

REGRESSIOANALYYSIN KÄYTTÖ JÄNNITYS- INTENSITEETTIKERTOIMIEN LASKENNASSA

Jari Mäkinen
Juha Toivola

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 27
No. 4, 1994 s. 29-44

Tiivistelmä: Artikkelissa esitellään regressioanalyysiin perustuva menetelmä jännitys-intensiteettikertoimien laskentaan.

JOHDANTO

Jännitysintensiteettikertoimet lasketaan yleensä numeerisesti elementtimenetelmää käyttäen. Laskentamenetelmät voidaan jakaa energiamentelmäpohjaisiin ja siirtymäpohjaisiin sen mukaan lasketaanko jännitysintensiteettikertoimet energiasuureisiin pohjautuvia menetelmiä, kuten esimerkiksi jäykkyyden derivointimenetelmää käyttäen, vai solmujen siirtymiä tai siirtymäkenttää hyväksi käyttäen. Tässä artikkelissa esitetään regressioanalyysiin ja Williamsin sarjaratkaisuun perustuva menetelmä, jonka tulokset ovat ainakin esitettyjen esimerkkitapausten perusteella huomattavasti tarkempia kuin perinteisten siirtymäpohjaisten menetelmien. Menetelmää voidaan soveltaa sekä tasojännitys- että tasomuodonmuutostilaongelmiin ja sen avulla voidaan laskea särön kuormitustapojen I ja II jännitysintensiteettikertoimet K_I ja K_{II} . Menetelmää voi käyttää kaikkien sellaisen elementtimenetelmäohjelmistojen yhteydessä, jotka tulostavat solmujen koordinaatit ja solmuisiirtymät.

SIIRTYMÄTILA SÄRÖN KÄRJEN LÄHELLÄ

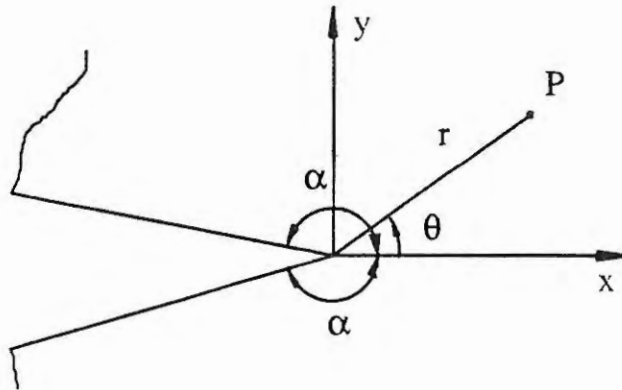
Tässä kohdassa esitetään Williamsin sarjaratkaisu, kun yleensä käsittelemättä jätetyt erikoistapaukset otetaan huomioon. Tuloksesta havaitaan, että perinteinen Williamsin sarjaratkaisu kuvaa oikein kuormitustavan I kimmoiset siirtymät, mutta kuormitustavalla II siirtymäkentässä on jäykän kappaleen rotaatio mukana. Tällä on merkitystä tässä artikkelissa esitettävän menetelmän yhteydessä.

Sijoitetaan napakoordinaatiston origo kiilamaisen särön kärkeen ja mitataan kulmaa θ särön keskiviivan suuntaisesta suorasta, kuten kuvassa 1 on esitetty. Sijoittamalla Airyn jännitysfunktion ODY:öön

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (1)$$

ratkaisuyrite

$$\phi = r^{\lambda+1} f(\theta), \quad (2)$$



Kuva 1. Kiilamaiseen säröön liitetty napakoordinaatisto ja karteesinen koordinaatisto.

saadaan funktiolle $f(\theta)$ differentiaaliyhtälö

$$f'''' + 2(\lambda^2 + 1)f'' + (\lambda^2 - 1)^2 f = 0, \quad (3)$$

jossa pilkku tarkoittaa θ -derivaattaa. Kun tähän sijoitetaan ratkaisuyrite $f = e^{k\theta}$, saadaan karakteristinen yhtälö

$$k^4 + 2(\lambda^2 + 1)k^2 + (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \quad (4)$$

jonka juuret ovat

$$\begin{aligned} k_1 &= i(\lambda + 1) \\ k_2 &= -i(\lambda + 1) \\ k_3 &= i(\lambda - 1) \\ k_4 &= -i(\lambda - 1) \end{aligned} \quad (5)$$

Kun karakteristisen yhtälön juuret ovat erisuuria, niin ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(\theta) = A \cos[(\lambda - 1)\theta] + B \cos[(\lambda + 1)\theta] + C \sin[(\lambda - 1)\theta] + D \sin[(\lambda + 1)\theta]. \quad (6)$$

Karakteristisen yhtälön juuria tarkastelemalla saadaan seuraavat erityistapaukset:

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_4 = i, \quad k_2 = k_3 = -i \quad (7a)$$

$$\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 0 \quad (7b)$$

$$\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad k_3 = k_4 = 0 \quad (7c)$$

Näitä karakteristisen yhtälön moninkertaisia juuria vastaavat ratkaisut ovat

$$\lambda = 0: f(\theta) = \tilde{A} \cos(\theta) + \tilde{B}\theta \sin(\theta) + \tilde{C} \sin(\theta) + \tilde{D}\theta \cos(\theta) \quad (8a)$$

$$\lambda = \pm 1: f(\theta) = \hat{A} + \hat{B} \cos(2\theta) + \hat{C}\theta + \hat{D} \sin(2\theta) \quad (8b)$$

Ratkaisuissa (6) ja (8) on ensin kirjoitettu ratkaisun symmetrinen osa muuttujan θ suhteen, ja sen jälkeen antimetrisen osa. Energiatarkastelulla /6/, /7/, /8/ voidaan osoittaa, että parametrin λ on oltava positiivinen, jotta kimmoenergia pysyisi äärellisenä.

Rajoitutaan tarkastelemaan tapauksia, joissa särön kyljet ovat kuormittamattomat. Tällöin särön kylkien reunaehdoista

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(\theta = \pm\alpha) &= 0 \\ \tau_{r\theta}(\theta = \pm\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

saadaan /6/ funktion $f(\theta)$ reunaehdoiksi

$$\begin{aligned} f(\theta = \pm\alpha) &= 0 \\ f'(\theta = \pm\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Tutkitaan millä kulman α arvoilla ratkaisu (8b), jossa $\lambda = 1$, on mahdollinen. Sijoittamalla ratkaisu (8b) reunaehtoihin (10), saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(2\alpha) & \alpha & \sin(2\alpha) \\ 1 & \cos(2\alpha) & -\alpha & -\sin(2\alpha) \\ 0 & -2\sin(2\alpha) & 1 & 2\cos(2\alpha) \\ 0 & 2\sin(2\alpha) & 1 & 2\cos(2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Koska haetaan ratkaisua (8b), missä ainakin jokin kertoimista $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ on nollasta eroava, on yhtälöryhmän (11) kerroinmatriisin determinantin oltava nolla. Kerroinmatriisin karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$8\sin(2\alpha)(\sin(2\alpha) - 2\alpha \cos(2\alpha)) = 0. \quad (12)$$

Kun kulma α rajoitetaan välille $\alpha \in (0, \pi]$, saadaan kulman arvoiksi, joilla ratkaisu (8b) on käypä

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \pi = 180^\circ \\ \alpha_2 &\approx 0,71514\pi \approx 128,7^\circ \\ \alpha_3 &= \frac{\pi}{2} = 90^\circ \end{aligned} \quad (13)$$

Tämän artikkelin puitteissa käsitellään vain särötapaus, jossa $\alpha = \pi$, jolloin yhtälöryhmästä (11) saadaan ratkaistua kertoimet

$$\hat{B} = -\hat{A}, \hat{C} = \hat{D} = 0 \quad (14)$$

Tuloksen (14) perusteella tapaus $\lambda = 1$ tulee ratkaisuun mukaan, kun säröä kuormitetaan kuormitustavalla I, mutta kuormitustavalla II tämä osuus ratkaisusta on nolla. Ratkaisu- ja (6) ja (8b) tarkastelemalla havaitaan, että ratkaisussa (6), jota Williamsin sarjaratkaisussa yksinomaan käytetään, symmetrinen osuus on oikein huomioonotettuna, mutta antimetrisen osuus ei ole nolla kuten pitäisi. Lähteessä /6/ tätä ei ole otettu huomioon. Lähteessä /7/ tapaus $\lambda = 1$ on jätetty pois perusteluja esittämättä.

Kun $\lambda > 0 \wedge \lambda \neq 1$ ja $\alpha = \pi$ saadaan reunaehdoista (10) parametrille λ arvot

$$\lambda = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 3, 4, 5, \dots \quad (15)$$

kuten lähteessä /6/ on esitetty tapaus $n = 2$ lukuunottamatta. Lauseke (15) pätee kuitenkin myös tälle tapaukselle. Ratkaisun (6) kertoimille saadaan reunaehtoja (10) soveltamalla ja sijoittamalla $\alpha = \pi$

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{n-2}{n+2} A_n & n = 1, 3, 5, \dots \\ D_n &= -C_n \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} B_n &= -A_n \\ D_n &= -\frac{n-2}{n+2} C_n & n = 4, 6, 8, \dots \end{aligned} \quad (16b)$$

Särötapaukselle saadaan siis Airyn jännitysfunktioksi

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\beta_n} f_n(\theta) \quad (17)$$

missä

$$\begin{aligned} f_n(\theta) &= A_n \left[\cos(\alpha_n \theta) - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \cos(\beta_n \theta) \right] + C_n [\sin(\alpha_n \theta) - \sin(\beta_n \theta)], \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ f_2(\theta) &= A_2 [1 - \cos(2\theta)] = A_2 [1 - \cos(\beta_2 \theta)], \quad (n = 2) \\ f_n(\theta) &= A_n [\cos(\alpha_n \theta) - \cos(\beta_n \theta)] + C_n \left[\sin(\alpha_n \theta) - \frac{\alpha_n}{\beta_n} \sin(\beta_n \theta) \right], \quad n = 4, 6, 8, \dots \\ \alpha_n &= \frac{n-2}{2}, \quad \beta_n = \frac{n+2}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

Tulos on sama kuin Williamsin sarjaratkaisu /6/ lukuunottamatta funktiota $f_2(\theta)$, jossa nyt antimetrisen osuus on identtisesti nolla. Williamsin sarjaratkaisussa vastaavan termin antimetrisen osuus on nolla, mutta ei identtisesti, jolloin derivoitaessa tästä termistä tulee ylimääräisiä termejä. Koska jännityksiä laskettaessa derivoidaan Airyn jännitysfunktiota, jatkossa esiteltävät tulokset poikkevat Williamsin sarjaratkaisun tuloksista.

Jännitykset saadaan Airyn jännitysfunktiosta lausekkeilla

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\
\sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\
\tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{19}$$

Koska käsittelyssä on jo rajoitettu isotrooppiseen materiaaliin, ovat materiaaliyhtälöt tasojännitystilassa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Venymien lausekkeet napakoordinaatistossa ovat

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
\varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{21}$$

joista päästään integroimalla siirtymien lausekkeisiin

$$\begin{aligned}
u_r &= \int \varepsilon_r dr + g_1(\theta) \\
u_\theta &= \int [r\varepsilon_\theta - (u_r - g_1(\theta))] d\theta - \int g_1(\theta) d\theta + g_2(r)
\end{aligned} \tag{22}$$

Näissä termit $g_1(\theta)$, $-\int g_1(\theta) d\theta$ ja $g_2(r)$ ovat jäykän kappaleen siirtymäkentän mukaiset siirtymät. Kuvan 1 karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa jäykän kappaleen siirtymäkentän lausekkeiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} u_x^0 \\ u_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{bmatrix} + \omega^0 \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \tag{23}$$

Suorittamalla koordinaatiston kierro ja sijoittamalla näihin yhteydet

$$\begin{aligned}
x &= r \cos(\theta) \\
y &= r \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{24}$$

saadaan jäykän kappaleen siirtymäkentäksi napakoordinaatistossa

$$\begin{bmatrix} u_r^0 \\ u_\theta^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix} u^0 + \begin{bmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} v^0 + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \omega^0 \quad (25)$$

Sijoittamalla Airyn jännitysfunktion avulla lausutut jännityskomponentit materiaaliyh-tälöihin (20) ja suorittamalla tarvittavat laskelmat saadaan siirtymien sarjakehitelmiksi

$$\begin{aligned} u_r = & \cos(\theta)u^0 + \sin(\theta)v^0 + \\ & + \frac{1}{2E} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n [\bar{v}(n-2)\cos(\beta_n\theta) - (n\bar{v} + 2(v-3))\cos(\alpha_n\theta)] r^{n/2} + \right. \\ & \quad + A_2 4[\bar{v}\cos(2\theta) + (1-v)]r + \\ & \quad + \sum_{n=4,6,8,\dots}^{\infty} A_n [\bar{v}(n+2)\cos(\beta_n\theta) - (n\bar{v} + 2(v-3))\cos(\alpha_n\theta)] r^{n/2} + \\ & \quad + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} C_n [\bar{v}(n+2)\sin(\beta_n\theta) - (n\bar{v} + 2(v-3))\sin(\alpha_n\theta)] r^{n/2} + \\ & \quad \left. + \sum_{n=4,6,8,\dots}^{\infty} C_n [\bar{v}(n-2)\sin(\beta_n\theta) - (n\bar{v} + 2(v-3))\sin(\alpha_n\theta)] r^{n/2} \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta = & -\sin(\theta)u^0 + \cos(\theta)v^0 + r\omega^0 + \\ & + \frac{1}{2E} \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n [-\bar{v}(n-2)\sin(\beta_n\theta) + (n\bar{v} - 2(v-3))\sin(\alpha_n\theta)] r^{n/2} + \right. \\ & \quad - A_2 4\bar{v}\sin(2\theta)r + \\ & \quad + \sum_{n=4,6,8,\dots}^{\infty} A_n [-\bar{v}(n+2)\sin(\beta_n\theta) + (n\bar{v} - 2(v-3))\sin(\alpha_n\theta)] r^{n/2} + \\ & \quad + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} C_n [\bar{v}(n+2)\cos(\beta_n\theta) - (n\bar{v} - 2(v-3))\cos(\alpha_n\theta)] r^{n/2} + \\ & \quad \left. + \sum_{n=4,6,8,\dots}^{\infty} C_n [\bar{v}(n-2)\cos(\beta_n\theta) - (n\bar{v} - 2(v-3))\cos(\alpha_n\theta)] r^{n/2} \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

missä $\bar{v} = 1 + \nu$. Jännitysintensiteettikertoimet saadaan kertoimista A_1 ja C_1 lausekkeilla /6/, /7/, /8/

$$K_I = \sqrt{2\pi} A_1 \quad (28a)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} C_1 \quad (28b)$$

Jos siirtymät johdetaan Williamsin sarjaratkaisun avulla, niin siirtymän u_r lauseke säilyy ennallaan, mutta siirtymään u_θ tulee lisätermi

$$-\frac{1}{2E}C_2 8r \quad (29)$$

Vertaamalla tätä lausekkeeseen (25) nähdään, että tämä vastaa jäykän kappaleen rotaatiota. Williamsin sarjaratkaisun avulla lasketuissa siirtymän lausekkeissa on siis jäykän kappaleen rotaatio mukana.

REGRESSIOANALYYSI

Ensimmäisen kertaluvun regressioanalyysissä ratkaistaan tilastolliseen malliin

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\bar{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{u}; \quad \mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (30)$$

liittyvä estimointitehtävä. Tarkoituksena on estimoida $p \times 1$ -kerroinvektori $\bar{\boldsymbol{\beta}}$, kun selitettävä $n \times 1$ -vektori \mathbf{y} ja $n \times p$ -datamatriisi \mathbf{X} tunnetaan. Häiriötermi \mathbf{u} oletetaan normaalijakaantuneeksi, jotta regressiomallin varianssianalyysi olisi mahdollista.

Kun häiriötermin \mathbf{u} kovarianssimatriisi on lävistäjämatriisi, niin kerroinvektorin $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ minimivarianssiestimaatti \mathbf{b} saadaan lausekkeella /9/, /10/

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (31)$$

ja tämän kovarianssimatriisi lausekkeella

$$\text{cov}(\mathbf{b}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad (32)$$

Lisäksi voidaan todistaa, että kerroinvektorin estimaatilla on $N(\mathbf{b}, \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1})$ -jakauma.

Mallin residuaali eli sovituserhe määritellään kaavalla

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}. \quad (33)$$

Residuaalin voidaan todistaa olevan ainakin likimääräisesti normaalijakautunut ja sen odotusarvo on nolla. Normalisoimalla residuaali siten että sen varianssi on yksi voidaan tunnistaa malliin tilastollisessa mielessä sopimattomat yhtälöt, jotka voidaan täten poistaa. Sopimattomia yhtälöitä kutsutaan vieraiksi (engl. outlier). Yhtälö katsotaan vieraaksi, jos sitä vastaava residuaali on itseisarvoltaan suurempi kuin esim. 3. Tätä käytetään hyväksi intensiteettikertoimien laskennassa.

Lisää regressioanalyysin teoriasta ja erilaisista testeistä ja testisuureista löytyy lähteistä /9/ ja /10/.

REGRESSIOMALLI

Useimmissa nykyisissä elementtimenetelmäohjelmistoissa voidaan määrittellä paikallisia koordinaatioita ja laskennan tulokset, lähinnä siirtymät, voidaan tulostaa tällaisessa

koordinaatistossa halutuille solmuille. Särö on hyvä mallintaa singulaarisilla elementeillä, kuten lähteissä /6/, /7/ on esitetty. Kun tässä artikkelissa esiteltävää menetelmää käytetään jännitysintensiteetikertoimien laskentaan, mallinnettavaan kappaleeseen on määriteltävä paikallinen napa-koordinaatisto, jonka origo on särön kärjessä ja jonka kulma-asemaa mitataan särön suuntaisesta suorasta kuten kuvassa 1 on esitetty. Seuraavaksi on valittava sopiva määrä solmuja särön kärjen ympäriltä, joiden siirtymät u_{rj} , $u_{\theta j}$ ja koordinaatit r_j, θ_j tulostetaan tässä koordinaatistossa. Särön ympäristön solmujen koordinaattien ja siirtymien muunnos tähän paikalliseen koordinaatistoon voidaan tietenkin tehdä myös erillisellä ohjelmalla.

Numeroimalla särön ympäristön solmut tarvittaessa uudelleen voidaan nyt siirtymien lausekkeiden (26) ja (27) avulla muodostaa regressiomalli

$$\begin{bmatrix} u_{r1} \\ \vdots \\ u_{rN} \\ u_{\theta 1} \\ \vdots \\ u_{\theta N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^r & v_1^r & 0 & k_{I1}^r & k_{II1}^r & a_{21}^r & a_{31}^r & c_{31}^r & a_{41}^r & c_{41}^r & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N^r & v_N^r & 0 & k_{IN}^r & k_{IIN}^r & a_{2N}^r & a_{3N}^r & c_{3N}^r & a_{41}^r & c_{4N}^r & \dots \\ u_1^\theta & v_1^\theta & \omega_1^\theta & k_{I1}^\theta & k_{II1}^\theta & a_{21}^\theta & a_{31}^\theta & c_{31}^\theta & a_{41}^\theta & c_{41}^\theta & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N^\theta & v_N^\theta & \omega_N^\theta & k_{IN}^\theta & k_{IIN}^\theta & a_{2N}^\theta & a_{3N}^\theta & c_{3N}^\theta & a_{4N}^\theta & c_{4N}^\theta & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Eu^0 \\ Ev^0 \\ E\omega^0 \\ K_I \\ K_{II} \\ A_2 \\ A_3 \\ C_3 \\ A_4 \\ C_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(34)

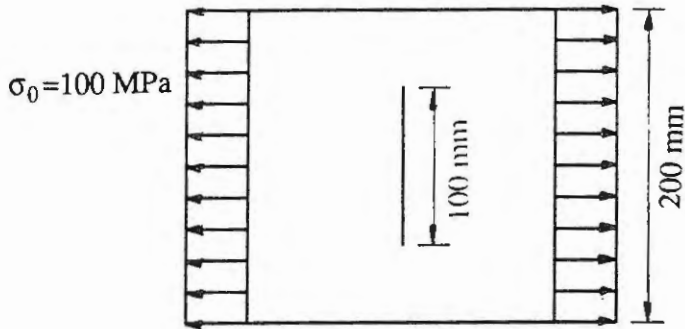
jossa kerroinmatriisin alkiot saadaan laskettua liitteessä 1 esitetyillä lausekkeilla.

Regressiomallissa (34) kolme ensimmäistä tuntematonta on kerrottu ja näitä vastaavat kerroinmatriisin alkiot jaettu kimmomodulilla E kerroinmatriisin kuntoluvun (engl. condition number) parantamiseksi. Jos säröä kuormitetaan vain kuormitustavalla I, on kaikki antisymmetriset termit K_{II}, C_3, C_4, \dots poistettava regressiomallista. Riippuen kappaleen mallinnuksesta, reunaehdoista ja kuormituksesta myös osa jäykän kappaleen siirtymätermeistä voidaan *a priori* asettaa nolllaksi.

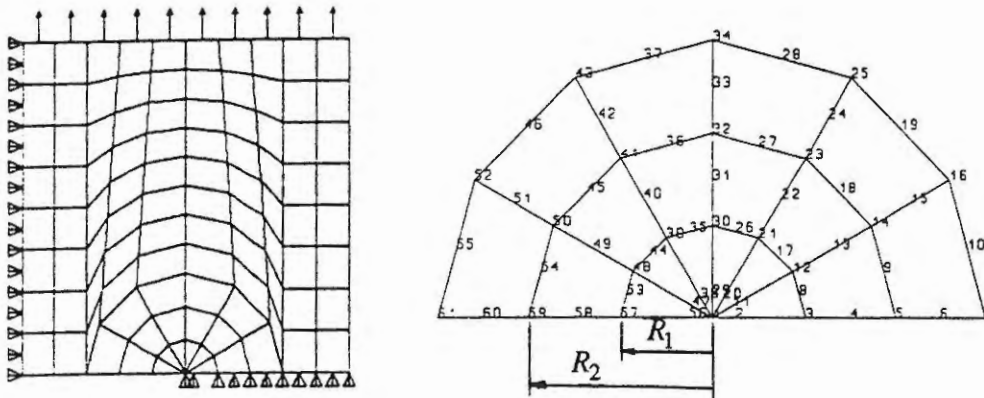
Regressioanalyysiä on aikaisemmin käytetty hyväksi jännitysintensiteetikertoimien laskennassa, mutta regressioon on käytetty vain särön kyljillä olevia solmuja, koska siirtymien sarjakehitelmien korkempien termien mukaanotto on koettu hankalaksi /2/, /3/. Jos särö on kuormitettu vain yhdellä kuormitustavalla, niin särön kyljillä siirtymien sarjakehitelmien parittomat tai parilliset termit ovat nolllia, jolloin vähäisempi määrä termejä tuottaa tarkemman tuloksen. Lähteessä /1/ regressioanalyysin käyttö jännitysintensiteetikertoimien laskennassa lähes esitetään jäykän kappaleen siirtymätermejä lukuunottamatta, mutta sielläkin sarjakehitelmästä otetaan lopulta vain ensimmäinen termi ja käytetään sitä särön kyljen solmuihin.

ESIMERKKI 1

Ensimmäisenä esimerkkinä tarkasteltiin kuvan 2 mukaista neliölevyä, jossa on keskeinen särö ja kuormituksena tasainen vetokuormitus säröä vastaan kohtisuorassa suunnassa. Tälle tapaukselle jännitysintensiteettikerroin saadaan lähteestä /4/. Levyssä oletettiin olevan tasojäännitystila ja särön kuormittuvan kuormitustavalla I.



Kuva 2. Neliölevy, jossa on keskellä läpimenevä särö.



Kuva 3. Rakenteen elementtimalli ja särön kärjen mallinnus.

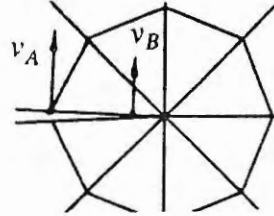
Levyistä mallinnettiin oikea alaneljännes ANSYS-ohjelmalla. Särön ympäristö mallinnettiin 6-solmuisilla kolmioelementeillä ja muualla käytettiin 8-solmuisia neliöelementtejä. Yhteensä mallissa oli elementtejä 98 kpl ja vapausasteita 622 kpl. Mallille laskettiin jännitysintensiteettikerroin K_I , josta tulokset esitellään jäljempänä.

Toisessa vaiheessa elementtiverkkoa optimoitiin energianormin mukaisen virheen suhteen, kun optimointimuuttujina oli kuvan 3 parametrit R_1 ja R_2 . Virhe estimoitettiin ANSYS-ohjelman PRERR-komennolla. Energiavirheen optimointi on sikäli järkevää, että optimissaan jännitys- ja muodonmuutoskentät ovat elementtien yli mahdollisimman jatkuvia. Tällöin myös solmusiirtymät saavat optimoinnin rajoitusten puitteissa tarkimmat arvot. Optimoinnin tuloksena parametrit saivat arvot $R_1 = 1,77$ mm ja $R_2 = 15,6$ mm,

jolloin näiden suhde on $R_1 / R_2 \approx 0,11$. Tämä on lähes sama kuin lähteessä /7/ suositeltu empiirinen arvo 0,15.

Vertailutulokset laskettiin särön kyljen siirtymistä kahdella eri kaavalla /2/, /3/, joista ensimmäinen on symmetriselle särötapaaukselle

$$K_I^{DCT} = E \sqrt{\frac{2\pi}{L_Q}} (v_A - v_B / 4) \quad (35)$$



ja toinen

$$K_I^{QPDCT} = E \sqrt{\frac{2\pi}{L_Q}} \left(\frac{v_B}{2} \right) \quad (36) \quad \text{Kuva 4. Siirtymät } v_A \text{ ja } v_B.$$

missä L_Q on singulaarisen elementin sivun pituus pitkin särön kylkeä sekä v_A ja v_B tämän elementin kuvassa 4 esitetyt solmuisiirtymät. Kaava (35) on sama kuin lähteessä /6, s.201/ esitetty. Lisäksi jännitysintensiiteettikerroin laskettiin vielä ANSYS-ohjelman KCALC-makrolla. Tälle intensiteettikertoimelle käytetään merkintää K_I^{ANSYS} . Analyytinen jännitysintensiiteettikerroin saadaan lähteestä /4/ neljän merkitsevän numeron tarkkuudella

$$K_I^{Tarkka} = 1,334\sigma_\infty \sqrt{\pi a} = 52,87 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \quad (37)$$

jossa on otettu huomioon jännitysintensiiteettikertoimien erilainen määrittely (lähteessä /4/ $\sqrt{\pi}$ puuttuu, koska jännitysintensiiteettikertoimet määritellään eri tavalla).

Koska mallissa särön kärjen lähellä jäykän kappaleen rotaatio ja säröä vastaan kohtisuora jäykän kappaleen siirtymä ovat ilmeisesti nollia, ne jätettiin regressiomallista pois. Myös kaikki antisymmetriset termit jätettiin pois. Jännitysintensiiteettikertoimet laskettiin regressiomallilla aluksi ottaen kaikki siirtymät alueesta $R_3 \leq 30 \text{ mm}$ ja sen jälkeen poistamalla vieraat yhtälöt regressiomallista. Vieraiksi katsottiin yhtälöt, joiden studentisoitu residuaali ylitti arvon 3. Siirtymien sarjoista otettiin maksimissaan 6 termiä. Tulokset on esitetty viiden merkitsevän numeron tarkkuudella taulukossa 1.

Taulukko 1. Regressioanalyysillä lasketut sarjan kertoimet. Verkko A vastaa alkuperäistä ja verkko B optimoitua elementtiverkkoa. Numero 1 vastaa tapausta, jossa on kaikki yhtälöt ja numero 2 tapausta, jossa vieraat yhtälöt on poistettu regressiomallista.

	K_I /MPa $\sqrt{\text{m}}$	A_2 /MPa	A_3 /MPa $\cdot\text{m}^{-1/2}$	A_4 /MPa $\cdot\text{m}^{-1}$	A_5 /MPa $\cdot\text{m}^{-3/2}$	A_6 /MPa $\cdot\text{m}^{-2}$
Verkko A1	52,991	-37,463	78,520	95,447	-912,89	
Verkko A2	52,500	-36,244	67,622	91,633	-868,15	
Verkko B1	52,990	-34,756	74,030	65,240	-740,09	307,01
Verkko B2	52,873	-34,625	72,359	65,704	-730,25	304,22

Taulukko 2. Eri menetelmillä lasketut jännitysintensiteettikertoimien arvot.
 $K_I^{Tarkka} = 52,87 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$.

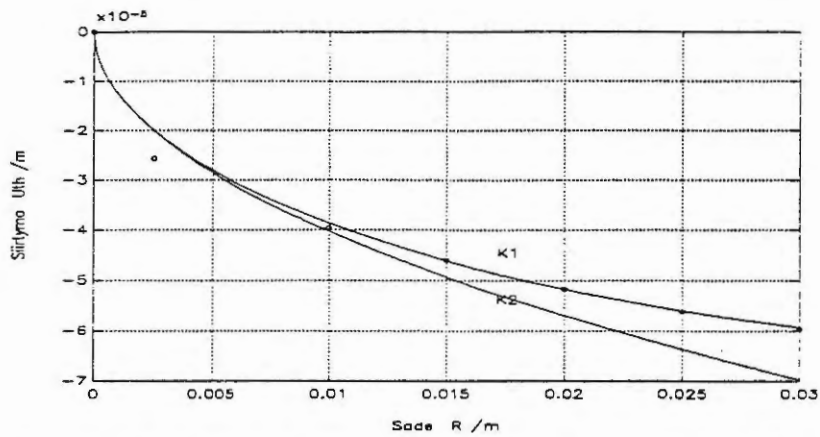
	K_I^{Regr} /MPa $\sqrt{\text{m}}$	K_I^{DCT} /MPa $\sqrt{\text{m}}$	K_I^{QPDT} /MPa $\sqrt{\text{m}}$	K_I^{ANSYS} /MPa $\sqrt{\text{m}}$
Verkko A	52,50	83,07	67,58	72,74
virhe %	-0,7	57	28	38
Verkko B	52,87	56,48	56,15	61,82
virhe %	0,0	6,8	6,2	17

Vertaamalla taulukon 1 jännitysintensiteettikertoimen arvoja tarkkaan ratkaisuun nähdään, että vieraiden yhtälöiden poistaminen kannattaa ainakin optimoidun elementtiverkon tapauksessa tässä esimerkissä. Regressiomallilla lasketuista jännitysintensiteettikertoimista vertailuun kelpuutettiin arvot, joiden laskennassa vieraat yhtälöt oli poistettu. Vertailu on esitetty taulukossa 2, josta nähdään, että regressiomalli tuottaa huomattavasti tarkempia tuloksia kuin perinteiset siirtymäpohjaiset laskentamenetelmät. Lähteen /3/ mukaan DCT- ja QPDT-menetelmillä päästään noin 1 prosentin tarkkuuteen, jos elementtiverkko osataan valita oikein. Ongelmana DCT- ja QPDT-menetelmissä on suppeneuus, koska intensiteettikerroin voi lähestyä tarkkaa arvoa kummalta puolelta tahansa ja lisäksi ratkaisu hajaantuu hyvin pienellä elementtikooalla.

Kuvissa 5 ja 6 on esitetty särön kyljen siirtymät alkuperäisellä ja optimoidulla elementtiverkolla laskettuna. Niistä havaitaan, että särön kärjen singulaarisen elementin neljäsoapisteeseen siirretyn solmun siirtymä ei sovi siirtymän sarjaratkaisuun, kun käytetään alkuperäistä elementtiverkkoa. Optimoidulla elementtiverkolla sopivuus on paljon parempi. Lähteessä /3/ on aikaisemmin todettu, että tämän solmun siirtymän arvo voi olla epätarkka, mikä on tässä tullut myös todettua. Olisi siis oltava varovainen tämän solmun siirtymän käyttämisessä jännitysintensiteettikertoimen K_I laskentaan, mitä ei kaavan (35) käytössä ole juuri painotettu.

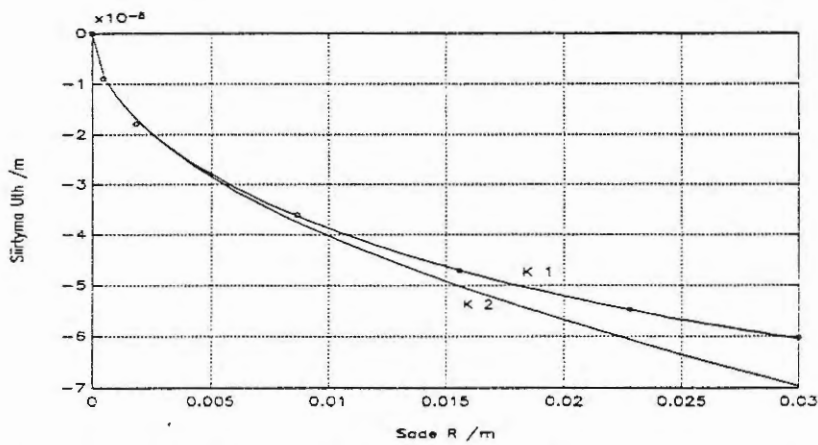
Regressioanalyysiin käytössä on varmennettava, että regressiomalliin tehdyt oletukset pitävät paikkansa. Näitä ovat ensinnäkin virhetermin normaalijakautuma, jonka toteutumista voi arvioida normaalitodennäköisyyskuvion (engl. Normal Probability Plot, NPP) avulla. Jos virhe on normaalijakautunut, niin NPP:n pitäisi olla mahdollisimman lähellä suoraa. Verkon B2 sovituserheen normaalitodennäköisyyskuviota on esitetty kuvassa 7, josta nähdään, että virhe on ainakin likimäärin normaalijakautunut. Toiseksi regressiomallin eri yhtälöiden virheiden pitäisi olla korreloimattomia ja homogeenisiä. Tätä voidaan arvioida tulostamalla residuaali vs. ennustettu vaste eli sirontakuviota. Syntyvän kuvion tulisi olla mahdollisimman satunnainen. Korrelointi ilmenee suuntauksena ja heterogeenisuus tiheytyminä. Kuvasta 8 havaitaan, että verkon B2 tapauksessa korrelointia ei ole nähtävissä, mutta lievää heterogeenisuutta ilmenee.

Tähän mennessä kertyneiden käyttökokemusten mukaan regressiomalliin liittyviä tilastollisia tunnuslukuja, kuten selitysastetta, luotettavuusvälejä, estimoitavien kertoimien keskijajontoja tai t-testejä ei juuri voi käyttää apuna regressiomalliin mukaan otettavien kertoimien määrää päätettäessä.



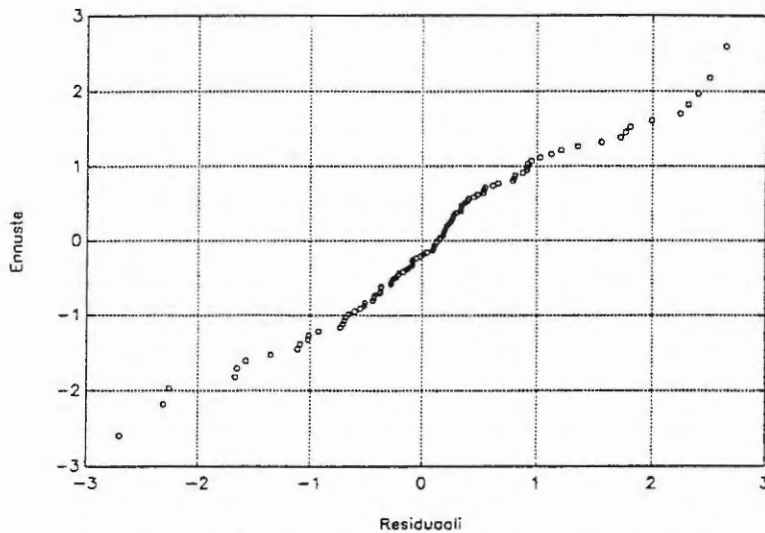
K1 = estimoitu siirtymä, kaikki lasketut termit
 K2 = estimoitu siirtymä, ensimmäinen termi
 $c = \text{FEM}$

Kuva 5. Särön kyljen siirtymät alkuperäisellä elementtiverkolla.

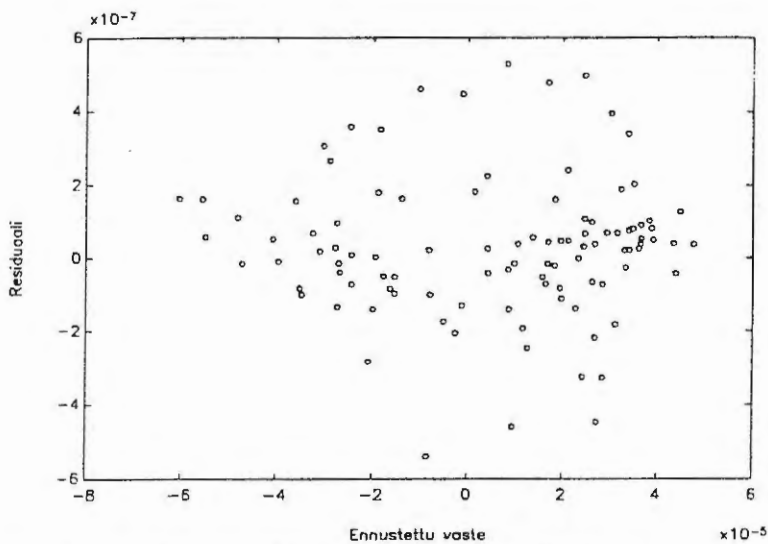


K1 = estimoitu siirtymä, kaikki lasketut termit
 K2 = estimoitu siirtymä, ensimmäinen termi
 $c = \text{FEM}$

Kuva 6. Särön kyljen siirtymät optimoidulla elementtiverkolla.



Kuva 7. Verkon B2 regressiomallin sovitusvirheen normaalitodennäköisyyskuvio.



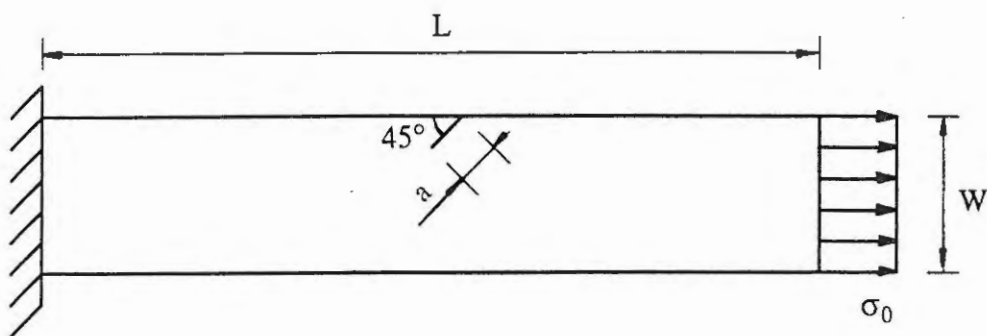
Kuva 8. Verkon B2 regressiomallin sirontakuvio.

ESIMERKKI 2

Toisena esimerkkinä tarkasteltiin kuvan 9 mukaista yhdistettyä kuormitustapausta. Kun kyseessä on tasomuodonmuutostila, jännitysintensiteettikertoimien analyttiset arvot saadaan lähteestä /5/, ilmeisesti kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. Tasojännitystilalle johdetuista kaavoista päästään tasomuodonmuutostilan kaavoihin tekemällä materiaalivakioille muunnos

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$\nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu} \quad (38)$$



Kuva 9. Yhdistetty kuormitustapaus. Pituus $L=1$ m, leveys $W=0,2$ m, särön pituus $a=0,06$ m. Kuormitus $\sigma_0=100$ MPa. Särö on 45° kulmassa ja sen kärki on $0,5$ m etäisyydellä molemmista päistä.

Taulukko 3. Jännitysintensiteettikertoimet K_I ja K_{II} yhdistetylle kuormitustapaukselle.

	Intensiteettikertoimet /MPa \sqrt{m}	Virhe /%
K_I^{Tarkka}	38,7	?
K_{II}^{Tarkka}	19,2	?
K_I^{Regr}	38,4	-0,8
K_{II}^{Regr}	19,5	1,2
K_I^{ANSYS}	39,4	1,8
K_{II}^{ANSYS}	19,9	3,6

Kappaleen FEM-mallissa oli elementtejä 191 kpl ja vapausasteita 1158 kpl. Elementti-verkkoa ei optimoitu. Vertailuratkaisu laskettiin ANSYS-ohjelman KCALC-makrolla. Regressiomalliin otettiin jäykän kappaleen siirtymät ja 6 symmetristä sekä antimetristä termiä siirtymien sarjakehitelmistä. Tulokset on esitetty taulukossa 3, jossa virheet on laskettu lähteen /5/ esittämiin arvoihin verrattuna.

Lisäksi tämän esimerkin yhteydessä havaittiin, että regressiomallilla lasketut jännitys-intensiteettikertoimet olivat karkeasti virheellisiä, jos regressiomallissa ei ollut jäykän kappaleen siirtymiä mukana. Tämä on tietysti odotettavissa.

YHTEENVETO

Laskettujen esimerkkitapausten perusteella esitetty menetelmä tuottaa varsin tarkkoja arvoja jännitysintensiteettikertoimille myös yhdistetyssä kuormitustapauksessa. Elementtiverkon optimointi energianormin mukaisen virheen suhteen parantaa tuloksia entisestään. Menetelmän vahvana puolena on sen soveltuvuus riippumatta FEM-analyysiin käytetystä ohjelmasta. Lisäksi jännitysintensiteettikertoimet voidaan laskea yhden ajon perusteella. Menetelmää voi soveltaa myös kuormitustapaukseen III, kun jännitysintensiteettikerroin on vakio särörintamaa pitkin.

Menetelmän luotettavuuden varmistamiseksi olisi laskettava useampia esimerkkitapauksia. Useampia esimerkkejä laskemalla on mahdollista kehittää heuristisia sääntöjä montako termiä siirtymän sarjakehitelmästä on otettava ja kuinka suurella alueella regressiomallia sovelletaan. Menetelmää olisi myös verrattava kehittyneempiin jännitysintensiteettikertoimien laskentamenetelmiin joista mainittakoon CIM (engl. Countour Integral Method) ja CUTOFF-menetelmä /7/.

LÄHTEET

1. Pu, S.L., Hussain, M.A., Lorensen, W.E., "The Collapsed Cubic Isoparametric Element as a Singular Element for Crack Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol 12, pp. 1727-1742, 1978
2. Banks-Sills, L., Sherman, D., "Comparison of Methods for Calculating Stress Intensity Factors with Quarter-point Elements", *Int. J. Fracture*, Vol 32, pp. 127-140, 1986
3. Lim, I.L., Johnston, I.W., Choi, S.K., "Comparison between Various Displacement-based Stress Intensity Factor Computation Techniques", *Int. J. Fracture*, Vol 58, pp. 193-210, 1992
4. Isida, M., "Effect of Width and Length on Stress Intensity Factors of Internally Cracked Plates Under Various Boundary Conditions", *Int. J. Fract. Mech.*, Vol 7, No 3, pp. 301-316, 1971
5. Solecki, J.S., "Fracture Mechanics", Swanson Analysis Systems, Inc., 1989
6. Ikonen, K., Kantola, K., "Murtumismekaniikka", Otakustantamo, Helsinki, 1986
7. Szabo, B., Babuska, I., "Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1991
8. Kanninen, M.F., Popelar, C.H., "Advanced Fracture Mechanics", Oxford University Press, New York, 1985
9. Draper, N.R., Smith, H., "Applied Regression Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1981
10. Johnson, R.A., Wichern, D.W., "Applied Multivariate Statistical Analysis", Prentice Hall International, Inc., New Jersey, 1988

Jari Mäkinen, ins.

Juha Toivola, DI
TTKK/Teknillinen mekaniikka
PL 589
33101 Tampere

Liite 1. Regressiomallin kerroinmatriisin alkioiden lausekkeet. Solmun j koordinaatit ovat (r_j, θ_j) .

$$u_j^r = \cos(\theta_j) / E$$

$$v_j^r = \sin(\theta_j) / E$$

$$u_j^\theta = -\sin(\theta_j) / E$$

$$v_j^\theta = \cos(\theta_j) / E$$

$$\omega_j^\theta = r_j / E$$

$$k_{Ij}^r = \frac{1}{2E\sqrt{2\pi}} \left[-(1+\nu) \cos(3\theta_j / 2) - (3\nu - 5) \cos(\theta_j / 2) \right] \sqrt{r_j}$$

$$k_{IIj}^r = \frac{1}{2E\sqrt{2\pi}} \left[3(1+\nu) \sin(3\theta_j / 2) + (3\nu - 5) \sin(\theta_j / 2) \right] \sqrt{r_j}$$

$$k_{Ij}^\theta = \frac{1}{2E\sqrt{2\pi}} \left[(1+\nu) \sin(3\theta_j / 2) - (7-\nu) \sin(\theta_j / 2) \right] \sqrt{r_j}$$

$$k_{IIj}^\theta = \frac{1}{2E\sqrt{2\pi}} \left[3(1+\nu) \cos(3\theta_j / 2) - (7-\nu) \cos(\theta_j / 2) \right] \sqrt{r_j}$$

$$a_{2j}^r = \frac{2}{E} \left[(1+\nu) \cos(2\theta_j) + 1 - \nu \right] r_j$$

$$a_{ij}^r = \frac{1}{2E} \left[(1+\nu)(i-2) \cos\left(\frac{i+2}{2}\theta_j\right) - (i(1+\nu) + 2(\nu-3)) \cos\left(\frac{i-2}{2}\theta_j\right) \right] r_j^{i/2}, i = 3, 5, 7, \dots$$

$$a_{ij}^r = \frac{1}{2E} \left[(1+\nu)(i+2) \cos\left(\frac{i+2}{2}\theta_j\right) - (i(1+\nu) + 2(\nu-3)) \cos\left(\frac{i-2}{2}\theta_j\right) \right] r_j^{i/2}, i = 4, 6, 8, \dots$$

$$c_{ij}^r = \frac{1}{2E} \left[(1+\nu)(i+2) \sin\left(\frac{i+2}{2}\theta_j\right) - (i(1+\nu) + 2(\nu-3)) \sin\left(\frac{i-2}{2}\theta_j\right) \right] r_j^{i/2}, i = 3, 5, 7, \dots$$

$$c_{ij}^r = \frac{1}{2E} \left[(1+\nu)(i-2) \sin\left(\frac{i+2}{2}\theta_j\right) - (i(1+\nu) + 2(\nu-3)) \sin\left(\frac{i-2}{2}\theta_j\right) \right] r_j^{i/2}, i = 4, 6, 8, \dots$$

$$a_{2j}^\theta = -\frac{2}{E} (1+\nu) \sin(2\theta_j) r_j$$

$$a_{ij}^\theta = \frac{1}{2E} \left[-(1+\nu)(i-2) \sin\left(\frac{i+2}{2}\theta_j\right) + (i(1+\nu) - 2(\nu-3)) \sin\left(\frac{i-2}{2}\theta_j\right) \right] r_j^{i/2}, i = 3, 5, 7, \dots$$

$$a_{ij}^\theta = \frac{1}{2E} \left[-(1+\nu)(i+2) \sin\left(\frac{i+2}{2}\theta_j\right) + (i(1+\nu) - 2(\nu-3)) \sin\left(\frac{i-2}{2}\theta_j\right) \right] r_j^{i/2}, i = 4, 6, 8, \dots$$

$$c_{ij}^\theta = \frac{1}{2E} \left[(1+\nu)(i+2) \cos\left(\frac{i+2}{2}\theta_j\right) - (i(1+\nu) - 2(\nu-3)) \cos\left(\frac{i-2}{2}\theta_j\right) \right] r_j^{i/2}, i = 3, 5, 7, \dots$$

$$c_{ij}^\theta = \frac{1}{2E} \left[(1+\nu)(i-2) \cos\left(\frac{i+2}{2}\theta_j\right) - (i(1+\nu) - 2(\nu-3)) \cos\left(\frac{i-2}{2}\theta_j\right) \right] r_j^{i/2}, i = 4, 6, 8, \dots$$