vapausastetta	Verkko 2 151 vapausastetta	Verkko 3 335 vapausastetta
min m	3,03 s	22,01 s	96,63 s
min δ_A	12,89 s	97,27 s	334,96 s
max ω_1	2,39 s	128,66 s	475,58 s

Esimerkkiä voidaan käyttää myös selventämään monitavoitteisen optimoinnin keskeistä ideaa. Tarkastellaan tässä yhteydessä vain verkolla 3 saatuja tuloksia ja kootaan kriteerien arvot taulukoista 2, 3 ja 4 taulukkoon 6.

Taulukko 6. Kriteerien arvot minimipisteissä, kun käytetään verkkoa 3.

min m	min δ_A	max ω_1
$m = 129,8$ kg	$m = 341$ kg	$m = 395$ kg
$\delta_A = 1,76$ mm	$\delta_A = 0,027$ mm	$\delta_A = 0,12$ mm
$\omega_1 = 2197$ rad/s	$\omega_1 = 2205$ rad/s	$\omega_1 = 5931$ rad/s

Taulukosta 6 havaitaan, että yksittäisen kriteerin (esim. massan) minimissä muilla kriteereillä (siirtymällä ja ominaiskulmataajuudella) on huonot arvot. Helposti syntyykin ajatus, että käyttökelpoisin ratkaisu voisi olla jossain näiden kriteerien minimipisteiden välillä, jolloin mikään kriteeri ei saa parasta mahdollista muttei kovin huonoa-

kaan arvoa. Monitavoitteisessa optimoinnissa etsitään juuri näitä kompromissiratkaisuja, joita kutsutaan Pareto-optimeiksi. Kannattaa huomata, että kriteerien minimipisteet ovat myös Pareto-optimeja.

Elementtiverkon valinnassa täytyykin huomioida mitä lasketaan. Jos esimerkkitehtävästä halutaan laskea vaikkapa sata Pareto-optimia, niin kannattaa käyttää elementtiverkkoa 2, koska se on kohtuullisen tarkka ja selvästi nopeampi kuin elementtiverkko 3. Jos taas halutaan laskea muutama optimointitehtävä, niin elementtiverkon 3 käyttö on suositeltavaa, koska laskenta-ajan merkitys ei ole enää niin suuri. Elementtiverkkoa 1 ei kannata koskaan käyttää.

YHTEENVETO

Tutkimuksessa havaittiin, että ainakin tässä esimerkissä elementtiverkon valinta vaikuttaa merkittävästi optimituloksiin. Yksi elementti suunnittelumuuttuja-alueella ei riitä takaamaan riittävää laskentatarkkuutta. Kuitenkin optimointia käsittelevissä artikkeleissa näkee usein käytettävän tällaisia elementtiverkkoja. Neljä elementtiä suunnittelumuuttuja-alueella antaa kohtuullisen tarkkuuden ja sijoittamalla yhdeksän elementtiä jokaiselle suunnittelumuuttuja-alueella saadaan jo varsin hyvä laskentatarkkuus. Parantuneen tarkkuuden hintana optimointiin käytetty CPU-aika kasvaa nopeasti.

LÄHTEET

- [1] Pora, M. Kantavien komposiittilevyjen ja -laattojen optimointi, Lisensiaatintyö. Tampere 1994. Tampereen teknillinen korkeakoulu. 93 s.
- [2] Schittkowski, K. What is EMP. Bayreuth 1985. Mathematisches Institut, Universität Bayreuth. 197 s. (EMP-asiantuntijajärjestelmän, jonka osa NLPQL on, ohjekirja)
- [3] Vanderplaats, G. N. ADS - A Fortran program for automated design synthesis, Version 2.01. 1987. Engineering Optimization Inc. 54 s.

[4] Arora, J. S. Introduction to Optimum Design. New York 1989. McGraw-Hill. 625 s.

[5] Bathe, K. J. & Dvorkin, E. N. Short communication: A four node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1985. Vol 21, p. 367-383.

[6] Turkkila, T. Diskreettien lujuusopillisten optimointitehtävien numeerinen ratkaiseminen, Diplomityö, Tampere 1993. Tampereen teknillinen korkeakoulu. 69 s.

[7] Koski, J. Multicriterion structural optimization. In: Adeli H. Advances in design optimization. London 1994. Chapman & Hall. S. 194 - 224.

Timo Turkkila, DI
TTKK, Teknillinen mekaniikka
PL 589
33101 Tampere