

OHUEN PYÖRÄHDYSSYMMETRISESTI KÄYTTÄYTYVÄN KUORIRAKENTEEN OPTIMOINTI

Esa Murtola

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 28

No 2, 1995, s. 18-34

TIIVISTELMÄ

Artikkelissa tutkitaan ohuen pyörähdyssymmetrisesti käyttäytyvän kuorirakenteen muodon optimointia. Suunnittelun kohdefunktiona on rakenteen paino, jota minimoidaan, kun suunnittelun rajoituksina ovat rakenteen siirtymät, jännitykset sekä säiliörakenteille sisätilavuus. Suunnittelumuuttujina ovat elementtien nurkkakoordinaatit sekä paksuudet.

Optimoinnin osana käytetty elementtimenetelmä perustuu klassisen kuoriteorian mukaisten differentiaaliyhtälöiden tarkkoihin ratkaisuihin. Tällä tavoin saadaan ratkaistua sekä siirtymät että jännitykset teorian puitteissa tarkasti koko rakenteessa pienellä määrällä elementtejä. Differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen avulla saadaan myös optimointialgoritmissa käytettyjen rajoitusyhtälöiden derivaattojen tarkat analyttiset lausekkeet. Ratkaistuissa esimerkeissä verrataan tilamuuttujien analyttisiä derivaattoja differensseillä laskettuihin sekä esitetään joitain optimoituja kuorirakenteita.

JOHDANTO

Pyörähdyssymmetriset kuorirakenteet ovat melko yleisiä erilaisissa teknisissä sovellutuksissa, kuten paineastioissa, säiliöissä, kattorakennelmissä, jne. Näiden laskentaan on kehitetty useita erilaisia teorioita, joihin on sovellettu myös optimointia mm. lähteissä [1] ja [2]. Hintonin ryhmän [1] pyörähdyskuoren optimointi käyttää Mindlin-Reissner kuoriteoriaan pohjautuvaa elementtiä, jossa siirtymien interpolointi on likimääräistä elementin alueella. Riittävän hyvien tulosten saavuttamiseksi ohjelmassa käytetään adaptiivista verkon generointia

rakenteen muodon muuttuessa. Mota Soaresin ryhmän [2] kuoren optimointi perustuu Loven ja Kirchoffin klassiseen kuoriteoriaan ja sen perustalle muodostettuun kartiokuorielementtiin. Kartiokuorielementin siirtymät on siinä interpoloitu sarjakehitelmillä. Molemmista menetelmissä osa herkkyysoanalyysissä tarvittavista derivaatoista lasketaan analyttisesti, osa differensseillä.

Tässä artikkelissa optimoinnissa tarvittavat siirtymät ja jännitykset lasketaan Outisen kehittämällä tarkalla elementtimenetelmällä [3]. Menetelmä perustuu Loven ja Kirchoffin klassiseen kuoriteoriaan ja Reissnerin ja Meissnerin esittämään ohuen pyörähdyssymmetrisen kuoren perusdifferentiaaliyhtälöpariin

$$\begin{aligned} L(W) - 2fW &= \Gamma U + H \\ L(U) &= -E_0 W + G, \end{aligned} \quad (1)$$

jossa L on lineaarinen, toisen kertaluvun differentiaalioperaattori sekä f, Γ, H ja G kerroinfunctioita, jotka riippuvat kuoren muodosta, kuormituksesta ja materiaalista. Perusparin (1) tuntemattomina funktioina ovat kuoren meridiaanikiertymästä β_φ riippuva funktio W sekä kuoren leikkausvoimasta Q_φ riippuva funktio U . Näiden kaikkien tarkat lausekkeet on esitetty esimerkiksi lähteessä [4].

Differentiaaliyhtälöparin (1) yleinen ratkaisu on

$$W = W_c + W_p \quad U = U_c + U_p, \quad (2)$$

jossa (W_p, U_p) on yhtälön (1) jokin yksityisratkaisu ja (W_c, U_c) on vastaavan homogeenisen differentiaaliyhtälöparin

$$\begin{aligned} L(W) - 2fW &= \Gamma U \\ L(U) &= -E_0 W \end{aligned} \quad (3)$$

yleinen ratkaisu.

Outisen [3] esittämässä siirtymämenetelmään perustuvassa tarkassa elementtimenetelmässä kuorirakenne jaetaan tyypillisiin peruskuoriin esim. sylinteri-, kartio- ja pallokuoriin, joihin kuhunkin erikseen sovelletaan yhtälöitä (1) ja (3). Elementtijako kuorirakenteessa on siis mahdollisimman luonnollinen ja tällä tavoin elementtien suuri määrä tutkittavassa rakenteessa etenkin ohuissa kuorirakenteissa

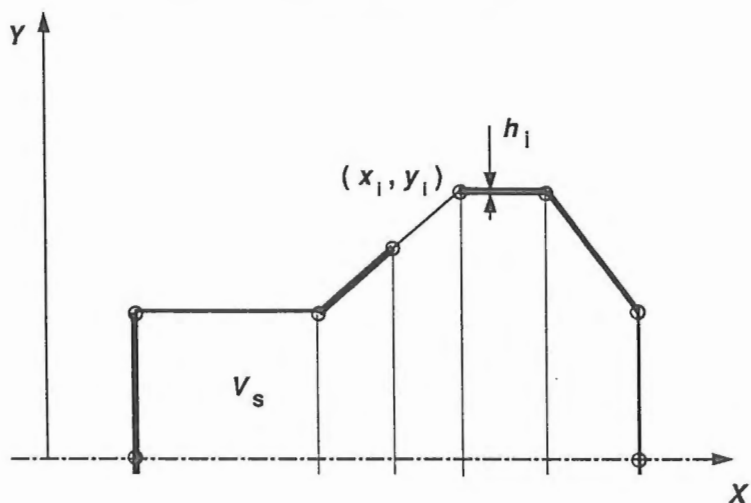
tyypillisillä reunahäiriöalueilla voidaan välttää. Menetelmän formulointi johtaa normaaliin elementtimenetelmän mukaiseen jäykkyyshyhtälöön

$$[K]\{U\} = \{R\}. \quad (4)$$

Tarkkaa elementtimenetelmää on sovellettu lähteessä [5] menestyksekkäästi myös joihinkin laminoituihin kuorirakenteisiin.

OPTIMOINTIONGELMA

Optimoinnin tarkoituksena on minimoida kuorirakenteen materiaalitylavuutta V_m , kun suunnittelumuuttujavektorin \mathbf{s} komponentit s_i ovat esimerkiksi elementtien paksuuksia h_i sekä elementtien solmukoordinaatteja (x_i, y_i) kuvan 1 mukaan. Minimointiongelmassa rajoitetaan elementtien aksiaalisiirtymää v , säteettäisiirtymää Δr ja von Mises vertailujännitystä σ_{vert} sekä rakenteen sisätilavuutta V_s . Lisäksi suunnittelumuuttujille asetetaan ylä- ja alarajat s_i^U ja s_i^L . Optimoinnin konvergoinnin nopeuttamiseksi siirtymä- ja jännitysrajoituksia asetetaan useampia jokaiselle elementille, kuten mm. lähteessä [6] on todettu.



Kuva 1. Eripaksuisista ympyräläatoista, sylinteri- ja kartiokuorista valmistettu kuorirakenne sekä sen suunnittelumuuttujina käytetyt paksuusmitat h_i ja solmukoordinaatit (x_i, y_i) [8].

Matemaattisesti optimointiongelma voidaan esittää muodossa

$$\min V_m(\mathbf{s}),$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} v^L &\leq v \leq v^U \\ \Delta r^L &\leq \Delta r \leq \Delta r^U \\ \sigma_{\text{vert}} &\leq \sigma_{\text{vert}}^U \\ V_s^L &\leq V_s \\ s_i^L &\leq s_i \leq s_i^U \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

Numeerisena ratkaisijana optimointiongelmassa käytetään SQP algoritmia [7], jota pidetään varsin tehokkaana menetelmänä erityyppisiin ongelmiin.

OHUEN PYÖRÄHDYSSYMMETRISEN KUOREN TARKKA ELEMENTTIMENETELMÄ

Tarkan elementtimenetelmän perusajatuksena on jakaa kuorirakenne eri peruskuoriin, kuten esimerkiksi sylinterikuoriin [9], kartiokuoriin [10] sekä pallokuoriin [11] ja käyttää näihin kuhunkin perusparin (1) eri kuorimitustapausten yksityisratkaisuja sekä vastaavan homogeenisen parin (3) yleistä ratkaisua. Näiden ratkaisujen avulla voidaan muodostaa kullekin peruskuorelle jäykkymatriisi $[k]$ sekä erityyppisille kenttäkuormituksille ekvivalenttinen solmukuormitusvektori $\{r\}$. Tällä tavoin on mahdollista käyttää peruskuoria elementteinä, joiden määrä pysyy näin elementtimallissa pienenä. Muita etuja on, että solmusiirtymät $\{U\}$ yhtälöstä (4) voidaan ratkaista tarkasti ja että myös kaikki kenttäfunktiot S elementin alueella, esim. siirtymät ja jännitysresultantit, voidaan ratkaista teorian puitteissa tarkasti yhtälön (1) kenttäkuormituksen yksityisratkaisun S_p , aksiaalikuormituksen yksityisratkaisun S_m sekä yhtälön (3) yleisen ratkaisun S_c summana

$$S = S_p + S_m + S_c. \tag{6}$$

Kenttäfunktion homogeenisen osan yleinen ratkaisu S_c saadaan yhtälöstä

$$S_c = \{\tilde{S}\}^T \{A\}, \quad (7)$$

jossa vektorissa $\{A\}$ on tuntemattomia integrointivakioita sekä vektorissa $\{\tilde{S}\}$ funktioita yhtälön (3) ratkaisusta [3].

ELEMENTIN JÄYKKYYSMATRIISIN MUODOSTUS

Yhtälön (3) ratkaisu vastaa kuvan 2a homogeenista kuormitusilannetta, jossa elementillä ei ole kenttäkuormitusta, eikä aksiaalikuormitusta. Tälle elementin mittaussysteemille 4×4 joustomatriisin $[a_c]$ määrittelee joustoyhtälö

$$\{u_c\} = [a_c]\{F_c\}, \quad (8)$$

josta joustomatriisi $[a_c]$ voidaan ratkaista yhtälön (3) ratkaisujen

$$\{u_c\} = [D]\{A\} \quad (9)$$

ja

$$\{F_c\} = [C]\{A\} \quad (10)$$

avulla. Tällöin homogeenisen kuormituksen joustomatriisiksi seuraa

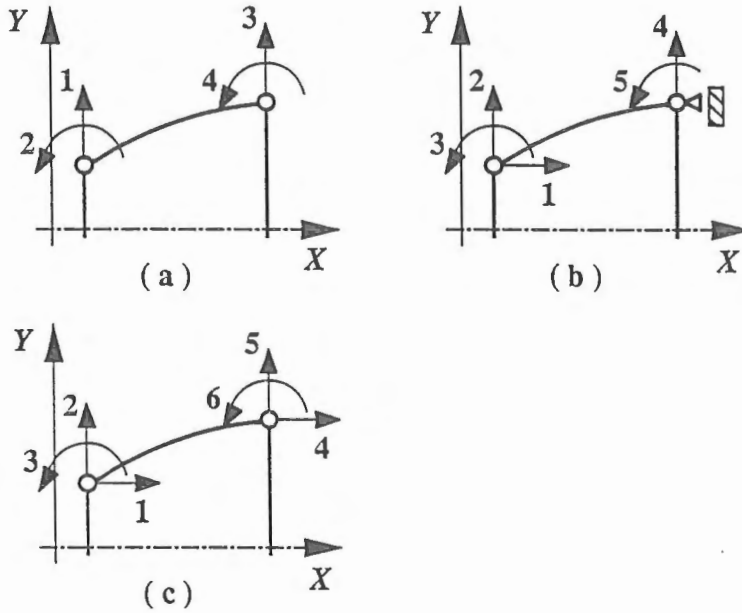
$$[a_c] = [D][C]^{-1}. \quad (11)$$

Matriisit $[D]$ ja $[C]$ yhtälössä (11) sisältävät funktioita homogeenisen yhtälön (3) ratkaisusta.

Kuvan 2b mukaisen mittaussysteemin 5×5 joustomatriisi saadaan kaavasta (11) lisäämällä siihen aksiaalisen jouston vaikutus, joka saadaan aksiaalisen kuormituksen yksityisratkaisusta yhtälöstä (1). Koska kuvan 2b elementillä ei ole jäykän kappaleen liikemahdollisuutta, saadaan elementin 5×5 jäykkyysmatriisi joustomatriisin käänteismatriisina

$$[\bar{k}] = [\bar{a}]^{-1}. \quad (12)$$

Kuvan 2c 6 x 6 jäykkyyssmatriisi $[k]$ saadaan elementin aksiaalisesta tasapainoehdosta, jolloin symmetrisen jäykkyyssmatriisin $[k]$ ensimmäinen ja neljäs rivi ovat toistensa vastalukuja .



Kuva 2. Kuorielementin jäykkyyssmatriisin muodostamiseen käytettyjä solmuureiden mittaussysteemejä.

EKVIVALENTTISEN SOLMUKUORMITUKSEN MÄÄRITYS

Eri kenttäkuormituksia esim. painekuormitusta vastaavat ekvivalenttiset solmukuormitukset $\{r\}$ voidaan laskea elementin kiinnitysreaktioiden $\{\bar{r}\}$ vastasuureista yhtälöstä

$$\{r\} = -\{\bar{r}\} = [k]\{u_p\} - \{F_p\}, \quad (13)$$

jossa $\{u_p\}$ ja $\{F_p\}$ sisältävät vastaavan kenttäkuormituksen yksityisratkaisun solmuisiirtymät ja solmuvoimat [3].

HERKKYYSANALYYSI

Eräs tärkeimmistä vaiheista rakenneanalyysin ja optimoinnin yhdistämisessä on herkkyyssanalyysi, jossa tutkitaan rakenteen vasteiden muutoksia suunnittelumuuttujien muutoksiin [12]. Herkkyyssanalyysin menetelmät perustuvat yleensä tarkkoihin analyttisiin derivaattoihin tai differensseillä laskettuihin arvioihin.

Derivoimalla jäykkyysyhtälö (4) suunnittelumuuttujien s_k suhteen saadaan

$$[K] \frac{\partial \{U\}}{\partial s_k} + \frac{\partial [K]}{\partial s_k} \{U\} = \frac{\partial \{R\}}{\partial s_k}, \quad (14)$$

josta edelleen solmuisiirtymien derivaatat

$$\frac{\partial \{U\}}{\partial s_k} = [K]^{-1} \left(\frac{\partial \{R\}}{\partial s_k} - \frac{\partial [K]}{\partial s_k} \{U\} \right). \quad (15)$$

Siirtymien derivaattojen ratkaisun jälkeen kenttäfunktioiden derivaatat voidaan ratkaista derivoimalla yhtälöä (6) suunnittelumuuttujien suhteen

$$\frac{\partial S}{\partial s_k} = \frac{\partial S_p}{\partial s_k} + \frac{\partial S_m}{\partial s_k} + \frac{\partial S_c}{\partial s_k}. \quad (16)$$

Nämä derivaatat yhtälöissä (15) ja (16) saadaan laskettua analyttisesti differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen avulla tai differensseillä.

ANALYYTTINEN MENETELMÄ

Ohuen pyörähdyssymmetrisen kuorirakenteen tarkassa elementtimenetelmäformulaatiossa elementin jäykkyysmatriisin, ekvivalenttisten solmukuormitusvektoreiden ja kenttäkuormitusten yksityisratkaisujen lausekkeet on melko helppo derivoida suunnittelumuuttujien suhteen. Jäykkyysmatriisin $[\bar{k}]$ derivaatta voidaan laskea määritelmästä

$$[\bar{k}][\bar{a}] = [I], \quad (17)$$

josta derivoimalla suunnittelumuuttujien suhteen saadaan

$$\frac{\partial[\bar{k}]}{\partial s_k} = -[\bar{k}] \frac{\partial[\bar{a}]}{\partial s_k} [\bar{k}], \quad (18)$$

kun matriisi $[I]$ on 5x5 ykkösmatriisi.

Joustomatriisin derivaatta $\frac{\partial[\bar{a}]}{\partial s_k}$ voidaan ratkaista derivoimalla yhtälöstä (11)

homogeenisen osan joustomatriisi

$$\frac{\partial[a_c]}{\partial s_k} = \frac{\partial[D]}{\partial s_k} [C]^{-1} + [D] \frac{\partial[C]^{-1}}{\partial s_k} \quad (19)$$

ja lisäämällä siihen aksiaalisen jouston derivaatat.

Yhtälössä (15) tarvittava ekvivalenttien solmuvoimien $\{r\}$ derivaatta saadaan yhtälöstä (13), joka johtaa lausekkeeseen

$$\frac{\partial\{r\}}{\partial s_k} = \frac{\partial\{k\}}{\partial s_k} \{u_p\} + [k] \frac{\partial\{u_p\}}{\partial s_k} - \frac{\partial\{F_p\}}{\partial s_k}, \quad (20)$$

jossa tarvitaan jäykkyyismatriisin derivaattojen $\frac{\partial[k]}{\partial s_k}$ lisäksi solmuvoimien ja solmuniirtymien yksityisratkaisujen derivaattoja $\frac{\partial\{F_p\}}{\partial s_k}$ ja $\frac{\partial\{u_p\}}{\partial s_k}$.

Eri kenttäfunktioiden derivaatat $\frac{\partial S}{\partial s_k}$ voidaan laskea yhtälöstä (16), jossa yksityisratkaisujen derivaatat $\frac{\partial S_p}{\partial s_k}$ ja $\frac{\partial S_m}{\partial s_k}$ voidaan laskea suoraan. Homogeenisen osan derivaatta $\frac{\partial S_c}{\partial s_k}$ saadaan yhtälöstä (7), josta

$$\frac{\partial S_c}{\partial s_k} = \frac{\partial\{\bar{S}\}^T}{\partial s_k} \{A\} + \{\bar{S}\}^T \frac{\partial\{A\}}{\partial s_k}. \quad (21)$$

Integroitivakioiden derivaatat $\frac{\partial\{A\}}{\partial s_k}$ lasketaan yhtälöstä (10) derivoimalla

$$\frac{\partial\{A\}}{\partial s_k} = \frac{\partial[C]^{-1}}{\partial s_k} \{F_c\} + [C]^{-1} \frac{\partial\{F_c\}}{\partial s_k}, \quad (22)$$

johon tarvitaan elementin solmuvoimien homogeenisen osan vaikutus $\frac{\partial\{F_c\}}{\partial s_k}$.

Jakamalla elementin solmuvoimat

$$\{F\} = [k]\{u\} - \{r\} \quad (23)$$

homogeenisen ratkaisun sekä aksiaalisen ja kenttäkuormituksen yksityisratkaisun mukaisiin osiin

$$\{F\} = \{\bar{F}_c\} + \{F_m\} + \{F_p\}, \quad (24)$$

saadaan elementin solmuvoimien homogeenisen osan derivaatat kaavalla

$$\frac{\partial\{\bar{F}_c\}}{\partial s_k} = \frac{\partial[k]}{\partial s_k} \{u\} + [k] \frac{\partial\{u\}}{\partial s_k} - \frac{\partial\{r\}}{\partial s_k} - \frac{\partial\{F_m\}}{\partial s_k} - \frac{\partial\{F_p\}}{\partial s_k}. \quad (25)$$

Kaavoissa (24) ja (25) 4x1 vektori $\{F_c\}$ on täydennetty sopivankokoiseksi 6x1 vektoriksi $\{\bar{F}_c\}$ lisäämällä nollat aksiaalisille vapausasteille.

DIFFERENSSIMENETELMÄ

Tällä menetelmällä on hyvin helppo laskea eri vasteiden g muutoksia suunnittelumuuttujien muutoksiin δs_k . Yleisesti käytetyt menetelmät ovat globaali menetelmä, jossa lasketaan suoraan vasteiden muutoksia suunnittelumuuttujan muutoksiin esimerkiksi

$$\frac{\partial(g)}{\partial s_k} \approx \frac{(g(s_k + \delta s_k)) - (g(s_k))}{\delta s_k}. \quad (26)$$

tai kaavan (15) käyttö, jossa lasketaan ensin elementteittäin differensseillä

$$\frac{\partial [k]}{\partial s_k} \approx \frac{[k(s_k + \delta s_k)] - [k(s_k)]}{\delta s_k} \quad (27)$$

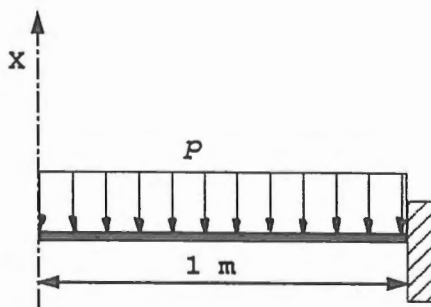
ja

$$\frac{\partial \{r\}}{\partial s_k} \approx \frac{\{r(s_k + \delta s_k)\} - \{r(s_k)\}}{\delta s_k} \quad (28)$$

Menetelmät ovat kuitenkin laskennallisesti raskaita ja epätarkkoja aiheuttaen joskus häiriöitä optimointialgoritmeissa.

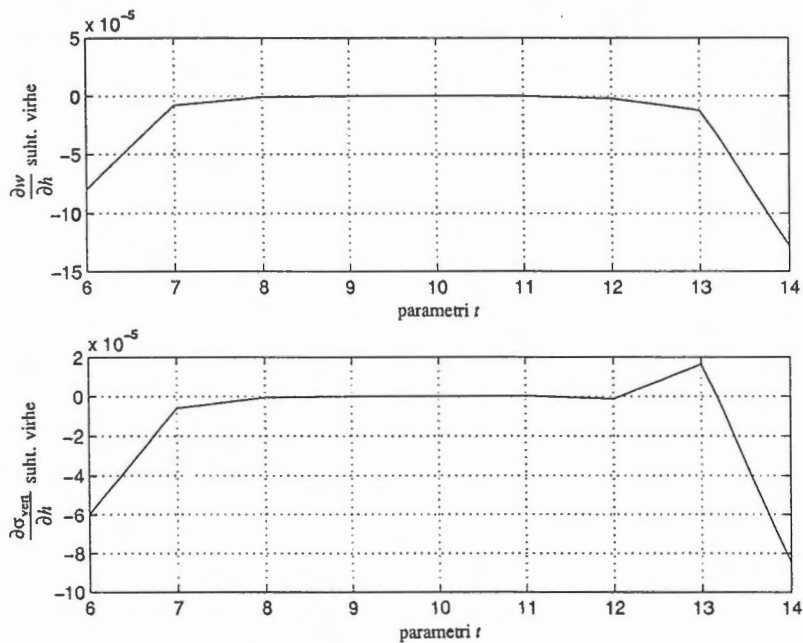
ESIMERKKEJÄ

Esimerkki 1. Esimerkissä tarkastellaan kuvan 3 ohuen pyörähdyssymmetrisen ympyrälaatan keskikohdan taipuman w ja von Mises vertailujännityksen σ_{vert} derivaattoja laatan paksuuden suhteen $\frac{\partial w}{\partial h}$ ja $\frac{\partial \sigma_{\text{vert}}}{\partial h}$, kun käytetään joko analyttistä menetelmää tai differenssejä eri askelpituuksilla δs_k kaavassa (26). Ympyrälaatta on reunoiltaan jäykästi tuettu ja sitä kuormittaa tasainen painekuorma $p = 68,9 \text{ kPa}$ [1].



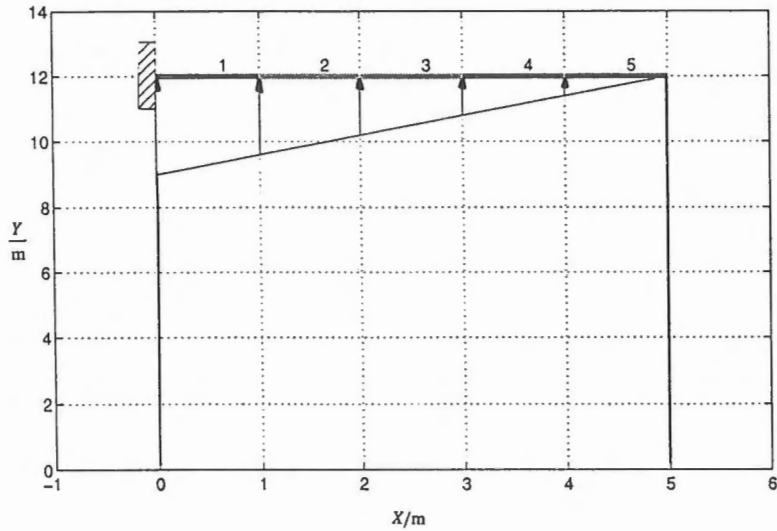
Kuva 3. Esimerkin 1 ympyrälaatta kuormituksineen, kun kuoren materiaalin kimmomoduuli $E = 200 \text{ GPa}$ ja Poissonin vakio $\nu = 0,3$.

Derivaatat $\frac{\partial w}{\partial h}$ ja $\frac{\partial \sigma_{\text{vert}}}{\partial h}$ voidaan laskea analyttisesti esimerkiksi lähteen [13] avulla ja tulokset täsmäävät täysin tässä artikkelissa esitettyyn menetelmään, joka pohjautuu ympyrälaatan osalta lähteeseen [14]. Kuvassa 4 on esitetty differensseillä laskettujen arvojen $\frac{\partial w}{\partial h}$ ja $\frac{\partial \sigma_{\text{vert}}}{\partial h}$ suhteelliset virheet tarkkoihin analyttisiin arvoihin. Tällöin joko liian pieni tai liian suuri askel kaavassa (26) aiheuttaa eroja derivaatan arvoon, joskin melko suurella alueella tulokset ovat kohtuullisia.

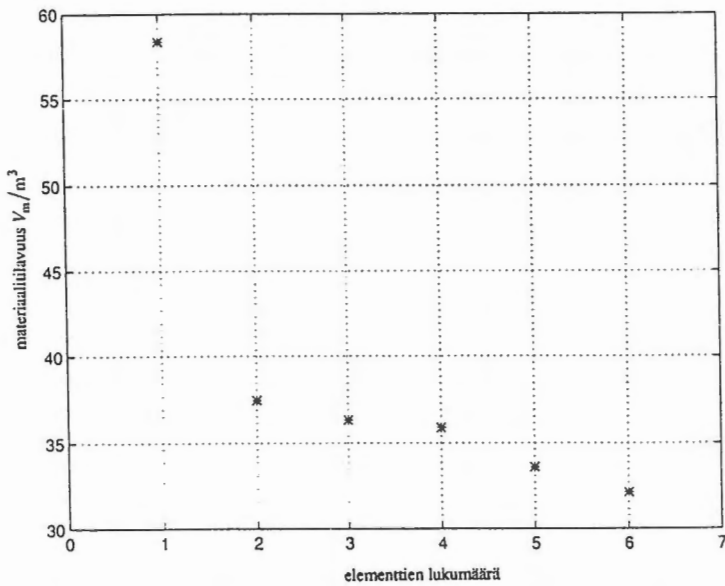


Kuva 4. Kaavalla (26), eri askelpituuksilla $\delta s_k = s_k \times 10^{-t}$, laskettujen derivaattojen suhteellinen virhe.

Esimerkki 2. Esimerkissä tutkitaan kuvan 5 mukaista sylinterimäistä nestesäiliötä, joka on valmistettu yhdistelemällä eri paksuisia sylinterikuoria [15]. Sylinterikuoren korkeus on 5 m ja sen säde on 12 m. Optimoinnissa suunnittelumuuttujina ovat kuorten paksuudet, kun elementit on jaettu tasajaolla kuoren pituudelle. Säteettäissiirtymille on asetettu rajoitus $|\Delta r| \leq 5$ mm ja von Mises vertailujännityksille $\sigma_{\text{vert}} \leq 5$ MPa. Kuvassa 6 on esitetty optimoinnista saadut materiaali-tilavuudet, kun säiliö on rakennettu eri määristä tasapaksuja sylinterikuoria.



Kuva 5. Esimerkin 2 hydrostaattisella paineella kuormitettu sylinterikuori, joka on jäykästi tuettu alustansa. Kuoren materiaalin kimmomoduuli $E = 21 \text{ GPa}$ ja Poissonin vakio $\nu = 1/6$ sekä nesteen $\rho g = 10 \text{ kN/m}^3$.



Kuva 6. Nestesäiliön materiaalilavuus erimäärillä tasapaksuja sylinterikuoria. Yhden ja kahden elementin malleissa materiaalilavuuden ero on 35%.

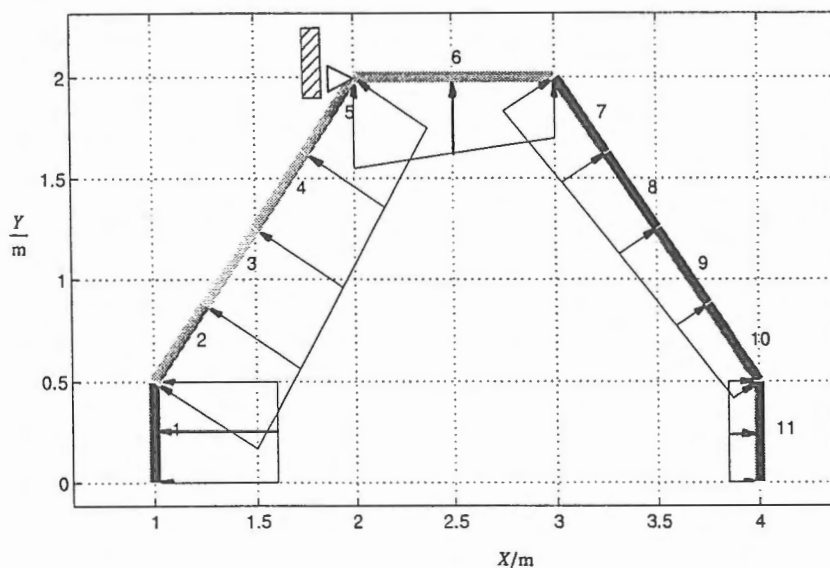
Esimerkki 3. Esimerkissä optimoidaan kuvan 7 mukaisesti tuettua tasoittuvista pinnoista valmistettua nestesäiliötä. Sen kuormituksena on nesteestä, jonka $\rho g = 10 \text{ kN/m}^3$, aiheutuva hydrostaattinen paine ja ylipaine $p = 10 \text{ kPa}$.

Optimoinnissa suunnittelumuuttujina ovat

a) kaikkien elementtien yhtäsuureksi kytketty paksuus ja elementtien solmukoordinaatit sekä

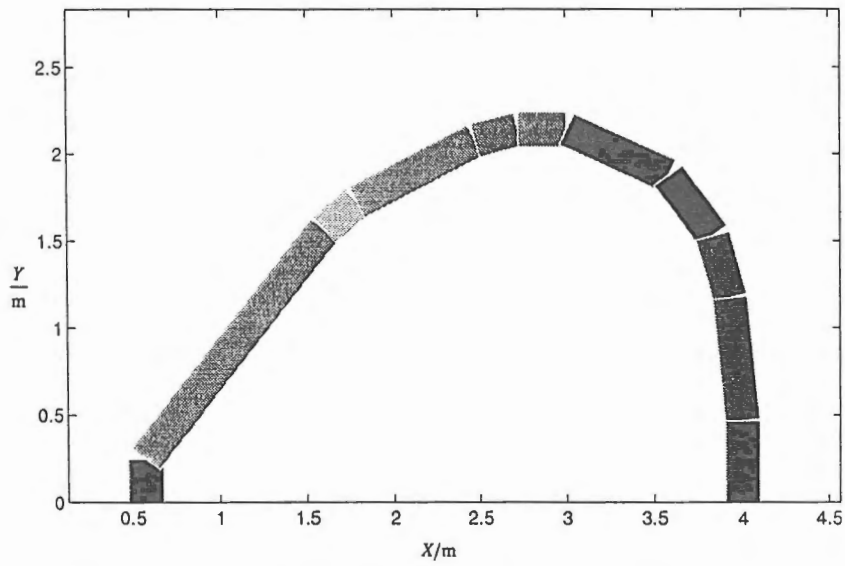
b) kaikkien elementtien paksuudet ja solmukoordinaatit.

Käytetyssä mallissa on 11 elementtiä, 21 vapausastetta ja suunnittelumuuttujien määrä on a) kohdassa 19 ja b) kohdassa 29. Säteettäis- ja aksiaalisiirtymille on asetettu rajoitukset $|\Delta r| \leq 0,5 \text{ mm}$ ja $|v| \leq 0,5 \text{ mm}$ sekä von Mises vertailujännityksille $\sigma_{\text{vert}} \leq 10 \text{ MPa}$.

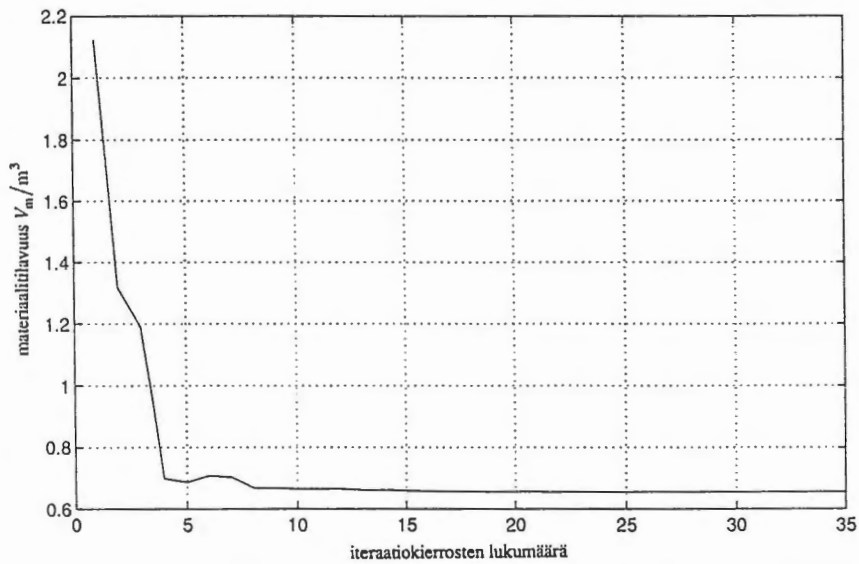


Kuva 7. Esimerkin 3 rengasmaisesti tuettu nestesäiliö kuormituksineen. Kuori on valmistettu yhdestätoista tasoittuvasta pyörähdyskuoresta ja sen materiaalin $E = 210 \text{ GPa}$ ja $\nu = 0,3$.

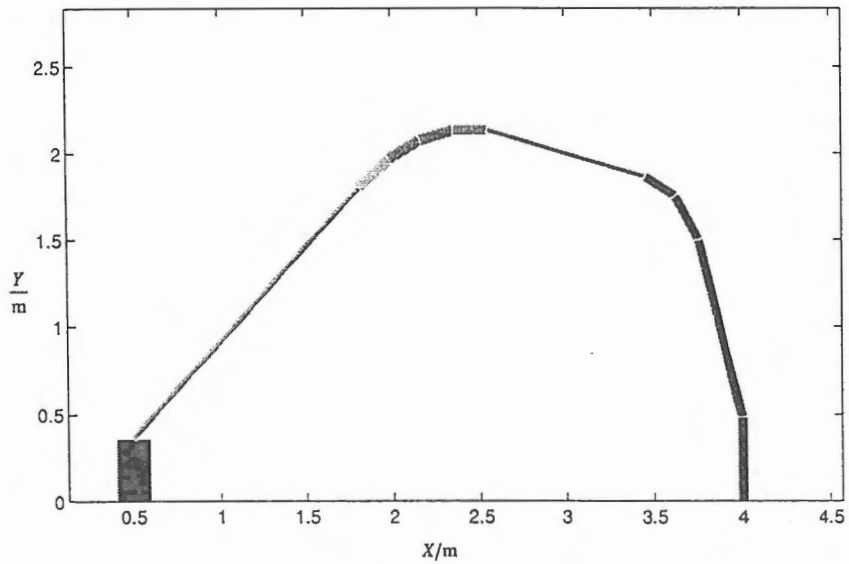
Kuvissa 8 ja 10 on esitetty a) ja b) kohdan optimimuodot, kun b) kohdan laskennan lähtökohdaksi on käytetty a) kohdan optimimuotoa. Tällöin kuoren materiaalilavuus on pienentynyt lisää 22 %. Kuvissa 9 ja 11 on materiaalilavuuden muuttuminen käytetyn SQP-algoritmin eri iteraatiokierroksilla.



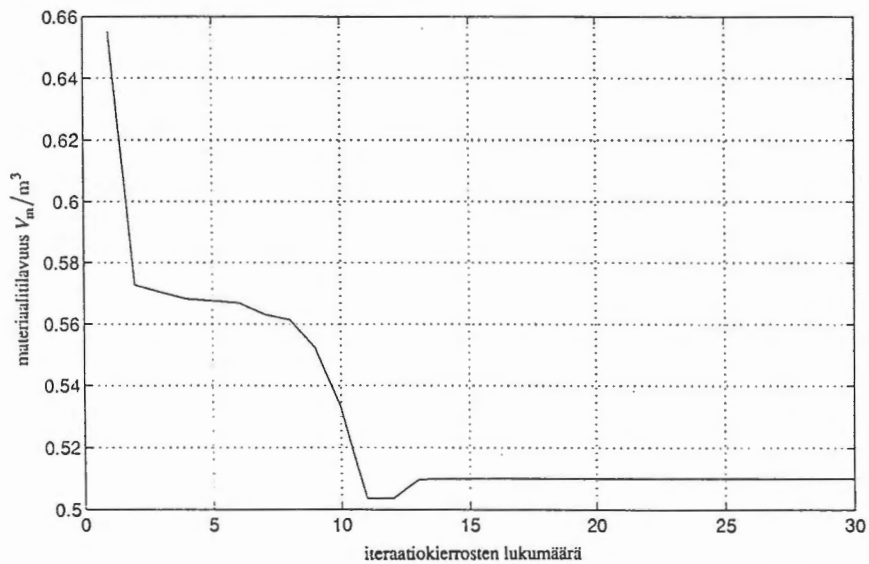
Kuva 8. Esimerkin 3 a) optimitulos tapauksessa, jossa kaikki tasoittuvat kuoret on asetettu samanpaksuisiksi.



Kuva 9. Esimerkin 3 a) materiaalilavuuden muuttuminen optimointialgoritmin eri iteraatioilla



Kuva 10. Esimerkin 3 b) optimitulos, jolloin kaikilla elementeillä on oma suunnittelumuuttujansa elementin paksuudelle.



Kuva 11. Esimerkin 3 b) materiaalilavuuden muuttuminen optimointialgoritmin eri iteraatioilla.

YHTEENVETO

Artikkelissa esitetään tehokas menetelmä ohuiden pyörähdysymmetrisesti käyttäytyvien kuorirakenteiden optimointiin. Menetelmä perustuu tarkalle elementtimenetelmälle, jonka tuloksena sekä siirtymät että jännitykset ovat teorian puitteissa tarkkoja luonnollisella elementtijaolla. Myös herkkyyshanalyysi voidaan suorittaa analyttisesti sekä paksuus- että paikkamuuttujien suhteen, jolloin optimoinnista saadaan varsin tehokas.

LÄHDELUETTELO

1. E. HINTON, N. V. R. RAO and J. SIENZ, Finite Element Structural Shape and Thickness Optimization of Axisymmetric Shells, Engineering Computations, vol 9, 1992.
2. C. A. MOTA SOARES, J. INFANTE BARBOSA and C. M. MOTA SOARES, Shape Optimal Design of Axisymmetric Shell Structures, in Optimization of large structural Systems, G. I. N. Rozvany (ed.), Kluwer Academic Publishers, 1993.
3. H. OUTINEN, Pyörähdysymmetrisesti käyttäytyvän ohuen pyörähdyskuoren statiikka, TTKK, TME, Raportti 27, Tampere, 1985.
4. H. KRAUS, Thin Elastic Shells, Wiley, New York, 1967.
5. J. VIRTANEN ja H. OUTINEN, Laminoidun pyörähdyskuoren statiikan tarkka ratkaisu, TTKK, TME, raportti 52, 1990.
6. S. MOILANEN ja T. TURKKILA, Kantavien rakenteiden optimointi: Muodon optimointi tasojännitystilassa, TTKK, TME, Erityistyö, 1991.
7. K. SCHITTKOWSKI, What is EMP? (the manual of EMP expert system).
8. E. MURTOLA, Optimization of Thin Elastic Shells of Revolution with axisymmetric loading, Proceedings of the 5th Finnish Mechanics Days, Report 3, Department of Mathematics, Jyväskylä, 1994.

9. H. OUTINEN, Ortotrooppisen sylinterikuoren rotaatiosymmetrinen statiikka, TTKK, TME, Raportti 12, Tampere, 1983.
10. H. OUTINEN, Isotrooppisen kartiokuoren rotaatiosymmetrinen statiikka, TTKK, TME, Raportti 13, Tampere, 1983.
11. P. SUOMINEN JA H. OUTINEN, Ortotrooppisen pallokuoren statiikan tarkka pyörähdyssymmetrinen ratkaisu, TTKK, TME, Raportti 51, Tampere, 1989.
12. E. J. HAUG , K. K. CHOI and V. KOMKOV , Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, Inc.,Orlando,1986.
13. S. TIMOSHENKO and S. WOINOWSKY-KRIEGER , Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Co, Singapore, 1959.
14. H. OUTINEN, Ortotrooppisen ympyrälaatan rotaatiosymmetrinen statiikka, TTKK, TME, Raportti 8, Tampere, 1979.
- 15 . E. HAMPE, Static rotationssymmetrischer Flächentragwerke, Band 4, Veb Verlag fur Bauwesen, Berlin, 1971.

Esa Murtola, DI
TTKK/Teknillinen mekaniikka
PL 589
33101 Tampere